Manuskriptfassung eines Beitrags, erschienen in Ableitinger, Christoph; Prediger, Susanne; Kramer, Jürg (2013) (Hrsg.): Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung - Ansätze zu Verknüpfungen der fachinhaltlichen Ausbildung mit schulischen Vorerfahrungen und Erfordernissen. Springer, Wiesbaden, 151-158. DOI 10.1007/978-3-8620-4556_9.

Unterrichtsmomente als explizite Lernanlässe in fachinhaltlichen Veranstaltungen

Ein Ansatz zur Stärkung der mathematischen Fundierung unterrichtlichen Handelns

Susanne Prediger

Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts
Technische Universität Dortmund

Zusammenfassung: Ein wesentliches Problemfeld der zweiten Diskontinuität der Lehrerbildung liegt darin, dass viele Lehrerinnen und Lehrer das im Studium erworbene fachinhaltliche Wissen und Können für späteres fachdidaktisches Handeln im Unterricht nur eingeschränkt aktivieren. Dagegen postuliert der Beitrag als zentrales Ziel der fachinhaltlichen Lehrerbildung, die didaktische Handlungsfähigkeit angehender Lehrkräfte mathematisch zu fundieren.
Mit geeigneten authentischen Lernanlässen sollen künftige Lehrkräfte die Notwendigkeit des Ziels der mathematischen Fundierung didaktischer Handlungsfähigkeit begreifen und sich ihm annähern. Wie didaktische Handlungsanforderungen in sogenannte *Unterrichtsmomente* als authentische und explizite Lernanlässe transformiert werden können, wird an praktisch erprobten Beispielen aus den fachinhaltlichen Veranstaltungen Analysis und Elementare Zahlentheorie illustriert und diskutiert.

Um das Ziel möglichst plastisch zu machen, auf das dieser Beitrag hinarbeitet, beginnt der erste Abschnitt mit einer exemplarischen Unterrichtsszene, in der es einer Lehrerin hervorragend gelingt, ihr breites und tiefgehendes fachwissenschaftliches Wissen zu aktivieren, um didaktische Handlungsentscheidungen mathematisch zu fundieren. Da eine solch breite Fundierung nicht für alle Lehrkräfte selbstverständlich ist, wird das Ziel im zweiten Abschnitt näher begründet. Es werden Wege aufgezeigt, damit mehr künftige Lehrkräfte ihm näher kommen. Diese Wege werden im dritten Abschnitt konkretisiert und diskutiert.

1. Eine Unterrichtsszene zum Einstieg

Laura, eine junge Gymnasiallehrerin, lässt in ihrer Klasse 9 diskutieren, ob $0,\overline{9}$ wirklich gleich 1 ist. In der Vorbereitung hatte sie geplant, die Diskussion nicht durch vorschnellen Übergang zu Brüchen zu trivialisieren, sondern durch eine Diskussion um unendlich kleine Teilchen erste Erfahrungen zur Konvergenz (im Sinne der Non-Standard-Analysis) zu ermöglichen. Theo argumentiert jedoch unerwartet: „Wenn ich mir die Zahlen angucke: 0,9, dann 0,99, dann 0,999, dann kommt ja immer wieder was dazu. Dann muss es ja sogar irgendwann mehr als 1 werden!“ In der weiteren Diskussion wischen die Klassenkameraden Theos interessantes Argument als abwegig vom Tisch. Laura holt es zurück ins Gespräch, indem sie einen Exkurs zum analogen Paradoxon von Achilles und der Schildkröte einschiebt. Nun entsteht eine spannende Diskussion, an deren Ende die Jugendlichen viele Bilder an die Tafel gezeichnet und zwei unterschiedliche Formen von Unendlich erfasst haben: „Unendlich *oft* kommt was dazu, aber eben nicht unendlich *viel*, sondern immer *weniger*“. Laura erkennt in dieser Unterscheidung die Erklärung für die Möglichkeit, dass unendliche Reihen wie die von Achilles und von $0,\overline{9}$... konvergieren können. Glücklich über die substantielle und intensive Beschäftigung mit Mathematik sagt Laura: „Seht ihr, und die Mathematiker haben lange gebraucht, bis sie sogenannte Reihen erfunden haben, um die Unterscheidung genauer zu beschreiben und zu Lösungen zu kommen. Darüber reden wir nächstes Jahr nochmal.“ Zurück zum Problem der $0,\overline{9}$, liefert Ben nun das für die Klasse entscheidende Argument zur Begründung der Konvergenz (weitere s.u.): „Welche Zahl sollte da noch zwischen passen? Der Abstand wird ja immer kleiner.“

Laura identifiziert Theos Einwand sofort in seiner Relevanz für den generellen Unterschied zwischen unendlich vielen Summanden und einer unendlich großen Summe. Dazu muss die Lehrkraft zum einen ein ernsthaftes Interesse an der Denkentwicklung der Lernenden haben, zum anderen auch eine sehr gute mathematische Fundierung, um das mathematische Potential einer solchen Schüleräußerung zu identifizieren und zu substantiellen mathematischen Erfahrungen weiter zu entwickeln. Laura findet im Paradoxon von Achilles zunächst eine leichter zugängliche Überspitzung von Theos Einwand, die den Lernenden die Nacherfindung des Konstrukts der unendlichen Reihe in einer lebendigen mathematischen Diskussion ermöglicht, ohne diese formal einzuführen.

Das Beispiel deutet an, warum künftige Lehrkräfte ein substantielles mathematisches Fundament brauchen, um ihr didaktisches Handeln im Unterricht fachlich abzusichern, bei der Einschätzung von Denkwegen von Lernenden ebenso wie z.B. bei der Einschätzung von Schulbuchzugängen oder bei der Planung adäquater Lernwege. Leider sind solche Unterrichtsszenen eher nicht der Regelfall: Erfahrungen zeigen, dass viele Lehrkräfte für ihre unterrichtlichen Handlungsentscheidungen nur begrenzt auf ihr mathematisches Wissen zurückgreifen. Daher werden im Beitrag folgende Fragen diskutiert:

- Was können fach*inhaltliche* Veranstaltungen in der universitären Lehrerbildung zu dem Ziel der mathematischen Fundierung *didaktischer* Handlungsfähigkeit beitragen? (Frage der Ziele und der Arbeitsteilung)
- Wie kann man spezifizieren, welche mathematischen Kompetenzen Lehrkräfte tatsächlich brauchen für unterrichtliches didaktisches Handeln? (Frage der Spezifizierung der Lerngegenstände)
- Wie müssen die Lernsituationen gestaltet sein, damit sich die Chance erhöht, dass Lehrkräfte ihre mathematischen Kompetenzen tatsächlich im Beruf als Fundierung einsetzen? (Frage nach Lernanlässen)

2. Hintergrund: Mathematische Fundierung didaktischen Handelns

2.1 Grundidee: Vom nur potentiellen Unterbau zur aktivierbaren Fundierung

Unbestritten ist das Ziel der gesamten Lehrerbildung, Lehrkräfte auf ihr späteres didaktisches Handeln im Unterricht vorzubereiten. Unbestritten ist auch, dass die fachinhaltliche Ausbildung für dieses Ziel eine bedeutende Rolle spielt (Shulman 1986, Cooney & Wiegel 2003, Stacey 2008). Dies wurde bereits vor 30 Jahren formuliert:

> „Für den künftigen Lehrer und seine berufliche Tätigkeit ist es von ausschlaggebender Bedeutung, wie er in Mathematik ausgebildet wird, wie er seine mathematischen Erfahrungen im Studium sammelt und welches fachliche Niveau er erreicht. Daher ist eine solide und umfassende fachwissenschaftliche Ausbildung […] eine wesentliche Grundlage für seinen späteren Beruf." (DMV 1979, S. 1)

Dass jedoch das im Studium erworbene fachwissenschaftliche Wissen und Können vieler Lehrkräfte diese intendierte Rolle nur in begrenztem Maße einnimmt, hat Felix Klein schon 1924 als wichtigen Teilaspekt der zweiten Diskontinuität beklagt (Klein 1924). Auch heute gibt es zahlreiche Erfahrungsberichte, nach denen sich selbst bei Studierenden mit sehr guten fachwissenschaftlichen Leistungen immer wieder Schwierigkeiten zeigen, ihre erworbene fachwissenschaftliche Kompetenz für einen didaktisch sensiblen Umgang mit Schulmathematik und mit mathematischen Lehr-Lernprozessen tatsächlich fruchtbar zu machen (z. B. Hefendehl-Hebeker 1998, Beutelspacher et al. 2012). Selbst sehr gute Studierende scheinen die Hochschulmathematik ihrer Lehrveranstaltungen und das unterrichtliche Handeln als getrennte Welten zu empfinden, die sie ohne gezielte Impulse nur begrenzt miteinander verknüpfen.

Aus Sicht der lernpsychologischen Forschung ist dieses Phänomen des nur begrenzt automatischen Transfers insofern nicht verwunderlich, als *jedes* erworbene Wissen zunächst an die Erwerbssituation – hier konkret die fachinhaltliche Lehrveranstaltung – gebunden ist, man spricht daher von „situated learning" (vgl. Brown, Collins & 1989, ähnlich schon Bauersfeld 1983 mit den subjektiven Erfahrungsbereichen). Zum Transfer des situierten Wissens auf andere Handlungssituationen – hier konkret auf Unterricht – bedarf es innerhalb der Lernsituationen des expliziten Anstoßes.

Damit aus dem *potentiellen* Unterbau eine *nutzbare* mathematische Fundierung für didaktisches Handeln wird, auf die sich Lehrkräfte tatsächlich bewusst beziehen, wenn sie unterrichtliche Einschätzungen und Handlungsentscheidungen treffen, sind daher schon in der universitären Ausbildungsphase gezielte und explizite Brückenschläge zwischen beiden Bereichen notwendig, die den Transfer anstoßen. Entwicklungsprojekte und praktische Lehrerfahrungen zeigen, dass diese Brückenschläge durchaus in fachdidaktischen Veranstaltungen (Blum & Henn 2003, Prediger 2010) oder in eigens etablierten Schnittstellenmodulen verortet werden können (Bauer & Partheil 2009, Beutelspacher et al. 2012; vgl. auch die Studienordnungen in Siegen, Dortmund und der HU Berlin).

Die Hochschullehre der Autorin ist darüber hinaus seit einigen Jahren geleitet von der Grundidee, dass die Nutzung fachinhaltlicher Kompetenzen als aktivierbare Fundierung für didaktisches unterrichtliches Handeln *auch bereits in fachinhaltlichen Lehrveranstaltungen* immer wieder exemplarisch angestoßen werden sollte, weil sonst der Transfer erfahrungsgemäß nur manchen gelingt (vgl. Leufer & Prediger 2007). Diese Grundidee soll hier ausgehend von der amerikanischen Diskussion um „Mathematics for Teaching“ (Bass & Ball 2004) erläutert und in *einer* möglichen Form der Umsetzung vorgestellt werden.

2.2 Job-Analyse zur Spezifizierung von Lerngegenständen

Die Grundidee, die fachinhaltliche Lehrerbildung konsequenter am späteren didaktischen Handeln zu orientieren, ist zumindest in Bezug auf die Inhaltsauswahl auch leitend in der amerikanischen curricularen Diskussion um „Mathematics for Teaching“. Sie wurde von Schifter (1998) im Zuge der Reformen des Mathematikunterrichts initiiert mit der Frage „What kinds of understandings are required of teachers working to enact the new pedagogy?” (Schifter 1998, S. 57) und weitergeführt in zahlreichen Publikationen (z.B. Cuoco 2001, Bass & Ball 2004, Davis & Simmt 2006).

Zur Spezifizierung des für unterrichtliches Handeln wichtigen mathematischen Wissens haben Bass und Ball (2004) eine fruchtbare Methode vorgeschlagen: Mit der sogenannten Job-Analyse identifizieren sie zunächst typische unterrichtliche Handlungsanforderungen an Lehrkräfte (sogenannte „Jobs“) und analysieren dann, welche mathematischen Praktiken, Wissens- und Könnensfacetten zu ihrer Bewältigung notwendig bzw. wünschenswert sind. Diese werden dann als zentrale Lerngegenstände ins Curriculum aufgenommen. Bass und Ball haben dazu folgenden (nicht abgeschlossenen) Katalog zentraler Handlungsanforderungen aufgestellt:

1) „setting and clarifying goals
2) evaluating a textbook’s approach to a topic
3) selecting and designing a task
4) re-scaling tests
5) choosing and using representations
6) analyzing and evaluating student responses
7) analyzing and responding to student errors
8) managing productive discussions
9) figuring out what students are learning“ (Bass & Ball 2004, S. 296)

Die folgenden drei Beispiele deuten an, inwiefern eine Spezifizierung der mathematischen Fundamente didaktischen Handelns die curriculare Ausrichtung prägen bzw. verschieben kann, wenn sorgfältig überlegt wird, welche mathematischen Praktiken, Wissens- und Könnensfacetten zu ihrer Bewältigung notwendig bzw. wünschenswert sind:

zu 5) Wer geeignete Darstellungen (und hinzuzufügen sind Exaktheitsstufen!) für Lernende auswählen soll (so wie Laura zu Beginn), muss in der Lage sein, einen mathematischen Zusammenhang auf unterschiedlichen Stufen und in unterschiedlichen Repräsentationen darzustellen und deren Chancen und Grenzen zu reflektieren. Dies erfordert eine hohe Flexibilität im Umgang mit mathematischen Inhalten, die nicht erworben werden kann, wenn sich die Lehrveranstaltung ausschließlich in symbolischen Darstellungen und axiomatischen Herleitungszusammenhängen bewegt.

zu 6) Wer Fehlvorstellungen von Lernenden evaluieren und bearbeiten soll, muss Vertrauen in die mathematische Fachsprache und ihre Konzepte als hilfreiche Instrumente zur Klärung von Zusammenhängen entwickelt haben.

zu 8) Wer mathematische Diskussionen von Schülerinnen und Schülern lernförderlich moderieren will (damit sie wie Lauras Klasse intensiv über Mathematik nachdenken und dabei eigenständig mathematische Konzepte entwickeln), muss erfahren haben, wie mathematische Wissensbildungsprozesse sich vollziehen, statt nur fertige Theorien kennenzulernen. Der Prozess der Exaktifizierung ist dabei wichtiger als die finale Exaktheit, mathematische Begriffe in ihrem Gebrauch zu verstehen ebenso wichtig wie ihre formale Definition (Freudenthal 1973, Hefendehl-Hebeker 1998, Stacey 2008).

2.3 Von der Methode der Spezifizierung von Lerngegenständen zu authentischen und expliziten Lernanlässen

Im Hinblick auf Brückenschläge lässt sich die von Bass und Ball (2004) begonnene Liste von Handlungsanforderungen, die durch mathematische Kompetenz fundiert sein sollten, auf den folgenden (keineswegs abgeschlossenen) Katalog erweitern (die Erweiterungen sind kursiv markiert):

- *Anforderungen an Schülerinnen und Schüler (aus Schulbüchern, Tafelbildern oder Tests) selbst bewältigen und auf verschiedenen Niveaus bearbeiten können;*
- Lernziele setzen und ausschärfen;
- *Zugänge (in Schulbüchern, Tafelbildern o.ä.) analysieren und bewerten;*
- Aufgaben *und Lernanlässe* auswählen, *verändern* oder konstruieren;
- Tests *entwickeln und* re-skalieren;
- geeignete Darstellungen *und Exaktheitsstufen* auswählen und nutzen sowie zwischen ihnen vermitteln
- Äußerungen von Lernenden analysieren, bewerten *und darauf lernförderlich reagieren*;
- Fehler von Lernenden analysieren und darauf *lernförderlich* reagieren;
- *fachlich substantielle,* produktive Diskussionen moderieren;

- *zwischen verschiedenen Sprachebenen (Alltagssprache, Fachsprache, Symbolsprache) flexibel hin –und herwechseln und vermitteln für Lernende*
- Lernstände*, Lernprozesse und Lernerfolge* erfassen.

Bei Bass und Ball (2004) (und auch in vielen Ansätzen in diesem Band) werden diese Handlungsanforderungen jeweils *implizit* mitgedacht, wenn Lernanlässe gestaltet werden: „Und dies *könnten* Lehrkräfte künftig nutzen, wenn sie Schulbuch-Zugänge evaluieren...“.

In diesem Artikel wird für den weiteren Schritt plädiert, die Handlungsanforderungen *explizit* zum Ausgangspunkt für mathematische Analysen und Reflexionen zu machen (Leufer & Prediger 2007). Dazu werden die allgemeinen Handlungsanforderungen in spezifischen Unterrichtsmomenten konkretisiert und dann zu einem authentischen Lernanlass ausgestaltet. Eine Konkretisierung möglicher Ausgestaltungen erfolgt im nächsten Abschnitt an sechs praktischen Beispielen (Kasten 1-6).

3. Sechs Unterrichtsmomente als Beispiele für explizite authentische Lernanlässe

Als *Unterrichtsmomente* werden hier prototypische Situationen aus dem Unterricht verstanden, die durch einen authentischen Auszug (aus einem Schulbuch, schriftlichen Dokumenten von Lernenden, einer Unterrichtskommunikation, ...) in möglichst knapper Form repräsentiert und mit einer didaktischen Handlungsanforderung (aus obigem Katalog) versehen sind. *Authentisch* sollen sie sein durch authentische Auszüge von möglichst typischen Situationen; *explizit* wird die Aufforderung formuliert, das didaktische Handeln durch mathematische Erwägungen zu fundieren.

Im Folgenden werden sechs solcher Unterrichtsmomente aus den zwei Veranstaltungen Analysis I für das gymnasiale Lehramt und Elementare Zahlentheorie für Grund-, Haupt- und Realschullehramt konkret vorgestellt und exemplarisch daran erläutert, welche Funktionen sie im Lernprozess einnehmen können. Die Analysis-Beispiele stammen aus einem bzgl. der Lernmotivation und Sinnstiftung qualitativ evaluierten hochschuldidaktischen Entwicklungsforschungsprojekt (Leufer & Prediger 2007), die Zahlentheoriebeispiele haben sich in der individuellen Lehre der Autorin praktisch bewährt, ohne systematisch beforscht worden zu sein. Das abschließende Beispiel zeigt Grenzen der Unterrichtsmomente auf, indem es einen darüber hinausgehenden Lernanlass vorstellt.

3.1 Äußerungen von Lernenden analysieren, bewerten und darauf lernförderlich reagieren

Eine Minimalvoraussetzung, um Aussagen von Lernenden mathematisch fundiert zu analysieren, ist überhaupt den Bezug zwischen den erworbenen fachwissenschaftlichen Konzepten und Zusammenhängen und dem schulmathematischen Phänomen zu sehen. So ist zum Beispiel Lehramtsstudierenden nicht automatisch klar, dass periodische Dezimalzahlen als konvergierende unendliche Reihen beschrieben werden können.

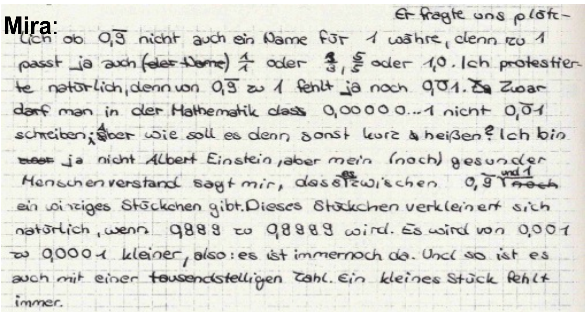
Die Aufgabe in Kasten 1 geht auf dieses Problem insofern ein, als der Bezug zwischen Reihen und periodischen Dezimalzahlen explizit hergestellt wird und dann zur Analyse der Überlegung einer Schülerin genutzt wird. Lehramtsstudierende können hier erleben, dass durch die analytische Beschreibung der Dezimalzahlen als Reihen die Unendlichkeit in den periodischen Dezimalzahlen besser greifbar wird. Ihnen wird bewusst, dass die Gleichheit zwischen $0,\overline{9}$ und 1 nur eine Aussage über Grenzwerte ist. So gewinnt man Akzeptanz für die konkurrierende Position, dass stets noch eine Differenz bleibt, die mit Mitteln der Nonstandard-Analysis auch formal erfassbar wäre.

Kasten 1 (Analysis 1, Grenzwerte von Reihen)

Periodische Dezimalzahlen und Reihen

a.) Was haben Dezimalzahlen mit Reihen überhaupt zu tun?
Erläutern Sie den Zusammenhang. Nutzen Sie dazu das Beispiel des Bruchs $\frac{1}{99}$.
Konvergiert die zugehörige Reihe? Wieso (nicht)?

b.) Mira (9. Klasse) setzt sich mit der Frage auseinander, ob $0,\overline{9} = 1$ oder $0,\overline{9} < 1$ ist.


Mira: Er fragte uns plötzlich ob $0,\overline{9}$ nicht auch ein Name für 1 währe, denn zu 1 passt ja auch ~~(der Name)~~ $\frac{1}{1}$ oder $\frac{3}{3}$, $\frac{5}{5}$ oder 1,0. Ich protestierte natürlich, denn von $0,\overline{9}$ zu 1 fehlt ja noch $0,\overline{0}1$. Zwar darf man in der Mathematik dass 0,00000…1 nicht $0,\overline{0}1$ schreiben, aber wie soll es denn sonst kurz heißen? Ich bin ja nicht Albert Einstein, aber mein (noch) gesunder Menschenverstand sagt mir, dass es zwischen $0,\overline{9}$ und 1 ~~noch~~ ein winziges Stückchen gibt. Dieses Stückchen verkleinert sich natürlich, wenn 0,999 zu 0,9999 wird. Es wird von 0,001 zu 0,0001 kleiner, also: es ist immernoch da. Und so ist es auch mit einer tausendstelligen Zahl. Ein kleines Stück fehlt immer.

(Quelle des Dokuments: T. Jahnke (2005). Unendlich. Mathe-Welt. In: Mathematik lehren 132)

- Nutzen Sie die erworbenen Konzepte zu Reihen und Grenzwerten, um Miras Gedanken nachzuvollziehen.
- Formalisieren Sie Miras Denkfehler, um ihn genau zu fassen.
- Schreiben Sie Mira eine Antwort.

Erfahrungen aus dem Übungsbetrieb zeigen, dass die Bezugsherstellung für Studierende zu Aha-Effekten führen kann. Es ist eine der ersten Stellen in der Analysis I, in der sich hochschulmathematisches Wissen (zu Reihen) - für die Studierenden überraschend - als nützliches konzeptionelles Werkzeug erweist, um

Tiefendimensionen eines zunächst anders aussehenden Mittelstufeninhalts (periodische Dezimalbrüche) zu erfassen.

Einen äußerlich zunächst ähnlich aussehenden Unterrichtsmoment zur gleichen didaktischen Handlungsanforderung „Äußerungen von Lernenden analysieren, bewerten und darauf lernförderlich reagieren“ zeigt Kasten 2 mit der Analyse von Pauls Äußerung zur Charakterisierung eines Grenzwertes.

Kasten 2 (Analysis 1, Grenzwerte von Folgen)

Charakterisierungen des Grenzwertes

Paul (Leistungskurs 11) sagt: „Ein Grenzwert einer Folge ist die Zahl, in deren beliebig kleiner Nähe unendlich viele Folgenglieder liegen.“

a.) Formalisieren Sie Pauls Charakterisierung in der Epsilon- Sprache. Wo ganz genau liegt sein Fehler?

b.) Finden Sie Gegenbeispiele von Folgen, um ihn zu überzeugen.

c.) Reflexion: Inwiefern hilft Ihnen die Epsilon- Sprache zur Klärung des Sachverhalts, obwohl Sie sie Paul gegenüber nicht benutzen können?

Er erfüllt im Lernprozess der Studierenden jedoch eine andere, noch elementarere Funktion als der erste: Hier sollen die Studierenden die neue Definition anwenden, vertiefen und die feinen Unterschiede zwischen Häufungspunkt und Grenzwert fachsprachlich erfassen. Damit dient der Unterrichtsmoment im unmittelbaren Sinne der Einübung eines zentralen fachwissenschaftlichen Lerngegenstands des ersten Semesters, nämlich der Fachsprache mit ihren Quantoren. Aufgabenteil c) ermöglicht eine erste Reflexion des Nutzens von Fachsprache auf der Metaebene.

3.2 Zugänge (in Schulbüchern, Tafelbildern o.ä.) analysieren und bewerten

Nicht nur Äußerungen von Lernenden, auch Zugänge, Definitionen und Formulierungen in Schulbüchern und Tafelbildern müssen von Lehrkräften auf ihre mathematische Richtigkeit und didaktische Eignung hin geprüft werden.

Einen ersten Schritt in diese Richtung ermöglicht der Unterrichtsmoment in Kasten 3, der thematisch an das Grenzwert-Beispiel aus Kasten 2 anschließt. Die Studierenden beschäftigen sich hier mit zwei Charakterisierungen, die beide etwas anders aussehen als die Definition im eigenen Skript und vertiefen sich weiter in die Fachsprache der Epsilons und Quantoren, indem sie sich von ihrer Äquivalenz überzeugen.

Kasten 3 (Analysis 1, Grenzwerte von Folgen)

Äquivalenz von Charakterisierungen

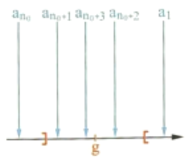
Im Schulbuch Elemente der Mathematik 11 (Griesel & Postel 1999, S. 235)
findet sich folgende Definition des Grenzwertes:

Definition 2

Die Zahl g heißt **Grenzwert der Folge (a_n)**, wenn in jeder (noch so kleinen) ε-Umgebung von g unendlich viele Glieder der Folge liegen, aber außerhalb nur endlich viele, d. h. wenn man eine Platznummer n_0 angeben kann, sodass alle Glieder mit einer höheren Platznummer als n_0 in der Umgebung liegen.

Schreibweise für den Grenzwert

Wir schreiben $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ oder $a_n \to g$ für $n \to \infty$.



Formalisieren Sie die Aussage in die Epsilon-Sprache und vergleichen Sie sie
mit der in der Veranstaltung benutzten.

- Wo liegen die Unterschiede? Ist sie äquivalent?
- Wenn ja, zeigen Sie die Äquivalenz, falls nein, widerlegen Sie sie.

Was für den Experten als triviale Aufgabe erscheint, erfordert vom Novizen durchaus eine etwas längere Reflektion bzgl.

1. der Nutzung von Epsilon-Umgebungen statt der Betrags-Ungleichung.
2. der im Schulbuch mit einem harmlosen „d.h." explizierte Übergang von „unendlich viele Glieder [...liegen in der Epsilon-Umgebung], aber außerhalb nur endlich viele" zur zweiten Formulierung „alle Glieder mit einer höheren Platznummer als n_0 [liegen] in der Umgebung".

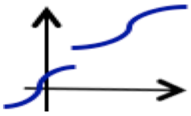
Alle Mathematikstudierenden müssen diese Feinheiten der Fachsprache erst bewältigen lernen. Ist der Anlass dazu ein Unterrichtsmoment, so ist dies für Lehramtsstudierende besonders motivierend und erhöht die Chance, dass sie auch nach dem Studium genau hinschauen, um sich von der Äquivalenz von Charakterisierungen zu überzeugen, auch wenn die Unterschiede nicht mehr nur in der formalen Schreibweise liegen. Eine solche Analyse ist auch Voraussetzung zur Auswahl oder Variation unterrichtlicher Aufgaben und Merksätzen u.Ä.

Die Exaktheit der Definition von Stetigkeit ist das Thema des Unterrichtsmoments in Kasten 4, der durch einen Tafelanschrieb repräsentiert wird. Er zeigt eine für reelle Funktionen durchaus nicht falsche graphische Charakterisierung, die aber für Funktionen mit anderen Definitionsmengen nicht trägt. Selbst für reelle Funktionen ist sie nur begrenzt tragfähig, da die rein graphische Charakterisierung ohne Formalisierung keine Grundlage für formale Argumentationen bildet. Ein expliziter Vergleich der Definitionen auf zwei Exaktheitsstufen soll dazu anleiten, den Nutzen der Exaktifizierung bei gleichzeitigem Verlust an Anschaulichkeit zu reflektieren.

Kasten 4 (Analysis 1, Stetigkeit)

Definition der Stetigkeit

Eine Funktion heißt stetig, wenn man ihren Graphen zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen. Beispiel für unstetig:



In der Schule wird (Un-)Stetigkeit einer Funktion (in $\mathbb{R}$) oft wie im Tafelbild links definiert.

a.) Diese graphische Charakterisierung ist aus Sicht der Hochschulmathematik unpräzise.
- Kennen Sie Gegenbeispiele?
- Unter welchen Bedingungen stimmt sie dennoch?

b.) Vergleichen Sie diese vereinfachte Definition mit der aus dem Skript:
- Welche gilt für eine größere Funktionenklasse?
- Welche ist anschaulicher?
- Welche ist besser in formalen Argumentationen nutzbar?

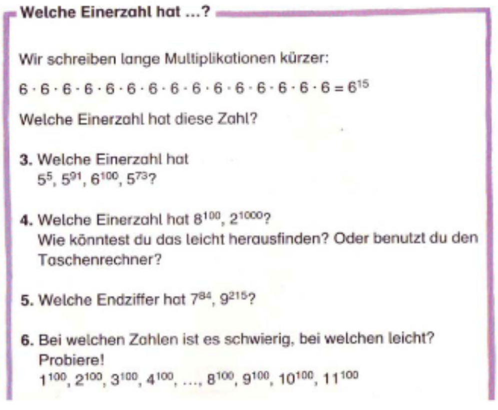
3.3 Anforderungen aus Schulbüchern selbst bewältigen (und Abhängigkeit der Lösungen von den mathematischen Mitteln erleben)

Vor der didaktischen oder mathematischen Analyse von Schulbuchangeboten steht noch elementarer die eigene Bewältigung anspruchsvoller Aufgaben, für die auch Studierenden (zunächst) kein Routinewerkzeug zur Verfügung steht. Sie ist jedoch hochschuldidaktisch sehr interessant, weil damit problemlösende Prozesse bei den Studierenden angestoßen werden (Müller, Steinbring & Wittmann 2004). Hier besteht die Handlungsanforderung wie in Kasten 5 also zunächst darin, die Schulbuchaufgabe mit den Mitteln der Schülerinnen und Schüler zu lösen und die Vorgehensweise zu reflektieren.

So wurde zum Beispiel die in Kasten 5 abgedruckte Aufgabe zu Einerziffern hoher Potenzen in der Vorlesung Elementare Zahlentheorie für Grund-, Haupt- und Realschulstudierende eingesetzt, um den Themenstrang Potenzen in Moduln zu eröffnen, der später im Kleinen Satz von Fermat mündet (s. Abschnitt 3.4).

Kasten 5 (Elementare Zahlentheorie, vor Einführung des Modulo-Rechnens)

Einerziffern von großen Potenzen



Welche Einerzahl hat ...?

Wir schreiben lange Multiplikationen kürzer:

$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^{15}$

Welche Einerzahl hat diese Zahl?

3. Welche Einerzahl hat 5^5, 5^{91}, 6^{100}, 5^{73}?

4. Welche Einerzahl hat 8^{100}, 2^{1000}? Wie könntest du das leicht herausfinden? Oder benutzt du den Taschenrechner?

5. Welche Endziffer hat 7^{84}, 9^{215}?

6. Bei welchen Zahlen ist es schwierig, bei welchen leicht? Probiere! 1^{100}, 2^{100}, 3^{100}, 4^{100}, …, 8^{100}, 9^{100}, 10^{100}, 11^{100}

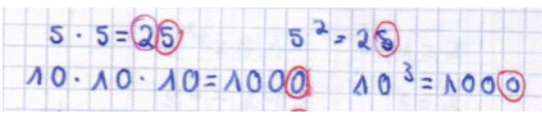
Diese durchaus herausfordernde Forscher-Aufgabe stammt aus einem Schulbuch der 4. Klasse (Mathematikus 4, Westermann)

a.) Lösen Sie die Aufgabe (natürlich auch mit Taschenrechner). Um auch für die großen Zahlen Lösungen zu finden, die der Taschenrechner nicht bewältigt, muss man Muster erkennen, wie sich die Potenzen verändern.

b.) Beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise bei der Problemlösung. Welche Strategien haben Sie wann benutzt?

Studierende halten die Aufgabe zunächst für eine triviale Übung in Taschenrechnerbedienung, erkennen aber bei Eingabe von 8^{100} schnell, dass der Taschenrechner nicht genügend Ziffern anzeigt und gerade die letzten Ziffern wegrundet. Mit dem expliziten Tipp, nach Mustern zu suchen, begeben sie sich auf die Suche und erkennen, dass die Aufgabe für Basis 5, 6 und 10 trivial ist, weil alle Potenzen dieselbe Einerziffer haben.

Ebenso wie Grundschulkinder (vgl. Dokumente in Abb. 2 aus Klasse 4 von Thaddey 2008) finden die Studierenden durch quasi-experimentelles Erkunden von Beispielen, dass sich für alle Basen die Potenzen der Einerziffern nach spätestens vier Potenzen wiederholen. Begründungen liefern die grundschulmathematischen Methoden allerdings nur für jede Basis einzeln (durch schriftliche Multiplikation der letzten Stellen).



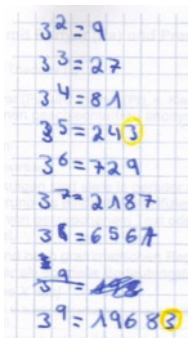


Abb. 2: Karina und Dorian (10 Jahre) finden die Wiederholung nach 4 Potenzen

Wichtig für diesen Unterrichtsmoment ist die nachträgliche Demonstration an Originaldokumenten oder Videos, dass Kinder genauso vorgehen wie die Studierenden (vgl. Abb. 2). Dies erhöht das Zutrauen, dass man sich auf Erkundungsprozesse einfach einlassen kann („Wenn die Kids das schaffen, werde ich es ja wohl auch hinkriegen") und dass das Untersuchen von Beispielen eine sehr wichtige Problemlösestrategie ist. Diese Aspekte sind stärker auf der affektiven als auf der kognitiven Ebene, und gerade deshalb für die Herausbildung eines adäquaten Mathematikbildes sehr wichtig (Cooney & Wiegel, 2003).

Kasten 6 (Elementare Zahlentheorie, nach Einführung des Modulo-Rechnens)

Einerziffern revisited


Welche Einerzahl hat ...?

Wir schreiben lange Multiplikationen kürzer:

Welche Einerzahl hat diese Zahl?

3. Welche Einerzahl hat

4. Welche Einerzahl hat
Wie könntest du das leicht herausfinden? Oder benutzt du den Taschenrechner?

5. Welche Endziffer hat

6. Bei welchen Zahlen ist es schwierig, bei welchen leicht?
Probiere!

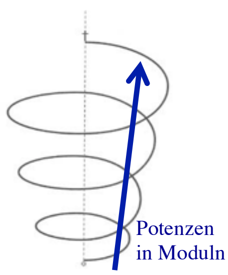
Nehmen sie sich noch einmal die Schulbuchaufgabe der 4. Klasse vor. [Kasten 5]

a.) Schreiben Sie nun eine möglichst kurze Lösung mit Hilfe der Modulo-Schreibweisen.
b.) Welche Sätze über das Rechnen mit Kongruenzen nutzen Sie hier?

Besonders gut eignen sich anspruchsvolle Schulbuchaufgaben dann, wenn an ihnen die Abhängigkeit der Lösungswege von den mathematischen Mitteln erlebbar ist, so wie bei der Aufgabe in Kasten 6, in der das Problem nach Einführung des Rechnens modulo 10 übersetzt und mit diesen Mitteln die Lösung allgemein begründet werden kann. Dies bildet eine erste, ausbauenswerte Erfahrung, was „höherer Standpunkt" (Klein 1924) bedeuten kann.

3.4 Jenseits der Unterrichtsmomente: Entwicklung theoretischen Wissens im Spiralprinzip erleben

Die Grundschul-Forscheraufgabe (aus Kasten 5), wie sich die Einerziffern hoher Potenzen entwickeln, ist in der Veranstaltung zur Elementaren Zahlentheorie der Ausgangspunkt für eine Theorieentwicklung des Themenstrangs Potenzen in Moduln bis hin zum Kleinen Satz von Fermat und schließlich seiner Anwendung in der Kryptologie. Das Spiralprinzip wird hier erlebbar gemacht (und am Ende für die Studierenden expliziert), und zwar in fünf Stufen von Aufgaben im Übungsbetrieb, die über einige Wochen verteilt werden.



Aufgelistet werden hier auch die Zwischenschritte in der Vorlesung, die jeweils die nächste Stufe ermöglichen:

1. Stufe: Problem „Einerziffern hoher Potenzen" erkunden mit Grundschulmitteln (siehe Kasten 5 und Dokument aus einer 4. Klasse in Abb. 2)

Zwischenschritt: Einführung der Sprache der Kongruenzen (Modulo-Rechnen)
Die im Ausgangsproblem und weiteren Problemen mit Resten untersuchten Beziehungen werden mittels Kongruenzklassen und Moduln verallgemeinert und allgemeine Rechenregeln in $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ festgehalten.[1]

2. Stufe: Problem „Einerziffern hoher Potenzen" in $\mathbb{Z}_{10}$ übersetzen und Lösungen einfach begründen (siehe Kasten 6)

Zwischenschritt: Erweiterung der theoretischen Basis durch die Phi-Funktion
Zunächst unabhängig vom Ausgangsproblem wird anhand der Untersuchung der Elementanzahl der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot)$ die Phi-Funktion eingeführt.

3. Stufe: Verallgemeinertes Problem erkunden: „Potenzfolgen in $\mathbb{Z}_n$"
In Verknüpfungstafeln zu $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ und mit Hilfe eines Rechners wird die Entwicklung der Potenzen $x, x^2, x^3, x^4, \ldots$ untersucht in Analogie zur Vielfachenfolge $x, 2x, 3x, \ldots$. Dabei steht zunächst die Verallgemeinerung von Untersuchungen von Operationen als mathematische Tätigkeit eigener Berechtigung im Vordergrund, noch ohne Blick auf ihre Anwendbarkeit. Quasi-empirische Beobachtung: Die Potenzfolge wiederholt sich spätestens bei dem Exponenten $\varphi(n)+1$, wenn der Modul n prim oder Produkt zweier Primzahlen ist.

Zwischenschritt: Formulierung und Beweis des Kleinen Satzes von Fermat
Sicherung des Erkundungsergebnisses im Satz mit Varianten und Beweis des bislang rein quasi-empirisch gefundenen Zusammenhangs.

4. Stufe: Vom Problem zum trainierbaren Verfahren
In Trainingsaufgaben werden hohe Potenzen in unterschiedlichen Moduln berechnet: $2^{17} \bmod 3$, $7^{1234} \bmod 9$, usw., bis zur Routinisierung.

Zwischenschritt: Vorstellung der Grundideen der Kryptologie und der Nutzung der Theorie zur Verschlüsselung im RSA-Algorithmus

---

[1] In Analogie zu $\mathbb{F}_p$ wird mit $\mathbb{Z}_n$ im Rahmen der Vorlesung für Grund-, Haupt- und Realschulstudierende die Faktorgruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ abgekürzt. Eine Verwechslung mit den p-adischen Zahlen ist für diese Zielgruppe nicht möglich.

5. Stufe: Vom trainierbedürftigen Verfahren zum selbstverständlichen Werkzeug in Anwendungszusammenhängen.
Beim RSA-Algorithmus wird die Bestimmung hoher Potenzen als selbstverständliches Werkzeug im komplexen Zusammenhang angewandt; die Theorie liefert nur noch den Begründungszusammenhang im Hintergrund, wird aber für die Durchführung des Algorithmus nicht mehr unmittelbar gebraucht.

Lehrreich ist gerade die Explizierung dieses über Schulstoff hinausgehenden Themenstrangs, weil sich der Charakter des Wissens über Potenzen in Moduln verändert, und zwar

- von rein phänomenologisch bearbeitbaren Problemen (1. Stufe)
- über leicht formulierbare und lösbare Aufgaben (2. Stufe),
- zu einem verallgemeinerten Satz als Resultat innermathematischer Untersuchungen von Operationen, einem zentralen Ziel an sich (3. Stufe),
- dann hin zum trainierbaren Verfahren (4. Stufe) und schließlich zum selbstverständlichen Werkzeug im komplexen Anwendungszusammenhang (5. Stufe).

Entscheidende Voraussetzung für das Betreten der nächsten Stufe ist jeweils die Weiterentwicklung der Theorie, zuweilen auch zunächst an anderen Problemstellungen. Das Ausgangsproblem wird immer „einfacher", wenn die theoretischen Werkzeuge mächtiger werden.

Eine solche längerfristige Selbsterfahrung (die sich für künftige Realschullehrkräfte fast über das gesamte Semester erstreckt) trägt zur Festigung eines Grundverständnisses von Mathematik als Prozess bei, das für die Planung und Begleitung langfristiger Lernprozesse von Kindern auch bei elementareren Gegenständen grundlegend ist. Eine solche Selbsterfahrung ist bei schulmathematisch vertrauten Inhalten insofern schwerer möglich, als das Wissen für Studierende dann bereits in algorithmische Wissensformen transformiert und damit trivialisiert ist. Daher lässt sie sich zwar an einem Unterrichtsmoment anknüpfen, aber geht keineswegs vollständig darin auf.

4. Fazit

... zu Ziel und Arbeitsteilung

Mit den theoretischen Überlegungen und den konkreten Unterrichtsmomenten soll dieser Beitrag Argumentationsbausteine liefern, warum das *Ziel einer mathematischen Fundierung didaktischer Handlungsfähigkeit* für die universitäre Lehrerausbildung zentral und fruchtbar ist. Zum Abbau der Diskontinuität gehört aus Sicht der Autorin auch, eine *zu sehr isolierende Arbeitsteilung* zwischen fachinhaltlichen, fachdidaktischen und schulpraktischen Veranstaltungen zu überwinden und auch die fachinhaltlichen Veranstaltungen bereits zu dem Ziel beitragen zu lassen.

... zur Spezifizierung der Lerngegenstände

Die Methode der Job-Analyse von Bass und Ball (2004) bewährt sich als Ansatz für Spezifizierung zentraler Lerngegenstände und trägt sogar darüber hinaus als Basis für die Konstruktion von Unterrichtsmomenten als explizite und authentische Lernanlässe für fachinhaltliche Lehrveranstaltungen.

... zu den Lernanlässen und ihren Wirkungen

Die vorgestellten Beispiele von Unterrichtsmomenten beanspruchen keinerlei Vollständigkeit, sondern zeigen exemplarisch, wie Unterrichtsmomente mathematisch ertragreiche Denk- und Reflexionsprozesse initiieren können, die auch in fachinhaltlichen Lehrveranstaltungen ihren Platz finden. Die inzwischen siebenjährige Erfahrung mit diesem Ansatz in verschiedenen Lehrveranstaltungen zeigt immer wieder ähnliche Wirkungen (wie in Leufer & Prediger 2007 systematisch rekonstruiert):

Auf der affektiven Ebene

- Die Unterrichtsmomente bieten für die Lehramtsstudierenden eine erhebliche Motivation, aber auch Hunger auf eine ausgiebigere didaktische Reflexion, die nur in fachdidaktischen Veranstaltungen zu stillen ist.
- Die Erfahrung, dass die mühevoll neu zu erwerbenden fachwissenschaftlichen Lerngegenstände tatsächlich mit dem späteren Berufsziel zusammenhängen, ermöglicht eine sinnstiftende Orientierung auf die Fachmathematik hin, die über den konkreten Inhalt der Einzelaufgabe hinaus geht. In dem in der Analysis I durchgeführten Projekt (Leufer & Prediger 2007) hatte auf jedem Übungsblatt eine von fünf Aufgaben einen solchen Anknüpfungspunkt in Unterrichtsmomenten, mehr ist weder notwendig noch wäre es angesichts der vielfältigen innermathematischen Lernziele angemessen. In der Analysis II wurde vom konkreten Unterricht abstrahiert und eher das universitäre Lernen als didaktischer Anknüpfungspunkt behandelt.

Auf der kognitiven Ebene:

- Wenn die Studierenden durch die Unterrichtsmomente explizit aufgefordert wurden, fachwissenschaftliches Wissen zu aktivieren, gelang dies deutlich besser, als wenn dies implizit vorausgesetzt wurde. Daher ist die explizite Aufforderung ein wichtiges Mittel, um die Aktivierung zu üben. Es besteht begründete Hoffnung, dass dies die Chancen auf späteren unaufgeforderten Transfer in Unterrichtsituationen erhöht.

- Viele der Aufgaben veranlassten zu einer fruchtbaren Vertiefung des Gelernten durch Hinterfragung, ganz genaue Nutzung und Reflexion. Diese Aktivitäten waren auch für Nicht-Lehramtsstudierende fruchtbar, so dass eine Teilung der Studierendengruppen im Übungsbetrieb nicht einmal notwendig ist.

Auch wenn dafür bisher keine empirischen Belege angeführt werden konnten, ist die Autorin der festen Überzeugung, dass die rekonstruierten kurzfristigen Wirkungen auf der affektiven und der kognitiven Ebene einen langfristigen Beitrag leisten können zur Verminderung sowohl der zweiten, als auch der ersten Diskontinuität, weil sie aus künftigen Handlungsanforderungen authentische Anknüpfungspunkte an die Schulerfahrungen der Studierenden konstruieren und somit eine doppelte Brücke schlagen können.

Dank

Ich danke Jürg Kramer und den beiden Gutachtern für ihre hilfreichen Kommentare und Andrea Schink für ihren gründlichen Blick und ihr Drängen auf Kohärenz der Argumentation.

Literatur

Bass, H., & Ball, D. L. (2004). A practice-based theory of mathematical knowledge for teaching: The case of mathematical reasoning. In W. Jianpan & X. Binyan, Xu (Hrsg.). *Trends and challenges in mathematics education* (S. 107–123). Shanghai: East China Normal University Press.

Bauer, T. & Partheil, U. (2009). Schnittstellenmodule in der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik. *Mathematische Semesterberichte,* 56(1), 85-103.

Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklehrens und –lernens. In: H. Bauersfeld, et al. (Hrsg.). *Lernen und Lehren von Mathematik. Analysen zum Unterrichtshandeln II* (S. 1-56). Köln: Aulis.

Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S. & Wickel, G. (2012). *Mathematik Neu Denken. Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten.* Wiesbaden: Vieweg Teubner.

Blum, W. & Henn, H.-W. (2003). Zur Rolle der Fachdidaktik in der universitären Gymnasiallehrerausbildung. *MNU. Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht,* 56(2), 68-76.

Brown, J.S., Collins, A. & Duguid, S. (1989). Situated Cognition and the Culture of Learning. *Educational Researcher*, 18(1), 32-42.

Cooney, T. J. & Wiegel, H. G. (2003). Examining the mathematics in mathematics teacher education. In: A. J. Bishop et al. (Hrsg.). *Second International Handbook of Mathematics Education* (S. 795-828). Dordrecht: Kluwer.

Cuoco, A. (2001). Mathematics for Teaching. *Notices of the AMS*, 48(2), 169–174.

Davis, B. & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: an ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 293–319

DMV (1979). *Zur Ausbildung von Studierenden des gymnasialen Lehramts im Fach Mathematik. Denkschrift der Deutschen Mathematik-Vereinigung.* Online erhältlich unter: https://dmv.mathematik.de/aktuell/dmv-stellungnahmen/stellungnahmenarchiv/60-

denkschrift-juli-1979-zur-ausbildung-von-studierenden-des-gymnasialen-lehramts-im-fach-mathematik.html

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Band 1. Stuttgart: Klett.

Griesel, H. & Postel, H. (1999) (Hrsg). *Elemente der Mathematik*. Hannover: Schroedel.

Hefendehl-Hebeker, L. (1998). Aspekte eines didaktisch sensiblen Mathematikverständnisses. *Mathematische Semesterberichte,* 45, 189-206.

Jahnke, T. (2005). Unendlich. Mathe-Welt. *Mathematik lehren*, 132.

Klein, F. (1924). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte*. Bd. 1. Berlin u.a.: Springer.

Leufer, N. & Prediger, S. (2007). „Vielleicht brauchen wir das ja doch in der Schule" Sinnstiftung und Brückenschläge in der Analysis als Bausteine zur Weiterentwicklung der fachinhaltlichen gymnasialen Lehrerbildung. In A. Büchter et al. (Hrsg.*), Realitätsnaher Mathematikunterricht – vom Fach aus und für die Praxis* (S. 265-276). Hildesheim: Franzbecker.

Müller, G., Steinbring, H. & Wittmann, E. C. (2004) (Hrsg.). *Arithmetik als Prozess*. Seelze: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung.

Prediger, S. (2010). How to develop mathematics for teaching and for understanding. The case of meanings of the equal sign. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 13(1), 73-93.

Schifter, D. (1998). Learning Mathematics for Teaching: From a Teachers' Seminar to the Classroom. *Journal for Mathematics Teacher Education*, 1(1), 55–87.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15, 4–14.

Stacey, Kaye (2008): Mathematics for secondary teaching. Four components of discipline knowledge for a changing teacher workforce. In P. Sullivan & T. Wood (Hrsg.): Knowledge and beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development (S. 87-113). Rotterdam: Sense Publisher.

Thaddey, J. (2008). *Wie Kinder mathematische Zusammenhänge erkunden – empirische Untersuchung am Beispiel der Einerstellen hoher Potenzen*. Wiss. Hausarbeit, betreut von S. Prediger, TU Dortmund.