Eureka!

Nº 41

Olimpíada
Brasileira de
Matemática

2019

CONTEÚDO

AOS LEITORES

Desde a última edição da Revista Eureka! em 2016, a Olimpíada Brasileira de Matemática vivenciou grandes transformações. Realizamos com grande êxito a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) em 2017 e nos integramos com a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Privadas (OBMEP). Além de ter ampliado sua participação em novas competições internacionais nos últimos anos, o Brasil também implementará neste ano o Torneio Meninas na Matemática.

Para acompanhar tantas mudanças e atender às demandas de nossos leitores, a publicação da Revista Eureka! foi retomada em novo formato. Todo o texto será compilado na linguagem LaTeX e pretendemos publicar dois números por ano.

Esperamos que a comunidade olímpica aprecie as mudanças e continue entusiasmada em contribuir com problemas, soluções e artigos. Para enviá-los, basta seguir as instruções publicadas em nosso endereço eletrônico ou escrever para

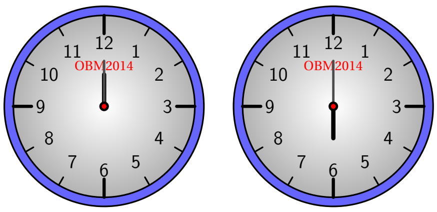
obm@impa.br

A edição deste número da Eureka! foi coordenada pelo Fabio Brochero, da UFMG e da Comissão de Olimpíadas, a quem agradecemos pelo excelente trabalho. Por falar na comunidade olímpica, não podemos deixar de agradecer também a enorme contribuição de diversos olímpicos e ex-olímpicos na compilação das soluções deste número. Nosso agradecimento aos leitores Armando Barbosa, Andrey Jhen Shan Chen, Bruno Brasil Meinhart, George Lucas, Gabriel Tostes e Guilherme Kowalczuk, na redação das soluções da Terceira Fase Níveis 1 e 2, e de Igor Albuquerque Araujo, Luíze Mello DUrso Vianna e Thiago Ribeiro Tergolino, na redação das soluções da Segunda Fase Nível Universitário. Um agradecimento especial ao olímpico Thiago Landim pela ajuda na revisão deste número.

Saudações Olímpicas!
Os editores

Primeira Fase

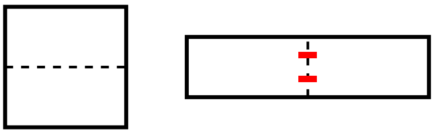
1) Todo relógio analógico tem pelo menos dois ponteiros: um para mostrar a hora e o outro mais comprido para mostrar o minuto. Joãozinho percebeu que esses ponteiros às vezes ficam alinhados, opostos ou então sobrepostos, como na figura.



Quantas vezes isto acontece entre às 7 horas da manhã de um dia até às 7 horas da manhã do dia seguinte?

A) 40 B) 44 C) 45 D) 46 E) 47

2) Janaína cortou uma folha quadrada ao meio e colou com adesivos as duas metades, fazendo coincidir seus lados menores, obtendo uma folha retangular.



Qual é a razão entre o perímetro do quadrado original e o perímetro do retângulo?

A) 1 : 1 B) 4 : 5 C) 2 : 3 D) 3 : 4 E) 1 : 2

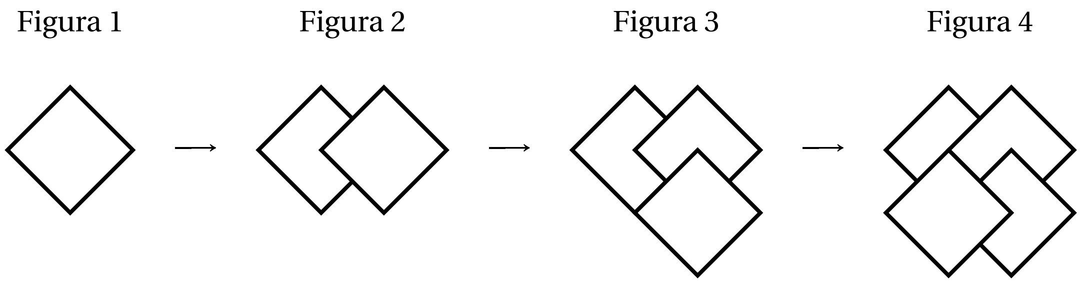
3) Qual é a menor diferença entre um número inteiro positivo de quatro algarismos e um número inteiro positivo de três algarismos, sendo todos os sete algarismos distintos?

A) 1 B) 13 C) 19 D) 29 E) 36

4) Numa classe do 6º ano, a professora sabe que todo grupo que formar com 13 alunos terá pelo menos uma menina e todo grupo que formar com 21 alunos terá pelo menos um menino. Sendo o número de alunos desta classe o maior possível, qual é a razão entre o número de meninos e o número de meninas desta classe?

A) 13 : 21 B) 13 : 34 C) 3 : 5 D) 3 : 8 E) 1 : 2

5) Esmeralda tem quatro folhas quadradas iguais, de lado 20 cm. Ela cola uma folha sobre a outra, fazendo um vértice da folha de cima coincidir com o centro da folha debaixo, de modo que os lados da folha de cima sejam paralelos aos lados da folha debaixo, conforme Figuras 1 e 2. Ela continua fazendo isto, até colar as quatro folhas, conforme Figuras 3 e 4.



Qual é a área da Figura 4?

A) $1200\ \text{cm}^2$ B) $1300\ \text{cm}^2$ C) $1400\ \text{cm}^2$ D) $1500\ \text{cm}^2$ E) $1600\ \text{cm}^2$

6) Ana enfileira 2014 cartões e os numera de 1 até 2014. Em seguida, ela os pinta, a partir do primeiro, com as cores amarela, verde e preta, um de cada cor, sempre nessa ordem. Considere as seguintes afirmações:

I) O número de cartões é igual para as três cores.

II) Há mais cartões amarelos ímpares do que verdes pares.

III) Há mais cartões pretos ímpares do que verdes ímpares.

Quais afirmações são verdadeiras?

A) Somente I B) Somente II C) Somente III

D) Somente I e II E) Somente II e III

7) Wagner tem 15 moedas, algumas de 25 centavos e outras de 10 centavos, no valor total de 2 reais e 70 centavos. Se x é o número de moedas de 25 centavos que ele tem, qual das equações abaixo permite obter esse número?

A) $5x + 10(15 - x) = 27$ B) $25x + 10(15 - x) = 270$ C) $x + (15 - x) = 27$
D) $5x + 10(15 - x) = 54$ E) $5x + 2(15 - x) = 135$

8) Ana brinca com um jogo no seu tablet que consiste, no início, em subir uma escada com 18 degraus, pulando por cima de dois, três ou então seis degraus. Ao pular dois ou três degraus, a escada aumenta seu tamanho em um degrau e, ao pular seis degraus, a escada diminui seu tamanho em um degrau. Por exemplo, no início, quando ela está no chão e pula dois degraus, ela vai para o degrau 3 e, agora, a escada passa a ter 19 degraus. Quando ela pisa no último degrau, a escada não aumenta e nem diminui e o jogo acaba.
No mínimo, quantos saltos Ana deve dar para chegar ao último degrau desta escada virtual?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 12

9) A tabela ao lado mostra o preço em reais das passagens para viagens entre duas das cidades A, B, C, D e E. Note que o preço de ida e o preço de volta entre duas mesmas cidades podem ser diferentes. Pablo quer sair de uma dessas cidades e visitar todas as demais gastando o mínimo possível. Quanto Pablo irá gastar?

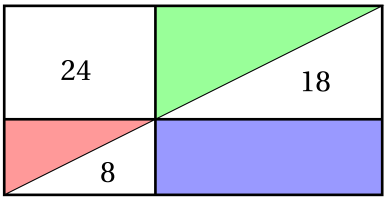
	A	B	C	D	E
A		3	1	2	5
B	2		2	1	4
C	1	3		2	1
D	2	5	4		3
E	5	2	1	4	

A) 4 reais B) 5 reais C) 6 reais
D) 9 reais E) 11 reais

10) Joana foi comprar 20 canetas e comparou os preços em duas lojas: na loja A, cada caneta custa 3 reais, mas há uma promoção de 5 canetas pelo preço de 4, e na loja B, cada caneta custa 4 reais, mas a cada 5 canetas compradas, como brinde ela pode levar até mais 2 canetas de graça. Tentando fazer a melhor escolha entre comprar somente na loja A ou somente na loja B, quanto ela pode economizar?

A) Nada B) R\$ $6,00$ C) R\$ $8,00$
D) R\$ $10,00$ E) R\$ $12,00$

11) O retângulo da figura foi repartido em várias regiões por meio de três segmentos concorrentes, sendo um deles uma de suas diagonais e os outros dois paralelos aos lados do mesmo. Os números indicam as áreas em metro quadrado das regiões brancas em que se encontram. Qual é a área do retângulo original?



A) 40 m^2 B) 65 m^2 C) 75 m^2
D) 80 m^2 E) 100 m^2

12) Manuel, Antônio e Joaquim começam a pintar, no mesmo instante, três muros iguais de 60 metros de comprimento, um muro para cada um. Nos 10 primeiros minutos de trabalho, Manuel pinta 2 metros, Antônio 3 metros e Joaquim 5 metros. Quem termina a sua parte, imediatamente passa a ajudar os outros, até que os três juntos terminem todo o trabalho, cada um mantendo o seu ritmo até o final. Quanto tempo levou para o trabalho ser feito?

A) 3 horas B) 4 horas C) 5 horas
D) 6 horas E) 7 horas

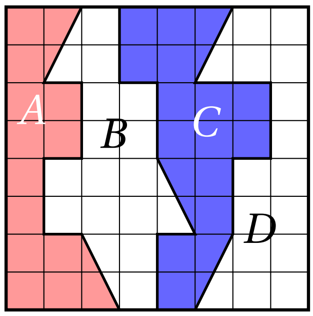
13) O número 2014 tem quatro algarismos distintos cuja soma é 7. Quantos números inteiros positivos têm essas duas propriedades?

A) 12 B) 16 C) 18 D) 20 E) 23

14) Rosa resolveu distribuir 250 reais para seus sobrinhos, dando a mesma quantia inteira (sem centavos) para cada um e percebeu que sobrariam 10 reais. Então, ela pensou em diminuir em 1 real a quantia de cada um e descobriu que sobrariam 22 reais. Por fim, ela resolveu distribuir apenas 240 reais. Quanto ganhou cada sobrinho?

A) 5 reais B) 10 reais C) 12 reais
D) 15 reais E) 20 reais

15) O quadrado ao lado foi repartido em quatro regiões, representadas pelas letras. Duas delas têm a mesma área. Quais?



A) A e B B) A e C C) A e D
D) B e C E) B e D

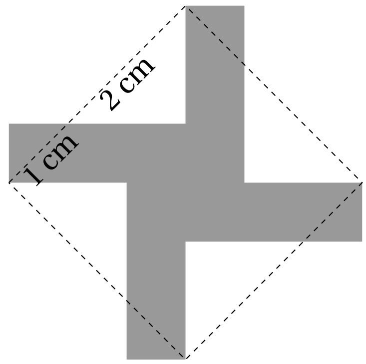
16) Adão, Bernardo e Carlos jogaram uma partida com bolinhas de gude. Adão perdeu 5 bolinhas, Bernardo perdeu 4 e Carlos ganhou todas as bolinhas que eles perderam. Ao final do jogo, todos os meninos acabaram ficando com a mesma quantidade de bolinhas. Lembrando que sem bolinhas ninguém joga, pelo menos quantas bolinhas Adão e Bernardo tinham, juntos, quando começaram a jogar?

A) 11 B) 13 C) 19 D) 29 E) 33

17) Numa sala completa, quando a professora perguntou se os alunos tinham estudado para a prova, vários alunos disseram que sim e os 15 restantes disseram que não. Quem não estuda sempre mente, quem estuda às vezes mente, às vezes diz a verdade. Se 23 alunos estudaram para a prova e 32 mentiram, quantos alunos tem a sala?

A) 38 B) 40 C) 42 D) 44 E) 55

18) A região cinza na figura ao lado é formada pela união de quatro retângulos iguais, sem buracos nem sobreposições. A linha pontilhada é um quadrado. Qual é a área da região cinza?

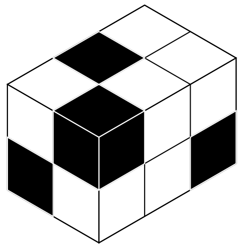


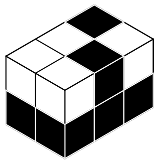
A) 6 cm^2 B) 6,5 cm^2 C) 7 cm^2
D) 7,5 cm^2 E) 8 cm^2

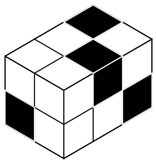
19) Juca fez uma lista de todos os números inteiros positivos de quatro algarismos distintos, em ordem crescente. Em seguida, fez outra lista das diferenças positivas entre todos os pares de números vizinhos. Na segunda lista, qual foi o maior número que Juca escreveu?

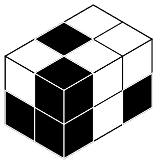
A) 25 B) 36 C) 47 D) 103 E) 105

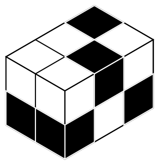
20) A figura à direita mostra um bloco retangular montado com seis cubinhos pretos e seis cubinhos brancos, todos de mesmo tamanho. Qual das figuras a seguir mostra o mesmo bloco visto por trás?

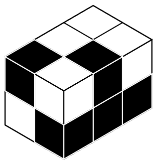



A)


B)


C)


D)

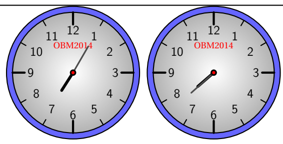
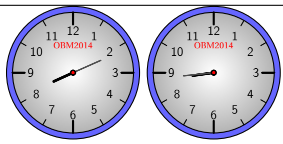
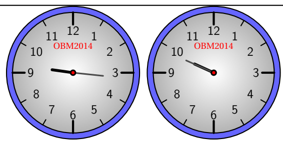
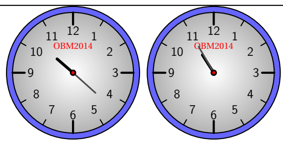
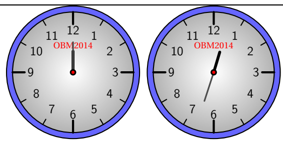

E)

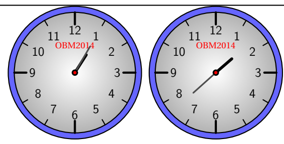
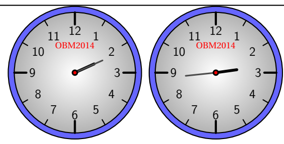
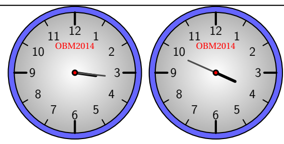
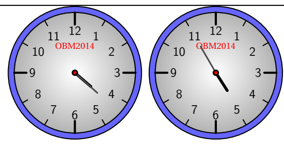
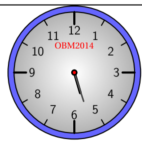
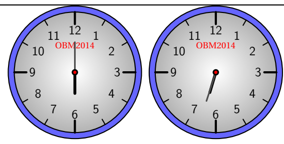
Primeira Fase – Soluções

Gabarito

1) B	6) C	11) E	16) D
2) B	7) B	12) A	17) B
3) E	8) A	13) C	18) A
4) C	9) B	14) E	19) E
5) A	10) E	15) D	20) A

1) **(B)** Vamos contar o número de ocorrências em que ficam alinhados, opostos ou então sobrepostos, analisando o que acontece de hora em hora.

Hora	Ocorrências
7	
8	
9	
10	
11	
12	

Hora	Ocorrências
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Percebemos que das 7h da manhã às 7h da noite há 22 ocorrências. Logo, das 7h da noite às 7h da manhã do dia seguinte há mais 22 ocorrências. Ou seja, ficam alinhados, opostos ou então sobrepostos, $22+22=44$ vezes.

2) **(B)** Se o quadrado em questão tem lado $2x$, ao dividirmos ele pela metade obtemos dois retângulos iguais com lado menor x e lado maior $2x$. Assim, ao unirmos estes dois retângulos como indicado na figura, obtemos um retângulo de lado menor x e de lado maior $4x$.
Como o quadrado inicial tem perímetro $4\cdot 2x = 8x$ e o retângulo final tem perímetro $2(4x+x)=10x$, a razão em questão é igual a $\frac{8x}{10x}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$.

3) **(E)** Para minimizar a diferença em questão, o número de três algarismos deve ser o maior possível e o de quatro algarismos deve ser o menor possível, sempre cumprindo as condições do enunciado. Dadas as restrições, é fácil ver que o maior número de três algarismos é 987 e que o menor número de quatro algarismos é 1023. Assim, a diferença em questão é mínima e vale $1023-987=36$.

4) **(C)** Se houver um número maior ou igual a 13 meninos na sala é possível selecionar estes 13 meninos para compor um grupo de 13 alunos, um absurdo, já que para quaisquer 13 alunos pelo menos um é menina. Assim, há no máximo 12 meninos na sala. Da mesma maneira, concluímos que há no máximo 20 meninas na sala. Logo, a razão entre a quantidade de meninos e de meninas da sala é $\frac{12}{20}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

5) **(A)** Inicialmente, perceba que ao posicionarmos um novo quadrado no centro de um anterior, estaremos sobrepondo um quarto de quadrado, pois a área sobreposta é um quadrado de lado igual à metade do quadrado original, e se a razão entre lados é $\frac{1}{2}$, a razão entre áreas é $\frac{1}{4}$. Portanto, basta verificarmos quantos quartos de cada quadrado ficam visíveis na Figura 4. Do quadrado 1 ficam visíveis 2 quartos de quadrado, dos quadrados 2 e 3 ficam visíveis 3 quartos de quadrado cada, e do quadrado 4 ficam visíveis seus 4 quartos. Fazendo a soma, temos $2+3+3+4=12$ quartos de quadrado. Como a área de cada quarto é $\left(\frac{20}{2}\right)\cdot\left(\frac{20}{2}\right)=100$, a área total é $1200\ \text{cm}^2$.

6) **(C) Primeira Solução:** Como 2010 é múltiplo de 6, cada uma das três cores está equidistribuída tanto entre os números pares quanto entre os números ímpares dos 2010

primeiros números. Vejamos as cores dos próximos quatro números:

$$2011 \text{ (Amarela)}, \quad 2012 \text{ (Verde)}, \quad 2013 \text{ (Preta) e } 2014 \text{ (Amarela)}.$$

O elemento 2014 faz com que a cor amarela tenha um cartão a mais do que as outras cores. Assim, temos que a primeira afirmação é falsa. Os elementos 2012 e 2014 aumentam em 1 a quantidade de cartões pares verdes e amarelos respectivamente. Dessa maneira, como até o elemento 2010 temos o mesmo número de cartões amarelos e verdes pares, a afirmação II é falsa. O elemento 2013 faz os ímpares pretos terem uma unidade a mais do que os verdes ímpares, logo a terceira afirmação é verdadeira.

Segunda Solução: Vamos analisar cada afirmação separadamente.

I) Esta afirmação é **FALSA**.
Sabemos que a contagem dos números de cartões é a mesma apenas se o número de cartões for múltiplo de 3, mas 2014 não é divisível por 3.

II) Esta afirmação é **FALSA**.
Os cartões ímpares amarelos ocorrem em turnos de 6, pois a cada 3 cartões temos um outro cartão amarelo, mas com a paridade trocada; assim, somente no sexto cartão ele terá a mesma cor e paridade. Eles correspondem aos números

$$1 = 6 \cdot 0 + 1,\ 7 = 6 \cdot 1 + 1,\ \dots,\ 2005 = 6 \cdot 334 + 1,\ 2011 = 6 \cdot 335 + 1.$$

Como todos são da forma $6x + 1$, com x de 0 a 335, temos 336 cartões ímpares amarelos.
Os cartões pares verdes também ocorrem em turnos de 6 pelo mesmo motivo. A primeira aparição de um cartão par e verde é o $2 = 6 \cdot 0 + 2$, seguido pelo $8 = 6 \cdot 1 + 2$, e assim por diante, até chegarmos no $2012 = 6 \cdot 335 + 2$. Assim, como os ímpares amarelos, os cartões verdes pares aparecem 336 vezes. Portanto, não temos mais cartões amarelos ímpares do que verdes pares.

III) Esta afirmação é **VERDADEIRA**.
Assim como vimos em II), os cartões passam a repetir em cor e paridade em turnos de 6. Portanto, teremos cartões pretos ímpares em

$$3 = 6 \cdot 0 + 3,\ 9 = 6 \cdot 1 + 3,\ 15 = 6 \cdot 2 + 3,\ \dots,\ 2013 = 6 \cdot 335 + 3,$$

formando ao todo 336 cartões. Os cartões verdes ímpares aparecem em

$$5 = 6 \cdot 0 + 5,\ 11 = 6 \cdot 1 + 5,\ \dots\ ,\ 2009 = 6 \cdot 334 + 5,$$

totalizando 335 cartões. Dessa forma, temos mais cartões pretos ímpares do que verdes ímpares.

7) **(B)** Se Wagner tem x moedas de 25 centavos e 15 moedas no total, concluímos que $15 - x$ moedas são de 10 centavos. Assim, o valor que ele possui é de $25x + 10(15 - x)$. Além disso, 2 reais e 70 centavos equivalem a 270 centavos. Assim, a equação que permite obter o valor correto de x é $25x + 10(15 - x) = 270$.

8) **(A)** Ana pode chegar ao último degrau desta escada virtual com 3 saltos, usando a seguinte estratégia:

1º salto: no início, quando ela está no chão, ela pula seis degraus, indo para o degrau 7 e, agora, a escada passa a ter 17 degraus.

2º salto: do degrau 7, ela pula três degraus, indo para o degrau 11 e, agora, a escada passa a ter 18 degraus.

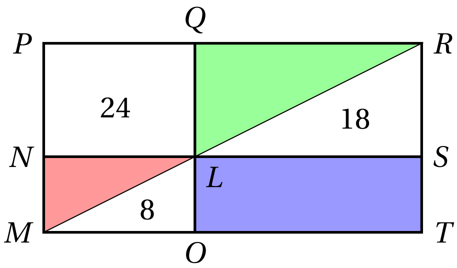
3º salto: do degrau 11, ela pula seis degraus, indo para o degrau 17, que é, nesse momento, o último degrau da escada.

9) **(B)** Como são 5 cidades, Pablo terá de fazer 4 viagens para passar por A, B, C, D e E. Usando apenas viagens de custo 1, não conseguiremos atingir todas as cidades, pois de A pode-se chegar em C, que por sua vez leva a E, mas B e D ficariam isoladas. Em outras palavras, não existe conexão ao valor 1 do grupo $\{A, C, E\}$ para o grupo $\{B, D\}$ ou vice-versa, o que impossibilita uma viagem de custo total 4. Assim, o custo mínimo será 5, que pode ser obtido através das viagens $A \to C \to E \to B \to D$.

10) **(E)** Se Joana comprar as 20 canetas na Loja A, ela pagará o preço de 16 canetas, já que $20 = 4 \cdot 5$ e a cada 5 canetas ela paga o preço de apenas 4 canetas. Assim, na Loja A ela gastaria $16 \cdot 3 = 48$ reais, já que cada caneta custa 3 reais.
Se Joana comprar as 20 canetas na Loja B, como ela compra 5 e ganha 2, ou seja, a cada 7 ela paga o preço de apenas 5. Assim, Joana precisa de $7 + 7 + 6$ canetas, que saem pelo preço de apenas $3 \cdot 5 = 15$ canetas. Como cada unidade custa 4 reais, ela gastaria

$15 \cdot 4 = 60$ reais na Loja B. Assim, entre a opção mais barata e a mais cara, Joana pode economizar $60 - 48 = 12$ reais.

11) **(E)** Nomeamos os vértices dos polígonos como na figura. Como o triângulo MNL tem a mesma base ($NL = MO$) e mesma altura ($NM = LO$) do triângulo MOL de área 8, temos Área $(MNL) = 8$.



De forma semelhante, temos que Área $(LQR) = 18$. Com isso, concluímos que

$$\text{Área } (MNLO) = 16 \quad \text{e} \quad \text{Área } (LQRS) = 36.$$

Além disso, como

$$MN = LO, \quad MO = PQ, \quad LS = OT \quad \text{e} \quad QL = PN,$$

segue que

$$\text{Área } (MNLO) \times \text{Área } (LQRS) = MN \cdot MO \cdot LS \cdot QL =$$

$$= PQ \cdot PN \cdot LO \cdot OT = \text{Área } (NPQL) \times \text{Área } (OLST)$$

donde temos que $16 \cdot 36 = 24 \cdot \text{Área } (OLST)$, ou seja $C = 24$. Portanto, a área da figura será

$$24 + 18 + 8 + \text{Área } (MNL) + \text{Área } (LQR) + \text{Área } (OLST) = 100m^2.$$

12) **(A)** Como o ritmo de trabalho dos pintores Manuel, Antônio e Joaquim é totalmente independente, podemos encarar os 3 pintores como um único (vamos chamá-lo de Mantôquim) que junta a necessidade e o ritmo dos 3. Assim, Mantôquim tem $60 + 60 + 60 = 180$ metros de muro a uma velocidade de $2 + 3 + 5 = 10$ metros de muro pintados a cada 10 minutos, ou seja, 1 metro a cada minuto. Dessa forma, Mantôquim levará $\frac{180\text{m}}{1\text{m/min}} = 180$ minutos, ou 3 horas, para completar seu serviço.

13) **(C)** Vamos analisar quais quádruplas de algarismos são válidas e, para isso, vamos chamar de d o maior número dessa quádrupla.

- Se $d > 4$, teremos pelo menos um dígito repetido na formação do número, pois $5 + 2 + 1 + 0$ (que seria nossa menor soma possível com $d > 4$) ultrapassa nossa soma de 7.
- Se $d < 4$, nossa maior soma possível é $6 = 3 + 2 + 1 + 0$, o que também invalida nossa quádrupla.

Portanto, $d = 4$. Além disso, teremos que somar $7 - 4 = 3$ para os demais números distintos da quádrupla. A única maneira de fazer isso com 3 algarismos é usando os algarismos 2, 1 e 0.
Assim, nossa resposta será a quantidade de números de 4 algarismos distintos formados por 4, 2, 1 e 0. Contando a quantidade dígito a dígito, temos 3 opções para o primeiro dígito (lembre-se que o número não pode começar com 0 à esquerda!), 3 opções para o segundo dígito (qualquer dígito tirando o já escolhido), 2 opções para o terceiro dígito (um dos 2 dígitos restantes) e 1 opção para o último dígito (o dígito que sobrou). Pelo princípio multiplicativo, temos $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$ possíveis números.

14) **(E)** Observemos que quando Rosa deu um real a menos para cada sobrinho sobraram 12 reais a mais que antes. Logo, ela tem 12 sobrinhos. Como ela distribuiu 240 reais no total, cada sobrinho recebeu $\frac{240}{12} = 20$ reais.

15) **(D)** Sabendo que a área de um triângulo é (base × altura) ÷ 2 e que a área de um quadrado é (lado × lado), concluímos que a região A tem área 14, que a região B tem área 17, que a região C tem área 17 e que a região D tem área 16. Assim, as regiões B e C têm a mesma área.

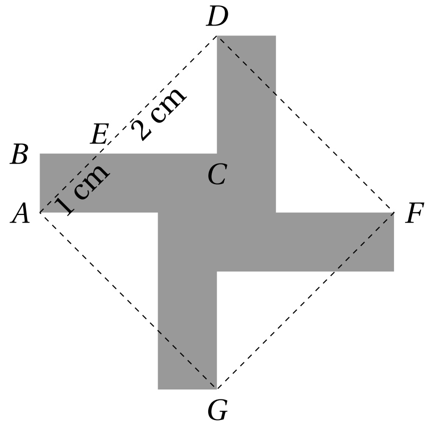
16) **(D)** Vamos chamar de A, B e C as quantidades iniciais de bolinhas de Adão, Bernardo e Carlos, respectivamente. Se Carlos ganhou as bolinhas de seus amigos, ele passou a ter $C + 9$ bolinhas, enquanto que Adão e Bernardo ficaram com $A - 5$ e $B - 4$ bolinhas, respectivamente. Assim, temos que $C + 9 = A - 5 = B - 4$. Dessa igualdade, tiramos que $A = C + 14$ e $B = C + 13$. Como Carlos tinha ao menos 1 bolinha para começar a jogar, Adão tinha ao menos $1 + 14 = 15$ bolinhas e Bernardo tinha ao menos $1 + 13 = 14$

bolinhas. Portanto, Adão e Bernardo tinham, juntos, ao menos 29 bolinhas no começo do jogo.

17) **(B)** Como quem não estudou sempre mente e diz que estudou, sabemos que todos que disseram que não estudaram estavam mentindo e na verdade estudaram. Dessa forma, 15 alunos estudaram e falaram mentira. Como 23 estudaram, sabemos que $23-15=8$ estudaram e falaram a verdade. Se 32 alunos mentiram e 15 estudaram e mentiram, $32-15=17$ são aqueles alunos que não estudaram e mentiram. Assim, o número total de alunos é a soma entre quem estudou e falou mentira, quem estudou e falou verdade e quem não estudou (e, consequentemente, mentiu). Temos $15+8+17=40$.

18) **(A)** A área da região cinza é igual a área do quadrado $ADFG$ mais 4 vezes a área de ABE menos 4 vezes a área ECD. Observem que se temos um triângulo retângulo isósceles de hipotenusa L, sua área é $\frac{L^2}{4}$. Logo, Área$(ABE)=\frac{1^2}{4}=\frac{1}{4}$ cm^2 e Área$(ECD)=\frac{2^2}{4}=1$ cm^2. Portanto, a área da região cinza é,

$$3^3+4\cdot\frac{1}{4}-4\cdot 1=6 \text{ cm}^2.$$



19) **(E)** Observemos que se temos um número com algarismos a, $a-1$, 9 e 8, com $a\neq 0,8,9$ temos que pelo menos os seguintes 102 números têm algum algarismo repetido, isto é, todos os números da lista

$$a(a-1)99, aa00, aa01, \ldots, aa99, a(a+1)00$$

tem algum algarismo repetido. Além disso se $a = 1$ temos que 1201 e 1202 também têm algum algarismo repetido, e neste caso a diferença de 1098 e 1203 é 105. Agora, vamos supor que a lista de Juca tem dois números consecutivos com diferença maior ou igual a 106, logo, entre eles temos pelo menos 105 números com algarismos repetidos. Suponhamos que o menor desses números com algarismos repetidos, que denotaremos por N, começa nos números a,b. Daqui, vamos considerar alguns casos:

Se $a \neq b$, e os algarismos são menores que 9, então alguns dos números $ab96, ab97, ab98$ vão ter todos os algarismos distintos. Isso significa que o número $N \geq ab97$. Observe que como a lista possui pelo menos 106 números, isso implica que todos os números que começam com $a(b+1)$ estão na lista, mas como os últimos dois algarismos percorrem todas as possibilidades, para estes números terem algarismos repetidos se deve cumprir que $a = b+1$.

O caso $N = ab99$ corresponde ao exemplo inicial da solução. O caso que $N = ab97$, significa que $\{a, b\} = \{7, 8\}$ e logo $N = 8797$. Observemos que neste caso os 104 números

$$8797, 8798, \ldots, 8899, 8900$$

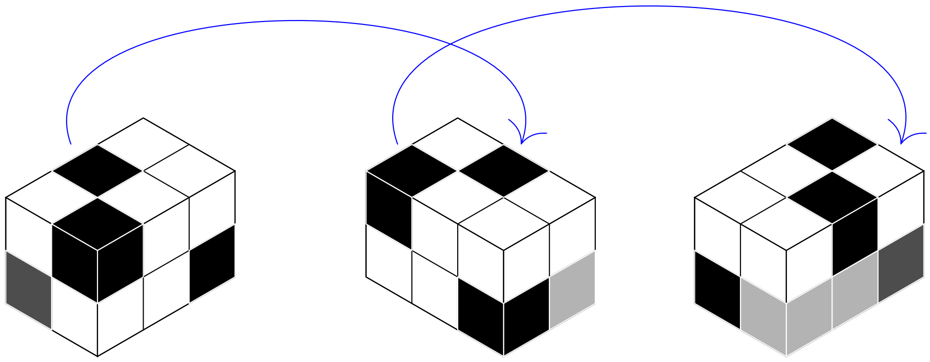
têm algum algarismo repetido. Se $N = ab98$, significa que a ou $b = a-1$ é igual a 8, logo $a = 8$, que já foi considerado.

Agora, suponhamos que algum dos algarismos a, b é igual a 9, mas os dois não podem ser simultaneamente 9, pois nesse caso a nossa lista teria menos de 100 elementos, uma vez que os números são menores ou iguais a 9876 que é o maior número com algarismos distintos. Além disso, o número tem que terminar em um número maior que 76, pois entre 76 e 99 sempre vamos encontrar um número com algarismos distintos de a e b. Além disso, se $a \neq b+1$, então entre 00 e 22, vamos ter um número com algarismos diferentes de a e $b+1$, e logo não poderíamos ter 106 números, assim $a = b+1 = 9$, e $N = 9877$, que não é solução, pois não tem nenhum número maior com algarismos distintos.

É possível verificar, com muito trabalho, que as possíveis diferenças são 1, 2, 3, 4, 5, 11, 12, 14, 15, 21, 25, 26, 36, 103 e 105.

20) **(A)** A figura abaixo mostra três posições do bloco retangular: A primeira imagem representa o cubo na posição original, onde colorimos um dos cubos pretos de cinza; a

segunda representa o mesmo bloco rotacionado no plano 90°; e finalmente a última representa o bloco rotacionado no plano 180°.



Notemos que na figura inicial podemos ver dez cubinhos, sendo seis brancos e quatro pretos. Portanto, os únicos dois que não vemos são pretos. O cubo que colorimos de cinza na primeira posição, não pode ser visto na segunda, mas pode ser visto novamente na terceira. Por outro lado, os cubos cinza claro não são visíveis na primeira posição.
Logo, colorindo estes dois cubos cinza claro de preto assim como o cubo cinza, que já era preto, optamos pela alternativa **(A)** .

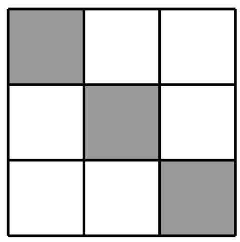
Segunda Fase

PARTE A

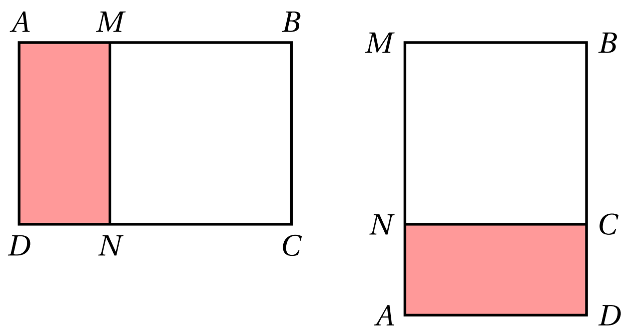
A1) Carolina escreve uma sequência de números inteiros positivos, na qual, se um número é par, o número seguinte é a sua metade e, se o número é ímpar, o número seguinte é sete unidades maior. O primeiro número da sequência é 10 e, então, os três primeiros números desta sequência são 10, 5, 12. Qual é o 2014º número desta sequência?

A2) Dez crianças formam uma fila da menor criança para a maior. Sabe-se que nessa fila não existem duas crianças com a mesma altura. Por algum motivo, a fila tem que ser refeita da maior criança para a menor criança, através da troca de posição somente entre crianças vizinhas. No mínimo, quantas trocas de posição deverão ser feitas?

A3) Preencha a tabela ao lado com nove números inteiros diferentes, maiores do que zero, de modo que para cada um dos quadradinhos cinzentos, a soma dos números da linha e da coluna em que se encontram é a mesma. Note que a soma de uma linha **não** precisa ser igual à soma de outra linha. Sendo assim, qual é a menor soma possível dos números que podem ser escritos nos três quadradinhos cinzentos?



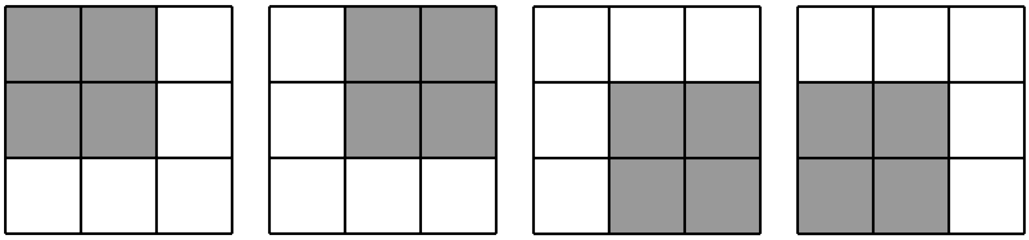
A4) Carla fez um corte MN paralelo ao lado AD no retângulo $ABCD$. Em seguida, girou o retângulo $AMND$ e juntou-o ao retângulo $MBCN$, pois é possível fazer coincidir os lados CN e AD, conforme a ilustração. Sabendo que no retângulo $AMND$ temos $AD = 8$ cm e $AM = 4$ cm, qual é a área do retângulo $ABCD$, em cm^2?



A5) O conjunto de números $\{18, 54\}$ tem a seguinte propriedade: a soma dos seus elementos, 72, é igual ao dobro de sua diferença, 36. Quantos conjuntos de dois números inteiros positivos, ambos menores do que 100, possuem esta propriedade?

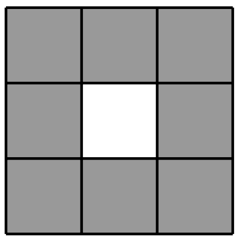
Observação: *os conjuntos* $\{18, 54\}$ *e* $\{54, 18\}$ *são iguais.*

A6) Juliana escreveu nas casas de um tabuleiro os números inteiros de 1 a 9, um em cada casa. Depois disto, ela somou os quatro números escritos em cada um dos quatro tabuleiros 2×2 contidos no tabuleiro 3×3 e anotou o resultado abaixo de cada tabuleiro, conforme indicado a seguir:



30 19 12 21

Qual é a soma dos números escritos nas casas da borda do tabuleiro, representadas na cor cinza na figura a seguir?



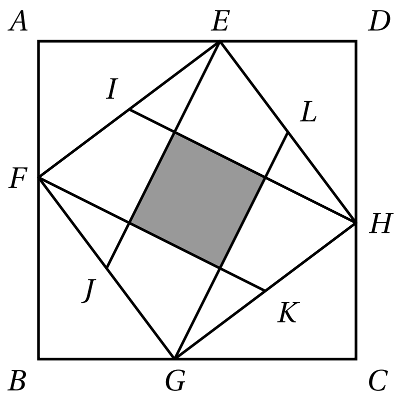
PARTE B

B1) O número 2014 é par, não possui algarismos repetidos em sua representação e a soma desses algarismos é um número primo.

a) Qual é o menor inteiro positivo que tem essas três características?

b) Qual é o maior número inteiro com essas três características?

B2) Na figura ao lado, temos $AF = 12$ cm, $AE = 16$ cm. Os vértices do quadrado $EFGH$ pertencem aos lados do quadrado $ABCD$ e os pontos I, J, K, L são pontos médios dos lados de $EFGH$.



a) Qual é a área do quadrado $ABCD$?

b) Qual é a área do quadrado $EFGH$?

c) Qual é a área do quadrado cinza no interior do quadrado $EFGH$?

B3) Colocando sinais de + ou − ou × ou ÷ entre os algarismos de 2014 e calculando o valor da expressão, podemos obter muitos resultados diferentes. Por exemplo, $2+0-1\times 4=-2$, $2-0\div 1\times 4=2$ e $2+0+1\times 4=6$.

Observação: lembre-se de que não existe divisão por zero, por isso não é permitido formar expressões que tenham esta operação.

a) Quantos desses resultados não são números inteiros?

b) De quantas maneiras podemos colocar os sinais entre os algarismos?

c) Quantos resultados diferentes são possíveis?

Segunda Fase – Soluções

Parte A

Problema	A1	A2	A3	A4	A5	A6
Resposta	6	45	6	96	33	39

A1) Note que a sequência segue o padrão

$$10 \to 5 \to 12 \to 6 \to 3 \to 10 \to 5 \to 12 \to 6 \to 3 \to 10 \to 5 \to \cdots,$$

repetindo-o a cada 5 termos. Sabendo que 2014 deixa resto 4 na divisão por 5, o 2014º número será igual ao 4º número da sequência, que é 6.

A2) Vamos considerar a ordem de altura das crianças do menor para o maior, chamando o menor de 1, o segundo menor de 2, e seguimos até chamar o maior de 10. Temos que a ordem inicial é $(1,2,3,\ldots,9,10)$.
Em cada troca, um número à direita de outro passa à esquerda desse número. Então, podemos contar que o número de trocas feitas é pelo menos o número de passadas da direita para a esquerda que devem acontecer. O 10 deve passar 9 vezes, cada um dos números de 1 a 9. O número 9 deve passar 8 vezes, e assim por diante. Portanto, podemos concluir que o número de trocas é pelo menos $9+8+\cdots+2+1 = \frac{9\cdot 10}{2} = 45$.
De fato, podemos fazer com essa quantidade de trocas se fizermos o 10 trocar 9 vezes para a esquerda, em seguida, o 9 trocar 8 vezes para a esquerda, seguindo até o 2 trocar uma vez para a esquerda.

A3) A menor soma possível de três números inteiros diferentes maiores que zero é $1+2+3=6$. Portanto, se conseguirmos colocar 1, 2 e 3 nas casas destacadas, essa soma será a menor possível. E tal situação é possível como no exemplo a seguir.

1	9	10
8	2	7
11	6	3

Note que a linha e coluna do 1 somam 20, a linha e coluna do 2 somam 17 e, finalmente, a linha e coluna do 3 somam 20.

A4) Como é possível coincidir CN com AD, temos $CN = AD = 8$ cm. Logo, o retângulo $ABCD$ tem lados $AD = 8$ cm e $AB = AM + MB = 4 + 8$, ou seja, $AB = 12$ cm. Portanto, a área do retângulo $ABCD$ é $8 \cdot 12 = 96$ cm^2.

A5) Observe que o conjunto $\{a, b\}$, com $a < b$, satisfaz a propriedade quando:

$$a + b = 2(b - a) \Leftrightarrow a + b = 2b - 2a \Leftrightarrow 3a = b.$$

Desse modo, podemos notar que os conjuntos são $\{1, 3\}, \{2, 6\}, \{3, 9\}, \ldots, \{32, 96\}$ e $\{33, 99\}$. Veja que se tomássemos $a \geq 34 \Rightarrow b \geq 3 \cdot 34 = 102 > 100$. Assim, concluímos que existem 33 conjuntos com essa propriedade e tendo dois números menores que 100.

A6) Observe que a maior soma possível de quatro números de 1 a 9 é $9 + 8 + 7 + 6 = 30$. Então, observando o canto superior esquerdo, sabemos que o número do centro é no mínimo 6. Observando os números do canto inferior direito, vemos que a menor soma possível deles é $6 + 1 + 3 + 2 = 12$.
Isso mostra que o elemento central só pode ser 6 e a soma da borda tem que ser

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9 = 39.$$

Para concluir o problema basta verificar que existe um tabuleiro que satisfaz as condições, como é mostrado na seguinte configuração.

9	7	4
8	6	2
5	3	1

Parte B

B1) a) O menor inteiro positivo com essas características é o 2. Observemos que se o problema é interpretado de forma errada como o menor número com dois algarismos, nesse caso a resposta é 12.

b) O maior número que não possui algarismos repetidos é 9876543210, mas a soma dos algarismos desse número é $1+2+\cdots+9=45$ que não é primo. Então, devemos excluir pelo menos um algarismo desse número. O maior primo menor que 45 é 43, portanto, excluindo o 2 obtemos 987654310.
Esse número é o maior número com as três características.
Observe que excluir mais que um algarismo resulta em um número com menos algarismos e, portanto, uma resposta menor à já encontrada.

B2) a) Por simetria, notamos que $ED = 12$ cm, portanto o lado do quadrado $ABCD$ é $16+12=28$ cm, consequentemente sua área é $28\cdot 28 = 784$ cm^2.

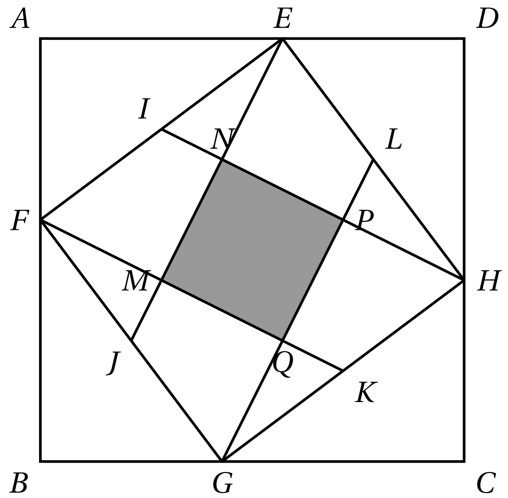
b) Pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo AEF, temos:

$$EF^2 = AE^2 + AF^2 = 12^2 + 16^2 \Leftrightarrow EF^2 = 144+256 = 400 \Rightarrow EF = 20 \text{ cm}.$$

Então, a área do quadrado $EFGH$ é $20\cdot 20 = 400$ cm^2.

Solução alternativa: Cada um dos triângulos AFE, EDH, BFG e CGH tem área $\frac{12\cdot 16}{2} = 96$. Logo, a área de $EFGH$ é $784 - 4\cdot 96 = 784 - 384 = 400$.

c) Seja $MNPQ$ o quadrado cinza interior e seja x o comprimento do seu lado.



Veja que os ângulos $\angle GQK = \angle GPH = 90°$, pelos ângulos do quadrado $MNPQ$, logo os triângulos GQK e GPH são semelhantes, e como K é ponto médio a proporção é de $1:2$. Logo, $GQ = QP = x$. Por simetria, todos os outros pedaços análogos serão x, então o quadrado $EFGH$ foi dividido em um quadrado $MNPQ$ e 4 triângulos retângulos de catetos x e $2x$. Temos:

$$[EFGH] = [MNPQ] + 4 \cdot [GPH] \Leftrightarrow 400 = x^2 + 4 \cdot \frac{x \cdot 2x}{2} = 5x^2 \Leftrightarrow x^2 = 80.$$

Então, a área do quadrado $MNPQ$ é 80 cm^2.

B3) a) Não podemos dividir $(\div)$ por 0, logo o primeiro sinal só pode ser $\{+, -, \times\}$.
Note que o resultado não será inteiro quando o terceiro sinal for $\div$ e o segundo não for $\div$ nem $\times$, para esses dois sinais a divisão seria $\frac{0}{4} = 0$. Então, temos:
Se o primeiro sinal for $+$:

$$2 + 0 + 1 \div 4 = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$
$$2 + 0 - 1 \div 4 = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

Se o primeiro sinal for $-$, o caso é análogo. Se o primeiro sinal for $\times$, temos:

$$0 + 1 \div 4 = \frac{1}{4}$$

$$0 - 1 \div 4 = -\frac{1}{4}$$

Concluímos, portanto, que 4 resultados não são inteiros.

b) Basta contar que temos 3 maneiras de escolher o primeiro sinal, 4 maneiras de colocar o segundo e 4 maneiras de escolher o terceiro, ou seja, $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ maneiras.

c) Se o primeiro sinal for $-$, temos exatamente os mesmos resultados que tivemos com $+$. O resultado também será o mesmo se o sinal após o 0 for $\times$ ou $\div$. Finalmente, caso o segundo sinal seja $\times$, o resultado será o mesmo se o terceiro sinal for $\times$ ou $\div$. Assim, podemos resumir o conjunto de possibilidades, nas seguintes configurações de sinais

$$2\ \boxed{\begin{array}{c}+\\ \times\end{array}}\ 0\ \boxed{\begin{array}{c}-\\ +\end{array}}\ 1\ \boxed{\begin{array}{c}-\\ \div\\ +\\ \times\end{array}}\ 4 \qquad \text{e} \qquad 2\ \boxed{\begin{array}{c}+\\ \times\end{array}}\ 0\ \boxed{\times}\ 1\ \boxed{\begin{array}{c}-\\ +\\ \times\end{array}}\ 4$$

Onde obtemos $16 + 6 = 22$ possibilidades para a escolha de sinais. Estas 22 escolhas geram os seguintes resultados:

$$\left\{-5, -4, -3, -2, -1, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{7}{4}, 2, \frac{9}{4}, 3, 4, 5, 6, 7\right\}.$$

Vemos um total de 16 resultados diferentes possíveis.

Terceira Fase

1) Esmeralda desenha quadradinhos de lado unitário para formar a sequência das figuras a seguir, de acordo com uma regra que você deve descobrir.

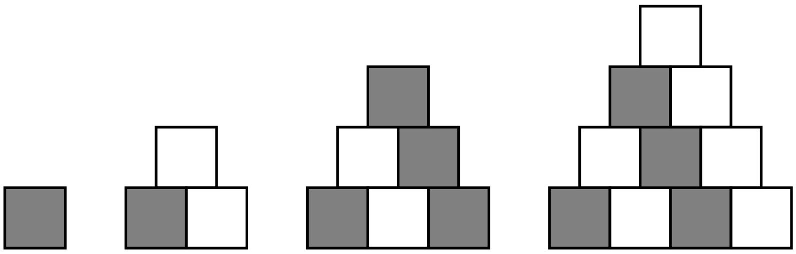
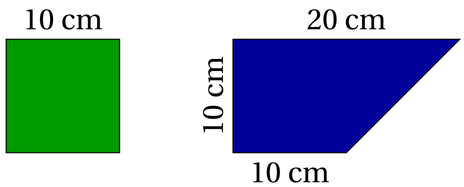


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

a) Quantos quadradinhos brancos tem a Figura 13?

b) Se existir, qual é a figura que tem exatamente 100 quadradinhos brancos a mais que quadradinhos cinzentos?

2) Janaína tem muitos cartões de plástico, alguns na forma de quadrados iguais e outros na forma de trapézios iguais, conforme a ilustração.



a) Qual é a área de cada cartão quadrado e a área de cada cartão trapezoidal?

Ela monta figuras maiores sobre uma mesa, juntando os cartões e virando-os, se necessário.

b) Usando pelo menos um cartão de cada tipo, Janaína monta um quadrado. Qual é a área do menor quadrado que ela pode montar nessas condições?

c) Ela quer montar um quadrado com $3600\ \text{cm}^2$ de área, utilizando o menor número possível de cartões, iguais ou não. Quantos são esses cartões?

3) Geraldo possui vários dados iguais comuns, nos quais a soma dos pontos em faces opostas é 7. Você sabe que é possível enxergar apenas três faces desses dados de cada vez.

a) Geraldo usa quatro dados para montar uma pilha sobre uma mesa, conforme imagem, de modo que as faces em contato tenham o mesmo número de pontos. Qual é a soma dos pontos das faces que não podem ser vistas (faces em contato e faces apoiadas na mesa)?

b) Geraldo quer colar algumas faces de oito dados, formando um cubo rígido. As faces em contato devem ter pontos iguais e a soma dos pontos de todas as seis faces do cubo deve ser 116. Explique como Geraldo deve colar essas faces.

4) A seguir, as letras O, B e M representam algarismos todos diferentes e não nulos. Assim, OBM e BOM, por exemplo, são números de três algarismos distintos e se $O = 1$, $B = 4$ e $M = 7$, temos $OBM = 147$ e $BOM = 417$.

a) Qual é a soma de todos os números de três algarismos dados por $O = 1$, $B = 2$ e $M = 3$?

b) Quais são todos os valores do número OBM na adição a seguir, na qual X também é um algarismo?

$$\begin{array}{rr} & \text{OBM} \\ & \text{OMB} \\ & \text{MBO} \\ + & \text{MOB} \\ & \text{BMO} \\ & \text{BOM} \\ \hline & \text{OOOX} \end{array}$$

5) Ana e Beatriz possuem muitas moedas. Elas colocam várias sobre uma mesa e jogam de acordo com as seguintes regras:

i) o primeiro a jogar retira no mínimo uma moeda, mas não todas;

ii) quem jogar a seguir pode retirar no mínimo uma moeda e no máximo o dobro do número de moedas que o jogador anterior retirou;

iii) ganha quem retirar a última moeda.

a) Suponha que elas coloquem 11 moedas sobre a mesa. Se Ana for a primeira a jogar e retirar duas moedas, mostre como Beatriz pode vencer o jogo (não importando quais sejam as demais jogadas de Ana).

b) Agora, suponha que elas coloquem 15 moedas sobre a mesa. Mostre como a primeira a jogar pode vencer o jogo sempre (não importando quais sejam as jogadas da segunda).

Terceira Fase – Soluções

1) Observemos que a figura da pirâmide n é construída ao acrescentarmos n quadradinhos em diagonal na pirâmide da figura $(n-1)$,

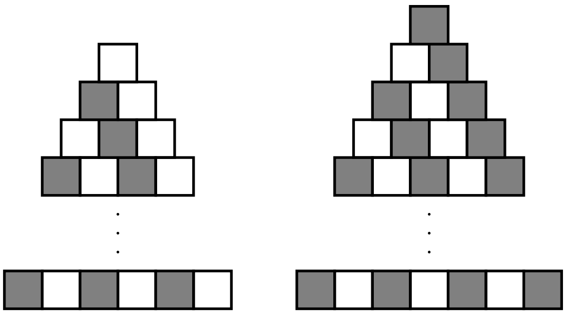


Figura $n-1$ Figura n

sendo os quadradinhos dessa nova diagonal brancos se n é par ou cinzas se n é ímpar.

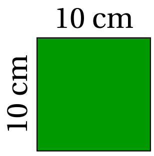
a) Observemos que apenas nas figuras pares são adicionados quadradinhos brancos, isto é, são adicionados 2, 4, 6, 8, 10, 12 quadradinhos e cada passo deste processo até a Figura 13. Logo, temos no total,

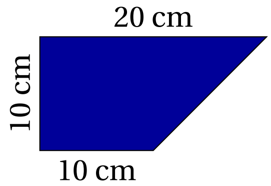
$$2+4+6+8+10+12=42$$

quadradinhos brancos na Figura 13.

b) A cada duas linhas estamos adicionando um quadradinho branco a mais que o cinza. Se queremos ter 100 quadradinhos brancos a mais precisamos, então, construir até a Figura 200.

2) a)

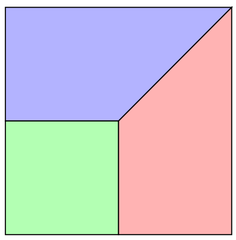




Área do quadrado $= 10 \times 10 = 100$ cm^2 Área do trapézio $= \frac{(10+20)\times 10}{2} = 150$ cm^2.

b) Observemos que devemos ter pelo menos 2 figuras trapezoidais, pois com uma só não é possível completar o ângulo de 45° com os âgulos dos quadrados até formar um quadrado maior.

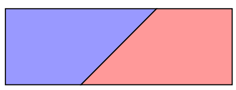
Finalmente, com duas figuras trapezoidais e um quadrado podemos formar um quadrado maior.



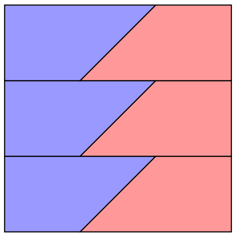
Como dois trapézios não podem formar um quadrado, precisamos de pelo menos mais um cartão, e como o cartão quadrado tem a menor área entre os dois cartões, então esse é o menor quadrado que podemos formar. Cada lado tem 20cm, logo a área do quadrado é 400cm^2.

c) Como a área de cada cartão trapezoidal é maior que a área de cada cartão quadrado, seria interessante pensar se Janaína consegue montar esse quadrado utilizando apenas cartões trapezoidais, pois uma vez que a área desse cartão é maior, ela precisaria de menos cartões. Mostremos um exemplo de como Janaína pode construir um quadrado utilizando apenas cartões trapezoidais.

Inicialmente, ela pode construir um retângulo 10 cm $\times$ 30 cm.



Agora, usando retângulos montados como mostrado acima, ela consegue construir um quadrado 30 cm $\times$ 30 cm.



Assim, é possível construir um quadrado de 60 cm × 60 cm, cuja área é 3600 cm^2, utilizando

$$\frac{\text{(Área do quadrado formado)}}{\text{(Área de cada cartão trapezoidal)}} = \frac{3600}{150} = 24 \text{ cartões trapezoidais.}$$

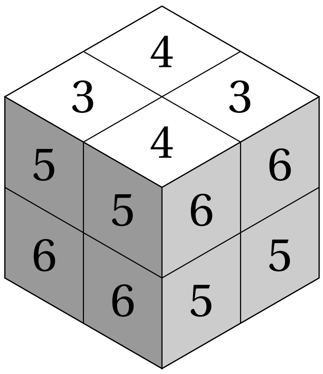
Portanto, o menor número de cartões utilizados é 24.

3) a) Sabemos que as faces superior e inferior dos dois dados inferiores somam 7, logo não precisamos determiná-las. Além disso, temos que as faces inferiores dos dados superiores são 3, pois as faces superiores desses dados é 4.

Assim, precisamos determinar os números escondidos nas faces laterais. Como os dados mostram à direita os números 6 e 1, então os números que estão ocultos são 1 e 6, que coincidem com os outros dois cubos. Dessa forma, a soma total é:

$$2 \times 7 + 2 \times 3 + 2 \times 1 + 2 \times 6 = 34.$$

b) Observemos que se em cada dado ficasse visível os números 4, 5 e 6, como são oito dados, a soma das faces seria $8 \times (4+5+6) = 120$. Assim, precisamos que a soma seja 4 a menos, isto é, basta que quatro dados mostrem as fases 4, 5 e 6 e os outros quatro dados mostrem as fases 3, 5 e 6. Uma configuração possível é mostrada na seguinte ilustração:



4) a) Primeiro, vamos escrever todos os números dados por essas letras:

$$OBM = 123 \qquad OMB = 132$$
$$BOM = 213 \qquad BMO = 231$$
$$MOB = 312 \qquad MBO = 321.$$

Agora podemos realizar a soma:

$$123 + 132 + 213 + 231 + 312 + 321 = 1332.$$

b) Observe que todo número da forma RST pode ser decomposto na forma:

$$100 \times R + 10 \times S + T,$$

assim,

$$\begin{aligned}
OBM &= 100 \times O + 10 \times B + M\\
OMB &= 100 \times O + 10 \times M + B\\
BOM &= 100 \times B + 10 \times O + M\\
BMO &= 100 \times B + 10 \times M + O\\
MOB &= 100 \times M + 10 \times O + B\\
MBO &= 100 \times M + 10 \times B + O.
\end{aligned}$$

Primeiro, vamos calcular separadamente a soma das centenas, dezenas e unidades, para depois somar tudo:

$$100 \times (O + O + M + M + B + B) = 100 \times (2O + 2M + 2B) = 200 \times (O + M + B)$$

$$10 \times (B + M + B + O + M + O) = 10 \times (2O + 2M + 2B) = 20 \times (O + M + B)$$

$$(M + B + O + B + O + M) = (2O + 2M + 2B) = 2 \times (O + M + B).$$

Portanto, temos $200 \times (O+M+B) + 20 \times (O+M+B) + 2 \times (O+M+B) = 222 \times (O+M+B)$. Como $OOOX = 1000 \times O + 100 \times O + 10 \times O + X = 1110 \times O + X$, então:

$$222 \times (O + M + B) = 1110 \times O + X$$

$$222 \times (O + M + B) - 222 \times 5 \times O = X$$

$$222 \times (M + B - 4O) = X.$$

Assim, X é um múltiplo de 222 com apenas 1 dígito. Logo, $X = 0$ e $B + M - 4O = 0$, ou seja, $B + M = 4O$. Como $B + M \leq 9 + 8 = 17$, temos que $4O \leq 17 \Rightarrow O \leq 4$.

- Se $O = 0$, então $B = M = O$, o que é um absurdo, pois O, B e M são diferentes.
- Se $O = 1$, então $B + M = 4$, e não há solução, pois os O, B e M devem ser distintos e as únicas soluções não nulas da equação são:
$$\begin{cases} B = 1 \text{ e } M = 3 \\ B = 3 \text{ e } M = 1 \\ B = M = 2. \end{cases}$$
- Se $O = 2$, então $B + M = 8$. Temos quatro opções:
$$\begin{cases} B = 1 \text{ e } M = 7 \\ B = 3 \text{ e } M = 5 \\ B = 5 \text{ e } M = 3 \\ B = 7 \text{ e } M = 1 \end{cases}$$
- Se $O = 3$, então $B + M = 12$. Temos quatro opções:
$$\begin{cases} B = 4 \text{ e } M = 8 \\ B = 5 \text{ e } M = 7 \\ B = 7 \text{ e } M = 5 \\ B = 8 \text{ e } M = 4 \end{cases}$$
- Se $O = 4$, então $B + M = 16$. Temos duas opções:
$$\begin{cases} B = 7 \text{ e } M = 9 \\ B = 9 \text{ e } M = 7. \end{cases}$$

Assim, os possíveis valores de OBM são: 217, 235, 253, 271, 348, 357, 375, 384, 479 e 497.

5) Observe que o jogador que, em sua rodada, receber 1, 2, 4 ou 6 moedas, vence.

Sejam X e Y os dois jogadores onde:

- Na vez de X há duas moedas na mesa. Se X retira as duas moedas, ele vence.

- Na vez de X há 4 moedas na mesa. Se X retira 1 moeda, temos dois casos:
  - Y retira 1 moeda, assim, recaímos na situação anterior.
  - Y retira 2 moedas, assim, X retira a última e vence.
- Na vez de X há 6 moedas na mesa. Se X tira uma moeda temos dois casos:
  - Y retira 1 moeda, assim, recaímos na situação anterior.
  - Y retira 2 moedas, assim, X retira as 3 moedas restantes e vence.

Dessa forma, provamos nossa afirmação.

a) Após Ana retirar 2 moedas, Beatriz retira 1. Sobram, então, 8 moedas na mesa. Assim, se Ana retira 2 moedas, Beatriz receberá 6 moedas e vencerá.

Suponha, então, que Ana retire apenas 1 moeda. Daí, Beatriz retira 2 moedas. Restam agora 5 moedas na mesa. Se Ana retirar 1 moeda, Beatriz receberá 4 moedas e vencerá. Se Ana retirar 2, 3 ou 4 moedas, Beatriz retira as restantes e vence. Em ambos os casos, Beatriz vence.

b) Suponha que Ana comece jogando. Se Ana retira 2 moedas, restam 13.

Vamos considerar os seguintes casos:

- Beatriz retira 1 moeda. Se Ana retirar apenas 1 moeda na próxima jogada, ficam 11 moedas na mesa. Assim, Beatriz pode retirar 1 ou 2 moedas.
  Vamos supor que Ana retire $3-x$, em que x é o número de moedas retiradas por Beatriz. Assim, restam 8 moedas.
- Beatriz retira 2, 3 ou 4 moedas.
  Se Ana retira $5-x$, em que x é o número de moedas retiradas por Beatriz, sobram 8 moedas na mesa.

Agora, em ambas as situações, Beatriz recebe 8 moedas e sua jogada seguinte não pode retirar todas, pois antes Ana retirou no máximo 3 moedas.

Vejamos agora a continuação do jogo:

- Se Beatriz retirar 3 ou mais moedas, Ana retira as restantes e vence.
- Se Beatriz retirar 2 moedas, Ana receberá 6 moedas e vence.
- Se Beatriz retirar 1 moeda e Ana retirar 2 moedas, Beatriz receberá 5 moedas e não poderá retirar todas. Assim, se em seguida Beatriz retira 2 ou mais, Ana

pode retirar as que restarem e vence o jogo. Se Beatriz retira 1, Ana receberá 4 moedas e vence o jogo.

Logo, o 1º jogador vence o jogo.

Premiados

Medalha de Ouro

Nome	Cidade Estado	Pontos
Débora Tami Yamato	São Paulo SP	256
João Lucas Foltran Consoni	Maringá PR	239
Isaque Sathler Sultz	Ipatinga MG	239
Bernardo Peruzzo Trevizan	Canoas RS	237
Eduarda Vitória da Costa Silva	Vitória ES	234
Vitor Fizherbert Souza	Belo Horizonte MG	233
Igor Brito Andrade	Fortaleza CE	233

Medalha de Prata

Nome	Cidade Estado	Pontos
Luis Carlos Ho dos Santos	Brasília DF	230
Maria Carolina Paraiso Lopes	Lauro de Freitas BA	228
Paulo Davi Ramos Albuquerque	Fortaleza CE	227
Ícaro Andrade Souza Bacelar	Ipatinga MG	226
Victória Miyuki Kurosawa	Curitiba PR	225
Moisés Moreira Gonçalves Feltrin Thimoteo	Cascavel PR	224
Samantha Nicolly Tozatto	Curitiba PR	221
Sávio Vinicius Costa do Amaral	Cocal dos Alves PI	220
Daniel Salles Leite	Brasília DF	220
André Diogo Firmino dos Santos	Fortaleza CE	220

Medalha de Bronze

Nome	Cidade Estado	Pontos
Ricardo Tamay Honda	São Paulo SP	219
Caio César Barros Matos	Fortaleza CE	217
Maria Eduarda Ticianelli Lopes	São Paulo SP	217
Gabriel Rocha Porto	João Pessoa PB	215
João Gabriel Santos Pinheiro	Belo Horizonte MG	212
João Henrique Oliveira Fontes	Rio de Janeiro RJ	212
Bernardo Braga Teixeira	Belo Horizonte MG	211
Álvaro Lucena e Ortiz	São Paulo SP	211
Cauê Fernando Rizzo Ramos	Curitiba PR	209
João Vitor Rodrigues Cortines Laxe	Rio de Janeiro RJ	208
Alberto Teixeira de Andrade	Belo Horizonte MG	206
Henrique Lopes de Assunção	Belo Horizonte MG	206
Wendel Manfrine de Andrade Mendes	Sobral CE	205
Thiago Moreira Yanitchkis Couto	São Paulo SP	204

Menção Honrosa

Nome	Cidade Estado	Pontos
Gustavo Campanha Fernandes	Rio de Janeiro RJ	202
Júlia Barbate Pintão	Vinhedo SP	202
Sofia Santiago Marinho	Fortaleza CE	202
Artur Dantas Ferreira da Silva	Brasília DF	201
Luis Fernando Santana de Oliveira Cerqueira	Lauro de Freitas BA	200
Jonas Pereira Welter	Belo Horizonte MG	199
Rubens Alves de Souza Filho	São Paulo SP	199
Miguel Monteiro Naufel de Toledo	Uberaba MG	198
Hafael Thor Macêdo Ferreira	Natal RN	198
Giovanna de Sousa Oliveira	Fortaleza CE	198
Ana Beatriz Lima Moreira	Fortaleza CE	196
Gabriel Capelo Domingues	Fortaleza CE	196
Caetano da Motta Lima Souza Ramos	Rio de Janeiro RJ	196
Gabriel Augusto Coutinho Faleiro	Passa Tempo MG	195
Bruno Berganholi Dias	Belo Horizonte MG	194
Guilherme Zeus Dantas e Moura	Maricá RJ	194
Rafael Katsuo Nakata	Guarulhos SP	194
Bernardo da Cunha Ramos	Porto Alegre RS	193
Letícia Miyuki Kimoto	Mogi das Cruzes SP	192
Tales Silva Santana	Petrolina PE	192
Alberto Quintão Oliveira	Ipatinga MG	192
Natan Costa Maia	Fortaleza CE	192
Gustavo Mota Rabello	Belo Horizonte MG	191
Júlia de Toledo Martins	Guarulhos SP	190
Henrique Rua Lorente	São Paulo SP	190
Rodrigo Moretti Nicolau	São Paulo SP	189
Ana Luiza Quadros Nogueira	São Paulo SP	189
Felipe Françolin Janowitzer	São Paulo SP	188
Alexandre Sauzem do Amaral	Santa Maria RS	188
Giulia Cabral Sader	Araçatuba SP	188
Matheus Menão Mochetti	Bauru SP	186
Luiz Gabriel Alcântara Pontes de Lemos	João Pessoa PB	185
Gabriel Ribeiro Paiva	Fortaleza CE	183
Pedro Henrique Alves Silva dos Santos	Salvador BA	182
Nicole Fernandes Leal	Curitiba PR	181
Felipe Kato Resende	São Paulo SP	181
Gustavo Neves da Cruz	Belo Horizonte MG	180
Gustavo Vinícius Pina Martins	Belo Horizonte MG	180
Murilo Schoffen Prado	Florianópolis SC	180
Leonardo Gurgel Carlos Pires Filho	Aquiraz CE	180
Aimê Gomes da Mata Kanzaki	Brasília DF	179
Natanael Marsicano de Brito Alexandria	Fortaleza CE	179
Kauan Cutrim Pinheiro	Brasília DF	179
Alan Esquenazi	Rio de Janeiro RJ	179
Jônatas Magalhães Santos	Salvador BA	179
Cassiano José Kounaris Fuziki	Ponta Grossa PR	178
Antonio Luis Alves Azevedo	Rio de Janeiro RJ	178
Gustavo Pires	Araraquara SP	178

36ª Olimpíada Brasileira de Matemática
Nível 2

Primeira Fase

1) Um número natural maior do que 1 é primo quando tem somente dois divisores naturais: 1 e o próprio número. Assim, são primos os números 2, 3, 5, 7, etc. Qual dos números a seguir não pode ser igual à diferença entre dois números primos?

A) 4 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

2) Ana enfileira 2014 cartões e os numera de 1 até 2014. Em seguida, ela os pinta, a partir do primeiro, com as cores amarela, verde e preta, um de cada cor, sempre nessa ordem. O que se pode afirmar a respeito desses cartões?

A) O número de cartões é igual para as três cores.
B) Há mais cartões amarelos ímpares do que verdes pares.
C) Há mais cartões pretos ímpares do que amarelos ímpares.
D) Há menos cartões verdes pares do que amarelos pares.
E) Há mais cartões pretos ímpares do que verdes ímpares.

3) Manuel, Antônio e Joaquim começam a pintar, no mesmo instante, três muros iguais de 60 metros de comprimento, um muro para cada um. Nos 10 primeiros minutos de trabalho, Manuel pinta 2 metros, Antônio 3 metros e Joaquim 5 metros. Quem termina a sua parte, imediatamente passa a ajudar os outros, até que os três juntos terminem todo o trabalho. Quanto tempo levou para o trabalho ser feito?

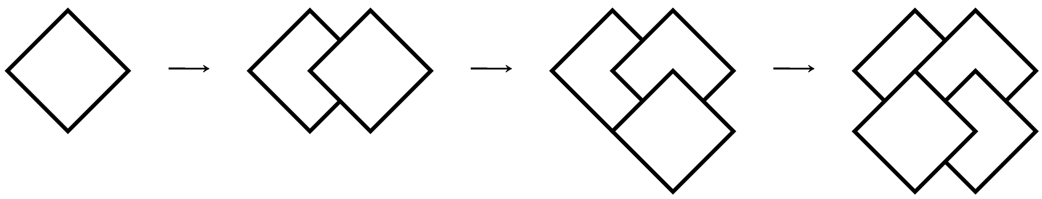
A) 3 horas B) 4 horas C) 5 horas D) 6 horas E) 7 horas

4) Quantas alternativas contêm uma palavra com mais letras que a palavra na alternativa correta?

A) Duas B) Três C) Quatro D) Cinco E) Seis

5) Esmeralda tem quatro folhas quadradas iguais, de lado 20 cm. Ela cola uma folha sobre a outra, fazendo um vértice da folha de cima coincidir com o centro da folha de baixo, alinhando horizontalmente quatro vértices dessas folhas, conforme Figuras 1 e 2. Ela continua fazendo isto, até colar as quatro folhas, de acordo com as Figuras 3 e 4.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4



Qual é a área da Figura 4?

A) 1200 cm^2 B) 1300 cm^2 C) 1400 cm^2 D) 1500 cm^2 E) 1600 cm^2

6) Para descobrir a quantidade de divisores positivos de um número inteiro positivo n basta tomar sua fatoração em primos e calcular o produto dos expoentes dos primos adicionados de 1. Por exemplo, $2800 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 7$ possui $(4+1)\cdot(2+1)\cdot(1+1) = 5\cdot 3\cdot 2 = 30$ divisores positivos. Qual é o menor inteiro positivo com exatamente 2014 divisores positivos?

A) $2^2 3^{19} 5^{53}$ B) $2^{53} 3^{19} 5^2$ C) $2^{52} 3^{18} 5$ D) $2^{38} 3^{53}$ E) $2^{37} 3^{52}$

7) Roraima Jonas, um arqueólogo aventureiro, ao fugir de uma caverna se depara com quatro portas, numeradas de 1 até 4, e quatro mensagens. As mensagens dizem:

Mensagem 1: *"As portas 1 e 2 são seguras."*

Mensagem 2: *"Exatamente duas entre as portas 1, 2 e 3 são seguras."*

Mensagem 3: *"A porta 1 é segura."*

Mensagem 4: *"A porta 3 é segura."*

Roraima Jonas é um estudioso e, por isso, sabe que exatamente uma das mensagens é mentira e exatamente uma das portas não é segura (ativaria uma armadilha).
Qual porta Roraima Jonas pode garantir que é segura?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

E) não há nenhuma porta que Roraima pode garantir que é segura.

8) Rosa resolveu distribuir 250 reais para seus sobrinhos, dando a mesma quantia inteira (sem centavos) para cada um e percebeu que sobrariam 10 reais. Então, ela pensou em diminuir em 1 real a quantia de cada um e descobriu que sobrariam 22 reais. Por fim, ela resolveu distribuir apenas 240 reais. Quanto ganhou cada sobrinho?

A) 5 reais B) 10 reais C) 12 reais
D) 15 reais E) 20 reais

9) Em uma calculadora muito simples, não é possível apertar dois dígitos sem apertar algumas das operações $+$, $-$, $\times$ ou $\div$ entre as apertadas dos dígitos. Também não é possível apertar duas operações seguidas. Ao apertar o dígito a calculadora faz a operação imediatamente. A calculadora começa com o 0 no visor e a primeira apertada tem que ser uma operação. Ou seja, primeiro se aperta uma operação, depois um dígito, depois uma operação, e assim por diante. Por exemplo, um jeito para aparecer 29 no visor é apertar $+$ e depois 7 , fazendo aparecer $0+7=7$ no visor; em seguida, apertar $\times$ e 5 , passando a ter $7\times 5=35$ no visor, e concluir apertando $-$ e 6 tendo como resultado $35-6=29$. Assim, é possível obter 29 com 6 apertadas de botão. Pedro quer que apareça o número 100 no visor. Qual o número mínimo de apertadas, contando operações e dígitos, que Pedro tem que fazer na calculadora?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

10) A tabela a seguir mostra o preço em reais das passagens para viagens entre duas das cidades A, B, C, D e E.

As linhas indicam a cidade de partida e as colunas a de chegada. Por exemplo, para ir de A até B precisamos gastar 3 reais. Note que o preço de ida e o preço de volta entre duas mesmas cidades podem ser diferentes. Pablo quer sair de uma dessas cidades e visitar todas as demais gastando o mínimo possível (não é necessário que ele volte para a cidade de onde partiu).

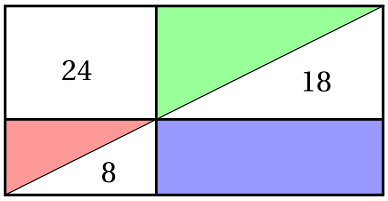
	A	B	C	D	E
A		3	1	2	5
B	2		2	1	4
C	1	3		2	1
D	2	5	4		3
E	5	2	1	4	

Quanto Pablo irá gastar?

A) 4 reais B) 5 reais C) 6 reais D) 9 reais E) 11 reais

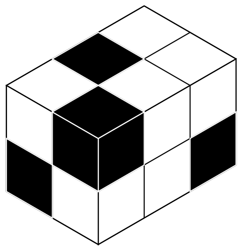
11) O retângulo da figura foi repartido por meio de três segmentos em várias regiões, algumas retangulares e outras triangulares.

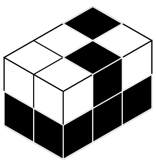
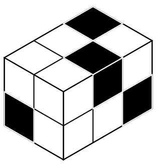
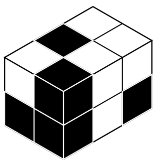
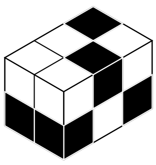
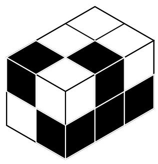
A linha não paralela aos lados é uma diagonal e os números indicam as áreas em metro quadrado das regiões brancas em que se encontram. Qual é a área do retângulo original?



A) $60\ m^2$ B) $80\ m^2$ C) $90\ m^2$
D) $100\ m^2$ E) Impossível saber.

12) A figura à direita mostra um bloco retangular montado com seis cubinhos pretos e seis cubinhos brancos, todos de mesmo tamanho. Qual das figuras abaixo mostra o mesmo bloco visto por trás?



A)  B)  C)  D)  E) 

13) Em Portugal, o dia 4 de outubro de 1582 foi o último dia do calendário *juliano*, que foi substituído pelo calendário adotado atualmente, o calendário *gregoriano*. O dia seguinte foi definido como 15 de outubro de 1582, ou seja, não houve os dias 5 a 14 de outubro de 1582.

A única diferença entre os calendários é que, no calendário juliano, todos os anos múltiplos de 4 eram bissextos, e no calendário gregoriano, os anos que são múltiplos de 100, mas não de 400, não são bissextos. Assim, 1900 seria um ano bissexto no calendário juliano, mas não no calendário gregoriano.

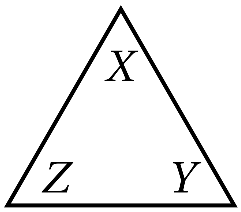
Que dia seria hoje, 3 de junho de 2014, se não tivéssemos mudado de calendário?

A) 20 de maio de 2014 B) 21 de maio de 2014 C) 22 de maio de 2014
D) 16 de junho de 2014 E) 17 de junho de 2014

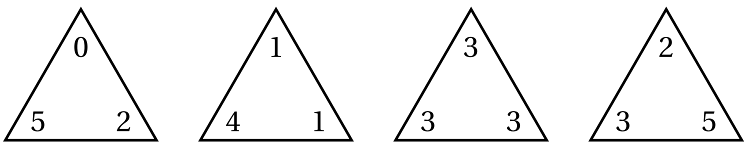
14) O número de 5 dígitos $\overline{xy26z}$, em que cada uma das letras representa um dígito, é divisível por 8, 9 e 11. Qual o valor de x?

A) 3 B) 5 C) 1 D) 4 E) 9

15) O jogo de triminó simplificado é composto por peças na forma de triângulo em que cada um dos vértices possui um número de 0 a 5. Sabe-se que para qualquer peça do triminó simplificado quando se coloca o menor dos números no vértice superior os números estão em ordem crescente no sentido horário, ou seja, a peça faz parte do triminó simplificado quando $X \le Y \le Z$.



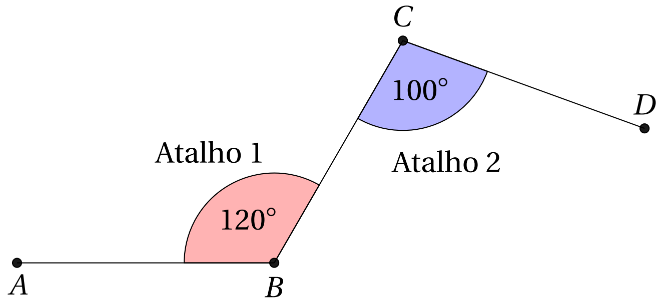
Por exemplo, das quatro peças a seguir, as três primeiras peças fazem parte do jogo, mas a quarta não.



Existem quantas peças em um jogo de triminó simplificado?

A) 216 B) 125 C) 120 D) 56 E) 30

16) *Lentos e calmos*, o mais novo jogo de corrida, possui atalhos em alguns trechos das pistas. Os atalhos são sempre arcos de circunferência com centro onde seria feita a curva no trecho normal. Considerando os dados da figura, em qual circunstância ele percorre a menor distância para ir do ponto A até o ponto D?



A) Usar o atalho 1, mas não o atalho 2.

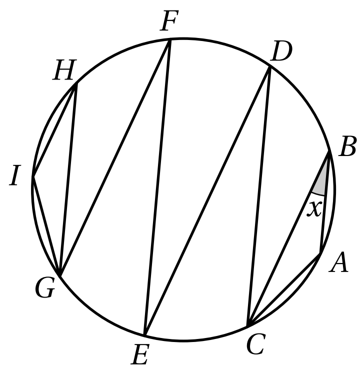
B) Usar o atalho 2, mas não o atalho 1.

C) Usar os dois atalhos.

D) Não usar nenhum dos atalhos.

E) Não há dados suficientes para determinar.

17) Considere a figura ao lado, onde os pontos de A até I estão sobre uma circunferência. Sabe-se que os triângulos ABC e GHI são isósceles, que AB, CD, EF e GH são segmentos paralelos e que BC, DE, FG e HI são segmentos paralelos. Qual a medida do ângulo x em graus?



A) 15° B) 20° C) 30° D) 40° E) 45°

18) As raízes da equação $x^2 - ax + b = 0$ são diferentes de zero e são os quadrados das raízes da equação $x^2 - bx + a = 0$. As raízes não são necessariamente reais, mas a e b são reais. Então, o valor de a é:

A) $-\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt[3]{2}$ E) $\sqrt[3]{3}$

19) Assinale a alternativa que apresenta o maior dos cinco números.

A) 2014^5 B) 3015^4 C) 4016^3 D) 5017^2 E) 6018^1

20) No triângulo ABC, $AC = 5$ e $AB = 6$. Seja P um ponto sobre a bissetriz interna do ângulo $B\hat{A}C$. Se a área de APB é $\frac{3}{2}$, a área de APC é:

A) $\dfrac{5}{4}$ B) $\dfrac{9}{5}$ C) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ D) $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ E) $\dfrac{4}{5}$

21) Considere um quadrado $ABCD$ de lado 1. Externamente ao quadrado, são formados os triângulos equiláteros ABE, BCF, CDG e DAH. Qual a área do quadrilátero $EFGH$?

A) 2 B) $2\sqrt{3}$ C) $2+\sqrt{3}$ D) 3 E) 6

22) Quantos pares ordenados (a, b) de inteiros positivos existem tais que $\dfrac{2014}{a^2+b^2}$ é inteiro?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

23) Se x, y, a e b são reais positivos tais que $\sqrt{x-y}$ e $\sqrt{x}+\sqrt{y} = b$, determine o valor de $\sqrt{xy}$.

A) $\dfrac{b^4-a^4}{4b^2}$ B) $\dfrac{a^2}{b^2}$ C) $\dfrac{b^2+a^2}{b}$ D) $\dfrac{1}{b}$ E) a^2

24) Bitonho está jogando em seu celular o *Super Paciência*, cujo objetivo é preencher um tabuleiro 2×2014 com zeros e uns de modo que dois números vizinhos iguais, em uma mesma linha, impedem que se preencha também com números iguais as casas correspondentes da outra linha. Por exemplo, no desenho abaixo, os valores de A e B não podem ser iguais.

0	1	0	$\cdots$	1	1	$\cdots$
1	1	0	$\cdots$	A	B	$\cdots$

De quantas maneiras Bitonho pode preencher um tabuleiro de Super Paciência?

A) 3^{2014} B) $4 \cdot 3^{2013}$ C) 4^{2014} D) $2 \cdot 3^{2014}$ E) $3 \cdot 4^{2014}$

25) Juca fez uma lista de todos os números inteiros positivos de quatro algarismos distintos, em ordem crescente. Em seguida, fez outra lista das diferenças positivas entre todos os pares de números vizinhos. Na segunda lista, qual foi o maior número que Juca escreveu?

A) 25 B) 36 C) 45 D) 103 E) 105

Primeira Fase – Soluções

Gabarito

1) C	6) C	11) D	16) B	21) C
2) E	7) A	12) A	17) B	22) Anulada
3) A	8) E	13) B	18) E	23) A
4) A	9) C	14) A	19) A	24) B
5) A	10) B	15) D	20) A	25) E

1) **(C)** A diferença entre dois números é ímpar apenas quando um deles é par e o outro é ímpar. O único número primo par é o número 2. Daí, se p e q são números primos diferindo por 7, um deles deve ser 2 e o outro deve ser 9. Chegamos em um absurdo, pois 9 não é primo. Todos os números dos outros itens podem ser realizados como diferença de primos: $4 = 7-3$, $6 = 11-5$, $8 = 11-3$ e $9 = 11-2$.

2) **(E)** Como 2010 é múltiplo de 6, cada uma das três cores está equidistribuída tanto entre os números pares quanto entre os números ímpares dos 2010 primeiros números. Vejamos as cores dos próximos quatro números:

2011 (Amarela), 2012 (Verde), 2013 (Preta) e 2014 (Amarela)

O elemento 2013 faz os ímpares pretos terem uma unidade a mais do que os verdes ímpares.

3) **(A)** Os três em conjunto pintam metros em $2+3+5 = 10$ metros em 10 minutos. Daí, eles vão precisar de $18 \cdot 10 = 180$ minutos para pintar os 180 metros correspondentes aos três muros.

4) **(A)** Três palavras das alternativas possuem quatro letras e duas possuem mais que quatro. Consequentemente, no máximo duas palavras possuem mais letras que a palavra da opção correta. Além disso, como todos os números são maiores ou iguais à "duas" unidades, a opção correta é a palavra "duas".

5) **(A)** Veja o problema 5 da prova do Nível 1, página 9.

6) **(C)** Como $2014 = 53 \cdot 19 \cdot 2$, o número procurado deve ter a fatoração $p^{52}q^{18}r^{1}$. Para minimizar o número, devemos associar os menores fatores primos aos maiores expoentes obtendo $2^{52}3^{18}5^{1}$.

7) **(A)** Se a porta 1 não é segura, as mensagens 1 e 3 seriam simultaneamente falsas e isso contrariaria as informações do enunciado porque sabemos que apenas uma das mensagens o é. Vale observar que cada uma das outras portas pode ser a porta não segura, resultando em nenhuma ou duas mensagens falsas.

8) **(E)** Sejam k a quantidade de sobrinhos e x a quantidade que cada um receberia na primeira divisão. Então: $kx + 10 = 250$ e $k(x-1) + 22 = 250$. Subtraindo uma equação da outra obtemos $x = 12$.

   Observação: Ver solução alternativa na questão 14 da prova do Nível 1, página 13.

9) **(C)** Uma maneira de fazer aparecer 100 com 6 apertadas é fazer: $0 + 4 \times 5 \times 5$. Como a calculadora começa com 0, após as duas primeiras apertadas, teremos um número menor ou igual a 9. Com mais duas apertadas, o número resultante será menor ou igual a $9 \times 9 = 81$. Como não podemos apertar dois dígitos sem apertar uma operação, a quinta apertada será uma operação e não produzirá nenhum número maior que 81. Logo, o mínimo é 6.

10) **(B)** A seguinte sequência de visitas possui custo total 5:

$$A \xrightarrow{1} C \xrightarrow{1} E \xrightarrow{2} B \xrightarrow{1} D.$$

   Veja que o custo de viajarmos entre cada cidade é pelo menos 1. Suponha que existe um caminho mais barato do que o apresentado. Assim, o custo de cada viagem deve ser exatamente 1 e não podemos repetir cidades em nossa trajetória. Como os custos saindo de D são pelo menos 2, D deve ser a cidade de chegada. A única maneira de chegar em D pagando 1 é vindo através de B. Veja finalmente que não é possível chegar em B pagando menos que 2.

11) **(D)** Veja o problema 11 da prova do Nível 1, página 12.

12) **(A)** Veja o problema 20 da prova do Nível 1, página 15.

13) **(B)** Incialmente, o calendário *gregoriano* impôs uma vantagem de 10 dias em relação ao calendário *juliano*. Além disso, de lá para cá, para cada um dos anos múltiplos de 100 que não são de 400, a saber: 1700, 1800 e 1900, o calendário *gregoriano* ganhou mais um dia de vantagem totalizando assim 13 dias. Como o mês de maio possui 31 dias nos dois calendários, hoje seria o dia 21 de maio de 2014 no calendário *juliano*.

14) **(A)** Pelo critério de divisibilidade por 8, os três últimos dígitos devem formar um número múltiplo de 8. A única opção admissível é $z = 4$. Pelo critério de divisibilidade por 11, $(x+2+z)-(y+6) = x-y$ deve ser divisível por 11. Como x e y são dígitos, a única opção é $x = y$. Finalmente, pelo critério de divisibilidade por 9, $(x+y+2+6+z) = 2x+12$ deve ser divisível por 9. O único dígito que satisfaz tal condição é $x = 3$.

15) **(D)** Dada uma escolha qualquer de três números no conjunto $\{0,1,2,3,4,5\}$, o triminó simplificado formado por eles é único. Existem $\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = 20$ escolhas de três números distintos em tal conjunto. Para contarmos quantas escolhas possuem exatamente dois números repetidos, basta escolhermos dois números e, em seguida, escolhermos um deles para repetirmos. Podemos fazer isso de $2\cdot\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1} = 30$ formas. Existem exatamente 6 triminós com os três números iguais. Portanto, o número procurado é:

$$20+30+6 = 56.$$

16) **(B)** A razão entre a distância percorrida por um atalho de $\alpha°$ e o caminho normal de raio R é

$$\frac{{}^{2\pi R\alpha°}\!/_{360°}}{2R} = \frac{\pi\alpha}{360°}.$$

Assim, só é vantajoso usar o atalho quando tal quociente for menor do que 1. Isto ocorre no atalho 2 e não ocorre no atalho 1.

17) **(B)** Como todo o trapézio inscritível é isósceles e os triângulos mencionados também o são, temos as igualdades entre os arcos determinados pelas seguintes cordas:

$$AB = AC = BD = CE = DF = EG = FH = IG = IH.$$

Esses 9 arcos iguais determinam a medida de $\frac{360°}{9} = 40°$. Portanto, o ângulo x mede $\frac{40°}{2} = 20°$.

18) **(E)** Sejam p e q as raízes da segunda equação. Usando as relações entre as raízes e os coeficientes de uma equação do segundo grau:

$$p + q = b,\ pq = a,\ p^2 + q^2 = a,\ p^2q^2 = b.$$

Daí, $3a = a + 2a = (p^2 + q^2) + 2pq = (p + q)^2 = b^2$ e $a^2 = p^2q^2 = b$, ou seja, $3a = b^2 = (a^2)^2 = a^4$. Como a é real não nulo, devemos ter $a = \sqrt[3]{3}$.

19) **(A)** Considere as estimativas:

$$2014^5 > 2000^5 = 32 \cdot 10^{15}$$

$$3015^4 < 4000^4 = 64 \cdot 10^{12}$$

$$4016^3 < 5000^3 = 125 \cdot 10^9$$

$$5017^2 < 6000^2 = 36 \cdot 10^6$$

$$6018^1 < 7000 = 7 \cdot 10^3$$

O último número escrito na primeira linha possui mais dígitos que todos os outros escritos nas linhas subsequentes. Dessa forma, 2014^5 é o maior.

20) **(A)** Como P está na bissetriz, ele possui igual distância r aos lados AB e AC. Assim,

$$\frac{6}{5} = \frac{6r/2}{5r/2} = \frac{\text{Área}(ABP)}{\text{Área}(APC)} = \frac{3/2}{\text{Área}(APC)} \Rightarrow \text{Área}(APC) = \frac{5}{4}.$$

21) **(C)** Como o ângulo $\angle EBF$ mede $360^\circ - 90^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 150^\circ$ e os triângulos EBF e EAH são isósceles de mesmo ângulo central. Segue que

$$\angle HEF = \angle HEA + \angle AEB + \angle BEF = 15^\circ + 15^\circ + 60^\circ = 90^\circ.$$

Além disso, por simetria, temos o mesmo resultado para os outros ângulos do quadrilátero $EFGH$ e vale que $EF = FG = GH = HE$. Consequentemente, $EFGH$ é um quadrado e sua área vale:

$$EF^2 = EB^2 + BF^2 - 2EB \cdot BF \cos(150^\circ) = 2 + \sqrt{3}.$$

22) **(Anulada)** Como $2014 = 53 \cdot 19 \cdot 2$ segue que $a^2 + b^2$ é um de seus 8 divisores. Os possíveis restos de um quadrado perfeito na divisão por 19 são: 0, 1, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 16. A única soma de dois deles que produz um múltiplo de 19 é a soma $0+0$. Assim, se $a^2 + b^2$ é múltiplo de 19, a e b também o são. Dado que 2014 não possui dois fatores de tal primo, podemos concluir que $a^2 + b^2$ deve ser um divisor de $53 \cdot 2$. As possibilidades são:

$$a^2 + b^2 = 2 \Rightarrow (a,b) = (1,1);$$

$$a^2 + b^2 = 53 \Rightarrow (a,b) = (7,2); (2,7);$$

$$a^2 + b^2 = 106 \Rightarrow (a,b) = (9,5); (5,9).$$

Portanto, existem 5 pares de soluções. Como nenhum dos itens apresenta o número 5, a questão foi anulada.

23) **(A)** Dado:

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{a^2}{b} \quad \text{e} \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = b,$$

segue que $\sqrt{x} = \dfrac{b^2 + a^2}{2b}$ e $\sqrt{x} = \dfrac{b^2 - a^2}{2b}$. Consequentemente, $\sqrt{xy} = \dfrac{b^4 - a^4}{4b^2}$.

24) **(B)** Existem 4 tipos possíveis de colunas e as regras do Super Paciência se resumem a não preenchermos uma certa coluna com a mesma configuração da coluna imediatamente anterior. Assim, uma vez que Bitonho escolheu os números de uma coluna,

ele possui 3 opções de preenchimento para a próxima. No início, podemos escolher livremente como preencher a primeira coluna. O total de preenchimentos é:

$$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 3 = 4 \cdot 3^{2013}.$$

25) **(E)** Podemos observar que, por exemplo, $(1098, 1203)$ e $(8796, 8901)$ são pares de números formados por 4 algarismos distintos entre os quais não existem números que satisfazem as condições dadas, ou seja, o valor pedido é, pelo menos, 105. Logo, basta verificar que essa é a maior distância possível entre números de quatro algarismos distintos.

A chave para obter os exemplos acima foi considerar números com algarismos do milhar e da centena consecutivos. De fato, vamos verificar que se $abcd$ é um número que satisfaz as condições do problema com $|a-b| \geq 2$, então o seu sucessor é menor do que $abcd + 105$. Inicialmente, temos que, fixado milhar e centena, nos conjuntos $\{6, 7, 8, 9\}$ e $\{0, 1, 2, 3\}$ sempre podemos tomar dois algarismos para dezena e unidade. Assim, podemos concluir que caso isso não ocorresse o próximo número com quatro algarismos consecutivos teria a forma $a(b+1)ef$ com

$$ab76 \leq abcd \leq a(b+1)ef \leq a(b+1)03.$$

Ou seja, a diferença é menor ou igual a 27, uma contradição. Portanto, basta, agora, considerar os casos em que milhar e centena são consecutivos. Vamos eliminar primeiro o caso em que o milhar é o menor algarismo.

Sendo, $1 \leq a \leq 7$, $a(a+1)cd$ e $a(a+2)ef$ um par que satisfaz as condições do problema, teríamos

$$a(a+1)76 \leq a(a+1)cd < a(a+2)ef \leq a(a+2)0(a+1)$$

e a diferença não pode ser maior do que 32. Para $a = 8$, os números são 8976 e 9012 e a diferença é 36. Finalmente, falta analisar o caso em que o milhar é o maior. Sendo, $1 \leq a \leq 7, (a+1)acd$ e $(a+1)(a+2)ef$ um par que satisfaz as condições do problema, teríamos

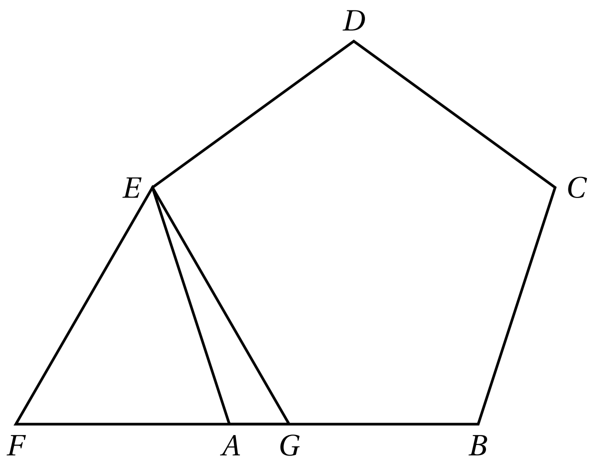
$$(a+1)a96 \leq (a+1)acd < (a+1)(a+2)ef = (a+1)(a+2)01$$

e, de fato, atingimos a diferença 105 apenas no caso $a = 7$: par $(8796, 8901)$. O caso $a = 0$, fornece o outro par $(1098, 1203)$.

Segunda Fase

PARTE A

A1) Na figura abaixo, $ABCDE$ é um pentágono regular e EFG é um triângulo equilátero. Determine a medida, em graus, do ângulo AEG.



A2) Numa sala de aula, o professor fez uma votação para ver se adiava ou não a data da prova de Matemática. Todos os alunos votaram e como resultado um terço dos alunos foi contra o adiamento e o restante a favor. Vários alunos argumentaram e o professor fez nova votação, na qual 8 alunos mudaram de opinião, de modo que $\frac{5}{9}$ dos alunos passaram a ser contra o adiamento da prova. No máximo, quantos alunos participaram da votação?

A3) A soma de 5 inteiros distintos é 1. A soma dos elementos de cada subconjunto de dois elementos desses 5 é calculada. Qual o número máximo de somas que podem ser divisíveis por 3?

A4) Determine o número de soluções com x e y inteiros positivos da equação:

$$x^2 - y^2 = 36.$$

A5) No super bola, o mais novo jogo de futebol, o jogador joga em temporadas. Cada temporada possui sete partidas e em cada partida o jogador pode obter 3 pontos se vencer, 1 ponto se empatar e 0 pontos se perder. De quantos modos diferentes um jogador pode obter exatamente 15 pontos em uma temporada?

A6) Seja $ABCD$ um quadrado de lado 4. O conjunto S de pontos no interior de $ABCD$ tem a seguinte propriedade: todo círculo de raio 1 contido totalmente em $ABCD$ contém, em sua borda ou em seu interior, pelo menos um ponto de S. Qual é a quantidade mínima de pontos de S?

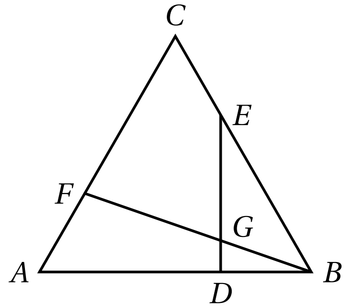
PARTE B

B1) Cantor faz uma viagem eterna de carro por uma estrada infinita partindo do quilômetro zero. Sempre que Cantor completa uma quantidade inteira de quilômetros rodados ele faz uma parada. Sempre que a parada se dá sobre um número de quilômetros da forma $6k+2$, onde k é um inteiro, ele come um chocolate do tipo 1 exatamente uma vez. Sempre que a parada se dá sobre um número da forma $4t+1$, onde t é um inteiro, ele come um chocolate de tipo 2 exatamente uma vez. Sabe-se que a cada a quilômetros, ele come o chocolate do tipo 3 exatamente uma vez. Sabe-se também que a cada b quilômetros, ele come um chocolate do tipo 4 exatamente uma vez e, finalmente; a cada c quilômetros, ele come um chocolate do tipo 5 exatamente uma vez. Só existem 5 tipos de chocolates e, em cada parada, ele come exatamente um dos cinco tipos de chocolate.

a) No momento em que Cantor parar no quilômetro 2016, quantos chocolates do tipo 1 ele terá comido? E quantos chocolates do tipo 2?

b) Sabendo que o produto dos números a, b e c é 144, determine o valor de $ab+bc+ac$.

B2) No desenho ao lado, o triângulo ABC é equilátero e $BD = CE = AF = \frac{AB}{3}$. Determine a razão $\frac{EG}{GD}$.



B3) Considere o trinômio do segundo grau $p(x) = x^2 - x + 1$.

a) Determine o número de soluções reais distintas da equação $p\left(x^2\right) = x^2$, isto é,

$$\left(x^2\right)^2 - \left(x^2\right) + 1 = x^2.$$

b) Determine o número de soluções reais distintas da equação:

$$p\left(p\left(x\right)\right) = p\left(x\right).$$

Segunda Fase – Soluções

Parte A

Problema	A1	A2	A3	A4	A5	A6
Resposta	12	36	6	1	56	4

A1) O ângulo externo a um vértice de um pentágono regular é 72° enquanto que o ângulo interno de um triângulo equilátero é 60°. Assim, pelo teorema do ângulo externo aplicado ao triângulo EAG com respeito ao ângulo externo do vértice A, temos:

$$x = \angle FAE - \angle EGA = 72^\circ - 60^\circ = 12^\circ.$$

A2) Seja x a quantidade de alunos da sala. Alguns alunos podem ter mudado o voto de "a favor" para "contra" e vice-versa. A diferença entre as quantidades de alunos nas duas circunstâncias que votaram contra representa o saldo entre esses dois tipos de trocas. Como apenas oito alunos mudaram de ideia, tal saldo não pode ser maior que 8, ou seja,

$$\frac{2x}{9} = \frac{5x}{9} - \frac{x}{3} \leq 8.$$

Portanto, $x \leq 36$.

A3) Sejam x, y e z as quantidades de inteiros dentre os 5 que deixam restos 0, 1 e 2 na divisão por 3, respectivamente. Como a soma dos 5 é igual a 1, $0 \cdot x + 1 \cdot y + 2 \cdot z = y + 2z$ deixa resto 1 na divisão por 3. Naturalmente, x, y e z são elementos do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. A última equação determina uma relação entre os possíveis valores de y e z:

i) se $y = 0$, $z = 2$ ou $z = 5$;

ii) se $y = 1$, $z = 0$ ou $z = 3$;

iii) se $y = 2$, $z = 1$;

iv) se $y = 3$, $z = 2$;

v) se $y = 4$, $z = 0$;

vi) se $y = 5$, não existe valor possível para z.

Em um subconjunto de dois elementos com soma divisível por 3, ou ambos os inteiros são divisíveis por 3 ou um deles deixa resto 1 e o outro resto 2. Portanto, a expressão que conta o número de somas divisíveis por 3 é:

$$\binom{x}{2} + y \cdot z.$$

Lembrando que $x = 5 - y - z$ e estudando cada uma das cinco possibilidades para (x, y, z) resultantes da análise acima, como indicado na tabela abaixo, podemos concluir que a quantidade máxima que ocorre é 6 quando $(x, y, z) = (0, 3, 2)$.

x	y	z	Total de Somas
3	0	2	3
0	0	5	3
4	1	0	6
1	1	3	3
2	2	1	3
0	3	2	6
1	4	0	0

A4) Fatorando a expressão dada, temos $(x - y)(x + y) = 36$. Como a soma de $x + y$ e $x - y$ é par, ou ambos são pares ou ambos são ímpares. Como 36 é par, ambos são pares e podemos escrever:

$$\frac{x-y}{2} \cdot \frac{x+y}{2} = 9.$$

Como $\frac{x+y}{2} > 0$, e 9 possui apenas $\{1,3,9\}$ como divisores positivos, sabendo que $\frac{x+y}{2} > \frac{x-y}{2} > 0$, concluímos que:

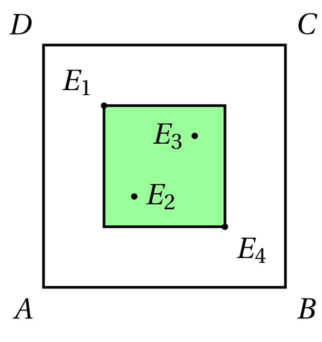
$$\frac{x-y}{2} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{x+y}{2} = 9.$$

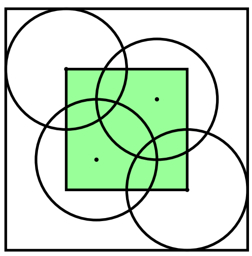
Resolvendo o sistema resultante, temos $(x, y) = (10, 8)$.

A5) Um jogador deve obter pelo menos 4 vitórias, pois, caso contrário, sua pontuação será no máximo $3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 13$.

Com 4 vitórias, o jogador deve obter exatamente 3 empates. Em tal circunstância existem $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$ maneiras de arranjar esses resultados dentre os sete jogos, pois basta escolher as partidas que serão empates. Com 5 vitórias, ele deve perder os outros dois jogos. Em tal circunstância existem $\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$ maneiras de arranjar esses resultados dentre os sete jogos, pois basta escolher quais partidas serão derrotas. Logo, o total é $35 + 21 = 56$.

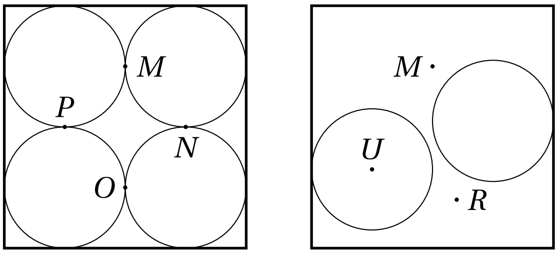
A6) Para um círculo de raio 1 estar totalmente contido no quadrado $ABCD$, seu centro deve estar no quadrado sombreado na figura abaixo que possui lado 2 e cujos lados distam 1 dos lados do quadrado original. Supondo o vértice A na coordenada $(0;0)$, consideremos o conjunto S formado pelos pontos E_1, E_2, E_3 e E_4 situados nas coordenadas $(1;3)$, $(1,5;1,5)$, $(2,5;2,5)$ e $(3;1)$.





Os círculos de raio 1 centrados nesses pontos cobrem por completo o quadrado sombreado e isso mostra que qualquer ponto dentro de tal quadrado dista não mais que 1 dos pontos mencionados anteriormente. Mostremos agora que tal valor é mínimo.

Suponha, por absurdo, que é possível escolher um conjunto adequado **S** que possui apenas 3 pontos. Consideremos a figura abaixo:



Como cada um dos quatro círculos de raio 1 assinalados deve possuir pelo menos um ponto de **S**, pelo menos um ponto do conjunto $\{M, N, P, O\}$ deve ser escolhido para ser um elemento de tal conjunto pois, caso contrário, tirando estes 4 pontos temos quatro conjuntos disjuntos que possuem cada um 1 elemento de **S**. Vamos supor que seja M um dos pontos escolhidos. O círculo inferior direito deve possuir algum ponto R de **S**. Se tal ponto não coincide com N, é possível encontrarmos dois círculos disjuntos de raios unitários que não contém os pontos M e R apenas transladando os círculos superior direito e inferior esquerdo da primeira figura. Assim, o conjunto **S** deveria possuir mais dois outros pontos em cada um deles. Isso produziria um absurdo. Analogamente, podemos mostrar que P deve ser escolhido. Se M, N e P estão em **S**, o círculo de centro O e raio 1 não possui pontos de tal conjunto. Isso gera também um absurdo.

Parte B

B1) a) A cada 6 paradas consecutivas, sabemos que ele come exatamente um chocolate do tipo 1. Assim, após 2016 paradas, ele terá comido $\frac{2016}{6} = 336$ chocolates. Analogamente, ele terá comido $\frac{2016}{4} = 504$ chocolates do tipo 2.

b) Repetindo o procedimento do item a) para os outros tipos de chocolates e sabendo que ele consumiu exatamente 2016 chocolates por ter feito 2016 primeiras paradas, podemos concluir que:

$$\left\lfloor \frac{2016}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2016}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2016}{c} \right\rfloor + \frac{2016}{4} + \frac{2016}{6} = 2016.$$

Como a, b e c dividem 144 e 144 divide 2016, segue que cada uma das frações $\frac{2016}{a}$, $\frac{2016}{b}$ e $\frac{2016}{c}$ são inteiros, assim;

$$1176 = \frac{2016}{a} + \frac{2016}{b} + \frac{2016}{c} = \frac{2016\cdot(ab+ac+bc)}{abc} = \frac{2016\cdot(ab+ac+bc)}{144},$$

ou seja,

$$ab+ac+bc = \frac{1176\cdot 144}{2016} = 84.$$

Observação: Para cada um dos tipos de chocolates, as paradas realizadas por Cantor correspondem aos termos de uma progressão aritmética. É possível mostrar que as cinco progressões para a viagem de Cantor são os inteiros das formas: $4k+1$, $4k+3$, $6k$, $6k+2$ e $6k+4$. Nesse caso, $ab+bc+ca = 4\cdot 6+6\cdot 6+6\cdot 4 = 84$.

B2) **Primeira Solução:** Se $S(XYZ)$ denota a área do triângulo XYZ, a razão $\frac{EG}{GD}$ pode ser calculada através das razões de áreas:

$$\frac{EG}{GD} = \frac{S(EGB)}{S(GDB)} = \frac{S(EFG)}{S(FDG)} = \frac{S(EGB)+S(EFG)}{S(GDB)+S(FDG)} = \frac{S(EFB)}{S(FDB)}.$$

Além disso, temos:

$$\frac{S(EFB)}{S(ABC)} = \frac{S(EFB)}{S(CFB)}\cdot\frac{S(CFB)}{S(ABC)} = \frac{EB}{BC}\cdot\frac{CF}{CA} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

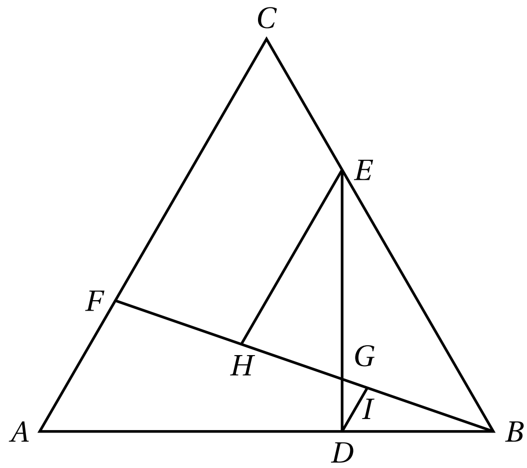
Analogamente,

$$\frac{S(FDB)}{S(ABC)} = \frac{1}{9}.$$

Portanto,

$$\frac{EG}{GD} = \frac{S(EFB)}{S(ABC)}\cdot\frac{S(ABC)}{S(FDB)} = \frac{4}{9}\cdot 9 = 4.$$

Segunda Solução: Pelos pontos E e D, respectivamente, trace paralelas ao lado AC determinando os pontos H e I sobre o segmento FB. Seja $AB = 3x$.



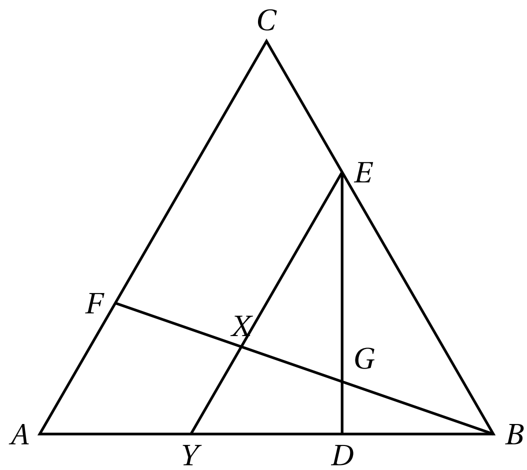
Temos $\Delta EHB \sim \Delta CFB$ e $\Delta IDB \sim \Delta FAB$, daí:

$$\frac{HE}{2x} = \frac{HE}{FC} = \frac{EB}{BC} = \frac{2x}{3x} \quad \text{e} \quad \frac{ID}{x} = \frac{ID}{FA} = \frac{DB}{AB} = \frac{x}{3x}.$$

Portanto, $HE = \dfrac{4x}{3}$ e $ID = \dfrac{x}{3}$. Como, $\Delta GID \sim \Delta HGE$, segue que:

$$\frac{EG}{GD} = \frac{HE}{ID} = \frac{\frac{4x}{3}}{\frac{x}{3}} = 4.$$

Terceira Solução: Trace a paralela a AC por E encontrando FB no ponto X e AB em Y.



Como EY e AC são paralelas, temos $\frac{AY}{AB} = \frac{CE}{CB} \Rightarrow AY = CE = \frac{AB}{3}$. Desse modo,

$$AY = YD = DB = \frac{AB}{3}.$$

Sabe-se também que:

$$\Delta ABC \sim \Delta YBE \Rightarrow \frac{XY}{XE} = \frac{FA}{FC} = \frac{1}{2}.$$

Agora podemos usar o Teorema de Menelaus no triângulo ΔDEY e reta $\overline{BGX}$:

$$\frac{EG}{GD} \cdot \frac{DB}{BY} \cdot \frac{YX}{XE} = 1 \Rightarrow \frac{EG}{GD} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \frac{EG}{GD} = 4.$$

B3) a) A equação $\left(x^2\right)^2 - \left(x^2\right) + 1 = x^2$ pode ser reescrita como:

$$\left(x^2 - 1\right)^2 = \left(x^2\right)^2 - \left(x^2\right) + 1 - x^2 = 0.$$

Como $\left(x^2 - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$, segue que $x = \pm 1$. Portanto, neste caso, o número de soluções reais distintas é 2.

b) Seja $p(x) = y$. Queremos determinar as raízes de $p\left(y\right) = y$, ou seja,

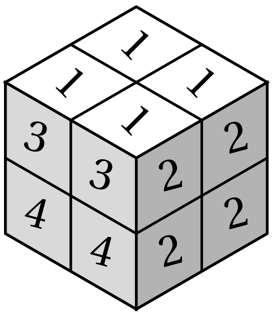
$$y^2 - y + 1 = y \Leftrightarrow (y-1)^2 = 0.$$

Devemos ter $y = 1$ e consequentemente $x^2 - x + 1 = 1$. As raízes desta equação do segundo grau são 0 e 1. Portanto, temos também, neste caso, duas soluções reais distintas.

Terceira Fase

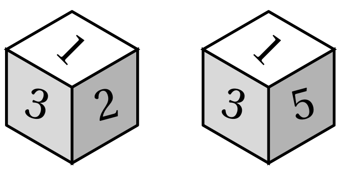
1) Um dado comum de jogo é um cubo em que as faces possuem os números de 1 até 6, no qual os números em faces opostas somam 7. Colando-se oito dados, monta-se um *superdado* que é um cubo em que cada face é composta por quatro faces dos dados menores. Sabe-se também que duas faces dos dados menores que foram coladas para formar o superdado têm necessariamente o mesmo número. Observe que faces coladas não podem ser mais vistas e os números iguais em cada face podem estar invertidos ou deitados.

   a) Qual a soma dos números das seis faces do superdado abaixo?



   b) Monte um superdado com soma dos números das seis faces igual a 106.

   Observação: Existem dois dados de jogo possíveis, mudando apenas as faces que possuem o 2 e o 5. Como na figura a seguir, você pode usar cada um dos dois quantas vezes achar necessário.



2) Sejam AB um diâmetro da circunferência e CD uma corda perpendicular a tal diâmetro. Sejam ainda E o ponto de interseção entre CD e AB e P um ponto qualquer sobre a corda CD diferente de E. As retas AP e BP intersectam a circunferência novamente em F e G, respectivamente. Se O é o circuncentro do triângulo EFG, mostre que a área do triângulo OCD é sempre a mesma para qualquer que seja o ponto P escolhido.

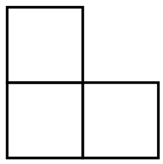
3) Encontre todos os inteiros n, $n > 1$, com a seguinte propriedade: para todo k, $0 \leq k < n$, existe um múltiplo de n cuja soma dos algarismos, na base decimal, deixa resto k na divisão por n.

4) Considere um quadrado $ABCD$ de centro O. Sejam E, F, G e H pontos no interior dos lados AB, BC, CD e DA, respectivamente, tal que $AE = BF = CG = DH$. Sabe-se que OA intersecta HE no ponto X, OB intersecta EF no ponto Y, OC intersecta FG no ponto Z e OD intersecta GH no ponto W. Dado que Área $(EFGH) = 1$, calcule

$$\text{Área } (ABCD) \times \text{Área } (XYZW).$$

5) Sejam p e q inteiros. Sabendo que $x^2 + px + q$ é positivo para todo x inteiro, prove que a equação $x^2 + px + q$ não possui solução real.

6) Em cada casa de um tabuleiro $2m \times 2n$ está escrito um inteiro. A operação permitida é escolher três casas formando uma figura congruente a um L-triminó, como indicado na figura abaixo, e somar 1 ao inteiro em cada uma das três casas. Determine a condição necessária e suficiente, em função de m, n e dos números iniciais, para que seja possível deixar todos os números iguais.



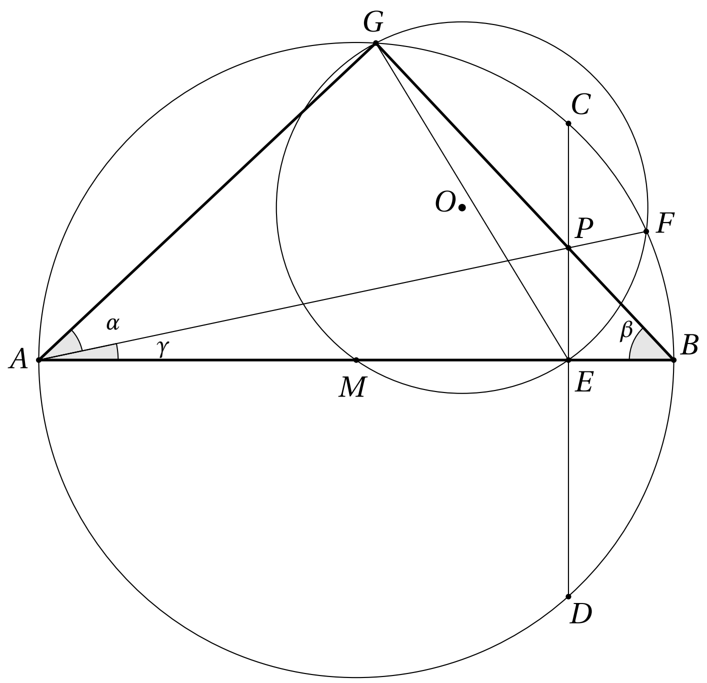
Terceira Fase – Soluções

1) a) Se dois dados adjacentes possuem uma face com o número x em comum, então as faces opostas que não estão em contato contêm ambas o mesmo número $7-x$. Assim, as somas dos números das três faces visíveis do dado da figura são iguais às somas das três faces não visíveis e a soma dos números das seis faces é:

$$2\cdot(1+1+1+1)+2\cdot(3+3+4+4)+2\cdot(2+2+2+2)=52.$$

b) Ver o problema 3, item b) da prova do Nível 1, página 29.

2) Sejam $\alpha=\angle GAF$, $\beta=\angle GBA$ e $\gamma=\angle FAB$.



Como AB é um diâmetro, segue que $\angle AGB=\angle AFB=90°$. De $PE\perp AB$, podemos concluir que a circunferência de diâmetro AP passa por A, G, P e E. Assim $\angle GEP=\alpha$. De modo semelhante, podemos concluir que $\angle PEF=\alpha$. Além disso, como $\angle GMF$ é central e $\angle GAF$ é interno, vale que $\angle GMF=2\alpha$. Finalmente, de $\angle GMF=\angle GEF$, podemos concluir que M está no circuncírculo de EFG e assim O pertence a mediatriz de ME. Portanto, a área do triângulo OCD é $\frac{ME\cdot CD}{4}$ e não depende do ponto P.

3) Afirmamos que os inteiros com essa propriedade são exatamente os não múltiplos de 3.

Observemos que se 3 divide n, então todo múltiplo de n é também múltiplo de 3, e, portanto, tem a soma dos dígitos múltiplo de 3 e assim seu resto módulo n é divisível por 3. Portanto, qualquer resto não divisível por 3 não é possível ser obtido quando dividimos por n.

Agora, se 3 não divide n, construiremos primeiro o resto $n-9$. Isso pode ser feito observando que pelo Princípio das Casas dos Pombos, entre os números 10, 100, 1000, ... existem dois que deixam o mesmo resto quando divididos por n.

Suponhamos que esses números sejam 10^{a+x} e 10^a. Assim, n divide $10^{a+x}-10^a$, e, portanto, também divide

$$10^{a+x+y}-10^{a+y}=10^y\left(10^{a+x}-10^a\right).$$

Observemos que fazendo $y=ix$ temos que $10^{a+(1+i)x}$ e 10^{a+ix} deixam o mesmo resto quando divididos por n.

Em particular, temos que os números 10^a, 10^{a+x}, 10^{a+2x}, 10^{a+3x}, ... deixam o mesmo resto quando divididos por n. Dessa forma, o número

$$M=\underbrace{10^a+\cdots+10^a}_{\text{10 vezes}}+10^{a+2x}+\cdots+10^{a+(n-9)x}$$

é divisível por n. O número M tem $n-9$ dígitos 1's e os demais são 0's.

Se M tem $k-1$ algarismos, em particular $M\le 10^k$, temos que o número

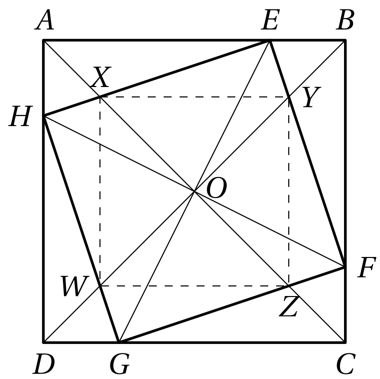
$$M+10^kM+10^{2k}M+\cdots+10^{(l-1)k}M$$

possui $(n-9)l$ algarismos 1's e os demais são 0's. Assim, a soma dos algarismos é $(n-9)l$ e como $\text{mdc}(n-9,n)=\text{mdc}(n,9)=1$, quando variamos l, $(n-9)l$ percorre todos os restos módulo n.

4) Sejam x e y as medidas dos comprimentos de AE e AH, respectivamente. Dado que $AH = EB$, $AE = BF$ e $\angle HAE = \angle EBF$, segue que os triângulos AEH e EBF são congruentes. Daí

$$\angle HEF = 180^\circ - \angle HEA - \angle BEF = 180^\circ - \angle EFB - \angle BEF = 90^\circ.$$

De modo semelhante, podemos concluir que $\angle EFG = \angle FGH = \angle GHE = 90^\circ$.



Pelo Teorema de Pitágoras, $HE^2 = x^2 + y^2$. O mesmo vale para os demais lados do retângulo $HEFG$. Assim, a sua área é $A_{HEFG} = x^2 + y^2$. O nosso próximo passo é mostrar que $XYZW$ também é um quadrado. Para isso, como AC é bissetriz de $\angle HAE$, decorre do Teorema da Bissetriz Interna que

$$\begin{aligned} \frac{HX}{EX} &= \frac{AH}{AE} \Rightarrow \\ \frac{HX}{HX+EX} &= \frac{AH}{AH+AE} \Rightarrow \\ HX &= \frac{y}{x+y}. \end{aligned}$$

De modo semelhante, $EX = \dfrac{x}{x+y}$. A diagonal BD também é bissetriz de $\angle EBF$ e $\triangle EBF \equiv AHE$. Daí $EY = HX = \dfrac{y}{x+y}$ e podemos concluir por analogia ao argumento inicial, agora aplicado ao quadrado $HEFG$, que os pontos X, Y, Z e W são vértices de um quadrado. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo EXY, obtemos

$$\begin{aligned} XY^2 &= EX^2 + EY^2 \\ &= \frac{x^2}{(x+y)^2} + \frac{y^2}{(x+y)^2}. \end{aligned}$$

Portanto, a área do quadrilátero $XYZW$ é $A_{XYZW} = \dfrac{x^2+y^2}{(x+y)^2}$. Como $A_{EFGH} = 1$, segue que $x^2+y^2 = 1$ e que

$$A_{ABCD} \cdot A_{XYZW} = (x+y)^2 \cdot \frac{x^2+y^2}{(x+y)^2} = 1.$$

5) Suponhamos que $x^2+px+q = 0$ possua solução real. Sejam x_1 e x_2 essas soluções. Temos, então, dois casos:

Caso 1: Se $x_1 = x_2$, então $\Delta = p^2-4q = 0 \Rightarrow p^2 = 4q$. Como $q \in \mathbb{Z}$, sabemos que p é par. Assim,

$$x_1 = x_2 = \frac{-p}{2} \Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{Z}.$$

Absurdo, pois $x^2+px+q > 0$ para todo $x \in \mathbb{Z}$ e, portanto, $x_1, x_2 \notin \mathbb{Z}$.

Caso 2: Se $x_1 \neq x_2$, suponha sem perda de generalidade $x_1 < x_2$. Se existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que $x_1 \le t \le x_2$ e $t^2+pt+q \le 0$ temos uma contradição, pois a equação é positiva para todo $x \in \mathbb{Z}$. Portanto, não existe número inteiro entre x_1 e x_2.

Assim, existe $u \in \mathbb{Z}$ tal que $u < x_1 < x_2 < u+1$, lembrando que não podemos ter a igualdade, pois isso seria dizer que uma das raízes pode ser inteira. Por fim,

$$0 < x_2 - x_1 < 1 \Rightarrow 0 < \left[\frac{-p+\sqrt{\Delta}}{2}\right] - \left[\frac{-p-\sqrt{\Delta}}{2}\right] < 1 \Rightarrow 0 < \sqrt{\Delta} < 1.$$

Isso quer dizer que $0 < \Delta < 1 \Rightarrow 0 < p^2-4q < 1$, um absurdo já que $p^2-4q \in \mathbb{Z}$.

Assim, temos que a equação x^2+px+q não possui solução real.

6) Como em cada passo a soma dos números aumenta em 3, então uma condição necessária para conseguir deixar todos os números iguais é que a soma seja múltipla de 3 quando mn seja divisível por 3. Afirmamos que essa condição também é suficiente. Para isso, primeiro faremos os casos pequenos 2×2, 2×4, 4×4 e 2×6.

No caso 2×2, podemos transformar um tabuleiro com os números a, b, c, d em um com 4 entradas iguais a $a+b+c+d$.

b	c
a	d

$b+a$	$c+a$
a	$d+a$

$b+a$ $+d$	$c+a$ $+d$
$a+d$	$d+a$

$b+a$ $+d$	$c+a$ $+d+b$
$a+d$ $+b$	$d+a$ $+b$

$b+a$ $+d+c$	$c+a$ $+d+b$
$a+d$ $+b+c$	$d+a$ $+b+c$

Note que sobre os Ls em cinza, a operação deve ser feita a, b, c, d vezes, respectivamente. Observemos que se aplicamos o proceso uma vez em cada direção, obtemos um quadrado com cada uma das entradas aumentada em três unidades.

No caso 2×4, sejam S_1, S_2 as somas das primeiras duas colunas e das últimas duas colunas, respectivamente. Usando caso anterior podemos chegar à seguinte configuração

S_1	S_1	S_2	S_2
S_1	S_1	S_2	S_2

Se $S_1 = S_2$, o problema está resolvido, assim podemos supor, sem perda de generalidade, que $S_1 > S_2$. Assim, podemos obter as seguintes configurações, a partir do tabuleiro anterior

S_1	S_1	$2S_1-S_2$	S_2
S_1	$3S_1-2S_2$	$2S_1-S_2$	S_2

S_1	$3S_1-2S_2$	$4S_1-3S_2$	S_2
S_1	$3S_1-2S_2$	$4S_1-3S_2$	S_2

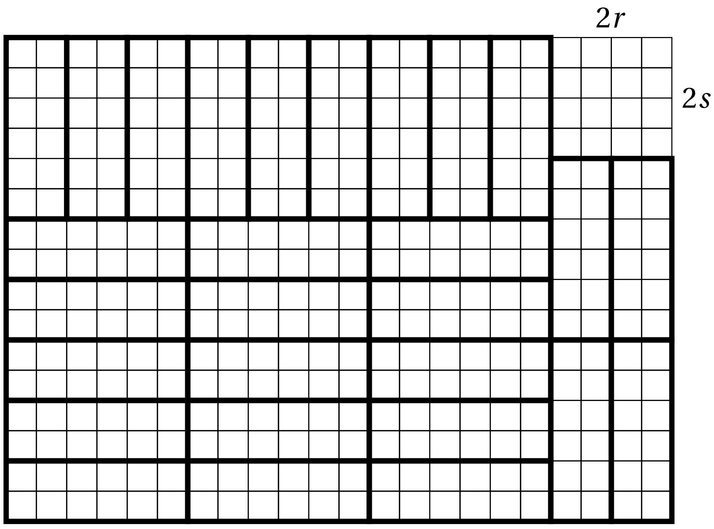
Finalmente, aplicando o caso anterior, nas primeiras duas colunas e nas últimas duas columas, vamos obter um tabuleiro que tem todas as entradas iguais a

$$S_1 + S_1 + (3S_1 - 2S_2) + (3S_1 - 2S_2) = 8S_1 - 4S_2 = S_2 + S_2 + (4S_1 - 3S_2) + (4S_1 - 3S_2).$$

O caso 4×4 é tratado analogamente, fazendo com que as entradas das primeiras duas colunas fiquem em linhas iguais, assim como das duas últimas colunas. Depois se resolve o problema considerando as primeiras duas linhas e depois as últimas duas linhas.

Para o caso 2×6, usando o caso anterior, podemos supor que as entradas nas primeiras quatro colunas são iguais a S_1 e as entradas das duas últimas são iguais a S_2. Como a soma das entradas iniciais é divisível por 3 e a divisibilidade por 3 não muda quando fazemos uma operação, temos que $8S_1 + 4S_2$ é divisível por 3, e, portanto $S_1 - S_2$ é divisível por 3. Supondo que $S_1 > S_2$ (ou outro caso é análogo) , seguindo a observação do primeiro caso, podemos aumentar em 3 cada uma das entradas das últimas duas colunas, e portanto podemos fazer todas as entradas iguais.

Agora, vejamos o caso geral. Sendo $2n = 6k + 2r, 2m = 6k + 2s; r, s < 3$, podemos dividir o tabuleiro $2n \times 2m$ em um tabuleiro $2r \times 2s$, e vários tabuleiros 2×6.



Adicionamos Ls entre os tabuleiros 2×6 de tal maneira que sua soma se torne divisível por 3, mas possivelmente bagunçando um tabuleiro mais à direita, ou acima. Continuamos a fazer isso, e a parte do tabuleiro que está separada em 2×6s divisíveis por 3 aumenta até possivelmente sobrar uma região.

Se $r = 0$ ou $s = 0$, então estamos supondo que a soma é divisível por 3. Assim, não haverá região nenhuma sobrando. Neste caso, nós inicialmente uniformizamos cada um deles separadamente. Em seguida, note que, combinando 4 Ls podemos preencher um tabuleiro 2×6, ou seja, utilizando 4 operações podemos somar 1 em todas as casas de um 2×6. Assim, conseguimos igualar todas as regiões, como desejado.

Suponha, agora, que $r, s, \neq 0$. A região cuja soma não é múltipla de 3 é a região $2r \times 2s$, que poderá ser uniformizada independentemente da divisibilidade. Inicialmente, nós uniformizamos cada uma das regiões 2×6. Em seguida, adicionamos L's no retângulo $2r \times 2s$ até que sua soma seja maior do que a soma de qualquer outra região, e uniformizamos ele. Note que cada casa se torna pelo menos tão grande quanto a soma inicial. Por fim, nós seguimos a observação que 4 L's preenchem a região 2×6, de modo a igualar todas as casas.

Premiados

Medalha de Ouro

Nome	Cidade Estado	Pontos
André Yuji Hisatsuga	São Paulo SP	345
Bruno Brasil Meinhart	Fortaleza CE	294
Tarcisio Soares Teixeira Neto	Fortaleza CE	290
Davi Cavalcanti Sena	Recife PE	289
João Guilherme Madeira Araújo	Fortaleza CE	277
Bryan Diniz Borck	Porto Alegre RS	276

Medalha de Prata

Nome	Cidade Estado	Pontos
Pedro Lucas Lanaro Sponchiado	S.C do Rio Pardo SP	271
Julia Perdigão Saltiel	Rio de Janeiro RJ	266
Brendon Diniz Borck	Porto Alegre RS	250
Diogo Correia Netto	Sorocaba SP	223
Ulisses Ferreira de Sousa	Recife PE	220
Jonathan Raniere Pereira de Oliveira	Fortaleza CE	218
Mark Helman	Rio de Janeiro RJ	217
Adrian Alexander Ticona Delgado	São Paulo SP	213
Carlos Roberto Bastos Lacerda	Rio de Janeiro RJ	197

Medalha de Bronze

Nome	Cidade Estado	Pontos
Matheus França da Silva Sá	Belo Horizonte MG	188
Matheus Rodrigues Varela	Rio de Janeiro RJ	188
Diene Xie	Curitiba PR	186
Emmanuel da Silva Dias	Porto Alegre RS	186
Davi Xie	Curitiba PR	184
Lorenzo Andreaus	Blumenau SC	183
Miriam Harumi Koga	Guarulhos SP	183
Lucas dos Anjos Dantas Teixeira	São Paulo SP	178
Pietro Motta Geronimi	Rio de Janeiro RJ	178
Juliana Carvalho de Souza	Igarapi MG	176
Nathan Luiz Bezerra Martins	Fortaleza CE	175
Bruno Barros de Sousa	Xambioa TO	174
Mariana Bigolin Groff	F. Westphalen RS	174
Francisco Bruno Dias Ribeiro da Silva	Teresina PI	172
Danilo Marinho Fernandes	Brasília DF	171
Lucas Hiroshi Hanke Harada	São Paulo SP	171
Felipe Bezerra de Menezes Benício de S.	Fortaleza CE	170
Diemison Vargas de Cerqueira	Belo Horizonte MG	169
Breno Rodrigues Cabral	Rio de Janeiro RJ	168

Menção Honrosa

Nome	Cidade Estado	Pontos
Eric Arcanjo Bringel	Fortaleza CE	162
Rafael Della Giustina Basilone Leite	Florianópolis SC	162
Geovane de Oliveira Coelho	Fortaleza CE	160
João Pedro Mello de Carvalho	Rio de Janeiro RJ	160
Vilmar Ribeiro Machado Júnior	Fortaleza CE	160
Lara Franciulli Teodoro de Souza	Guarulhos SP	157
Davi Silva Nogueira Gomes	Fortaleza CE	156
David Felipe Brochero Giraldo	Belo Horizonte MG	155
Henrique Juziuk Berger	Santos SP	154
Marcelo Barbosa Figueiredo	Rio de Janeiro RJ	154
Vinícius Brito de Oliveira	Fortaleza CE	154
Yan Victor Souza Guimarães	Fortaleza CE	153
Victor Cambraia Nogueira de Oliveira	Fortaleza CE	152
Viviane Maria Correa Oliveira	São Paulo SP	152
Fernando Ribeiro de Senna	Jundiaí SP	151
Luísa de Andrade Lima Marinho	Recife PE	150
Thiago Sena de Queiroz	Fortaleza CE	150
Marcelo Hippólyto de Sandes Peixoto	Fortaleza CE	147
Bruna Malvar Castello Branco	Rio de Janeiro RJ	145
Ana Camila Tibes Ayala Alberton	Curitiba PR	144
Henrique Barreto	Rio de Janeiro RJ	143
Samuel Lima Bezerra	Fortaleza CE	142
Artur Laurindo	São Paulo SP	141
Isabella Farias Bezerra	Fortaleza CE	140
João Luíz Martins Braga	Rio de Janeiro RJ	140
Bianca Yumi Ishikawa	Sorocaba SP	139
João Vitor Baptista Moreira	Viçosa MG	139
Marcos Foloni	Sobral CE	138
João Marcelo Gomes Marques	Teresina PI	137
Vinicius Gabriel Félix Barbosa	Caucaia CE	137
Paulo Batista Simões	Olinda PE	136
Samuel Prieto Lima	Goiânia GO	135
Caio Augusto Cruz Araújo	São Paulo SP	134
Daniel Yan	São Paulo SP	134
João Victor Omena Cardoso	Maceió AL	134
José Vitor Alécio Rodrigues	João Pessoa PB	131
Pedro Henrique Lopes Araújo	Teresina PI	131
Bruno Martins Bezerra Farias	Fortaleza CE	130
Cassiano Hildebrand dos Santos	Campo Grande MS	130
Leticia Verri Marquez	Uberlândia MG	129
Renan Francisco Costa Brito	Teresina PI	129

36ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
NÍVEL 3

Primeira Fase

1) Para descobrir a quantidade de divisores positivos de um número inteiro positivo n basta tomar sua fatoração em primos e calcular o produto dos expoentes dos primos adicionados de 1. Por exemplo, $2800 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 7$ possui $(4+1)(2+1)(1+1) = 30$ divisores positivos. Qual é o menor inteiro positivo com exatamente 2014 divisores positivos?

A) $2^2 3^{19} 5^{53}$ B) $2^{53} 3^{19} 5^2$ C) $2^{52} 3^{18} 5$ D) $2^{38} 3^{53}$ E) $2^{37} 3^{52}$

2) Roraima Jonas, um arqueólogo aventureiro, ao fugir de uma caverna se depara com quatro portas, numeradas de 1 até 4, e quatro mensagens. As mensagens dizem:

Mensagem 1 : *"As portas* 1 *e* 2 *são seguras."*

Mensagem 2 : *"Exatamente duas entre as portas* 1, 2 *e* 3 *são seguras."*

Mensagem 3 : *"A porta* 1 *é segura."*

Mensagem 4 : *"A porta* 3 *é segura."*

Roraima Jonas é um estudioso e, por isso, sabe que exatamente uma das mensagens é mentira e exatamente uma das portas não é segura (ativaria uma armadilha).
Qual porta Roraima Jonas pode garantir que é segura?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

E) Não há nenhuma porta que Roraima possa garantir que é segura.

3) Quantas alternativas contêm uma palavra com mais letras que a palavra na alternativa correta?

A) Duas B) Três C) Quatro D) Cinco E) Seis

4) Considere um quadrado $ABCD$ de lado 1. Externamente ao quadrado, são formados os triângulos equiláteros ABE, BCF, CDG e DAH. Qual a área do quadrilátero $EFGH$?

A) 2 B) $2\sqrt{3}$ C) $2+\sqrt{3}$ D) 3 E) 6

5) Assinale a alternativa que apresenta o maior dos cinco números.

A) 2014^5 B) 3015^4 C) 4016^3 D) 5017^2 E) 6018^1

6) Cada uma de 2014 bolas é pintada de azul, verde ou amarelo e é colocada aleatoriamente em uma das três urnas, a primeira azul, a segunda verde e a terceira amarela. Qual é a probabilidade de que cada urna contenha exatamente as bolas com a sua respectiva cor?

A) $\frac{1}{3^{2014}}$ B) $\frac{1}{3^{2013}}$ C) $\frac{1}{9^{2014}}$ D) $\frac{1}{3^{4017}}$ E) $\frac{1}{9^{2013}}$

7) O número de 5 dígitos $\overline{xy26z}$, em que cada uma das letras representa um dígito, é divisível por 8, 9 e 11. Qual o valor de x?

A) 3 B) 5 C) 1 D) 4 E) 9

8) A Sequência de Fibonacci é definida recursivamente por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para $n \in \mathbb{Z}$ e $F_1 = F_2 = 1$. Então,

$$\left(1-\frac{F_2^2}{F_3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{F_3^2}{F_4^2}\right)\cdot\left(1-\frac{F_4^2}{F_5^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{F_{2013}^2}{F_{2014}^2}\right)$$

é igual a:

A) $\dfrac{F_{2016}}{F_{2013}^2}$ B) $\dfrac{F_{2014}}{F_{2013}}$ C) $\dfrac{F_{2015}^2}{F_{2013}^2}$ D) $\dfrac{F_{2015}}{2}$ E) $\dfrac{F_{2015}}{2F_{2013}F_{2014}}$

9) Em uma calculadora muito simples, não é possível apertar dois dígitos sem apertar algumas das operações $+$, $-$, $\times$ ou $\div$ entre as apertadas dos dígitos. Ao apertar o dígito a calculadora faz a operação imediatamente. A calculadora começa com o 0 no visor e a primeira apertada tem que ser uma operação. Ou seja, primeiro se aperta uma operação, depois um dígito, depois uma operação, e assim por diante. Por exemplo, um jeito para aparecer 29 no visor é apertar $+$ e depois 7, fazendo aparecer $0+7=7$ no visor. Em seguida, apertar $\times$ e 5, passando a ter $7\times 5=35$ no visor, e concluir apertando $-$ e 6 tendo como resultado $35-6=29$. Assim, é possível obter 29 com 6 apertadas de botão. Pedro quer que apareça o número 100 no visor. Qual o número mínimo de apertadas, contando operações e dígitos, que Pedro tem que fazer na calculadora?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

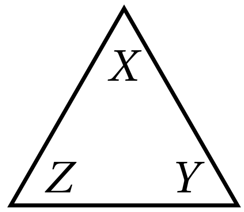
10) Em Portugal, o dia 4 de outubro de 1582 foi o último dia do calendário *juliano*, que foi substituído pelo calendário adotado atualmente, o calendário *gregoriano*. O dia seguinte foi definido como 15 de outubro de 1582, ou seja, não houve os dias 5 a 14 de outubro de 1582.

A única diferença entre os calendários é que, no calendário juliano, todos os anos múltiplos de 4 eram bissextos; no calendário gregoriano, os anos que são múltiplos de 100, mas não de 400, não são bissextos. Assim, 1900 seria um ano bissexto no calendário juliano, mas não no calendário gregoriano.

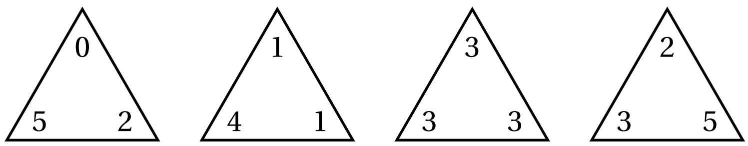
Que dia seria hoje, 3 de junho de 2014, se não tivéssemos mudado de calendário?

A) 20 de maio de 2014 B) 21 de maio de 2014 C) 22 de maio de 2014
D) 16 de junho de 2014 E) 17 de junho de 2014

11) O jogo de triminó simplificado é composto por peças na forma de triângulo, em que cada um dos vértices possui um número de 0 a 5. Sabe-se que para qualquer peça do triminó simplificado quando se coloca o menor dos números no vértice superior, os números estão em ordem crescente no sentido horário, ou seja, a peça faz parte do triminó simplificado quando $X \leq Y \leq Z$.



Por exemplo, das quatro peças a seguir, as três primeiras peças fazem parte do jogo, mas a quarta não.



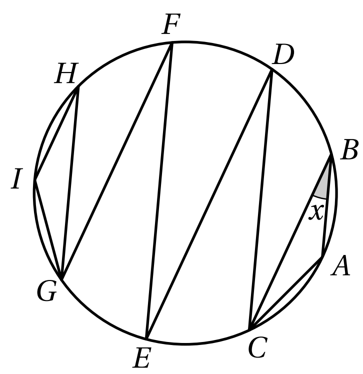
Existem quantas peças em um jogo de triminó simplificado?

A) 216 B) 125 C) 120 D) 56 E) 30

12) As raízes da equação $x^2 - ax + b = 0$ são diferentes de zero e são os quadrados das raízes da equação $x^2 - bx + a = 0$. As raízes não são necessariamente reais, mas a e b são reais. Então, o valor de a é:

A) $-\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt[3]{2}$ E) $\sqrt[3]{3}$

13) Considere a figura ao lado, onde os pontos de A até I estão sobre uma circunferência. Sabe-se que os triângulos ABC e GHI são isósceles, que AB, CD, EF e GH são segmentos paralelos e que BC, DE, FG e HI são segmentos paralelos. Qual a medida do ângulo x em graus?



A) 15° B) 20° C) 30° D) 40° E) 45°

14) Um *quadrado mágico multiplicativo* é um quadrado $n \times n$ com números inteiros positivos distintos cujos produtos de números na mesma linha, coluna ou diagonal são iguais. Por exemplo, temos o seguinte quadrado mágico multiplicativo:

128	1	32
4	16	64
8	256	2

Qual é o menor valor possível do número no centro de um quadrado mágico multiplicativo 3×3?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

15) A soma das raízes da equação $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{2}{2+x} + \dfrac{3}{3+x} = 1$ é:

A) 0 B) 6 C) 14 D) 11 E) 9

16) No triângulo ABC, $AC = 5$ e $AB = 6$. Seja P um ponto sobre a bissetriz interna do ângulo $B\hat{A}C$. Se a área de APB é $\frac{3}{2}$, a área de APC é:

A) $\frac{5}{4}$ B) $\frac{9}{5}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ E) $\frac{4}{5}$

17) Bitonho está jogando em seu celular o *Super Paciência*, cujo objetivo é preencher um tabuleiro 2×2014 com zeros e uns de modo que dois números vizinhos iguais, em uma mesma linha, impedem que se preencha também com números iguais as casas correspondentes da outra linha. Por exemplo, no desenho abaixo, os valores de A e B não podem ser iguais.

0	1	0	$\cdots$	1	1	$\cdots$
1	1	0	$\cdots$	A	B	$\cdots$

De quantas maneiras Bitonho pode preencher um tabuleiro de Super Paciência?

A) 3^{2014} B) $4\cdot 3^{2013}$ C) 4^{2014} D) $2\cdot 3^{2014}$ E) $3\cdot 4^{2014}$

18) Quantos pares ordenados (a,b) de inteiros positivos existem tais que $\dfrac{2014}{a^2+b^2}$ é inteiro?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

19) Uma sequência x_n tem como primeiros termos $x_0 = x_1 = 2$ e os demais termos definidos por $x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n$. Qual é o dígito das unidades de $x_0 - x_1 + x_2 - x_3 + \cdots - x_{2013} + x_{2014}$?

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

20) Qual é o número de soluções inteiras do sistema

$$\begin{cases} x^2 - 6y = 2z - 15 \\ y^2 - 6z = 2x - 15 \\ z^2 - 6x = 2y - 15 \end{cases} \quad ?$$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) infinito.

21) Uma esfera de raio 1 tem como equador a base de um cone e passa pelos pontos médios de suas geratrizes. Qual é a altura do cone?

A) 1 B) $\sqrt{1{,}5}$ C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) 2

22) Duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, a, b, c, d inteiros positivos, são *íntimas* quando $ad - bc = \pm 1$. Por exemplo, $\frac{1}{2}$ é íntima de $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$, pois $1\cdot 3 - 2\cdot 1 = 1$ e $1\cdot 3 - 2\cdot 2 = -1$. Duas frações íntimas de $\frac{2014}{51}$ têm denominador menor do que 51. Sendo $\frac{x}{y}$ e $\frac{z}{w}$ essas frações, quanto vale $y\cdot w$?

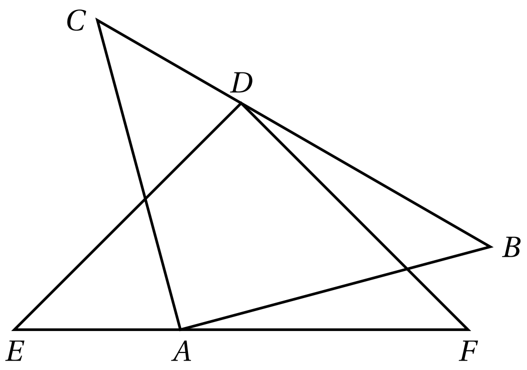
A) 58 B) 68 C) 78 D) 88 E) 98

23) Um caminhão tanque estava cheio de água, mas começou a vazar. Suponha que o consumo de combustível do caminhão seja diretamente proporcional ao peso que carrega e que a vazão da água e a velocidade do caminhão sejam constantes. Após percorrer

200 km, o caminhão estava com metade da capacidade de água e gastou meio tanque de combustível. Se estivesse vazio, o caminhão gastaria, se percorresse a mesma distância nas mesmas condições, um sexto de tanque. Que fração do tanque ele gastaria se não houvesse o vazamento? Despreze a influência do peso do caminhão no consumo de gasolina.

A) $\frac{11}{18}$ B) $\frac{5}{9}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{5}$

24) Na figura a seguir, ABC e DEF são triângulos retângulos isósceles com hipotenusas BC e EF medindo 15, D está sobre a reta BC e A está sobre a reta EF. O ângulo agudo entre as retas BC e EF é 30°.



O segmento AD mede:

A) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{15(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}$ C) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{15\sqrt{6}}{2}$ E) 15

25) Para calcular a probabilidade de uma moeda de raio r cair totalmente dentro de um ladrilhamento formado com ladrilhos quadrados de lado l, calculamos a probabilidade de seu centro cair dentro de um quadrado menor com lado $l-2r$ (tiramos uma "borda"de tamanho r dos lados do quadrado). Essa probabilidade é igual a $\left(\frac{l-2r}{l}\right)^2$. Na Esmeralândia, as moedas são retangulares. Podemos afirmar que a probabilidade de uma moeda de lados 3 e 4 cair totalmente de um ladrilho formado por retângulos de lados 10 e 20 é:

A) Menos de $0,375$.

B) Exatamente $0,375$.

C) Mais de $0,375$ e menos de $0,595$.

D) Exatamente $0,595$.

E) Mais de $0,595$.

Primeira Fase – Soluções

Gabarito

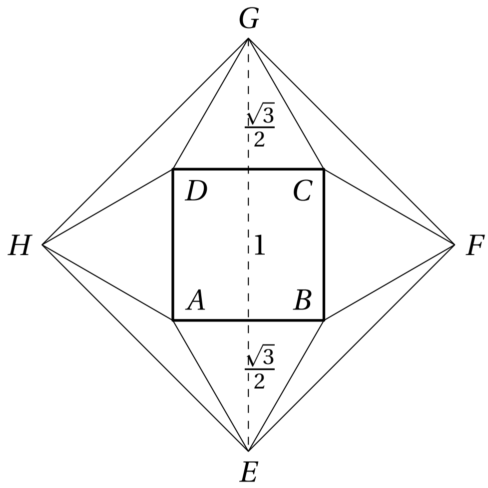
1) C	6) A	11) D	16) A	21) D
2) A	7) A	12) E	17) B	22) E
3) A	8) E	13) B	18) E	23) A
4) C	9) C	14) D	19) E	24) B
5) A	10) B	15) A	20) B	25) C

1) **(C)** Como $2014 = 53 \cdot 19 \cdot 2$, o número tem no máximo três fatores primos distintos. Para que o número seja mínimo, esses primos devem ser 2, 3 ou 5, sendo que primos menores têm expoentes maiores. O valor mínimo com um fator primo é 2^{2013}, o valor mínimo com dois fatores primos é um dos números $2^{52}3^{37}$, $2^{105}3^{18}$ ou $2^{1006}3^{1}$ e o valor mínimo com três fatores primos é $2^{52}3^{18}5^{1}$. Dentre os números apresentados, o menor é o último.

2) **(A)** Se a porta 1 não é segura, as mensagens 1 e 3 seriam simultaneamente falsas e isso contrariaria as informações do enunciado porque sabemos que apenas uma das mensagens é falsa. Vale observar que cada uma das outras portas pode ser a porta não segura, implicando em nenhuma ou em duas mensagens falsas.

3) **(A)** Observe que os itens possuem respectivamente: 4, 4, 6, 5, 4 letras. Assim, a única alternativa correta é "duas" com 4 letras, implicando que alternativas C e D contêm mais letras.

4) **(C)** Cada uma das diagonais EG e FH é formada por um lado do quadrado e duas alturas do triângulo equilátero, e tem, portanto, medida $1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$.



Sendo essas diagonais perpendiculares, a área do quadrilátero $EFGH$, que é um quadrado, é $\frac{(1+\sqrt{3})^2}{2} = 2+\sqrt{3}$.

5) **(A)** Considere as estimativas:

$$\begin{gathered} 2014^5 > 2000^5 = 32 \cdot 10^{15} \\ 3015^4 < 4000^4 = 64 \cdot 10^{12} \\ 4016^3 < 5000^3 = 125 \cdot 10^9 \\ 5017^2 < 6000^2 = 36 \cdot 10^6 \\ 6018^1 < 7000 = 7 \cdot 10^3. \end{gathered}$$

Logo, 2014^5 tem mais de 15 dígitos enquanto os outros têm no máximo 13 dígitos. Dessa forma, 2014^5 é o maior.

6) **(A)** A probabilidade de cada bola cair na urna de sua cor é $\frac{1}{3}$. Considerando 2014 bolas independentes, a probabilidade de todas entrarem na urna com sua cor é:

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \cdots \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3^{2014}}.$$

7) **(A)** Pelo critério de divisibilidade por 8, os três últimos dígitos devem formar um número múltiplo de 8. A única opção admissível é $z = 4$. Pelo critério de divisibilidade por

11, $(x+2+z)-(y+6) = x-y$ deve ser divisível por 11. Como x e y são dígitos, a única opção é $x = y$. Finalmente, pelo critério de divisibilidade por 9, $(x+y+2+6+z) = 2x+12$ deve ser divisível por 9. O único dígito que satisfaz tal condição é $x = 3$.

8) **(E)** Observe que:

$$1-\frac{F_k^2}{F_{k+1}^2} = \frac{F_{k+1}^2-F_k^2}{F_{k+1}^2} = \frac{(F_{k+1}-F_k)(F_{k+1}+F_k)}{F_{k+1}^2} = \frac{F_{k-1}F_{k+2}}{F_{k+1}^2}.$$

Logo:

$$\left(1-\frac{F_2^2}{F_3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{F_3^2}{F_4^2}\right)\cdot\left(1-\frac{F_4^2}{F_5^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{F_{2013}^2}{F_{2014}^2}\right) = \frac{F_1F_4}{F_3^2}\cdot\frac{F_2F_5}{F_4^2}\cdot\frac{F_3F_6}{F_5^2}\cdot\ldots\cdot\frac{F_{2012}F_{2015}}{F_{2014}^2}$$

$$= \frac{F_1\cdot F_2\cdot F_{2015}}{F_3\cdot F_{2013}\cdot F_{2014}} = \frac{F_{2015}}{2F_{2013}F_{2014}}.$$

9) **(C)** Veja o problema 9 da prova do Nível 2, página 44.

10) **(B)** Veja o problema 13 da prova do Nível 2, página 45.

11) **(D)** Veja o problema 15 da prova do Nível 2, página 45.

12) **(E)** Veja o problema 18 da prova do Nível 2, página 46.

13) **(B)** Veja o problema 17 da prova do Nível 2, página 46.

14) **(D)** Seja x o número do centro e P o produto de cada linha, coluna ou diagonal.

a	b	c
d	x	e
f	g	h

Note que:

$$(a \cdot x \cdot h) \cdot (b \cdot x \cdot g) \cdot (c \cdot x \cdot f) = P^3.$$

E, como $a \cdot b \cdot c = P$ e $f \cdot g \cdot h = P$, temos

$$x^3 = P.$$

Daí,

$$a \cdot h = b \cdot g = c \cdot f = \frac{P}{x} = x^2,$$

de modo que x^2 deve possuir pelo menos 6 divisores positivos distintos. Para $x \leq 5$ temos no máximo 5 divisores. Veja que $x = 6$ satisfaz a propriedade com o seguinte exemplo:

2	36	3
9	**6**	4
12	1	18

15) **(A)** Multiplicando a equação $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+3} = 1$ por $(x+1)(x+2)(x+3)$ obtemos:

$$1(x+2)(x+3) + 2(x+1)(x+3) + 3(x+1)(x+2) = (x+1)(x+2)(x+3) \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 5x + 6 + 2x^2 + 8x + 6 + 3x^2 + 9x + 6 = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \Leftrightarrow$$

$$x^3 - 11x - 12 = 0.$$

Oberservemos que a função $f(x) = x^3 - 11x - 12$ satisfaz $f(-2) > 0$, $f(0) < 0$ e $f(4) > 0$, logo tem 3 raízes reais.

A soma das raízes é menos o coeficiente de x^2, que é 0.

16) **(A)** Veja o problema 20 da prova do Nível 2, página 46.

17) **(B)** Veja o problema 24 da prova do Nível 2, página 47.

18) **(E)** Veja o problema 22 da prova do Nível 2, página 47.

19) **(E)** Vamos considerar apenas o resto dos números na divisão por 10, pois estamos interessados apenas no dígito das unidades.
Cada número depende dos dois anteriores, então para buscar um padrão, basta verificar quando dois números consecutivos aparecerem novamente na sequência. Vejamos:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}
2	2	6	4	4	2	8	8	4	6	6	8	2	2

Como repetiram dois valores consecutivos $(2,2)$ a sequência dos dígitos das unidades é periódica de período 12. Observe que a cada 12 consecutivos obtemos:

$$2-2+6-4+4-2+8-8+4-6+6-8=0.$$

Note que a sequência tem 2015 termos e 2015 deixa resto 11 na divisão por 12, logo:

$$\begin{aligned} x_0-x_1+x_2-\cdots-x_{2013}+x_{2014} &\equiv 2-2+6-4+4-2+8-8+4-6+6 \\ &= 6-2+4=8 \pmod{10} \end{aligned}$$

e o dígito das unidades é 8.

20) **(B)** Somando as equações e agrupando as variáveis temos:

$$x^2-8x+y^2-8y+z^2-8z+45=0 \Leftrightarrow (x-4)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=3.$$

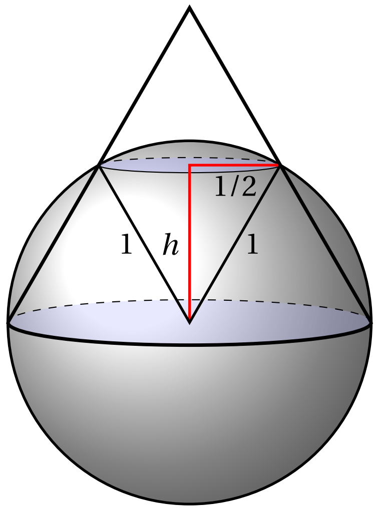
A soma dos quadrados de três inteiros só é 3 se cada quadrado for 1, logo temos para cada variável:

$$|x-4|=1 \Rightarrow x=3 \text{ ou } x=5.$$

Como são três variáveis, note que duas delas terão necessariamente o mesmo valor. Veja, por exemplo, $y = z = 3 \Rightarrow x = 3$ e $y = z = 5 \Rightarrow x = 5$. Logo, as únicas soluções são:

$$(x, y, z) = (3,3,3);\ (5,5,5).$$

21)
(D) A interseção do cone com a esfera é uma circunferência. O cone menor com base nessa circunferência e mesmo vértice que o outro cone é semelhante ao cone original, com razão de semelhança igual à razão entre suas geratrizes, que é $\frac{1}{2}$. Assim, sua base tem raio $\frac{1}{2}$.



A altura do cone é igual ao dobro de h, que é igual a

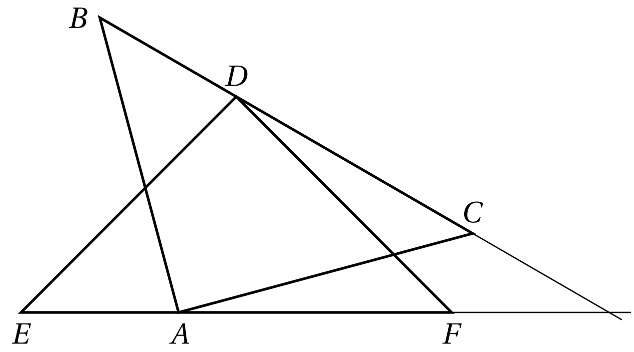
$$h = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Assim, a altura é $2h = \sqrt{3}$.

22) **(E)** Sejam $\frac{x}{y}$ e $\frac{z}{w}$ as frações íntimas de $\frac{2014}{51}$ com $y, w < 51$. Temos $2014y - 51x = \pm 1$. Da anterior equação módulo 51, obtemos $25y \equiv \pm 1 \pmod{51}$, que é equivalente a $25y \equiv \mp 50 \pmod{51} \Leftrightarrow y \equiv \mp 2 \pmod{51}$. Como $y < 51$, as únicas soluções são $y = 2$ (e daqui $x = 79$) ou $y = 49$ (que dá $x = 1935$). Logo, as frações íntimas desejadas são $\frac{79}{2}$ e $\frac{1935}{49}$, e portanto $yw = 98$.

23) **(A)** Sendo a vazão de água constante, o caminhão carregou, em média, o correspondente a $\frac{1+\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$ de água. O consumo carregando essa quantidade de água corresponde a $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ de tanque de gasolina. Assim, para carregar o caminhão cheio de água é necessário $\frac{1}{6} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{18}$ de tanque de gasolina.

24) **(B)** Como $\angle DCA = \angle EFA = 45°$, o quadrilátero $AFCD$ é inscritível. Sendo $DF = AC$ e DC e AF não paralelos, $\angle ADC = \angle DAF$. Como o ângulo entre as retas BC e EF é 30°, $\angle ADC = \angle DAF = 75°$.



Enfim, pela lei dos senos no triângulo ADC,

$$\frac{AC}{\operatorname{sen} 75^\circ} = \frac{AD}{\operatorname{sen} 45^\circ} \iff AD = \frac{\frac{15}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{15(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}.$$

25) **(C)** Uma moeda retangular de lados 3 e 4 pode ser inscrita em um círculo de diâmetro 5. Se o centro desse círculo cair no retângulo de lados $10-5=5$ e $20-5=15$ (tiramos "bordas"de tamanho igual ao raio), a moeda cai totalmente no ladrilhamento.

Logo, a probabilidade de a moeda cair dentro do ladrilhamento é maior que $\frac{5 \cdot 15}{10 \cdot 20} = 0{,}375$, mas a moeda pode cair totalmente dentro do ladrilhamento, dependendo de sua posição em relação ao ladrilhamento.

Se a moeda cai totalmente dentro do ladrilhamento, seu centro está em um retângulo de lados $10-3=7$ e $20-3=17$.

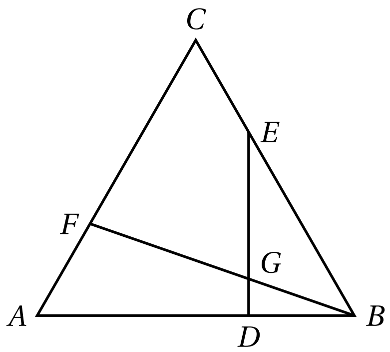
Assim, a probabilidade de a moeda cair dentro do ladrilhamento é menor que $\frac{7 \cdot 17}{10 \cdot 20} = 0{,}595$.

Observação: Pode-se provar que a probabilidade exata é $1{,}06 - \frac{197{,}5}{100\pi} \approx 0{,}4313$.

Segunda Fase

PARTE A

A1) No desenho ao lado, o triângulo ABC é equilátero e $BD = CE = AF = \frac{AB}{3}$. A razão $\frac{EG}{GD}$ pode ser escrita na forma $\frac{m}{n}$, $\text{mdc}(m,n) = 1$. Quanto vale $m+n$?



A2) O *imparial* de n é igual ao produto de todos os naturais ímpares menores ou iguais a n. Quais são os três últimos algarismos do imparial de 2014?

A3) A sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots$ satisfaz $a_1 = 1$ e $a_n = \sqrt{a_{n-1}^2 + n}$. Qual é o inteiro mais próximo de a_{2014}?

A4) A mediana de um conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ com $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ é igual à média dos dois termos centrais $\dfrac{a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n+1}{2}}}{2}$ se n é par e ao termo central $a_{\frac{n+1}{2}}$ se n é ímpar. Sendo M a quantidade de subconjuntos de $\{1, 2, 3, \ldots, 2014\}$ com mediana igual a 2012, encontre o resto da divisão de M por 2014.

A5) Uma caixa de madeira em forma de paralelepípedo retângular possui dimensões $3 \times 4 \times 6$. Ela está sobre o chão com uma de suas faces completamente apoiada sobre o chão. Uma fonte de luz emite raios paralelos de luz formando $45°$ com o chão. Considerando apenas essa fonte de luz, qual a área da maior sombra possível da caixa no chão? Não inclua a base da caixa na sombra.

A6) Um conjunto é dito *completamente divisível* se para quaisquer elementos $a < b$ do conjunto temos que a divide b. Um conjunto de inteiros positivos A é completamente divisível e possui 2016 como um de seus elementos. Sabendo que todos os elementos de A são menores que 2 milhões, qual o máximo número de elementos que A pode ter?

PARTE B

B1) Numa sala de aula, o professor fez uma votação para ver se adiava ou não a data da prova de Matemática. Um terço dos alunos foi contra o adiamento e o restante a favor. Vários alunos argumentaram e o professor fez nova votação, na qual 8 alunos mudaram de opinião, de modo que $\frac{5}{9}$ dos alunos passaram a ser contra o adiamento da prova. No máximo, quantos alunos participaram da votação?

B2) Seja $ABCD$ um quadrado de lado 4. O conjunto S de pontos no interior de $ABCD$ tem a seguinte propriedade: todo círculo de raio 1 contido totalmente em $ABCD$ contém, em sua borda ou em seu interior, pelo menos um ponto de S. Qual é a quantidade mínima de pontos em S?

B3) Um círculo tangencia os lados do quadrilátero $ABCD$. Os pontos de tangência são R sobre AB, S sobre BC, T sobre CD e U sobre DA. Sabe-se que $AU = 1$, $DU = 2$, $BS = 2$ e $CS = 4$. Calcule o comprimento SU.

Segunda Fase Nível 3 – Soluções

PARTE A

Problema	A1	A2	A3	A4	A5	A6
Resposta	5	375	1424	1006	30	18

A1) Denotaremos nesta solução a área do triângulo XYZ por $[XYZ]$. Veja que $\dfrac{EG}{GD} = \dfrac{[EBG]}{[BDG]}$.

Agora, $\dfrac{[EBG]}{[BCF]} = \dfrac{\frac{1}{2}EB\cdot BG\cdot \operatorname{sen}(\angle EBG)}{\frac{1}{2}BC\cdot BF\cdot \operatorname{sen}(\angle CBF)}$. Como $\angle EBG = \angle CBF$, temos

$$\frac{[EBG]}{[BCF]} = \frac{EB\cdot BG}{BC\cdot BF}. \tag{1}$$

Analogamente,

$$\frac{[BGD]}{[ABF]} = \frac{BG\cdot BD}{BA\cdot BF}. \tag{2}$$

Dividindo (1) por (2), obtemos $\dfrac{[EBG]}{[BGD]}\cdot\dfrac{[ABF]}{[BCF]} = \dfrac{EB\cdot BA}{BC\cdot BD}$. Finalmente, como $\dfrac{[ABF]}{[BCF]} = \dfrac{AF}{CF} = \dfrac{1}{2}$, temos

$$\frac{[EBG]}{[BGD]} = \frac{EB\cdot BA\cdot CF}{BC\cdot BD\cdot AF} = \frac{2}{3}\cdot 3\cdot 2 = 4.$$

Logo, $\dfrac{EG}{GD} = \dfrac{4}{1}$ e, portanto, $m+n=5$.

A2) Denotaremos o imparial de n por $n\&$. Para determinar os três últimos algarismos de 2014&, devemos encontrar o resto de 2014& na divisão por 1000. Para isso, analisaremos tal número módulo 8 e módulo 125.

Analisando inicialmente módulo 8, sendo $2014 = 8\cdot 251+6$,

$$2014\& \equiv (1\cdot 3\cdot 5\cdot 7)^{251}\cdot 1\cdot 3\cdot 5 \equiv 1^{251}\cdot 7 \equiv 7 \pmod 8.$$

Analisando agora módulo 125, temos que 125 é um dos fatores de 2014& e, portanto, $2014\& \equiv 0 \pmod{125}$. Assim, $2014\& = 125t$ e $125t \equiv 7 \pmod 8$, ou seja, $5t \equiv 15 \pmod 8$ e, portanto, $t \equiv 3 \pmod 8$. Logo, $t = 8k+3$ e

$$2014\& = 125(8k+3) = 1000k + 375 \equiv 375 \pmod{1000}.$$

Dessa maneira os três últimos algarismos de 2014& são 375.

A3) Elevando ao quadrado a condição dada, obtemos $a_n^2 = a_{n-1}^2 + n$. Somando tal relação com n variando de 2 até 2014, temos $a_{2014}^2 = a_1^2 + 2 + 3 + \cdots + 2014$. Como $a_1 = 1$ e a sequência é formada apenas por números positivos, segue que $a_{2014} = \sqrt{1+2+3+\cdots+2014} = \sqrt{\dfrac{2015 \cdot 2014}{2}} = \sqrt{2015 \cdot 1007} \approx 1424,47$. Logo, o inteiro mais próximo de a_{2014} é 1424.

A4) Se o número de elementos do subconjunto é ímpar, então o termo central é 2012 e, portanto, este conjunto só pode ter 1, 3 ou 5 elementos. Com 1 elemento temos somente o conjunto $\{2012\}$, com 3 elementos temos $\binom{2011}{1} \cdot \binom{2}{1}$ conjuntos e com 5 elementos temos $\binom{2011}{2} \cdot \binom{2}{2}$. Somando, obtemos

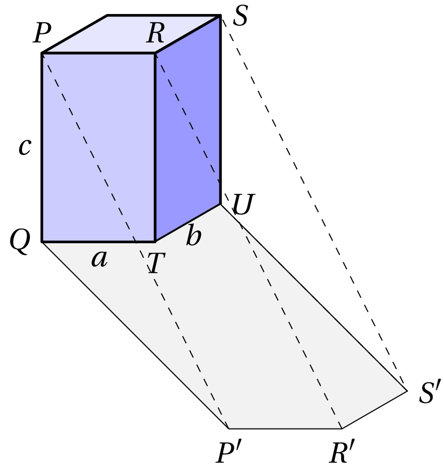
$$1 + 2011 \cdot 2 + 2011 \cdot 1005.$$

Se o número de elementos é par, como a mediana é 2012 e os únicos números maiores que 2012 são 2013 e 2014, os conjuntos podem ter somente 2 ou 4 elementos. Com 2 elementos temos os conjuntos $\{2011, 2013\}$ e $\{2010, 2014\}$ e com 4 elementos, três deles são 2011, 2013 e 2014. Para o outro elemento temos 2010 possibilidades. Somando, obtemos $2 + 2010 = 2012$.

Agora, precisamos verificar o resto módulo 2014 da soma total

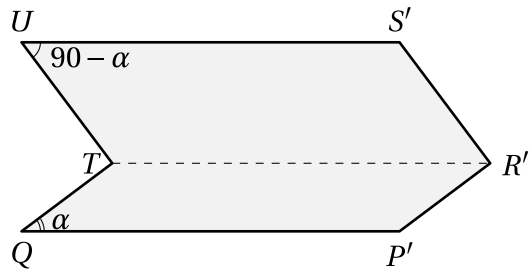
$$1 + 2012 \cdot 2 + 2011 \cdot 1005 + 2012 \equiv 1 + (-3) \cdot 2 + (-3) \cdot 1005 + (-2) \equiv 1006 \pmod{2014}.$$

A5) Seja P' a sombra de P no chão e Q o ponto na mesma aresta de P em contato com o chão.



Como $\angle PQP' = 90°$ e $\angle QP'P = 45°$, temos que o triângulo PQP' é retângulo isóceles. Logo, $C = PQ = QP'$. O mesmo acontece com os pontos R e S.

Desta forma, o desenho formado pela sombra é como mostrado na figura



Se chamarmos de $\alpha = \angle P'QT$, temos que $\angle QTR' = 180-\alpha$, $\angle R'TU = 90+\alpha$ e $\angle S'UT = 90-\alpha$.

Logo, a área da sombra é

$$ac\,\text{sen}(\alpha) + bc\,\text{sen}(90-\alpha) = c(a\,\text{sen}(\alpha) + b\cos(\alpha)).$$

Sabemos pela desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$(a\,\text{sen}(\alpha) + b\cos(\alpha))^2 \leq (a^2+b^2)(\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)) = (a^2+b^2).$$

Logo, a área da sombra está limitada por $c\sqrt{(a^2+b^2)}$ e este máximo é atingido quando $\dfrac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \dfrac{a}{b}$.

Agora, basta testar os três casos possíveis:

- $a = 3$, $b = 4$ e $c = 6$. $c\sqrt{(a^2+b^2)} = 6\sqrt{(3^2+4^2)} = 30$.
- $a = 4$, $b = 6$ e $c = 3$. $c\sqrt{(a^2+b^2)} = 3\sqrt{(4^2+6^2)} = 6\sqrt{13} < 30$.
- $a = 6$, $b = 3$ e $c = 4$. $c\sqrt{(a^2+b^2)} = 4\sqrt{(6^2+3^2)} = 12\sqrt{5} < 30$.

Portanto, a maior área possível é 30.

A6) Se $a < b$ e a divide b, ou seja, b é múltiplo de a, b é pelo menos $2a$, ou seja, $b \geq 2a$. Assim, sendo $a_1 < a_2 < \ldots < a_k < 2016 < a_{k+2} < \ldots < a_n < 2000000$ os elementos de um conjunto completamente divisível, temos

$$2000000 > a_n \geq 2a_{n-1} \geq 4a_{n-2} \geq \ldots \geq 2^{n-k-2}a_{k+2} \geq 2^{n-k-1} \cdot 2016$$

$$\Rightarrow 2^{n-k-1} < \frac{2000000}{2016} \Leftrightarrow n-k-1 \leq 9 \Leftrightarrow n \leq k+10.$$

Além disso, todos os números a_1, a_2,..., a_k são divisores de $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Como 2016 tem 8 fatores primos não necessariamente distintos, e $\dfrac{a_i}{a_{i1}}$ é inteiro maior do que 1, $k \leq 8$ e a quantidade n de elementos de um conjunto completamente divisível é $n \leq 8 + 10 = 18$. O conjunto a seguir é um exemplo de conjunto completamente divisível com 18 elementos:

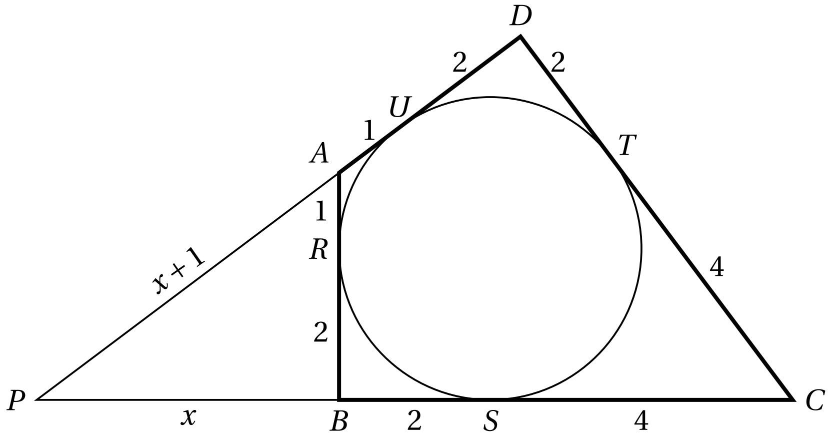
$$\left\{\begin{matrix} 1,2,4,8,16,32,96,288,2016,4032,8064,16128,32256, \\ 64512,129024,258048,516096,1032192 \end{matrix}\right\}.$$

PARTE B

B1) Veja o problema A2 da prova do Nível 2, página 51.

B2) Veja o problema A6 da prova do Nível 2, página 53.

B3) **Primeira solução:**



Seja P a interseção dos lados AD e BC. Sejam também $PU = PS = x+2$ e $\angle APB = \alpha$. Fazendo a lei dos cossenos nos triângulos PAB e PCD, temos

$$\cos\alpha = \frac{x^2+(x+1)^2-9}{2x(x+1)} \text{ e } \cos\alpha = \frac{(x+4)^2+(x+6)^2-36}{2(x+4)(x+6)}.$$

Igualando as duas últimas expressões, segue que

$$\frac{x^2+x-4}{x^2+x} = \frac{x^2+10x+8}{x^2+10x+24} \Leftrightarrow 1-\frac{4}{x^2+x} = 1-\frac{16}{x^2+10x+24}.$$

Logo,

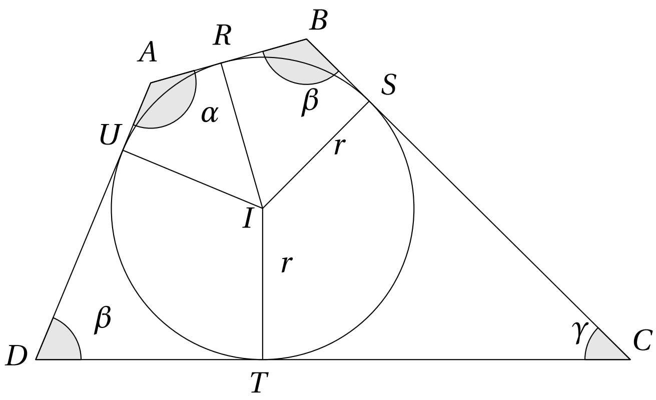
$$\frac{4}{x^2+x} = \frac{16}{x^2+10x+24} \Leftrightarrow x^2-2x+8=0 \Leftrightarrow x=4, \text{ pois } x \text{ é positivo.}$$

Isso nos dá $\cos\alpha = \dfrac{4^2+5^2-9}{2\cdot 4\cdot 5} = \dfrac{4}{5}$. Voltando ao triângulo PSU, segue pela lei dos cossenos que

$$SU^2 = (x+2)^2+(x+2)^2 2(x+2)^2\cos\alpha = 36+3672\cos\alpha = \frac{72}{5}.$$

Logo, $SU = \dfrac{6\sqrt{10}}{5}$.

Segunda solução: Seja I o centro do círculo inscrito no $ABCD$. Inicialmente, veja que os triângulos IDU e IBR são congruentes pelo caso LAL.



Logo, $\angle RBS = \angle UDT = \beta$. Sejam os outros ângulos como marcados na figura e seja também r o raio da circunferência inscrita no quadrilátero. Temos $\tan\dfrac{\alpha}{2} = r$, $\tan\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{r}{2}$ e $\tan\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{r}{2}$. Veja que $\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\gamma}{2} = 180^\circ$, logo

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = -\tan\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)$$

que equivale a

$$\frac{r + \frac{r}{2}}{1 - r \cdot \frac{r}{2}} = -\frac{\frac{r}{2} + \frac{r}{4}}{1 - \frac{r}{2} \cdot \frac{r}{4}} \text{ e assim } r = 2.$$

No triângulo ISU, temos $SU = 2r \operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$. Sendo $\tan\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) = \dfrac{2+1}{1-2\cdot 1} = -3$,

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 9\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 9\left(1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right) \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

Logo, $SU = 2 \cdot 2 \cdot \dfrac{3\sqrt{10}}{10} = \dfrac{6\sqrt{10}}{5}$.

Terceira Fase

1) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e seja P a interseção das diagonais AC e BD. Os raios dos círculos inscritos nos triângulos ABP, BCP, CDP e DAP são iguais. Prove que $ABCD$ é um losango.

2) Encontre todos os inteiros n, $n > 1$, com a seguinte propriedade: para todo k, $0 \le k < n$, existe um múltiplo de n cuja soma dos algarismos, na base decimal, deixa resto k na divisão por n.

3) Seja N um inteiro maior do que 2. Arnaldo e Bernaldo disputam o seguinte jogo: há N pedras em uma pilha. Na primeira jogada, feita por Arnaldo, ele deve tirar uma quantidade k de pedras da pilha com $1 \le k < N$. Em seguida, Bernaldo deve retirar uma quantidade de pedras m da pilha com $1 \le m \le 2k$, e assim por diante, ou seja, cada jogador, alternadamente, tira uma quantidade de pedras da pilha entre 1 e o dobro da última quantidade de pedras que seu oponente tirou, inclusive. Ganha o jogador que tirar a última pedra.

   Para cada valor de N, determine qual jogador garante a vitória, independente de como o outro jogar, e explique qual é a estratégia vencedora para cada caso.

4) Uma sequência infinita de polinômios $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x), \ldots$ é definida por

$$P_0(x) = x \text{ e } P_n(x) = P_{n-1}(x-1) \cdot P_{n-1}(x+1), \text{ para todo } n \ge 1.$$

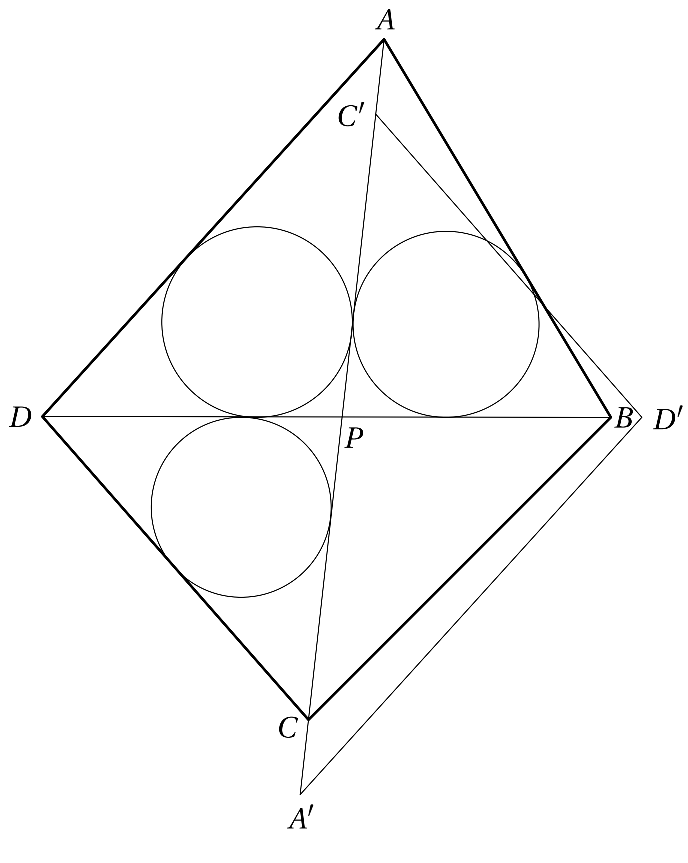
   Determine o maior inteiro k para o qual o polinômio $P_{2014}(x)$ é múltiplo de x^k.

5) Em cada casa de um tabuleiro $2m \times 2n$ está escrito um inteiro. A operação permitida é tomar três casas formando um L-triminó (ou seja, uma casa C e outras duas casas com um lado em comum com C, um na horizontal e outro na vertical) e somar 1 ao inteiro em cada uma das três casas. Determine a condição necessária e suficiente, em função de m, n e dos números iniciais, para que seja possível deixar todos os números iguais.

6) Seja ABC um triângulo com incentro I e incírculo ω. O círculo ω_A tangencia externamente ω e toca os lados AB e AC em A_1 e A_2, respectivamente. Seja r_A a reta A_1A_2. Defina r_B e r_C de modo análogo. As retas r_A, r_B e r_C determinam um triângulo XYZ. Prove que o incentro de XYZ, o circuncentro de XYZ e I são colineares.

Terceira Fase – Soluções

1) Suponhamos que $PA \neq PC$. Logo, podemos supor sem perca de generalidade que $PA > PC$. Sejam A', C' e D' os pontos simétricos de A, C e D com respeito ao ponto P. Como $PA > PC$, o ponto C' pertence ao segmento $\overline{PA}$. Denotemos por ω_1, ω_2, ω_3 e ω_4 as circunferências inscritas aos triângulos ABP, DAP, CDP e BCP.



Observemos que D' está na semirreta $\overrightarrow{PB}$ e o quadrilátero $CDC'D'$ é um paralelogramo, pois as diagonais se intersectam no ponto P que por construção é ponto médio de CC' e DD'. Com isso, como por hipótese ω_1 e ω_3 possuem o mesmo raio, teremos que $C'D'$ é tangente a ω_1, pois CD é tangente a ω_3. Se $D' \in \overline{PB}$, como C' pertence ao segmento PA, teremos que CD' não pode ser tangente a ω_1, pois AB é tangente a ω_1, $PC' < PA$ e PD' seria menor ou igual a PB. Segue que $PD' > PB$ e então $PD > PB$. Porém, teríamos $PA > PC$ e $PD > PB$, e, portanto, $PA' > PC$ e $PD' > PB$. Contudo, isso configuraria um absurdo, pois os segmentos $A'D'$ e BC são ambos tangentes à circunferência ω_4 e tais segmentos não se intersectariam.

Assim, nossa suposição inicial $PA \neq PC$ está errada. Logo, temos que $PA = PC$. Da mesma maneira, concluímos que $PB = PD$. Teremos então que as diagonais do quadrilátero $ABCD$ se intersectam em seus pontos médios, sendo assim um paralelogramo. Como $PB = PD$, temos que Área(ABP) = Área(ADP). Utilizando a fórmula da área $s \cdot r$, onde s é o semiperímetro do triângulo e r seu inraio, como esses triângulos possuem o mesmo inraio, temos que:

$$\frac{1}{2}(AP+PB+BA) = \frac{1}{2}(AP+PD+DA) \Rightarrow AP+PB+BA = AP+PD+DA$$
$$PB+BA = PD+DA \Rightarrow AB = AD.$$

Analogamente, concluímos que $AB = BC = CD = DA$. Então $ABCD$ é, de fato, um losango.

2) Denotamos por $s(m)$ a soma dos dígitos de um inteiro positivo m e lembramos que $s(m)$ e m têm o mesmo resto quando divididos por 3.

Começamos observando que n não pode ser um múltiplo de 3, já que nesse caso os múltiplos nl de n também serão divisíveis por 3 e, então, $s(nl)$ também será múltiplo de 3 bem como $s(nl)$ quando dividido por n só pode deixar os restantes k que são múltiplos de 3.

Feita essa observação, mostraremos que cada $n > 1$ que não é divisível por 3 tem a propriedade desejada. Dado $0 \leq k < n$, mostraremos um múltiplo de n cujos dígitos são apenas zeros e uns e tem o resto k quando dividido por n. Para este propósito escreva $n = 2^\alpha 5^\beta n_0$ onde n_0 é coprimo com 2, 5 e 3 desde n não é divisível por 3.

O número m será a soma de x potências da forma $10^{a\varphi(n_0)}$ e y da forma $10^{b\varphi(n_0)+1}$. Só precisamos que todos os expoentes sejam distintos e grandes o suficiente de tal forma que $a\varphi(n_0), b\varphi(n_0)+1 \geq \max\{\alpha, \beta\}$.

Escolhemos y tal que

$$9y \equiv -k \pmod{n_0}.$$

Observemos que y existe, pois n_0 e 9 são coprimos. Agora escolhemos x tal que

$$x \equiv k - y \pmod{n},$$

e isso implica que

$$s(m) = x + y \equiv k \pmod{n}.$$

Como $10^{a\varphi(n_0)}$ deixa o resto 1 por n_0 e $10^{b\varphi(n_0)+1}$ deixa resto 10 por n_0

$$m \equiv x + 10y \equiv 0 \pmod{n_0}$$

já que cada uma das potências usadas é divisível por $2^\alpha 5^\beta$, então, m é divisível por $2^\alpha 5^\beta$, sendo também divisível por n_0, então é um múltiplo de n e, como já mostramos, deixa o resto k quando dividido por n.

Observação: Ver solução alternativa na Questão 3 da prova do Nível 2, página 61.

3) Começamos verificando alguns casos pequenos, isto é, se temos N pedras, então:

$N = 2 \rightarrow$ Bernaldo vence.

$N = 3 \rightarrow$ Bernaldo vence.

$N = 4 \rightarrow$ Arnaldo vence tirando uma pedra.

$N = 5 \rightarrow$ Bernaldo vence.

$N = 6 \rightarrow$ Arnaldo vence tirando uma pedra.

$N = 7 \rightarrow$ Arnaldo vence tirando duas pedras.

$N = 8 \rightarrow$ Bernaldo vence.

Seja $(F_n)_{n\geq 1}$ a sequência de Fibonacci, dada por $F_1 = F_2 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall n \geq 1$. Vamos provar que Bernaldo ganha se, e só se, $N = F_k$, para algum $k > 2$, por indução em k. Note que, em qualquer caso, em seu último lance, o jogador que ganha retira no máximo $2N/3$ pedras (pois é no máximo o dobro das pedras que o adversário tirou na jogada anterior, e o total de pedras é N).

Suponha que a afirmação seja verdadeira para todo $N \leq F_k$, para um dado $k > 3$. Em particular, Bernaldo ganha com $N = F_k$ (para $k = 4$, por exemplo, temos $F_k = 3$, e Bernaldo ganha já em seu primeiro lance). Se $F_k < N < 3F_k/2$, Arnaldo ganha tirando $N - F_k < F_k/2$ pedras, deixando Bernaldo com F_k pedras e, a partir daí, "roubando"a estratégia de Bernaldo para $N = F_k$.

Se $3F_k/2 \le N < F_{k+1}$, note inicialmente que $F_{k-1} = F_{k+1} - F_k > N - F_k \ge F_k/2 = (F_{k-1} + F_{k-2})/2 > F_{k-2}$. Assim, Arnaldo ganha começando com $N - F_k$ pedras, por hipótese de indução, tirando em seu último lance no máximo $2(N - F_k)/3 < 2F_{k-1}/3 < F_k/2$ (note que $F_k = F_{k-1} + F_{k-2} > 4F_{k-1}/3$, pois $F_{k-1} = F_{k-2} + F_{k-3} \le 2F_{k-2} < 3F_{k-2}$). Ele passa então a executar essa mesma estratégia para $N - F_k$ pedras, e ao concluí-la, terão sido retiradas $N - F_k$ pedras, com Arnaldo fazendo o último lance, devolvendo assim $N - (N - F_k) = F_k$ pedras a Bernaldo. Como, em seu último lance antes disso, Arnaldo tirou menos que $F_k/2$ peças, vencerá o jogo, roubando a partir daí a estratégia de Bernaldo para $N = F_k$.

Finalmente, se $N = F_{k+1}$, caso Arnaldo tire pelo menos F_{k-1} pedras, sobrarão no máximo $F_{k+1} - F_{k-1} = F_k$ pedras, e, como $2F_{k-1} > F_{k-1} + F_{k-2} = F_k$, Bernaldo ganha imediatamente. Caso contrário, Arnaldo tira menos que F_{k-1} pedras, e Bernaldo recebe M pedras, com $F_k < M < F_{k+1}$. Seja $R = M - F_k < F_{k+1} - F_k = F_{k-1}$. Nesse caso, Bernaldo pode seguir sua estratégia para $N = F_{k-1}$, tendo recebido R pedras após a primeira jogada de Arnaldo (que, em qualquer caso, retirou $F_{k-1} - R = F_{k+1} - M$ pedras em seu primeiro lance), ao fim da qual devolverá $F_{k+1} - F_{k-1} = F_k$ pedras a Arnaldo, tendo retirado no máximo $2F_{k-1}/3 < F_k/2$ pedras em seu último lance antes disso. Assim, de novo por hipótese de indução, Bernaldo vencerá.

Obs.: De modo mais explícito, em geral, se não puder ganhar imediatamente, o jogador X com estratégia vencedora deve devolver ao adversário um número de pedras $N = F_{k_1} + F_{k_2} + \ldots + F_{k_t}$, com $k_{j-1} - k_j \ge 2$ para $2 \le j \le t$ e $k_t \ge 2$ (a chamada representação de Zackendorff de N), retirando menos que $F_{k_t}/2$ pedras. Ao fazer isso, o adversário tem que tirar menos que F_{k_t} pedras. Seja v o número de peças retiradas pelo adversário. Suponha que o número v de pedras retiradas pelo adversário satisfaz $F_{k_t-2u} \le v < F_{k_t-2u+2}$, para um certo $u \ge 1$. O jogador X então pode tirar $F_{k_t-2u+2} - v \le F_{k_r-2u+1}$ pedras (note que $F_{k_r-2u+1} \le 2F_{k_t-2u} \le 2v$ e $F_{k_r-2u+1} < F_{k_r-2u+3}/2$), deixando $R = F_{k_1} + F_{k_2} + \ldots + F_{k_t} - F_{k_t-2u+2} = F_{k_1} + F_{k_2} + \ldots + F_{k_{t-1}} + \sum_{1 \le j \le u-1} F_{k_t-2j+1}$ pedras para o adversário (note que, no caso $u = 1$, X simplesmente elimina o termo F_{k_t} da soma e, nos outros casos, o último termo na expressão de R é F_{k_t-2u+3}).

4) Obtemos diretamente que $P_{2014}(x) = P_{2013}(x-1) \cdot P_{2013}(x+1) = P_{2012}(x-2) \cdot P_{2012}(x)^2 \cdot$

$P_{2012}(x+2)$ e, portanto, podemos provar facilmente por indução que

$$P_{2014}(x) = \prod_{i=0}^{n} P_{2014-n}(x-n+2i)^{\binom{n}{i}}$$

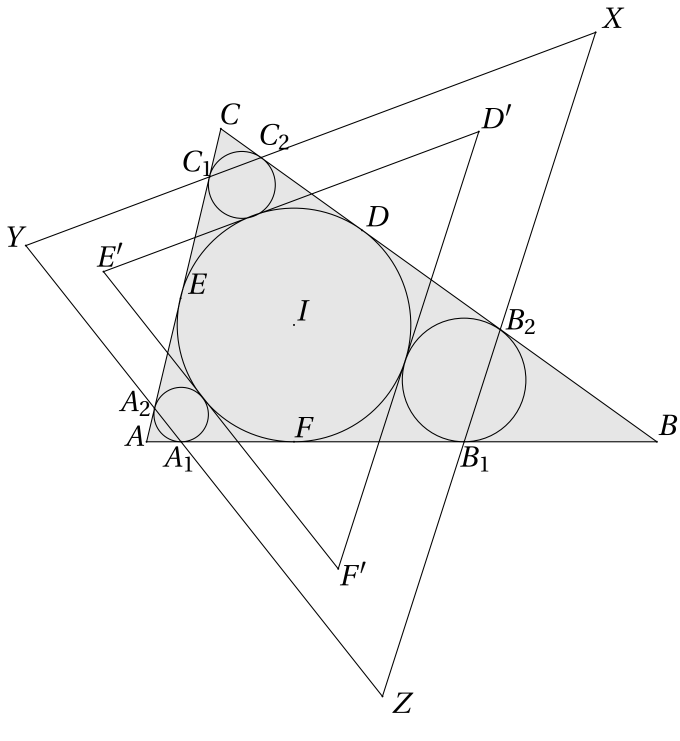
para cada número inteiro n entre 0 e 2014. Agora, para $n = 2014$, obtemos

$$P_{2014}(x) = \prod_{i=0}^{2014} (x-2014+2i)^{\binom{2014}{i}}$$

e, portanto, $k = \binom{2014}{1007}$.

5) Ver Problema 6, Nível 2, página 63.

6) Denotemos por D, E e F os pontos de tangência de ω com BC, CA e AB, respetivamente.



Denotemos por ℓ_A a reta tangente interna comum das circunferências ω e ω_A. De forma análoga definimos as retas ℓ_B e ℓ_C, e denotemos por D', E' e F' os pontos de interseção das retas ℓ_A, ℓ_B e ℓ_C.

Como as retas EF, $E'F'$ e YZ são perpendiculares à bissetriz desde o vértice A, segue que elas são paralelas. De igual forma segue que $DF||D'F'||XZ$ e $DE||D'E'||XY$. Assim, os triângulos $\triangle DEF$, $\triangle D'E'F'$ e XYZ são homotéticos dois a dois.

Denotemos por $J = DD' \cap EE' \cap FF'$ o centro de homotetia entre os triângulos $\triangle DEF$, $\triangle D'E'F'$. Esta homotetia leva o circuncentro I do triângulo $\triangle DEF$ ao circuncentro K do triângulo $\triangle D'E'F'$, logo J, I e K são colineares. Observemos que I também é o incentro do triângulo $D'E'F'$.

Assim, o circuncentro e o incentro de qualquer triângulo homotético a $\triangle D'E'F'$ sob esta homotetia com centro J estarão na linha fixa JIK. De fato, $\triangle XYZ$ é homotético com $\triangle D'E'F'$ com centro em J, pois as retas YZ, ZX, e XY são as reflexões de EF, DF, DE sobre as linhas ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C,. Então X, Y, Z são as reflexões de D, E, F sobre D', E', F', respectivamente.

Premiados

Medalha de Ouro

Nome	Cidade Estado	Pontos
Murilo Corato Zanarella	São Paulo SP	379
Alessandro de Oliveira Pacanowski	Rio de Janeiro RJ	302
Gabriel Fazoli Domingos	Urupês SP	284
Lucas Pereira Galvão de Barros	São Paulo SP	260
Pedro Henrique Sacramento de Oliveira	Vinhedo SP	244
Daniel Lima Braga	Eusébio CE	242
Valentino Amadeus Sichinel	Santa Maria RS	240

Medalha de Prata

Nome	Cidade Estado	Pontos
João César Campos Vargas	Passa Tempo MG	230
Raphael Mendes de Oliveira	Rio de Janeiro RJ	216
Pedro Henrique Alencar Costa	Fortaleza CE	212
Andrey Jhen Shan Chen	Campinas SP	197
Gabriel Toneatti Vercelli	Osasco SP	196
Matheus Carioca Sampaio	Fortaleza CE	187
Guilherme Goulart Kowalczuk	Porto Alegre RS	182
Hudson William Braga Vieira	Contagem MG	178
Felipe Alex Hofman	S.J. dos Campos SP	173

Medalha de Bronze

Nome	Cidade Estado	Pontos
Yu Hao Wang Xia	Brasília DF	168
Wagner Fonseca Rodrigues	Belo Horizonte MG	165
Ana Karoline Borges Carneiro	Fortaleza CE	161
João Luis Reis Freitas	Goiânia GO	161
Lincoln de Queiroz Vieira	Fortaleza CE	156
Loïc Dominguez	Fortaleza CE	155
Matheus Siqueira Thimóteo	Mogi das Cruzes SP	151
Hugo Terceiro Colares	Fortaleza CE	145
Thyago Araujo Capitanio	Rio de Janeiro RJ	144
Lucas Mioranci	S.J. do Rio Preto SP	140
Vitor Augusto Carneiro Porto	Fortaleza CE	139
Lucca Morais Arruda Siaudizionis	Fortaleza CE	137
Douglas de Araújo Smigly	S. Caetano do Sul SP	135
Luiz Henrique Aguiar de Lima Alves	Rio de Janeiro RJ	135
Nicolas Seoane Miquelin	Mauá SP	134
Arthur Pratti Dadalto	Vitória ES	133
George Lucas Diniz Alencar	Fortaleza CE	133

Menção Honrosa

Nome	Cidade Estado	Pontos
Leandro Alves Cordeiro	Ribeirão Pires SP	132
Lucas Duarte Fernandes	Duque de Caxias SP	130
João Baptista de Paula e Silva	Belo Horizonte MG	129
Mateus Bezrutchka	Taboão da Serra SP	129
Rafael Filipe dos Santos	Rio de Janeiro RJ	129
João Pedro de Araújo Xavier	Recife PE	128
Renan Felipe Bergamaschi de Morais	Bariri SP	125
Vinicius Trindade de Melo	Dores de Campos MG	125
Gabriel Dante Cawamura Seppelfelt	S.Caetano do Sul SP	124
João Gomes de Medeiros Neto	Fortaleza CE	124
Érika Rizzo Aquino	Goiânia GO	123
Rogerio Aristida Guimaraes Junior	Fortaleza CE	123
Estevão Waldow	Piraquara PR	121
Pedro Henrique da Silva Dias	Porto Alegre RS	120
Matheus Leite Queiroz Nunes	Recife PE	119
Daniel Quintão de Moraes	Rio de Janeiro RJ	117
Bruno Eidi Nishimoto	Jales SP	116
Bruno Uchôa Cirne	Natal RN	116
Gabriel Adriano de Melo	Fortaleza CE	116
Gabriel Picanço Costa	Rio de Janeiro RJ	116
Fábio Gabriel Costa Nunes	Teresina PI	115
Guilherme Sales Santa Cruz	Recife PE	115
Iuri Grangeiro Carvalho	Fortaleza CE	115
Tiago Figueiredo Gonçalves	Recife PE	115
Felipe Roz Barsceuicius	Sorocaba SP	113
Luíze Mello DUrso Vianna	Rio de Janeiro RJ	113
Jasson Fernandez Gurgel	Fortaleza CE	112
Felipe Reyel Feitosa de Sousa	Teresina PI	111
Daniel Rocha Lopes	Belo Horizonte MG	110
Vinícius Francisco Vieira Ferreira	Caucaia CE	110

36ª Olimpíada Brasileira de Matemática
Nível Universitário

Primeira Fase

1) Turbo, o caracol, está participando de uma corrida. Nos últimos 1000 mm, Turbo, que está a 1 mm por hora, se motiva e passa a correr de modo que sua velocidade seja inversamente proporcional à distância que falta. Em quanto tempo Turbo percorre esses 1000 mm finais?

   Observação: Suponha que Turbo pode atingir velocidades arbitrariamente altas, mesmo que sejam maiores que a da luz.

2) Considere as matrizes 3×3 cujas entradas são inteiros entre 0 e 9 (inclusive). Determine o maior determinante possível de uma tal matriz.

3) Determine todos os pares de inteiros positivos (n, r) para os quais pode existir uma festa com n participantes em que cada participante conhece exatamente r outros participantes.

   Observação: Conhecer é uma relação simétrica.

4) Seja D_n o conjunto dos racionais $\frac{p}{q}$ com p, q inteiros, $0 < q \le n$ e $0 \le p \le q$.

   a) Prove que, para todo $n \ge 3$, dados $x, y \in D_n$ distintos, temos sempre

$$|\cos(\pi x) - \cos(\pi y)| > \frac{\pi^2}{n^3}.$$

b) Prove que para todo $c > \pi^2$ e todo n_0 natural existem $n > n_0$ e $x, y \in D_n$ distintos tais que
$$|\cos(\pi x) - cos(\pi y)| < \frac{c}{n^3}.$$

5) Sejam $t_1, t_2, \ldots, t_n$ reais positivos tais que $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 2\pi$ e O um ponto fixo do plano. Considere a família de polígonos convexos de n lados contendo O em seu interior cujos ângulos externos sejam respectivamente $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Sejam y_i o comprimento do i-ésimo lado, e x_i a distância de O ao i-ésimo lado.

a) Mostre que o vetor $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ depende linearmente do vetor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, isto é, existe uma matriz $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ que só depende dos t_i , $1 \le i \le n$ tal que $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$, para $1 \le i \le n$.

b) Considere um segundo polígono desta mesma família, e defina x'_i e y'_i de maneira análoga. Mostre que $\sum_{i=1}^{n} x_i y'_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i y_i$.

6) Zé Pantera percorre um caminho em $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ guiado por um dado. Começa em 0 e a cada segundo joga um dado honesto, obtendo um número s entre 1 e 6; se está em x pula para $x + s$. Seja x_n a probabilidade de Zé Pantera estar em n em algum momento. Prove que existe $\lim_{n\to\infty} x_n$ e determine esse limite.

Primeira Fase – Soluções

1) Seja $x(t)$ a distância que falta para Turbo terminar a corrida no instante t. Então $x(0) = 1000$, a velocidade de Turbo é $\dfrac{1000}{x}$ e obtemos a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-1000}{x} \Longrightarrow x\,dx = -1000\,dt \Longrightarrow \left.\frac{x^2}{2}\right|_{x(0)}^{x} = -1000\Big|_0^t$$

$$\Longleftrightarrow x^2 - 1000^2 = -2000t \Longleftrightarrow x = \sqrt{1000^2 - 2000t},$$

então $x = 0$ quando $t = 500h$.

2) Seja $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ a matriz. Como $\det(A)$ é linear em cada entrada, basta considerar a $a_{ij} = 0$ ou $a_{ij} = 9$, de modo que $A = 9B$ com $B = (b_{ij})_{3\times 3}$ e $b_{ij} \in \{0, 1\}$.
Desenvolvendo pela primeira coluna, o determinante de B é menor ou igual a 3.
Mas para dar 3, devemos ter $b_{11} = b_{21} = b_{31} = 1$ e os menores 2×2 de b_{11} e b_{31} devem ser 1 enquanto o de b_{21} deve ser -1. Então pelo b_{11} temos $b_{22} = b_{33} = 1$; pelo b_{31} vem $b_{12} = b_{23} = 1$. Mas aí o outro menor, do b_{21}, é $1 - b_{13}b_{32}$ que não vai ser -1 nunca. Então, 3 não é possível e o determinante de B é no máximo 2. O exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mostra que $\det(B) = 2$ é possível e, portanto, o máximo de $\det(A)$ é $2 \cdot 9^3 = 1458$.

3) Considere n pontos ao longo de um círculo, vértices de um polígono regular, e o grafo de amizades. Se $r = 2k$, construímos o seguinte exemplo: ligamos cada ponto com os k vizinhos mais próximos de cada lado; se $r = 2k + 1$ é ímpar e n é par, ligamos cada ponto com seus k vizinhos mais próximos e também com o vértice oposto.
Se ambos são ímpares, não vai dar, pois a soma dos graus $n \cdot r$ deve ser o dobro do número de arestas no grafo.

4) a) Podemos supor sem perda de generalidade que $y > x$. Temos 3 casos:

i) No caso $x = 0$, temos que:

- Para $n = 3$ vamos avaliar

$$|1-\cos(\pi y)|, \text{ onde } y \in \left\{0,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ 1\right\}.$$

Como $\cos(x)$ é decrescente para $x \in [0, \pi]$, basta verificar se a distância entre dois pontos consectivos é maior que $\dfrac{\pi^2}{27}$ e por simetria, nosso trabalho se resume a duas possibilidades:

$$\left|1-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} > \frac{\pi^2}{27}$$

$$\left|\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = \frac{1}{2} > \frac{\pi^2}{27}.$$

- Para $n = 4$, só precisamos adicionar ao caso anterior $y = \dfrac{1}{4}$ por já termos $\dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ e porque para $\dfrac{3}{4}$ o resultado é consequência da simetria.

$$\left|1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = 1-\frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{\pi^2}{64}$$

$$\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2} > \frac{\pi^2}{64}.$$

- Para $n \geq 5$

$$|\cos(\pi x)-\cos(\pi y)| = 1-\cos(\pi y) = 2\text{sen}^2\left(\frac{\pi y}{2}\right) \geq 2y^2 \geq \frac{2}{n^2} > \frac{\pi^2}{n^3},$$

pois $\text{sen}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) \geq x$, para $0 \leq x \leq 1$.

Dessa maneira, finalizamos o caso i).

ii) No caso que $y = 1$ temos

$$|\cos(\pi x)-\cos(\pi y)| = |\cos(\pi(1-y))-\cos(\pi(1-x))|,$$

com $0 \leq 1-y < x \leq 1$, e a desigualdade segue do caso anterior, pois $1-x; 1-y$ também pertencem a D_n.

iii) Finalmente, o caso em que $0 < x < y < 1$: pelo Teorema do Valor Médio,

$$|\cos(\pi x)-\cos(\pi y)| = \text{sen}(\pi c)|x-y|$$

onde $\frac{1}{n} \le x < c < y \le 1 - \frac{1}{n}$, donde $\operatorname{sen}(\pi c) \ge \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$; por outro lado, como $x, y \in D_n$, $|x-y| \ge \frac{1}{n(n-1)}$, e, portanto,

$$|\cos(\pi x) - \cos(\pi y)| \ge \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n(n-1)}.$$

Basta agora provar que

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n(n-1)} \ge \frac{\pi^2}{n^3},$$

para todo $n \ge 3$. Isso equivale a $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \ge \dfrac{\pi(n-1)}{n^2}$, para todo $n \ge 3$. Vamos mostrar que $\operatorname{sen}(\pi t) \ge \pi(t - t^2)$ para $0 \le t \le \frac{1}{3}$, e o resultado segue fazendo $t = \frac{1}{n}$. Como vale a igualdade para $t = 0$, a derivada de $\operatorname{sen}(\pi t)$ é $\pi \cos(\pi t)$ e a derivada de $\pi(t - t^2)$ é $\pi(1-2t)$, basta provar que $\pi \cos(\pi t) \ge \pi(1-2t)$, para $0 \le t \le \frac{1}{3}$, mas temos

$$\pi \cos(\pi t) \ge \pi(1-2t) \Longleftrightarrow \cos(\pi t) \ge 1 - 2t,$$

logo,

$$1 - cos(\pi t) = 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi t}{2}\right) \le 2t$$

e $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi t}{2}\right) \le \left(\frac{\pi t}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2 t^2}{4} \le t$ para $0 \le t \le \frac{4}{\pi^2}$. Como $\frac{4}{\pi^2} > \frac{1}{3}$ a afirmação é verdadeira.

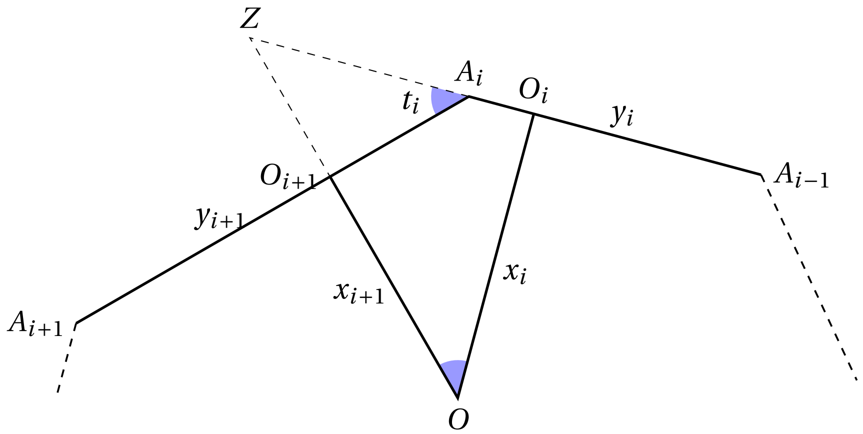
b) É suficiente mostrar que

$$\lim_{n\to+\infty} n^3 \left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{(n-1)}\right)\right) = \pi^2.$$

Note que $\left|\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{(n-1)}\right)\right| = \frac{\pi \operatorname{sen}(\pi c_n)}{n(n-1)}$ para algum $c_n \in \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right)$, pelo Teorema do Valor Médio; temos, portanto,

$$\lim_{n\to+\infty} n^3 \left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{(n-1)}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} n^3 \cdot \frac{\pi \operatorname{sen}(\pi c_n)}{n(n-1)} =$$
$$= \pi^2 \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n-1} \lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi c_n)}{\pi c_n} \lim_{n\to+\infty} (n \cdot c_n) = \pi^2.$$

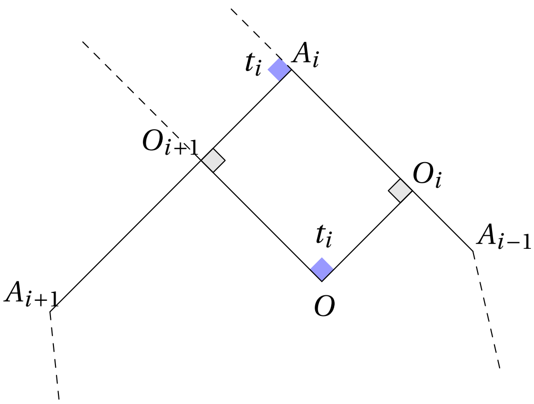
5) a) Sejam O_i e O_{i+1} as projeções ortogonais de O sobre os lados $A_{i-1}A_i$ (de comprimento y_i) e $A_i A_{i+1}$ (de comprimento y_{i+1}), onde o índice i varia módulo n. Seja Z o ponto de encontro das retas OO_{i+1} e $A_{i-1}A_i$. Suponha inicialmente que ambas as projeções estão nos respectivos lados:



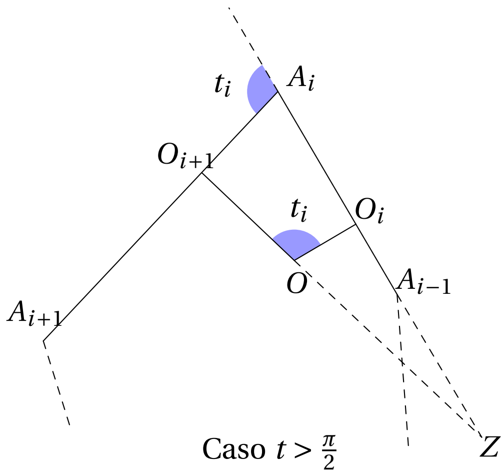
Como o quadrilátero $OO_iA_iO_{i+1}$ tem dois ângulos retos, vem $\angle O_iOO_{i+1} = \angle ZA_iO_{i+1} = t_i$. Do triângulo OO_iZ vem $ZO = x_i \sec(t_i)$, portanto $ZO_{i+1} = x_i \sec(t_i) - x_{i+1}$. Assim, do triângulo $A_iO_{i+1}Z$:

$$O_{i+1}A_i = (x_i \sec(t_i) - x_{i+1}) \cot(t_i) = x_i \csc(t_i) - x_{i+1} \cot(t_i).$$

Note que esta fórmula funciona mesmo que $t \geq \frac{\pi}{2}$ com raciocínios análogos:



Caso $t = \frac{\pi}{2}$, $A_iO_{i+1} = x_i$



Caso $t > \frac{\pi}{2}$

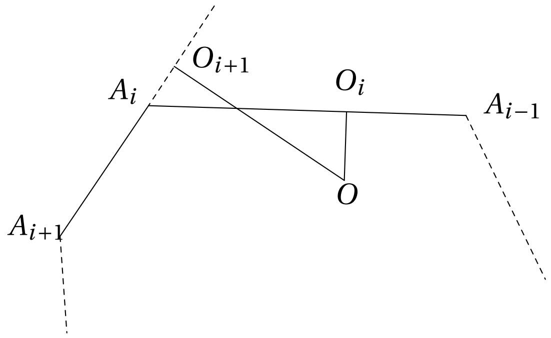
Analogamente,

$$O_{i+1}A_{i+1} = x_{i+2} \csc(t_{i+1}) - x_{i+1} \cot(t_{i+1}).$$

Portanto,

$$y_{i+1} = A_iO_{i+1} + O_{i+1}A_{i+1} = x_i \csc(t_i) - x_{i+1} (\cot(t_i) + \cot(t_{i+1})) + x_{i+2} \csc(t_{i+1}).$$

Enfim, se a projeção de O sobre a reta A_iA_{i+1} está fora do lado A_iA_{i+1}, digamos, sem perda de generalidade, à direita de A_i como na figura abaixo



então, a fórmula para $O_{i+1}A_i$ passa a ter o sinal trocado

$$O_{i+1}A_i = -x_{i+2}\csc(t_{i+1}) + x_{i+1}\cot(t_{i+1}),$$

mas, então,

$$y_{i+1} = A_iO_{i+1} - O_{i+1}A_{i+1} = x_i\csc(t_i) - x_{i+1}(\cot(t_i) + \cot(t_{i+1})) + x_{i+2}\csc(t_{i+1}),$$

com $i = 1, 2, \ldots, n$ e os índices são tomados $\mod n$. Ou seja, $\overrightarrow{y} = A\overrightarrow{x}$ onde A é a matriz "cíclica tridiagonal":

$$A = \begin{pmatrix} -\cot(t_1)-\cot(t_2) & \csc(t_2) & 0 & \cdots & 0 & csc(t_1) \\ csc(t_2) & -\cot(t_2)-\cot(t_3) & csc(t_3) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \csc(t_3) & -\cot(t_3)-\cot(t_4) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \csc(t_4) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\cot(t_{n-1})-\cot(t_n) & \csc(t_n) \\ \csc(t_1) & 0 & 0 & \cdots & \csc(t_n) & -\cot(t_n)-\cot(t_1) \end{pmatrix}$$

b) **Primeira solução:** Note que $\vec{y} = A\vec{x}$ e $\vec{y}' = A\vec{x}'$. Usando o produto interno canônico $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$, temos

$$\sum x_i y_i' = \langle \vec{x}, \vec{y}' \rangle = \langle \vec{x}, A\vec{x}' \rangle = \langle A\vec{x}, \vec{x}' \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x}' \rangle = \sum x_i' y_i$$

onde a igualdade central se justifica, pois A é simétrica (vide item anterior).

Segunda solução: Faça uma homotetia de razão k no polígono original para que ele fique completamente contido no interior do segundo, note que isto não afeta a igualdade que queremos demonstrar, pois ambos os lados ficam multiplicados pela mesma razão k. Sendo $P = P_1P_2 \dots P_n$ o polígono interior e $Q = Q_1Q_2 \dots Q_n$ o exterior, suas áreas são

$$\text{Área } (P) = \sum \text{Área } (OP_iP_{i+1}) = \sum \frac{x_iy_i}{2}$$

$$\text{Área } (Q) = \sum \text{Área } (OQ_iQ_{i+1}) = \sum \frac{x'_iy'_i}{2}.$$

Agora, a área entre os polígonos pode ser dividida em trapézios T_i da forma $P_iP_{i+1}Q_{i+1}Q_i$, cujas áreas são

$$\text{Área } (T_i) = \frac{y_i + y'_i}{2} \cdot \left(x'_i - x_i\right).$$

Portanto, Área (Q) – Área $(P) = \sum \frac{(y_i+y'_i)(x'_i-x_i)}{2}$. Logo,

$$\sum x'_iy'_i - \sum x_iy_i = \sum \left(y_i + y'_i\right)\left(x'_i - x_i\right).$$

E assim $\sum x_iy_i = \sum x'_iy_i$.

Observação: O enunciado não explicita se t_i é o ângulo entre y_{i-1} e y_i ou entre y_i e y_{i+1}. Assim, a seguinte matriz também está correta:

$$A = \begin{pmatrix} -\cot(t_n)-\cot(t_1) & \csc(t_1) & 0 & \cdots & 0 & csc(t_n) \\ csc(t_1) & -\cot(t_1)-\cot(t_2) & csc(t_2) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \csc(t_2) & -\cot(t_2)-\cot(t_3) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \csc(t_3) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\cot(t_{n-2})-\cot(t_{n-1}) & \csc(t_{n-1}) \\ \csc(t_n) & 0 & 0 & \cdots & \csc(t_{n-1}) & -\cot(t_{n-1})-\cot(t_n) \end{pmatrix}$$

6) Convencionamos $x_n = 0$ para $-5 \le n \le 1$ e $x_0 = 1$. Dado que o dado é honesto, os eventos de avançar qualquer valor entre 1 e 6 têm a mesma probabilidade, o que pode ser traduzido na equação

$$x_{n+6} = \frac{(x_{n+5} + x_{n+4} + x_{n+3} + x_{n+2} + x_{n+1} + x_n)}{6},$$

para todo $n \ge -5$. Assim, a sequência $\{x_n\}$ satisfaz uma recorrência linear cujo polinômio característico é $P(x) = x^6 - \frac{1}{6}(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$, em particular temos $P(1) = 0$.

Além disso, se $|\alpha| \geq 1$ é uma raiz do polinômio P, i.e. $P(\alpha) = 0$, definindo $\beta = \dfrac{1}{\alpha}$, temos $|\beta| \leq 1$ e $1 = \dfrac{(\beta + \beta^2 + \beta^3 + \beta^4 + \beta^5 + \beta^6)}{6}$, mas

$$\left|\frac{\beta + \beta^2 + \beta^3 + \beta^4 + \beta^5 + \beta^6}{6}\right| \leq \frac{|\beta| + |\beta|^2 + |\beta|^4 + |\beta|^5 + |\beta|^6}{6} \leq 1$$

onde vale a igualdade se e somente se $\beta = 1$. Assim, o polinômio P não possui raízes com módulo maior que 1. Por outra parte, como 1 é raiz do polinômio, ele pode ser fatorado da seguinte forma

$$P(x) = (x-1)\left(x^5 + \frac{5}{6}x^4 + \frac{4}{6}x^3 + \frac{3}{6}x^2 + \frac{2}{6}x + \frac{1}{6}\right), \tag{1}$$

e daqui facilmente se comprova que 1 é raiz simples de $P(x)$, logo as outras raízes de $P(x)$ têm módulo estritamente menor que 1. Isso implica que

$$x_n = C_1 1^n + C_2\alpha_2 + \cdots + C_6\alpha_6$$

onde α_2, α_3,..., α_6 são as raízes do polinômio característico e C_1, C_2,..., C_6 são constantes adequadas. Logo, a sequência x_n converge.

Vamos agora determinar para que valor converge a sequência $\{x_n\}$. Da fatoração (1) de $P(x)$ segue que a nova sequência $\{z_n\}$ definida por

$$z_n := x_{n+5} + \frac{5}{6}x_{n+4} + \frac{4}{6}x_{n+3} + \frac{3}{6}x_{n+2} + \frac{2}{6}x_{n+1} + \frac{1}{6}x_n$$

é constante, pois a igualdade $z_{n+1} = z_n$ é equivalente à recorrência que define a sequência $\{x_n\}$. Assim, para todo $n \geq -5$, $z_n = x_0 + \frac{5}{6}x_{-1} + \frac{4}{6}x_{-2} + \frac{3}{6}x_{-3} + \frac{2}{6}x_{-4} + \frac{1}{6}x_{-5} = 1$. Por outro lado, se $\{x_n\}$ converge ao número L, z_n converge a

$$\left(1 + \frac{5}{6} + \frac{4}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6}\right)L = \frac{7}{2}L,$$

donde $7L = 2$ e, portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L = \frac{2}{7}$.

Segunda Fase

1) Considere uma ampulheta formada por dois cones congruentes. No instante inicial, a ampulheta encontra-se cheia de água em seu cone superior e vazia em seu cone inferior. A água, então, começará a escoar para o cone inferior. Que fração do volume total de água terá caído quando o centro de gravidade da água estiver no vértice comum aos dois cones da ampulheta?
   Nota: Para efeito do cálculo do centro de gravidade você pode desconsiderar a massa do filete de água que passa pela abertura da ampulheta. Considere também que a água na parte de cima forma um cone e que a água na parte de baixo forma um tronco de cone.

2) Seja $f_0 : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$ uma função de variação limitada, i.e.
$$V\left(f_0\right) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|f_0(n+1) - f_0(n)\right| < \infty.$$
   Para cada $t \in \{1,2,3,\ldots\}$ definimos a função $f_t : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$ por
$$f_t(n) := \frac{f_{t-1}(n-1) + f_{t-1}(n+1)}{2}$$
   e definimos também a função maximal $f^* : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$ por
$$f^*(n) := \sup_{t\geq 0} f_t(n).$$
   a) Prove que se $n \in \mathbb{Z}$ é tal que $f^*(n) > f_0(n)$, então:
$$f^*(n) \leq \frac{f^*(n-1) + f^*(n+1)}{2}.$$
   b) Prove que:
$$V(f^*) \leq V(f_0).$$

3) Sejam D_1 e D_2 dois discos fechados e disjuntos no plano. Prove que existem pontos P e Q no plano, não pertencentes a $D_1 \cup D_2$, que satisfazem a seguinte propriedade:

"Toda parábola que passa por P e Q intersecta $D_1 \cup D_2$".

4) Sejam $1 \le x \le y-2 \le 7$ e sejam C_1 e C_2 os círculos de raio 1 centrados em $(x,0)$ e $(y,0)$, respectivamente.

   a) Qual é o comprimento do caminho mínimo de $(0,0)$ a $(10,0)$ que não passa pelos interiores de C_1 e C_2?

   b) Quando x e y variam, qual é a menor resposta possível para o item a)?

5) a) Considere um caminho aleatório nos números inteiros, ou seja, começa-se no 0 e, a cada passo, vai-se para o próximo número à direita com probabilidade $\frac{1}{2}$ ou para o próximo à esquerda com probabilidade $\frac{1}{2}$. Sejam A e B inteiros positivos. Prove que o número esperado de passos para se atingir pela primeira vez um dos números $-A$ ou B é AB.

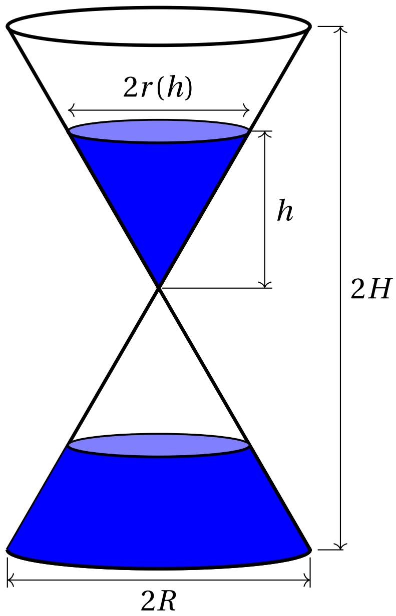
   b) Considere um caminho aleatório em um relógio, ou seja, começa-se, digamos, no 12 e a cada segundo vai-se para o próximo número à direita com probabilidade $\frac{1}{2}$ ou para o próximo à esquerda com probabilidade $\frac{1}{2}$. Qual é o valor esperado do número mínimo de passos para que o caminho visite todos os doze números do relógio?

6) Considere um número real α e constantes $b > 0$ e $\gamma \ge 1$ tais que para quaisquer p e q inteiros com $q \ge 1$ vale
$$|q\alpha - p| \ge \frac{b}{q^\gamma}.$$
Prove que existe uma constante C tal que, para todo inteiro $N \ge 1$, o conjunto
$$X_N = \left\{m\alpha - \lfloor m\alpha \rfloor, m \in \mathbb{Z}, 0 \le m \le CN^\gamma\right\}$$
é tal que, para todo $x \in [0,1]$ existe $y \in X_N$ com $|x-y| < \frac{1}{N}$.

Segunda Fase – Soluções

1) Considere o cone com vértice na origem e eixo z de simetria. Por simetria, as coordenadas x e y do centro de gravidade serão sempre nulas e, portanto, podemos nos restringir apenas a coordenada z.

   Se o cone tem altura total H, raio da base R, a altura de água que ainda está no cone superior é h e o raio do círculo transversal ao cone na altura h é $r(h)$, então, por semelhança, $\frac{r(h)}{h} = \frac{R}{H}$ e há um mesmo volume vazio de água no cone inferior (com altura h).



   A altura do centro de massa da água será, então,

$$z_{cm} = \frac{\displaystyle\int_0^h z\pi r(z)^2 dz - \int_h^H z\pi r(z)^2 dz}{\displaystyle\int_0^h \pi r(z)^2 dz + \int_h^H \pi r(z)^2 dz} = \frac{\displaystyle\int_0^h z^3 dz - \int_h^H z^3 dz}{\displaystyle\int_0^h z^2 dz + \int_h^H z^2 dz}$$
$$= \frac{3(h^4 - (H^4 - h^4))}{4(h^3 + (H^3 - h^3))}.$$

Assim $z_{cm} = 0$ quando $h^4 = (H^4 - h^4)$, ou seja, quando $\frac{h}{H} = \left(\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right)$. Logo, a fração do volume que ainda falta cair é $\left(\frac{h}{H}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$ e a fração do volume da água que terá caído será $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$.

2) a) Se $f^*(n) > f_0(n)$, então,

$$f^*(n) = \sup_{t\ge 0} f_t(n) = \sup_{t\ge 1} f_t(n) = \sup_{t\ge 1}\left(\frac{f_{t-1}(n-1) + f_{t-1}(n+1)}{2}\right) =$$

$$\sup_{t\ge 0}\frac{f_t(n-1)+f_t(n+1)}{2} \le \frac{\sup_{t\ge 0} f_t(n-1) + \sup_{t\ge 0} f_t(n+1)}{2} = \frac{f^*(n-1)+f^*(n+1)}{2}.$$

b) Primeiramente, observe que f_0 é uniformemente limitada, isto é, existe M tal que $f_0(n) \le M$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ (por ser de variação limitada). Isso implica que $f_t(n) \le M$ para todo $t \ge 0$ e $n \in \mathbb{Z}$, o que implica que $f^*(n) \le M$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Além disso é claro que $f^*(n) \ge f_0(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Seja

$$A = \{n \in \mathbb{Z}; f^*(n) > f_0(n)\}$$

o conjunto onde f^* “descola" de f_0. Por a), sabemos que f^* é convexa em A, isto é, para todo $n \in A$ temos

$$f^*(n) \le \frac{1}{2}\big\{f^*(n-1) + f^*(n+1)\big\}.$$

Podemos agora concluir o problema. Denotamos por

$$V_{[a,b]}(f) = \sum_{n=a}^{b-1} |f(n+1) - f(n)|$$

a variação de f no intervalo $[a,b]$ (note que em princípio estamos permitindo $a = -\infty$ e/ou $b = \infty$). Decomponha o conjunto A como união disjunta de intervalos discretos fechados $A = \bigcup_i [a_i, b_i]$ de forma ordenada, i.e. $\cdots b_{i-1} < a_i \le b_i < a_{i+1} \cdots$ (note que esta união pode ser finita, alguns destes intervalos podem ser só um ponto, e podemos ter $a_i = -\infty$ e/ou $b_i = \infty$). Caso b_i e a_{i+1} sejam finitos, note que $a_{i+1} - b_i \ge 2$. Provemos que a variação de f^* em cada um dos intervalos $[a_i - 1, b_i + 1]$ *não é maior que a variação de f_0 no mesmo intervalo.* Em $\mathbb{Z} \setminus \bigcup_i [a_i, b_i]$ temos que $f^* = f_0$ e a variação destas duas funções nesse conjunto é a mesma (mais especificamente, em cada intervalo desse conjunto). Portanto, isso concluirá a prova. Devemos, formalmente, considerar os seguintes casos:

- Caso 1: a_i e b_i finitos.

  Nesse caso, temos $f^*(a_i-1)=f_0(a_i-1)$ e $f^*(b_i+1)=f_0(b_i+1)$. Como f^* é convexa em todo ponto de $[a_i,b_i]$, temos que em $[a_i-1,b_i+1]$ a função f^* admite um ponto de mínimo c tal que $a_i-1\le c\le b_i+1$ e

$$\begin{aligned}V_{[a_i-1,b_i+1]}(f^*)&=\left[f^*(a_i-1)-f^*(c)\right]+\left[f^*(b_i+1)-f^*(c)\right]\\&=\left[f_0(a_i-1)-f^*(c)\right]+\left[f_0(b_i+1)-f^*(c)\right]\\&\le\left[f_0(a_i-1)-f_0(c)\right]+\left[f_0(b_i+1)-f_0(c)\right]\\&\le V_{[a_i-1,b_i+1]}(f_0).\end{aligned}$$

- Caso 2: $a_i=-\infty$ e b_i finito.

  Nesse caso, observe que f^* deve ser não decrescente em $(-\infty,b_i+1]$, pois caso contrário a condição de convexidade implicaria em $\lim_{n\to-\infty}f^*(n)=\infty$, o que sabemos não ser possível. Daí:

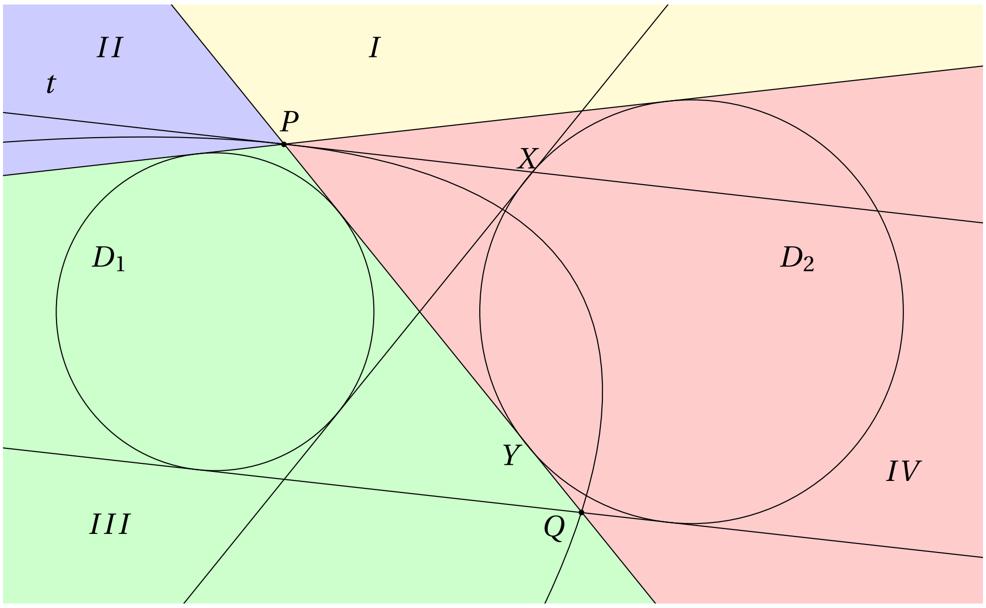
$$\begin{aligned}V_{(-\infty,b_i+1]}(f^*)&=f^*(b_i+1)-\lim_{n\to-\infty}f^*(n)\\&=f_0(b_i+1)-\lim_{n\to-\infty}f^*(n)\\&\le f_0(b_i+1)-\lim_{n\to-\infty}f_0(n)\\&\le V_{(-\infty,b_i+1]}(f_0).\end{aligned}$$

- Caso 3: a_i finito e $b_i=\infty$.

  Análogo ao Caso 2.
- Caso 4: $a_i=-\infty$ e $b_i=\infty$.

  Nesse caso, f^* é uma função convexa e limitada em $\mathbb{Z}$. Deve ser, portanto, constante e o resultado segue trivialmente. Isso conclui a solução.

3) Considere as retas tangentes comuns a D_1 e D_2 e os pontos P e Q definidos pelas interseções de uma tangente interna com cada uma das tangentes externas (vide figura abaixo). Vamos provar que toda parábola passando por P e Q intersecta pelo menos um dos discos D_1 ou D_2.



As retas tangentes que se intersectam em P dividem sua vizinhança em 4 quadrantes, denominados I, II, III e IV como na figura anterior. Seja π uma parábola que passa por P e Q. Considere a reta t tangente a π em P. Essa reta t está contida em um dos ângulos suplementares determinados pelas duas tangentes comuns a D_1 e D_2 passando por P e, portanto, intersecta D_1 ou D_2. Vamos supor sem perda de generalidade que t intersecta D_2. Lembremos que parábolas são convexas e, portanto, π está contida em um dos semiplanos determinados por t.

i) Se t fosse a reta tangente interna aos círculos, já teríamos um absurdo, pois $\{P, Q\} \subset \pi \cap t$, e t é tangente a π.

ii) Considere o triângulo que tem como vértices, o ponto P, o ponto $Y \in D_2$ de tangência da tangente comum interna a D_1 e D_2 que passa por P e X o primeiro ponto de corte de t com D_2, isto é, o ponto de corte mais perto de P. O traço inicial da parábola partindo desde P no quadrante IV está dentro do triângulo PXY e não corta PX pois t é tangente, logo a parábola tem que cortar um dos lados entre XY e PY. Se ela cortasse PY teríamos que ela cortaria a reta PQ em três pontos, o que é contraditório. Logo, a parábola corta o segmento XY que está dentro de D_2, assim obrigatoriamente tem que cortar D_2.

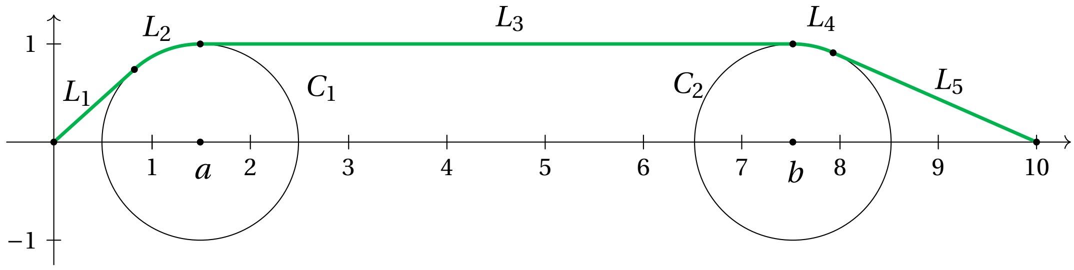
4) Sejam O_1 e O_2 os centros dos círculos com centro em $(a,0)$ e $(b,0)$, respectivamente. Podemos supor que o caminho está acima do eixo x, pois caso contrário, podemos fazer uma reflexão da parte que está embaixo do eixo, obtendo um caminho com o mesmo comprimento.

Afirmação: Seja $y = f(x)$, $x \in [a,b]$ uma função côncava. Então, a curva com menor comprimento que une $(a, f(a))$ com $(b, f(b))$ e que não está abaixo da curva $y = f(x)$ é a própria curva.

Prova: Seja $y = g(x)$, $x \in [a,b]$ a curva minimizante. Seja $c \in (a,b)$ tal que $g(c) > f(c)$. Existe um $\varepsilon > 0$ tal que a circunferência com centro $(c, g(c))$ e raio ε não corta $y = f(x)$. Sejam $d_1 < c < d_2$ tais que $P_1 = (d_1, g(d_1))$ e $P_2 = (d_2, g(d_2))$ estão sobre a circunferência. Logo, se trocarmos, no intervalo (d_1, d_2), a função g pelo segmento de reta entre P_1 e P_2 obtemos um caminho menor. Só não é mais possível fazer esta operação quando todos os pontos estão sobre a curva.

Consideremos a curva $y = f(x)$ acima do eixo que é a envolvente convexa dos pontos $(0,0)$, $(10,0)$ e das duas circunferências. Como nenhum caminho de comprimento menor pode estar abaixo dessa curva (pois ela é composta de retas e de arcos de circunferência, segue, pelo argumento anterior, que esta curva é a minimizante. Observe que isso implica que L_1 e L_5 são tangentes à circunferência.

Agora, basta marcar os ângulos entre o eixo x e o segmento L_1 e entre L_5 e o eixo x.



Assim, $L_1 = \sqrt{a^2-1}$, $L_2 = \text{arcsen}\left(\frac{1}{a}\right)$, $L_3 = b-a$, $L_4 = \text{arcsen}\left(\frac{1}{10-b}\right)$ e $L_5 = \sqrt{(10-b)^2-1}$ e o comprimento do caminho mínimo é $f(a,b) = \sqrt{a^2-1} + \text{arcsen}\left(\frac{1}{a}\right) + b - a + \text{arcsen}\left(\frac{1}{10-b}\right) + \sqrt{(10-b)^2-1}$.

Considere $a = x$ e $b = y$. Seja $g(x) = \sqrt{x^2-1} + \text{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right) - x$. Então, $f(x,y) = g(x) + g(10-y) + 10$ e

$$g'(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - 1 < 0 \quad \forall x \geq 1.$$

Dessa forma, fixado o valor de y, o valor de x que minimiza $f(x,y)$ é o maior valor possível para x. Assim, o caso mímino ocorre para $y = x+2$. Considere, então, $h(x) = g'(x) - g'(8-x) = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} - \sqrt{1-\frac{1}{(8-x)^2}}$. Temos que $h(x) < 0$ para $1 \le x < 4$, $h(x) = 0$ para $x = 4$ e $h(x) > 0$ para $4 < x \le 7$.

Assim, $f(x,x+2) - 10 = g(x) + g(8-x)$ atinge seu mínimo dentro do intervalo $x \in [1,7]$ em $x = 4$. Concluímos que o mínimo é atingido para $x = 4$, $y = 6$, onde $f(4,6) = 2\sqrt{15} + 2\,\text{arcsen}\left(\frac{1}{4}\right) + 2$.

5) A ideia para os dois itens é chegar numa expressão recursiva que pode depender de um ou dois parâmetros.

a) Seja $f(A,B)$ o valor esperado de passos para atingir pela primeira vez $-A$ ou B. Depois do primeiro passo podemos ir à direita com probabilidade $\frac{1}{2}$ e estaremos à distâncias $B-1$ e $A+1$ de nossos objetivos à direita e à esquerda, respectivamente, ou podemos ir à esquerda com probabilidade $\frac{1}{2}$ e estaremos à distâncias $B+1$ e $A-1$. Assim,

$$(1) \qquad f(A,B) = 1 + \frac{f(A+1,B-1) + f(A-1,B+1)}{2} \quad \text{para todo } A,B \ge 1.$$

Vale ressaltar que $f(A,0) = f(0,B) = 0$ para todos A e B, e a equação acima faz sentido nos casos $A = 1$ ou $B = 1$. Além disso, para chegarmos a $-A$ ou B devemos atingir antes $-(A-1)$ ou $B-1$ e estaremos a distâncias 1 e $A+B-1$ de nossos objetivos (repare que o problema é simétrico em A e B). Desta forma,

$$(2) \qquad f(A,B) = f(A-1,B-1) + f(1,A+B-1) \quad \forall A,B \ge 1.$$

Utilizando a equação (1) obtemos

$$\sum_{k=0}^{x-1} f(k+1,x-k) = \sum_{k=0}^{x-1}\left(1 + \frac{f(k+2,x-k-1) + f(k,x-k+1)}{2}\right) =$$

$$x + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{x-1} f(k+1,x-k) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{x-2} f(k+1,x-k) = x + \frac{f(x,1)+f(1,x)}{2} + \sum_{k=1}^{x-2} f(k+1,x-k),$$

assim,

$$f(1,x) + f(x,1) = x + \frac{f(x,1)+f(1,x)}{2} \Rightarrow f(1,x) = f(x,1) = x.$$

A equação (2), então, se transforma em $f(A,B) = f(A-1,B-1) + A + B - 1$.

Vamos agora mostrar o resultado por indução em A. Temos que $f(0,B) = 0$, $f(1,B) = B$ e, para $A \geq 2$,

$$f(A,B) = f(A-1,B-1) + A + B - 1 = (A-1)(B-1) + A + B - 1 = AB.$$

b) A ideia é usar o item a) e construir uma expressão recursiva linear. Seja x_n o valor esperado para percorrer todas as casas de um relógio com n casas. Olhando para o momento em que foram percorridos $n-1$ casas temos que a partir desse momento precisamos andar uma casa na direção que nos faça percorrer a última casa que ainda não foi percorrida ou $n-1$ casas na outra direção. Essa última parte podemos identificar com o problema linear de atingir -1 ou n, que é o caso do item anterior. Portanto,

$$x_n = x_{n-1} + n - 1.$$

Desta forma, obtemos, então, uma soma telescópica que tem como resultado

$$x_n = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

A resposta, portanto, é $\dfrac{12 \cdot 11}{2} = 66$.

6) Inicialmente, vamos fixar algumas notações: Para todo $x \in \mathbb{R}$, definimos $x \pmod 1 = x - \lfloor x \rfloor$ e dados $Y \subset [0,1]$ e $\delta > 0$, dizemos que Y é δ-denso en $[0,1]$ se, para todo $a \in [0,1]$, existe $y \in Y$ com $|y - a| < \delta$.

Seja s um número inteiro positivo fixado e denotemos por $N_s := 2^s$. Pelo Teorema de Dirichlet, existem um inteiro positivo $q_s \leq N_s$ e um inteiro p_s com $|q_s\alpha - p_s| < 1/N_s$. Pela hipótese do enunciado, como $q_s \geq 1$, temos

$$|q_s\alpha - p_s| > \frac{b}{q_s^\gamma} \geq \frac{b}{N_s^\gamma}.$$

Seja, então, $\varepsilon_s := |q_s\alpha - p_s| = m_s\alpha \pmod 1$, onde $m_s = i_s \cdot q_s$ e $i_s \in \{-1,1\}$ é o sinal de $q_s\alpha - p_s$. Segue que podemos limitar ε_s a partir das relações anteriores da seguinte forma:

$$\frac{b}{N_s^\gamma} < \varepsilon_s < \frac{1}{N_s} = 1/2^s.$$

Fixemos, agora, $t \in [0,1]$ e N um inteiro positivo e consideremos a seguinte construção: definimos $t_0 = t$ e, para cada $s \geq 1$, $d_s := \lfloor t_{s-1}/\varepsilon_s \rfloor$ e $t_s := t_{s-1} - d_s.\varepsilon_s$. Da definição de t_s facilmente se verifica que $0 \leq t_s < \varepsilon_s$, donde

$$d_s < \frac{\varepsilon_{s-1}}{\varepsilon_s} < \frac{N_s^\gamma}{b \cdot N_{s-1}} = \frac{2}{b} \cdot 2^{(\gamma-1)s}$$

para todo inteiro positivo s.

Tomando $S = \lfloor \log N / \log 2 \rfloor + 2$ e $x = \sum\limits_{s=1}^{S} d_s \varepsilon_s$, temos

$$0 \leq t - x < \varepsilon_S < \frac{1}{2^S} < \frac{1}{2N} \text{ e } x = n\alpha \pmod 1,$$

onde o número inteiro $n := \sum\limits_{s=1}^{S} d_s m_s$ satisfaz

$$|n| \leq \sum_{s=1}^{S} \frac{2}{b} \cdot 2^{(\gamma-1)s} \cdot 2^s < \frac{4}{b} \cdot 2^{\gamma S} \leq \frac{2^{2\gamma+2}}{b} \cdot N^\gamma.$$

Isto prova que o conjunto

$$\left\{ m\alpha \pmod 1 \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}, \quad -\frac{2^{2\gamma+2}}{b} N^\gamma < m < \frac{2^{2\gamma+2}}{b} N^\gamma \right\}$$

é $\frac{1}{2N}$-denso em $[0,1]$, e logo,

$$X_N = \left\{ m\alpha \pmod 1 | m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq \frac{2^{2\gamma+3}}{b} N^\gamma \right\}$$

é $\frac{1}{N}$-denso em $[0,1]$, pois, se $X \subset [0,1]$ é $\frac{1}{N}$-denso em $[0,1]$ e $c \in \mathbb{R}$ é uma constante qualquer, então o conjunto $\{x + c \pmod 1, x \in X\}$ é $\frac{1}{N}$-denso em $[0,1]$.

Premiados

Medalha de Ouro

Nome	Cidade Estado	Pontos
Thiago Ribeiro Ramos	Varginha MG	228
Fernando Fonseca Andrade Oliveira	Belo Horizonte MG	225
Henrique Gasparini Fiúza do Nascimento	Brasília DF	223
Cássio Henrique Vieira Morais	Belo Horizonte MG	196
Daniel dos Santos Bossle	Porto Alegre RS	187

Medalha de Prata

Nome	Cidade Estado	Pontos
Glauber de Lima Guarinello	São Paulo SP	178
Iuri Rezende Souza	Uberlândia MG	176
Rafael Kazuhiro Miyazaki	São Paulo SP	175
André Macieira Braga Costa	Belo Horizonte MG	174
Davi Lopes Alves de Medeiros	Fortaleza CE	169
Igor Albuquerque Araujo	Rio de Janeiro RJ	166
Thomas Rincon Reis	Rio de Janeiro RJ	156

Medalha de Bronze

Nome	Cidade Estado	Pontos
Tiago Vital Garcia	Rio de Janeiro RJ	148
Thiago Poeiras Silva	Belo Horizonte MG	148
Thomás Jung Spier	Estância Velha RS	147
Esdras Muniz Mota	Caucaia CE	136
Gabriel José Moreira da Costa Silva	Maceió AL	136
Victor Seixas Souza	Campinas SP	136
Davi Coelho Amorim	Fortaleza CE	132
Gustavo Lopes Rodrigues	Porto Alegre RS	132
Matheus Leal Assunção	Rio de Janeiro RJ	132
José Olegário de Oliveira Neto	Fortaleza CE	131
Charles Barbosa de Macedo Brito	Natal RN	130
Thiago da Silva Pinheiro	São Paulo SP	130

Menção Honrosa

Nome	Cidade Estado	Pontos
Guilherme Horta Alvares da Silva	Belo Horizonte MG	128
Lucas da Silva Reis	Belo Horizonte MG	128
Erik Gabriel Araújo de Medeiros	Salvador BA	127
Lucas Garcia Gomes	Campinas SP	125
João Miranda Carnevale	Rio de Janeiro RJ	124
Victor Villas Boas Chaves	Rio de Janeiro RJ	124
Tadeu Pires de Matos Belfort Neto	S.J. dos Campos SP	121
Lucas Niemeyer Carneiro Messina de Assis	Rio de Janeiro RJ	120
Daniel Ariano Sortica	São Paulo SP	118
Victor Feitosa e Carvalho Souza	Rio de Janeiro RJ	111
Maria Clara Mendes Silva	Rio de Janeiro RJ	110
Victor Tadeu Tetsuo Suzuki	Belo Horizonte MG	109
Geovanny Lucas de Lima Paulino	Arcoverde PE	107
Tullio Oguido da Costa	Londrina PR	107
Arthur Andrades Covatti	S.J. dos Campos SP	106
João Pedro Silva Oliveira	Rio de Janeiro RJ	105
José Maia de Melo Neto	Belém PA	105
Marcelo Luiz Gonçalves	França SP	105
Daniel Roediger	São Paulo SP	102
Lucas Medeiros Sobrinho de Sousa	Salvador BA	100
Felipe José Pinto Antunes	Rio de Janeiro RJ	99
Bruno Monteiro Rocha Lima	Rio de Janeiro RJ	96
André Badenas dos Santos	Curitiba PR	95
Ivan Henrique Costa Petrin	Osasco SP	94
Thiago Tarraf Varella	São Paulo SP	91
Victor Moreira Cunha	Salvador BA	90

Coordenadores Regionais

ALAGOAS

Krerley Irraciel Martins Oliveira	Universidade Federal de Alagoas	MACEIÓ

AMAPÁ

André Luiz Dos Santos Ferreira	Instituto Federal do Amapá	MACAPÁ

AMAZONAS

Disney Douglas de Lima Oliveira	Universidade Federal do Amazonas	MANAUS

BAHIA

Luzinalva Miranda de Amorim	Universidade Federal da Bahia	SALVADOR
Tadeu Ferreira Gomes	Universidade do Estado da Bahia	JUAZEIRO

CEARÁ

Esdras Soares de Medeiros Filho	Universidade Federal do Ceará	FORTALEZA

DISTRITO FEDERAL

Diego Marques	Unb Universidade de Brasília	BRASÍLIA

ESPÍRITO SANTO

Florêncio Ferreira Guimarães Filho	Universidade Federal do Espírito Santo	VITÓRIA
Valdinei Cezar Cardoso	Universidade Federal do Espirito Santo	SÃO MATEUS

GOIÁS

Ana Paula de Araújo Chaves	Universidade Federal de Goiás	GOIÂNIA

MARANHÃO

Nivaldo Costa Muniz	Univ. Federal do Maranhão	SÃO LUÍS

MATO GROSSO

André Krindges	Universidade Federal de Mato Grosso	CUIABÁ

MATO GROSSO DO SUL

Edgard José Dos Santos Arinos	Colégio Militar de Campo Grande	CAMPO GRANDE

MINAS GERAIS

Antonio Carlos Nogueira	Universidade Federal de Uberlândia	UBERLÂNDIA
Daniele Cristina Gonçalves	Universidade do Estado de Minas Gerais	JOÃO MONLEVADE
Francinildo Nobre Ferreira	Universidade F. de S. João Del Rei	SÃO JOÃO DEL REI
Glauker Menezes de Amorim	Universidade Federal de Juiz de Fora	JUIZ DE FORA
João Batista Queiroz Zuliani	Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais	TIMÓTEO
Lucio Paccori Lima	Universidade Federal de Viçosa	FLORESTAL
Marcelo Ferreira	Universidade Federal do Triângulo Mineiro	UBERABA
Marcio Fialho Chaves	Universidade Federal de Lavras	LAVRAS
Rosivaldo Antonio Gonçalves	Universidade Estadual de Montes Claros	MONTES CLAROS
Seme Gebara Neto	Universidade Federal de Minas Gerais	BELO HORIZONTE

PARÁ

Adenilson Pereira Bonfim	Escola Tenente Rêgo Barros	BELÉM
Mario Tanaka Filho	Universidade Federal do Oeste do Pará	SANTARÉM

PARAÍBA

Alex Pereira Bezerra	Instituto Federal da Paraíba	CAMPINA GRANDE
José Vieira Alves	Universidade Federal de Campina Grande	CAMPINA GRANDE
Romildo Nascimento de Lima	Universidade Federal de Campina Grande	CAMPINA GRANDE

PARANÁ

Alzira Akemi Kushima	Colégio Militar de Curitiba	CURITIBA
Eduardo de Amorim Neves	Universidade Estadual de Maringá	MARINGA
Elisangela Dos Santos Meza	Universidade Estadual de Ponta Grossa	PONTA GROSSA

PERNAMBUCO

Marcos Luiz Henrique	Universidade Federal de Pernambuco	CARUARU
Thiago Dias Oliveira Silva	Universidade Federal Rural de Pernambuco	RECIFE

PIAUÍ

Ítalo Dowell Lira Melo	Universidade Federal do Piauí	TERESINA
Paulo Sérgio Marques Dos Santos	Universidade Federal do Piauí	PARNAÍBA

RIO DE JANEIRO

Jorge Henrique Craveiro de Andrade	Colégio e Curso PENSI	RIO DE JANEIRO
José Luiz Dos Santos	Colégio CPM	BOM JARDIM
Ricardo de Amorim Oliveira	Centro Educacional Logos	NOVA IGUAÇÚ

RIO GRANDE DO NORTE

Carlos Alexandre Gomes da Silva	Universidade Federal do Rio Grande do Norte	NATAL

RIO GRANDE DO SUL

Artur Oscar Lopes	Universidade Federal do Rio Grande do Sul	PORTO ALEGRE
Carmen Vieira Mathias	Universidade Federal de Santa Maria	SANTA MARIA
Denice Aparecida Fontana Nisxota Menegais	Universidade Federal do Pampa	BAGÉ
Elizabeth Quintana Ferreira da Costa	Universidade Federal do Rio Grande do Sul	PORTO ALEGRE

RONDÔNIA

Tomás Daniel Menéndez Rodriguez	Fundação Universidade Federal de Rondônia	PORTO VELHO

RORAIMA

Gilson de Souza Costa	Universidade Federal de Roraima	BOA VISTA

SANTA CATARINA

Alda Dayana Mattos Mortari	Universidade Federal de Santa Catarina	FLORIANÓPOLIS
Licio Hernanes Bezerra	Universidade Federal de Santa Catarina	FLORIANÓPOLIS
Marcelo Zannin da Rosa	Universidade Federal de Santa Catarina	ARARANGUÁ

SÃO PAULO

Ali Tahzibi	Universidade de São Paulo	SÃO CARLOS
Américo Lopez Gálvez	Universidade de São Paulo	RIBEIRÃO PRETO
Armando Ramos Gouveia	Instituto Tecnológico de Aeronáutica	SÃO JOSÉ DOS CAMPOS
Cláudio de Lima Vidal	Colégio Celtas	VOTUPORANGA
Débora Bezerra Linhares Libório	Universidade Metodista de São Paulo	SÃO BERNARDO DO CAMPO
Edson Abe	Colégio Objetivo Campinas	CAMPINAS
Emiliano Chagas	Instituto Federal de São Paulo	SÃO PAULO
Luis Antonio Fernandes de Oliveira	Universidade Estadual Paulista	ILHA SOLTEIRA
Newman Ribeiro Simões	Colégio Luiz de Queiroz	PIRACICABA
Raul Cintra de Negreiros Ribeiro	Colégio Anglo Atibaia	JUNDIAÍ
Reinaldo Gen Ichiro Arakaki	FATEC - São José Dos Campos	SÃO JOSÉ DOS CAMPOS
Samuel Liló Abdalla	Colégio Anglo Sorocaba	SOROCABA

SERGIPE

Valdenberg Araújo da Silva	Universidades Federal de Sergipe	ARACAJU

TOCANTINS

Adriano Rodrigues	Universidade Federal do Tocantins	ARRAIAS