EUREKA!

Nº 42

OLIMPÍADA
BRASILEIRA DE
MATEMÁTICA

2020

Sociedade Brasileira de Matemática – SBM
Presidente: Paulo Piccione

Instituto de Matemática Pura e Aplicada
Diretor: Marcelo Viana

Apoio:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq

Associação Olimpíada Brasileira de Matemática
Avenida das Américas, nº 11.365 - A3 Offices, Sala 230
Barra da Tijuca, Rio de Janeiro/RJ
CEP 22793-082
e-mail: `contato@associacaodaobm.org` Página eletrônica: www.associacaodaobm.org

Esta edição contou com a colaboração de Igor Albuquerque Araujo, Luíze Mello D'Urso Vianna Thiago Ribeiro Tergolino, na redação das soluções da Segunda Fase Nível Universitário.

Conteúdo

Página

37ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

NÍVEL 1

Primeira Fase

1) Juquinha e seus amigos organizaram uma corrida com seus carrinhos. O carrinho branco (B) chegou antes do vermelho (V) e do marrom (M). O carrinho azul (A) chegou depois do marrom e antes do vermelho. Qual foi a ordem de chegada dos carrinhos?

A) B–A–V–M B) B–V–A–M C) B–M–A–V
D) B–M–V–A E) B–A–M–V

2) Para cortar um tronco reto de eucalipto em 6 partes, o madeireiro Josué faz 5 cortes. Ele leva meia hora para fazer os cortes, que são feitos sempre da mesma maneira. Quanto tempo Josué levará para cortar outro tronco igual em 9 pedaços?

A) 40 min B) 44 min C) 45 min D) 48 min E) 54 min

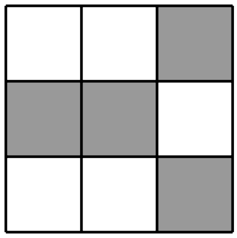
3) Qual é o valor da expressão $2015^2 - 2015 \times 2014 - 2014^2 + 2014 \times 2015$?

A) 0 B) 1 C) 2015 D) 2029 E) 4029

4) Joana fez uma compra e, na hora de pagar, deu uma nota de 50 reais. O caixa reclamou, dizendo que o dinheiro não dava. Ela deu mais uma nota de 50 e o caixa deu um troco de 27 reais. Então Joana reclamou, corretamente, que ainda faltavam 9 reais de troco. Qual era o valor da compra?

A) 52 B) 53 C) 57 D) 63 E) 64

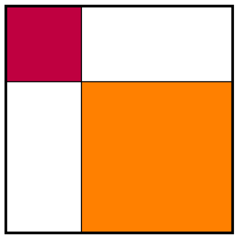
5) Violeta quer numerar de 1 a 9 os quadrados do tabuleiro ao lado, de modo que a soma de dois números em quadrados vizinhos (quadrados com lados comuns) seja um número ímpar. Além disso, ela quer que a soma dos números escritos nos quadrados cinza seja a maior soma possível.



Qual é a soma dos números escritos nos quadrados brancos?

A) 15 B) 16 C) 22 D) 29 E) 30

6) Com dois cortes perpendiculares, Pablo dividiu uma folha de madeira quadrada em dois quadrados, um de área 400 cm^2 e outro de área de 900 cm^2 e mais dois retângulos iguais, conforme desenho.



Qual é a área da folha de madeira?

A) 2500 cm^2 B) 2400 cm^2 C) 2100 cm^2 D) 1800 cm^2 E) 1600 cm^2

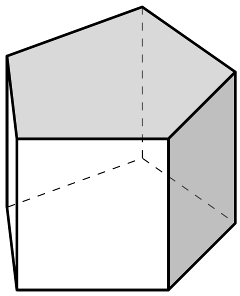
7) Efetuando as operações indicadas na expressão $10^{15} - 15$, obtemos um número muito grande. Qual é a soma de todos os algarismos desse número?

A) 85 B) 105 C) 130 D) 132 E) 202

8) A média aritmética dos algarismos do ano 2015 é igual a 2, pois $\frac{2+0+1+5}{4} = \frac{8}{4} = 2$. Quantas vezes em nosso século isto irá acontecer com os algarismos nos anos após 2015?

A) 3 B) 5 C) 6 D) 7 E) 9

9) Um bloco de madeira tem faces pentagonais e faces retangulares. Duas faces são vizinhas quando possuem uma aresta comum, como é o caso das duas faces sombreadas na figura. Wagner quer pintar as faces desse bloco de forma que duas faces vizinhas tenham cores diferentes, mas ele quer usar o menor número possível de cores. Qual é esse número?

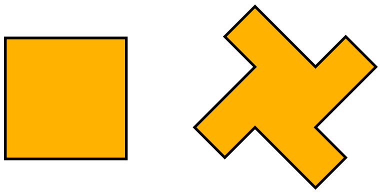


A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

10) Carlos e seus dois amigos, Danilo e Edson, foram ao cinema. Carlos pagou a entrada de todos, Danilo pagou a pipoca e o suco para todos e Edson pagou o estacionamento do carro. Para acertar as contas, Danilo e Edson pagaram R$ 8,00 e R$ 14,00, respectivamente, para Carlos, pois a despesa total de cada um foi de R$ 32,00. Qual era o preço da entrada no cinema?

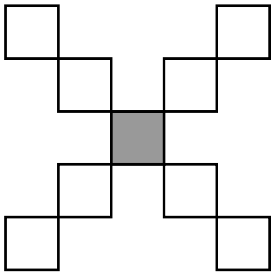
A) R$ 10,00 B) R$ 12,00 C) R$ 15,00 D) R$ 18,00 E) R$ 20,00

11) Geraldo, o serralheiro, pegou uma chapa de metal quadrada, recortou e depois soldou quatro triângulos retângulos de catetos de 5 cm, construindo a peça representada ao lado. Qual é a área desta peça?



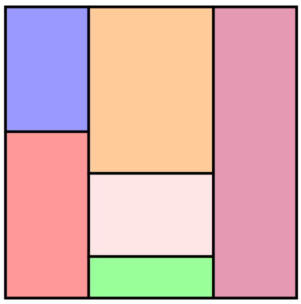
A) 100 cm^2 B) 125 cm^2 C) 150 cm^2 D) 200 cm^2 E) 250 cm^2

12) Julieta fez um X com nove quadradinhos, conforme a figura. Ela quer escrever os números de 1 a 9 nesses quadradinhos, sem repeti-los, de forma que as somas dos dois números em cada uma das quatro "perninhas" do X seja a mesma. Quantos dos números de 1 a 9 podem ocupar a casa central (em cinza) do X?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

13) A artista Juliana quer recobrir um mural quadrado de 7 metros de lado com placas retangulares, sem superposição dessas placas. Ela não quer usar nenhuma placa quadrada. Além disso, as medidas das placas são números inteiros de metros (na figura, um modelo do que poderia ser feito). Entretanto, Renata quer fazer o revestimento com o maior número possível de placas. Quantas placas ela irá usar?



A) 10 B) 14 C) 18 D) 20 E) 24

14) Fabiana tem 55 cubos de mesmo tamanho, sendo 10 deles vermelhos, 15 azuis e 30 verdes. Ela quer construir uma torre empilhando esses cubos de modo que dois

cubos vizinhos tenham cores diferentes. No máximo, quantos cubinhos ela poderá empilhar?

A) 39 B) 51 C) 52 D) 54 E) 55

15) Na tabela abaixo vemos uma parte dos resultados das eleições num certo país, na qual os porcentuais se referem ao número total de eleitores.

Turnos \ Partidos	AA	BB	CC	Outros partidos e votos nulos
1º turno	39%	31%	20%	10%
2º turno	?	?	0	?

No segundo turno, todos os eleitores que votaram no partido AA mantiveram seus votos e o mesmo ocorreu com os eleitores do partido BB. Dos que votaram no partido CC no primeiro turno, 40% votou no partido AA e os demais no partido BB. Dos que haviam votado em outros partidos ou anulado o seu voto, 60% continuou sem votar em AA ou BB e o restante votou parte em AA e parte em BB. Dessa forma, é correto afirmar que:

A) AA venceu com mais de 47% dos votos.

B) BB venceu com 47% dos votos.

C) AA venceu com 51% dos votos.

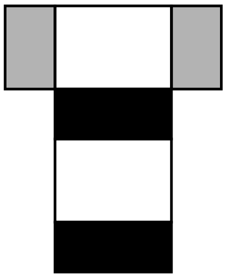
D) BB venceu com mais de 43% dos votos.

E) Nenhuma das afirmações anteriores decorre das informações dadas.

16) Esmeralda brinca de escrever o número 2015 como a soma de três números, em ordem não decrescente, todos com três algarismos, como, por exemplo, $670 + 671 + 674 = 2015$ e $175 + 920 + 920 = 2015$. Note que, no segundo exemplo, o número 920 aparece duas vezes como parcela. Se ela escrevesse todas as somas possíveis, quantos números apareceriam duas vezes como parcela?

A) 100 B) 449 C) 450 D) 570 E) 999

17) Juliana fez a planificação de uma caixa de papelão com duas faces brancas, duas pretas e duas cinzentas. As faces brancas têm área de 35 cm^2 cada uma, as faces pretas têm área de 21 cm^2 cada uma e as cinzentas, 15 cm^2. Qual é o volume da caixa?

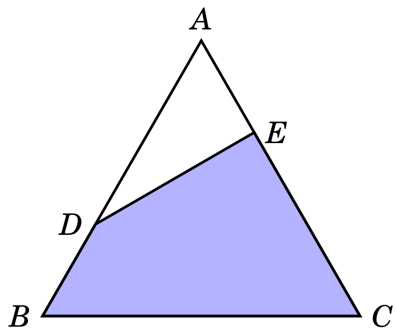


A) 25cm^3 B) 60cm^3 C) 71cm^3
D) 105cm^3 E) 220cm^3

18) O número $5^2 = 25$ é um quadrado perfeito e o número $4^3 = 64$ é um cubo perfeito. Qual é o menor número inteiro positivo n cujo dobro é um quadrado perfeito e cujo triplo é um cubo perfeito?

A) 72 B) 98 C) 144 D) 216 E) 256

19) No triângulo equilátero ABC da figura, o segmento DA é o dobro de DB e o segmento EC é o dobro de EA. Sabendo que a área do triângulo ABC é igual a 162 cm^2, qual é a área, em centímetros quadrados, do quadrilátero sombreado?



A) 126 B) 132 C) 135
D) 140 E) 144

20) Uma urna vermelha contém 20 bolas, numeradas de 1 a 20, e uma urna verde está vazia.

i) Maria retira uma bola, mostra seu número para João e a coloca na urna verde.

ii) João retira da urna vermelha todas as bolas cujos números são divisores do número mostrado por Maria e as coloca na urna verde.

Os passos i) e ii) são repetidos em sequência, até o momento que o passo ii) não pode ser mais realizado. No máximo, quantas bolas poderão ser colocadas na urna verde?

A) 12 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

Primeira Fase – Soluções

Gabarito

1) C	6) A	11) D	16) C
2) D	7) C	12) C	17) D
3) E	8) B	13) E	18) A
4) E	9) B	14) B	19) A
5) B	10) D	15) A	20) E

1) **(C)** Como o carrinho azul (A) chegou depois do marrom (M) e antes do vermelho (V), significa que A está entre M e V, ou seja, a ordem entre eles é M - A - V. Além disso, como carrinho B chegou na frente do V e do M, vemos então que B está na frente dos outros três carrinhos.
Assim, a ordem de chegada dos carrinhos é B - M - A - V.

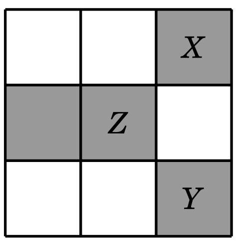
2) **(D)** Se para cortar um tronco reto de eucalipto em 6 partes, o madeireiro Josué faz 5 cortes e leva meia hora para fazer os cortes, vemos que cada corte é feito em 30 ÷ 5 = 6 minutos.
Portanto, para cortar outro tronco igual em 9 pedaços ele precisará fazer 8 cortes. E isso levará 8 × 6 = 48 minutos.

3) **(E)** O valor da expressão é

$$\begin{aligned} 2015^2 - 2015 \times 2014 - 2014^2 + 2014 \times 2015 &= 2015^2 - 2014^2 \\ &= (2015+2014)(2015-2014) \\ &= 4029 \end{aligned}$$

4) **(E)** O valor da compra é $(50+50)-(27+9) = 100-36 = 64$ reais.

5) **(B)**



Considere as casas marcadas com X, Y e Z. As casas X e Z são vizinhas de uma mesma casa (que está à esquerda de X e acima de Z). Isto mostra que os números nas casas X e Z devem ter a mesma paridade, uma vez que a soma de dois números em casas vizinhas são ímpares.

Analogamente, as casas com Y e Z devem possuir números com a mesma paridade.

Com isso, obtemos que X, Y e Z devem possuir a mesma paridade e assim a soma dos números nas casas cinzas é menor ou igual a 9 + 7 + 5 + 8 = 29. Como a soma dos números de 1 até 9 é igual a 45, segue que a soma dos números nas casas brancas é pelo menos 16. Um exemplo que mostra que estes valores podem ser atingidos é:

1	2	9
8	5	4
3	6	7

6) **(A)** Como $400 = 20^2$, o quadrado menor tem lado 20 cm, e como $900 = 30^2$, o quadrado maior tem lado 30 cm. Portanto a folha de madeira tem lado $20 + 30 = 50$cm e a sua área é $50^2 = 2500$ cm^2.

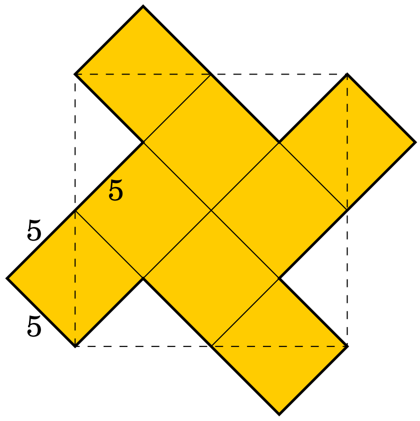
7) **(C)** Temos $10^{15} - 15 = 1000000000000000 - 15 = 999999999999985$. A soma dos algarismos desse número é $13 \times 9 + 8 + 5 = 117 + 8 + 5 = 130$.

8) **(B)** O nosso século se iniciou no ano 2001 e terminará no ano 2100. Como a média aritmética dos algarismos de 2100 não é 2, os números procurados serão da forma $\overline{20ab}$. Veja que $\dfrac{2+0+a+b}{4} = 2 \iff a + b = 6$. Dado que a e b são algarismos, a princípio, os possíveis valores do par (a, b) são (0,6), (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1) e (6,0). Como só nos interessam os anos posteriores a 2015, devemos descartar os primeiros dois pares. Portanto existem cinco anos possíveis.

9) **(B)** Pintando a face superior e a inferior com a mesma cor, a maneira mais eficiente de pintar as laterais é alternando duas cores diferentes. Porém, depois de pintar quatro laterais, nota-se que a face restante toca faces com cada cor usada até então, portanto é necessária uma quarta cor. Logo ele precisará de 4 cores.

10) **(D)** Para cada um, o gasto com a pipoca e o suco foi $(32-8)\div 3 = 24\div 3 = 8$ reais e com o estacionamento foi $(32-14)\div 3 = 18\div 3 = 6$ reais. Se a despesa total de cada um foi de 32 reais, o preço da entrada foi $32-8-6 = 18$ reais.

11) **(D)** O desenho a seguir mostra como ele procedeu para recortar a chapa.



Note que cada quadradinho destacado no desenho acima tem área $5\times 5 = 25$ cm^2. Como há um total de 8 quadradinhos, a área da peça é $8\times 25 = 200$cm^2.

12) **(C)** Primeiro, veja que $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$.

Se colocarmos o número a na casa central, então cada "perninha" tem que ter soma $\frac{45-a}{4}$. Como esta fração tem que ser um número inteiro, a só pode ser 1, 5 ou 9.

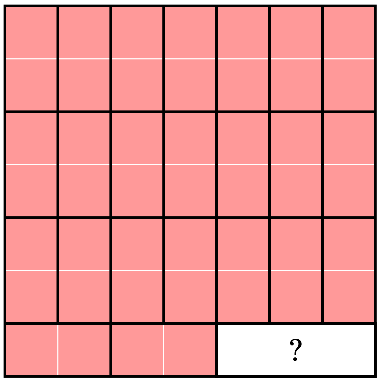
Se ela colocar o 1 na casa central, os demais números terão que ser divididos em pares cuja soma é $\frac{45-1}{4} = 11$. Isso pode ser feito colocando $\{2,9\}$, $\{3,8\}$, $\{4,7\}$ e $\{5,6\}$ nas "perninhas".

Se ela colocar o 5 na casa central, os demais números terão que ser divididos em pares cuja soma é $\frac{45-5}{4} = 10$. Isso pode ser feito colocando $\{1,9\}$, $\{1,8\}$, $\{3,7\}$ e $\{4,6\}$ nas "perninhas".

Por fim, se ela colocar o 9 na casa central, os demais números terão que ser divididos em pares cuja soma é $\frac{45-9}{4} = 9$. Isso pode ser feito colocando $\{1,8\}$, $\{2,7\}$, $\{3,6\}$ e $\{4,5\}$ nas "perninhas".

Portanto há 3 números que podem ocupar a casa central do X.

13) **(E)** Para fazer o revestimento com o maior número possível de placas, ela deve iniciar usando a maior quantidade da menor placa possível, a placa retangular 2×1 metros. Podemos colocar 23 placas 2×1 no quadrado, conforme a figura a seguir, que mostra uma maneira de preenchimento destacada em cor.



Agora falta a região em branco. Veja que se colocarmos mais uma placa 2×1, restará uma região quadrada 1×1, contrariando as condições dadas. Portanto finalizaremos preenchendo com uma placa 3×1 metros, dando ao revestimento o maior número de placas possível, que é $23 + 1 = 24$. Há outras maneiras de se distribuir as 24 placas retangulares, nenhuma quadrada.

14) **(B)** É possível empilhar 51 cubinhos. Para isso, basta usar 26 cubos verdes intercalados por 25 cubos das outras duas cores. Se fosse possível empilhar 52 cubinhos, seriam usados pelo menos $52 - 10 - 15 = 27$ cubos verdes. Entretanto, como dois cubos verdes não podem estar em contato, precisaríamos de pelo menos 26 cubos de outras cores separando-os. Como não existe tal quantidade de cubinhos diferentes da cor verde, o máximo é 51.

15) **(A)** Completando a tabela, no segundo turno, todos os eleitores que votaram no partido AA mantiveram seus votos e o mesmo ocorreu com os eleitores do partido BB. Além disso, dos que votaram no partido CC no primeiro turno, 40% de 20%, que é 8%, votaram no partido AA e os demais, 60% de 20%, que é 12%, votaram no partido BB. Até esse momento, as porcentagens para AA e BB ficam assim:

Partidos / Turnos	AA	BB	CC	Outros partidos e votos nulos
1° turno	39%	31%	20%	10%
2° turno	$39\% + 8\%$	$31\% + 12\%$	0	?

Só isso já daria vantagem ao candidato AA.

Temos que distribuir os votos dos que haviam votado em outros partidos ou anulado o seu voto. Sabe-se que 60% de 10%, que é 6%, continuaram sem votar em AA ou BB e o restante, 40% de 10%, que é 4%, votaram parte em AA e parte em BB, mas isso não muda a vantagem do candidato AA, pois como menos de 4% optaram por votar em BB, ele obteve menos de 47% dos votos, e o restante optou pelo candidato AA.

Dessa forma, é correto afirmar que AA venceu com mais de 47% dos votos.

16) **(C)** Analisando os casos em que os dois primeiros números são iguais, vemos 164 possibilidades, que podem ser estruturadas como a seguir:

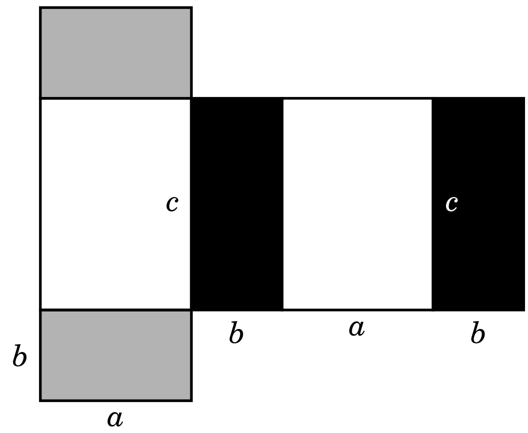
1ºnúmero	2ºnúmero	3ºnúmero	Soma
508	508	999	2015
509	509	997	2015
510	510	995	2015
...	...	...	...
671	671	673	2015

Agora, analisando os casos em que os dois últimos números são iguais, há 286 possibilidades, que podem ser estruturadas como a seguir:

1ºnúmero	2ºnúmero	3ºnúmero	Soma
101	957	957	2015
103	956	956	2015
105	955	955	2015
...	...	...	...
671	672	672	2015

Portanto há $164 + 286 = 450$ maneiras em que os números aparecem duas vezes como parcela.

17) **(D)** Sejam a, b, e c as dimensões da caixa de papelão, conforme a figura a seguir. Assim, o volume da caixa é $a \cdot b \cdot c$.



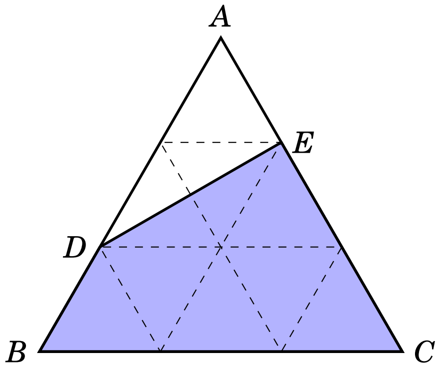
Como cada face branca tem área 35 cm^2, temos $a \cdot c = 35$. Cada face preta tem área 21 cm^2, ou seja, $b \cdot c = 21$. Além disso, cada face cinzenta tem área 15 cm^2, ou seja, $a \cdot b = 15$. Assim, temos

$$\begin{aligned}(a \cdot c)(b \cdot c)(a \cdot b) = 35 \cdot 21 \cdot 15 &\iff a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \\ &\iff (a \cdot b \cdot c)^2 = (3 \cdot 5 \cdot 7)^2 \\ &\implies a \cdot b \cdot c = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105.\end{aligned}$$

Portanto, o volume da caixa é 105 cm^3.

18) **(A)** Seja x o número procurado, de modo que $2x = n^2$ e $3x = m^3$. Como n^2 possui pelo menos dois fatores 2, x é par. Consequentemente, a fatoração em primos de m^3 deve conter pelo menos três fatores 2 e isso obriga x a ser múltiplo de 8. Usando agora que m^3 é múltiplo de 3 e, portanto, deve possuir pelo menos três fatores desse primo em sua fatoração, podemos concluir que x é múltiplo de 9. Assim, x é múltiplo de 72. Como tal número satisfaz as duas condições do enunciado, ele é o menor valor interior positivo possível para x.

19) **(A)** O triângulo equilátero ABC pode ser dividido em 9 triângulos equiláteros, todos iguais, como mostra a figura.



Perceba que a área sombreada ocupa 7 dos 9 triângulos equiláteros, ou seja, a sua área é $\frac{7}{9}$ da área do triângulo ABC. Portanto a área do quadrilátero sombreado é $\frac{7}{9} \times 163 = 126$ cm^2.

20) **(E)** João não terá escolha na urna vermelha se as bolas deixadas restantes forem os números primos entre 10 e 20, que são o 11, o 13, o 17 e o 19. Isso porque os seus divisores serão o 1 (que já terá sido retirada na primeira jogada de João) e o próprio número (que será a bola retirada por Maria). Ou seja, no máximo 16 + 1 = 17 bolas podem ser passadas para a urna verde. De fato, isso pode ser feito, conforme a sequência de movimentos representada na tabela abaixo.

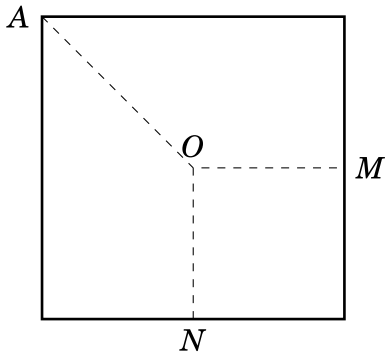
Maria	João
15	1, 3, 5
10	2
20	4
18	9
12	6
16	8
14	7
11	-

No final, restam as bolas 13, 17 e 19 na urna vermelha, ou seja, 17 foram transferidas para a urna verde. Note que a bola retirada no último movimento podia ser qualquer uma das bolas restantes.

Segunda Fase

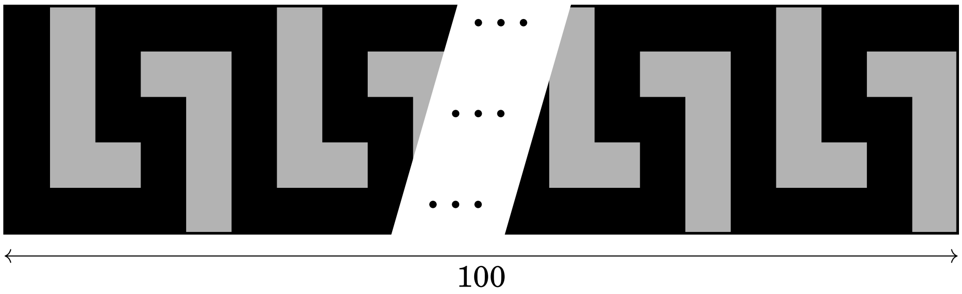
PARTE A

A1) No quadrado ao lado, de perímetro 48 cm, M e N são pontos médios dos lados, O é o centro e A um vértice. Lena cortou o quadrado ao longo das linhas tracejadas e, usando os três pedaços, montou um retângulo com a mesma área do quadrado original, porém com um perímetro diferente. Qual é esse perímetro?



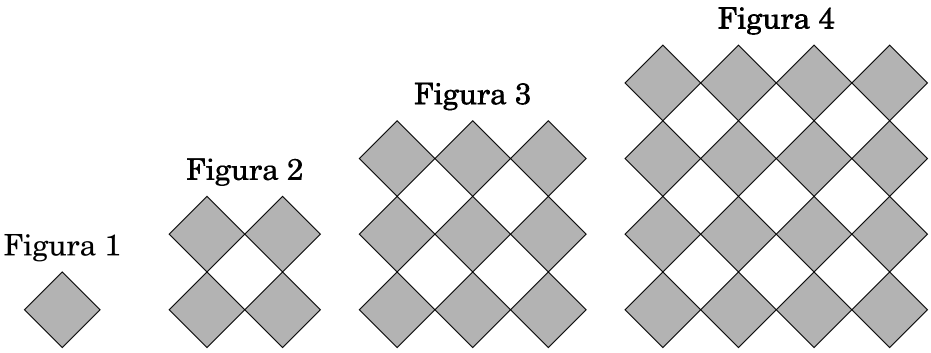
A2) Júlia comprou 3 camisetas iguais e pagou sua compra com desconto de 10%, enquanto que seu irmão comprou 2 camisetas iguais às de Júlia com desconto de 5%. Júlia gastou 12 reais a mais que seu irmão. Qual era, em reais, o preço sem desconto de cada camiseta?

A3) Duas fitas de largura 1 cm, uma preta e outra cinza, foram cortadas em retângulos menores, que foram colados para formar a faixa decorativa a seguir. Os retângulos encaixaram perfeitamente, sem espaços vazios nem superposições e as duas fitas foram utilizadas completamente. Se a faixa decorativa tem 100 cm de comprimento, qual era o comprimento da fita preta, em centímetros, antes de ser cortada?



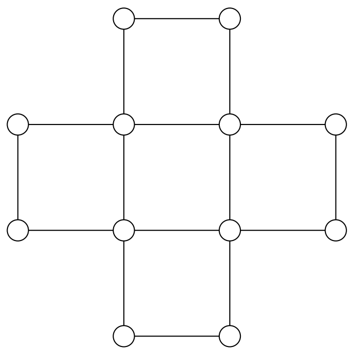
A4) Há um grupo de 2015 pessoas sentadas ao redor de uma praça circular. Cada uma delas é honesta, sempre dizendo a verdade, ou é desonesta, sempre dizendo mentira. Cada uma delas faz a seguinte afirmação: "Um de meus vizinhos (à esquerda ou à direita, tanto faz) é honesto, mas o outro vizinho é desonesto". Qual é o número de pessoas honestas no grupo?

A5) Elisa constrói uma sequência formada por quadradinhos brancos e cinzentos, sempre usando a mesma regra, conforme mostrado abaixo:



Somente na Figura 30, quantos quadradinhos cinzentos existem a mais do que quadradinhos brancos?

A6) Na figura a seguir há cinco quadrados. Marilu quer usar duas cores, verde e amarelo, para pintar os 12 vértices desses quadrados, de modo que em cada quadrado haja dois vértices verdes e dois vértices amarelos. De quantas maneiras diferentes podem ser pintados esses vértices?



PARTE B

B1) Janaína gosta de escrever números de dez algarismos, seguindo as seguintes regras:

i) ela escreve cada número da esquerda para a direita, escolhendo dois algarismos não nulos para começar;

ii) cada algarismo seguinte que ela escreve é a soma de todos os algarismos anteriores ou é o último algarismo dessa soma.

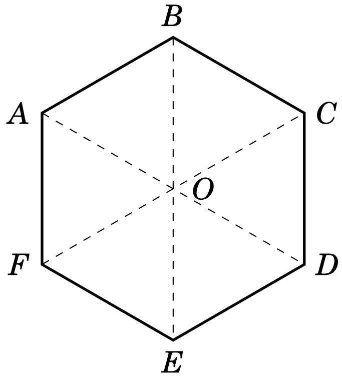
Por exemplo, ela pode escrever 5 386 248 624, pois $8 = 5 + 3$, 6 é o último algarismo da soma $5 + 3 + 8 = 16$, 2 é o último algarismo da soma $5+3+8+6 = 22$, e assim por diante. Outro exemplo é 4 600 000 000.

a) Qual é o menor número que ela pode escrever?

b) Qual é o maior número que ela pode escrever?

c) Quais algarismos podem ser os últimos a serem escritos?

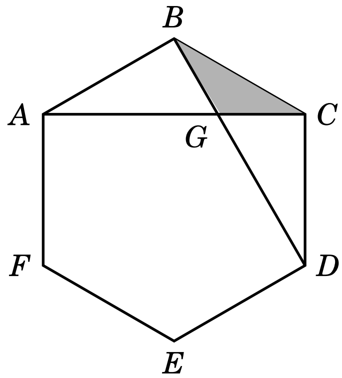
B2) O hexágono regular $ABCDEF$, com centro O, representado ao lado, é composto de seis triângulos equiláteros de área 6 cm^2 cada um.



a) Qual é a área, em centímetros quadrados, do triângulo cujos vértices são os pontos B, F e D?

b) Qual é a área, em centímetros quadrados, do quadrilátero $ACDF$?

c) Os triângulos ABC e BCD superpõem-se parcialmente. Qual é a área, em centímetros quadrados, da região comum aos dois triângulos, indicada em cinza na figura abaixo?



d) Qual é a área, em centímetros quadrados, do triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados AB, CD e EF?

B3) Esmeralda cola cubinhos brancos para montar cubos maiores. Depois de montar os cubos maiores, ele pinta algumas faces dos cubinhos de verde ou de amarelo.

a) Depois de montado um cubo grande, Esmeralda pintou de verde as faces dos cubinhos com três faces visíveis e de amarelo as faces dos cubinhos com duas faces visíveis. Após a pintura, são visíveis no cubo grande exatamente 120 faces pintadas de amarelo. Quantas faces visíveis permaneceram brancas?

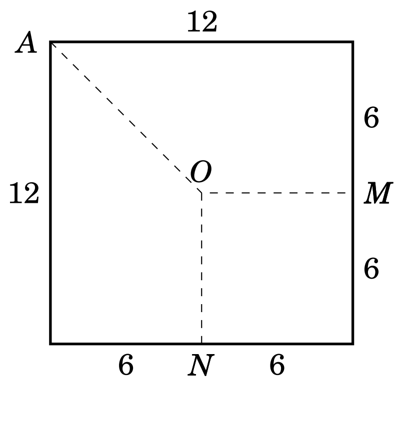
b) Depois de montar um cubo com oito cubinhos, Esmeralda pintou três faces do cubo maior de verde e três faces de amarelo. No máximo, quantos cubinhos tiveram duas faces pintadas de verde e uma face pintada de amarelo?

Segunda Fase – Soluções

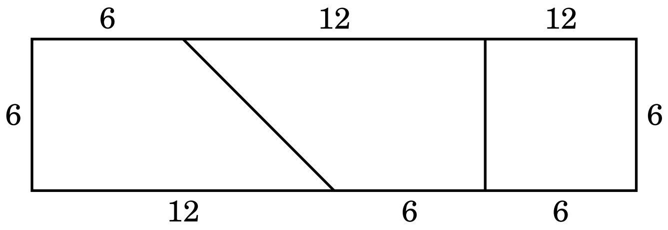
Parte A

Problema	1	2	3	4	5	6
Resposta	0060	0015	0300	0000	0059	0048

A1) Sendo 48 cm o perímetro do quadrado, o seu lado é $48 \div 4 = 12$ cm e, assim, temos a seguinte situação:



Após cortar o quadrado ao longo das linhas tracejadas e usando os três pedaços, podemos montar o seguinte retângulo, com mesma área que o quadrado original, mas perímetro $(24+6) \times 2 = 60$ cm, diferente do perímetro do quadrado.



A2) Seja p o preço de cada camiseta em reais.

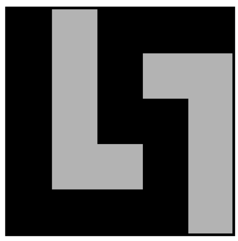
Júlia comprou 3 camisetas e pagaria por elas $3p$ reais. Como ela teve 10% de desconto, ao final pagou $100\% - 10\% = 90\%$ desse valor, ou seja, pagou $90\% \times 3p = 0,9 \times 3p = 2,7p$ reais.

O irmão de Júlia comprou 2 camisetas e pagaria por elas $2p$ reais. Como ele teve 5% de desconto, ao final pagou $100\% - 5\% = 95\%$ desse valor, ou seja, pagou $95\% \times 2p = 0,95 \times 2p = 1,9p$ reais.

Como Júlia gastou 12 reais a mais que seu irmão, temos que

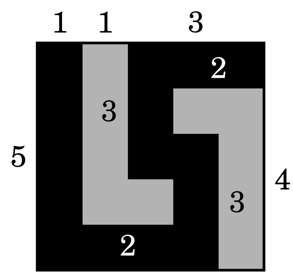
$$2,7p = 1,9p + 12 \iff 0,8p = 12 \iff p = 15.$$

A3) Perceba que a faixa decorativa pode ser formada copiando e juntando a figura padrão a seguir, que é um quadrado de lado 5 cm.



Como a faixa decorativa tem 100 cm de comprimento, precisaremos de $100 \div 5 = 20$ figuras iguais a essa para formá-la.

Agora, vamos calcular o comprimento de fita preta, em centímetros, contida na figura padrão. Para isso, vamos nos orientar pelas linhas pontilhadas.



Veja que, como são necessários $4 + 4 + 2 + 2 + 3 = 15$ cm de fita preta para compor a figura padrão, precisaremos de $15 \times 20 = 300$ cm de fita preta para formar a faixa decorativa.

A4) Suponha que haja uma pessoa honesta no grupo. Então há um vizinho de cada tipo. Simbolizando honesta por H e desonesta por M, temos, em fila, HHM. Pessoas mentirosas devem ter vizinhos do mesmo tipo, logo o outro vizinho do M é H, e o próximos vizinhos são H (para compensar o M) e M (para compensar o outro H): $HHMHH$.

Continuando, nota-se que devemos ter $\underbrace{HHM}\underbrace{HHM}\cdots\underbrace{HHM}$. Para atender as condições dadas, o total de pessoas deveria ser então um múltiplo de 3, sendo 2/3 delas honestas e 1/3 delas mentirosas. Como 2015 não é múltiplo de 3, não há pessoas honestas no grupo.

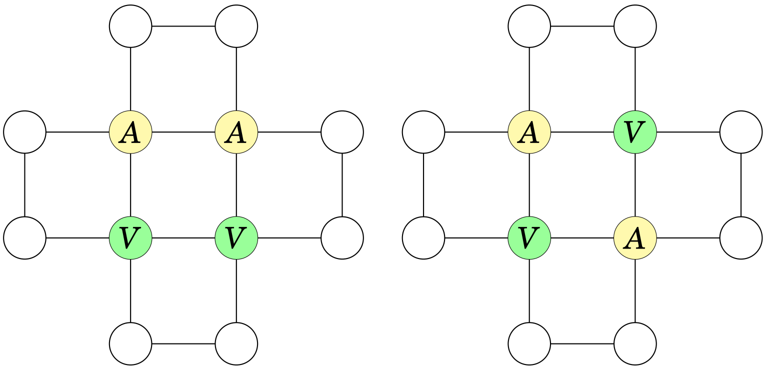
A5) O número de quadrados cinza da Figura n será representado por C_n e o número de quadrados brancos da figura n será representado por B_n. Observando os quadrados cinza temos:

$$\begin{aligned} C_1 &= 1 = 1^2 \\ C_2 &= 4 = 2^2 \\ &\vdots \\ C_n &= n^2. \end{aligned}$$

Então o número de quadrados cinza da Figura 30 é $C_{30} = 30^2$.

Repare que o número de quadrados brancos de uma figura é igual ao número de quadrados cinza da figura anterior, isto é, $B_n = C_{n-1}$. Assim, $B_{30} = 29^2$. Portanto $C_{30} - B_{30} = 30^2 - 29^2 = 59$.

A6) Vamos começar pintando os vértices do quadrado central e há dois casos a considerar: os vértices de mesma cor ou são consecutivos ou são opostos.



i) No quadrado central, os vértices verdes são consecutivos.

- No quadrado central há 4 possiblidades para a posição dos vértices verdes.
- Considerando a figura ao lado há apenas 1 possibilidade para pintar os demais vértices dos quadrados de cima e de baixo.
- Há 2 possibilidades para pintar os demais vértices tanto do quadrado da esquerda quanto do quadrado da direita. Neste caso temos, portanto, $4 \times 2 \times 2 = 16$ possibilidades.

ii) No quadrado central, os vértices verdes são opostos.

- No quadrado central há 2 possibilidades para a posição dos vértices verdes.
- Há 2 possibilidades para pintar os demais vértices de cada um dos quatro outros quadrados.

Neste caso temos, portanto, $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ possibilidades.

Portanto o total de maneiras que os vértices podem ser pintados é $16 + 32 = 48$.

Parte B

B1) Observe que, a partir do terceiro algarismo, cada novo algarismo é o dobro do algarismo anterior ou é o último algarismo do dobro do número anterior.

a) Para obter o menor número, Janaína tem que começar com os menores algarismos: 1 e 1. O número obtido é 1 124 862 486.

b) Para obter o maior número, Janaína tem que começar com os maiores algarismos: 9 e 9. O número obtido é 9986248624.

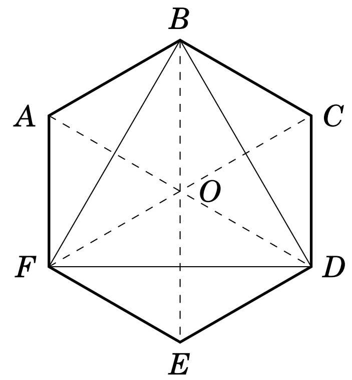
c) Como o último algarismo é o dobro do anterior ou é o último algarismo do dobro do número anterior, ele deve ser par. Entretanto, todo número par pode ser o último algarismo? A resposta é sim, como mostram os exemplos a seguir:

4600000000   1348624862   9986248624

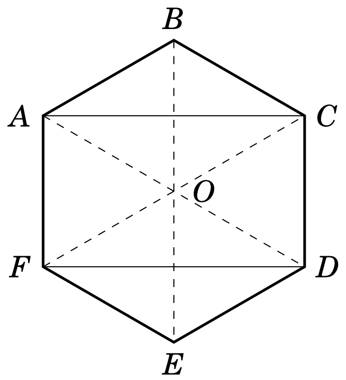
1124862486   2462486248

B2) a) Os quadriláteros $ABOF$, $BCDO$ e $DEFO$ são todos losangos congruentes e BF, BD e FD são, respectivamente, suas diagonais congruentes. Assim, a área do triângulo BOF é igual à área do triângulo BAF, a do BCD é igual à do BOD e a do DEF é igual à área do DOF.

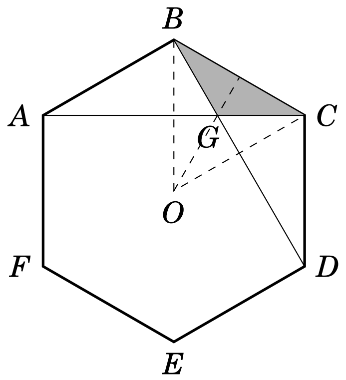
Logo, a área do triângulo BDF é metade da soma das áreas dos três losangos, que é igual à área do hexágono. Como a área do hexágono é igual à soma das áreas dos seis triângulos equiláteros de área 6 cm^2 cada, concluímos que a área do hexágono é $6 \times 6 =$ 36 cm^2. Logo, a área do triângulo BDF é $\frac{36}{2} = 18$ cm^2.



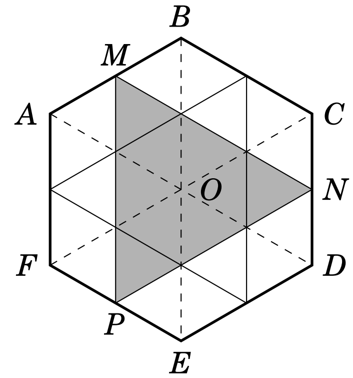
b) Os losangos $ABCO$ e $DEFO$ têm, cada um, área igual a um terço da área do hexágono, ou seja, 12 cm^2 cada. Logo, suas metades têm área de 6 cm^2 cada uma. Os triângulos equiláteros AFO e CDO têm área de 6 cm^2 cada um. Portanto, a área do quadrilátero $ACDF$ é $6+6+6+6 = 24$ cm^2.



c) Temos $OB = OC = BC$, pois o triângulo BCO é equilátero. Os ângulos OBG e GBC têm ambos 30° (já que a diagonal BD do losango $BCDO$ divide o triângulo equilátero OBC ao meio). Sendo BG lado comum, pelo caso LAL, concluímos que são congruentes os triângulos BOG e BCG. De forma semelhante concluímos que os triângulos BCG e OCG são congruentes. Como a área do triângulo BCO é 6 cm^2 e os três triângulos acima têm a mesma área, concluímos que a área do triângulo BCG é $\frac{6}{3} = 2$ cm^2.

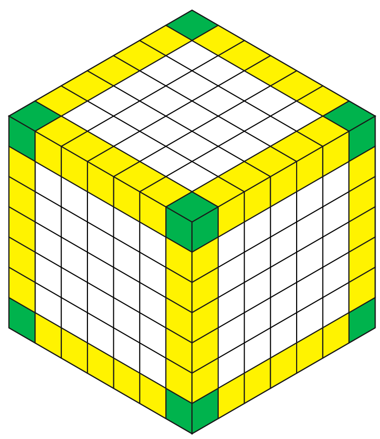


d) Sejam M, N e P os pontos médios dos lados AB, CD e EF, respectivamente. Pela simetria da figura, concluímos que o triângulo MNP é equilátero. Traçando o triângulo determinado pelos pontos médios dos três lados restantes, obtemos um triângulo congruente ao triângulo MNP, simétrico ao mesmo em relação à reta BE. Dessa forma, dividimos o hexágono original em 24 triângulos menores e congruentes. O triângulo MNP é composto por 9 desses triângulos. Sua área, portanto, é igual a $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$ da área do hexágono, cuja área é 36 cm^2. Portanto, a área do triângulo é $\frac{3}{8} \times 36 = 13,5\ \text{cm}^2$.



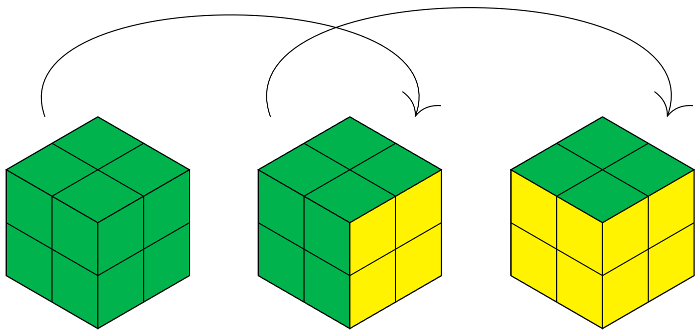
B3) a) Os cubinhos com apenas duas faces visíveis são aqueles dispostos ao longo da aresta do cubo maior, sem estar nos vértices dessas arestas, como no exemplo ao lado, onde mostramos a camada superior de um cubo 4×4. Assim, em cada uma das doze arestas de um cubo $n \times n$ são pintados de amarelo exatamente $n - 2$ cubinhos, num total de $12 \times (n - 2)$ cubinhos. Neste caso, temos

$$12 \times (n-2) = \frac{120}{2} \iff n - 2 = 5 \iff n = 7.$$

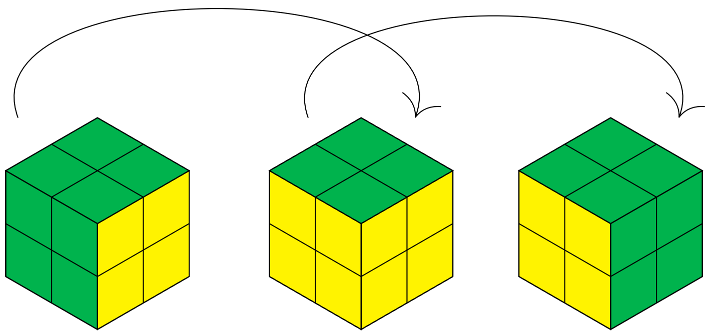


Em cada uma das seis faces do cubo maior há $(n-2) \times (n-2) = (n-2)^2$ faces visíveis dos cubinhos que permanecem brancas, num total de $6 \times (n-2)^2$. Em nosso caso, temos que $6 \times (7-2)^2 = 6 \times 25 = 150$ faces visíveis não foram pintadas, isto é, permaneceram brancas.

b) Há somente duas maneiras diferentes de pintar três faces de verde e três faces de amarelo de um cubo. Numa delas as três faces pintadas de mesma cor têm um vértice comum (na figura a face inferior é amarela)



e as faces opostas têm cores diferentes, enquanto que na outra maneira há duas faces opostas amarelas, duas faces opostas verdes (na figura a face inferior é verde)



e uma face amarela oposta a uma face verde. Note que os cubos são formados por oito cubinhos menores.

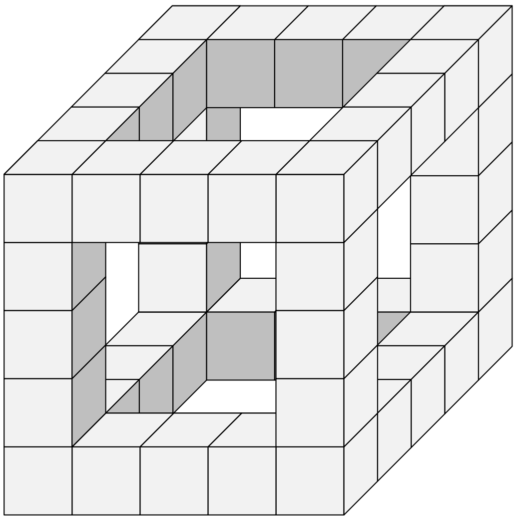
No primeiro caso, há um cubinho com três faces verdes, um cubinho com três faces amarelas, três com duas faces amarelas e uma verde e três com duas faces verdes e uma amarela.

No segundo caso, há quatro cubinhos com duas faces verdes e uma amarela e quatro cubinhos com duas faces amarelas e uma verde.

Portanto, o número máximo de cubinhos que tiveram duas faces pintadas de verde e uma de amarelo é 4.

Terceira Fase – Nível 1

1) Zuleica cola cubinhos iguais de isopor para montar “esqueletos” de cubos, estruturas conforme o exemplo dado.



a) Quantos cubinhos ela usou para montar o esqueleto da figura?

b) Se ela quiser completar o maior cubo maciço com este esqueleto, preenchendo os espaços vazios com cubinhos iguais aos usados e continuando a ver o esqueleto, quantos cubinhos a mais deverá usar?

c) Existe um cubo cujo esqueleto, para ser montado, precisa de uma quantidade de cubinhos igual à quantidade de cubinhos necessários para completar os espaços vazios do esqueleto desse cubo. Se Zuleica quiser montar esse esqueleto, quantos cubinhos terá que usar?

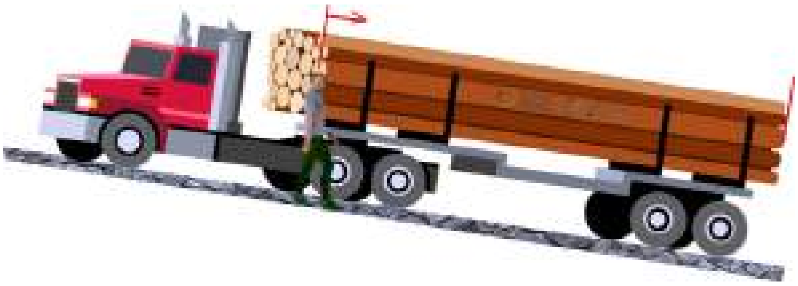
2) Nove cartões numerados de 1 a 9 em uma de suas faces foram misturados e empilhados. Ana, Beto e Célio pegaram dois cartões cada um, deixando três cartões na pilha.

a) Qual é a maior soma possível dos números dos cartões que sobraram sobre a mesa?

b) Se a soma dos números dos cartões de cada um deles for um número par, qual é a menor soma possível dos números dos cartões deixados sobre a mesa?

c) De quantas maneiras diferentes ocorre a situação em que a soma dos números dos cartões de cada uma das três pessoas é um número par?

3) Descendo por uma estradinha, Paco encontrou um caminhão carregando um enorme tronco de árvore. Querendo calcular o comprimento do tronco, ele fez o seguinte: a partir da base do tronco ele caminhou a passos largos até o topo do tronco, contando 20 passos, e, imediatamente, voltou e andou até a base do tronco, contando 140 passos. Seus passos medem 80 cm e o tempo para dar cada passo é sempre o mesmo.[1]



a) Seja ℓ o comprimento do tronco, em metros. Quantos metros andou o caminhão enquanto Paco deu os 20 passos até o topo do tronco? Como o tamanho do tronco é ℓ, na sua resposta deve aparecer a letra ℓ.

b) Qual é o valor de ℓ?

4) Na expressão abaixo, cada letra representa um algarismo diferente de zero e duas letras diferentes representam algarismos diferentes:

$$(F+E+L+I+Z)\times(A+N+O)\times(N+O+V+O)$$

a) Se os valores das letras aumentam de acordo com a ordem alfabética (por exemplo, $A<E<F$), qual é o valor da expressão?

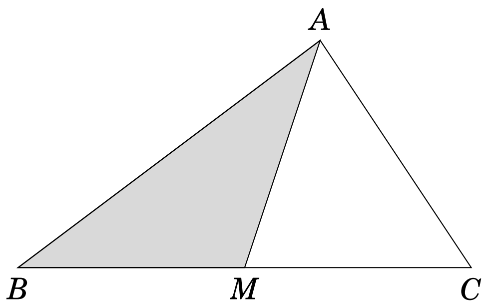
b) Mostre que o valor da expressão nunca poderá ser igual a 2015.

c) Ache o valor de cada uma das letras na igualdade:

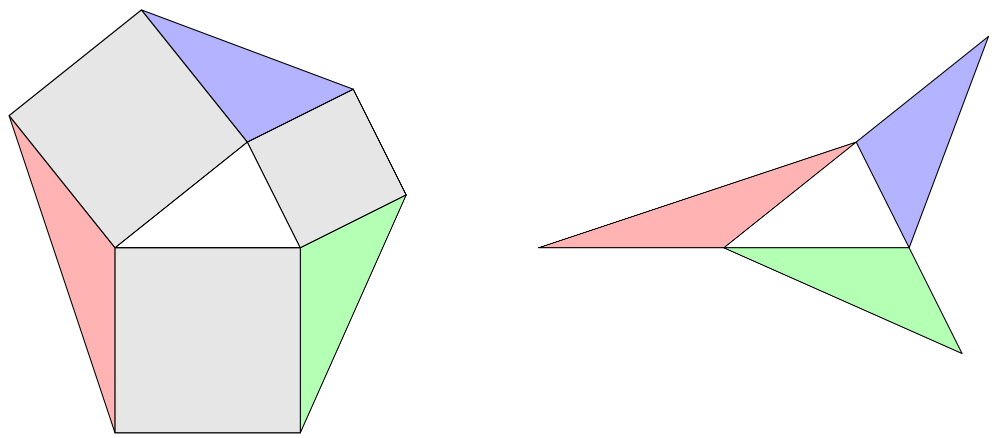
$$(F+E+L+I+Z)\times(A+N+O)\times(N+O+V+O)=1715.$$

[1] O caminhão se move com velocidade constante.

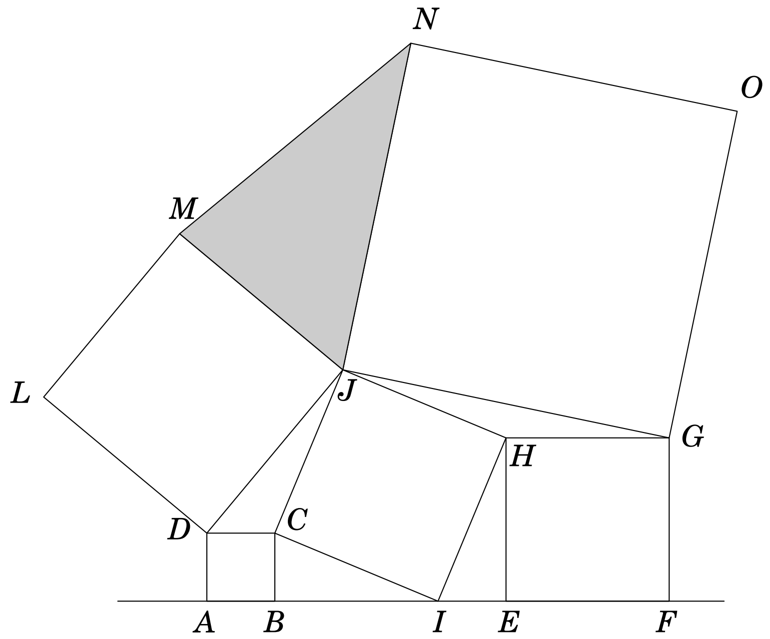
5) a) O ponto M pertence ao lado BC do triângulo ABC ao lado de modo que $BM = MC$. Se a área do triângulo AMC é igual a 5 cm^2, qual é a área do triângulo ABC?



b) Sobre cada lado de um triângulo de área 10 cm^2 foi construído um quadrado. Em seguida, foram construídos três triângulos usando um vértice do triângulo e dois vértices dos quadrados, como mostrado na Figura 1. Depois, os quadrados foram retirados e cada um dos triângulos construídos foi girado até um de seus lados coincidir com um lado do triângulo inicial. Qual é a área da Figura 2, formada pelos quatro triângulos?



c) Na figura a seguir, temos os quadrados $ABCD$, $EFGH$, $CIHJ$, $LDJM$ e $JGON$. Sabe-se que $AB = 5$ cm, $BI = 12$ cm, $IE = 5$ cm e $EF = 12$ cm. Qual é a área do triângulo MNJ?



Terceira Fase – Nível 1 – Soluções

1) a) Zuleica precisou de 16 cubinhos na face da frente e 16 na de trás. Para completar as laterais, precisou de $4 \times 3 = 12$ cubinhos. Assim, no total ela precisou de $16 + 16 + 12 = 44$ cubinhos.

b) Como o cubo preenchido precisa de $5 \times 5 \times 5 = 125$ cubinhos, para preencher o esqueleto ela precisará de $125 - 44 = 81$ cubinhos.

c) Suponhamos que o cubo tenha tamanho n. Para montar o esqueleto, ela precisará de $4n - 4$ cubinhos na face da frente e a mesma quantidade na face de trás, e $4(n-2) = 4n - 8$ para montar as laterais. Logo, para formar o esqueleto ela precisará de

$$(4n-4) + (4n-4) + (4n-8) = 12n - 16$$

cubinhos. O cubo completo tem n^3 cubinhos, então os espaços vazios ocupam $n^3 - (12n - 16)$. Logo buscamos as soluções da equação

$$n^3 - (12n - 16) = 12n - 16 \iff n^3 = 8(3n-4).$$

Note que a equação implica que n é par, isto é, $n = 2k$ e

$$8k^3 = 8(3 \times 2k - 4) \iff k^3 = 2(3k - 2).$$

Novamente, isso implica que k é par, isto é, $k = 2\ell$ e

$$8\ell^3 = 2(3 \times 2\ell - 2) \implies 2\ell^3 = 3\ell - 1.$$

Uma solução é $\ell = 1$, portanto a resposta é $n = 4$.

Observação: a outra solução é $\ell = \frac{1}{2}$, que não é possível pois ℓ é inteiro.

2) a) Como sobraram três cartões, a maior soma possível é $7 + 8 + 9 = 24$.

b) Para que a soma dos cartões de cada um deles seja par, todos têm que ter pego cartões com a mesma paridade, isto é, dois ímpares ou dois pares. Como temos 5 cartões ímpares e 4 cartões pares, sobrou na mesa um número ímpar de cartões ímpares. Logo a soma mínima possível é $1 + 2 + 4 = 7$.

c) Vamos contar o número de formas de se escolher os 3 pares de cartões, dividindo em casos.

Caso 1: Foram escolhidos 2 cartões ímpares e 4 pares:

$$\frac{5 \times 4}{2} \times \frac{\frac{4\times 3}{2} \times \frac{2\times 1}{2}}{2} = 10 \times 3 = 30 \text{ casos.}$$

Caso 2: Foram escolhidos 4 cartões ímpares e 2 pares:

$$\frac{\frac{5\times 4}{2} \times \frac{3\times 2}{2}}{2} \times \frac{4 \times 3}{2} = 15 \times 6 = 90 \text{ casos.}$$

Assim, há $30 + 90 = 120$ formas de formar 3 pares de cartões. Ana, Beto e Célio têm cada um que escolher um desses pares, o que pode ser feito de $3 \times 2 \times 1 = 6$ formas. Portanto temos $120 \times 6 = 720$ formas de distribuir os cartões.

3) a) Como Paco deu 20 passos de $0,8$ metros, ele caminhou $20 \times 0,8 = 16$ metros. Logo o caminhão avançou $\ell - 16$ metros.

b) Suponhamos que a velocidade do caminhão seja v e que a velocidade de Paco seja $0,8$ metros por segundo, isto é, um passo por segundo.

Assim, Paco teria caminhado 20 segundos na ida, dando 20 passos e caminhou 16 metros, enquanto o caminhão avançou $20v$ metros. Logo o comprimento do tronco do caminhão é $\ell = 20v + 16$ metros, conforme o item anterior.

Na volta, ele caminharia 140 segundos, dando 140 passos e, portanto, avançando $140 \times 0,8 = 112$ metros, e o caminhão avançou $140v$ metros na mesma direção. Logo o comprimento do caminhão é $\ell = 112 - 140v$.

Assim,

$$\ell = 20v + 16 = 112 - 40v \implies 160v = 96 \implies v = 0,6\text{m/s}.$$

Portanto o tronco do caminhão mede

$$20 \times v + 16 = 20 \times 0,6 + 16 = 28 \text{ metros}.$$

4) a) Ordenando as letras em ordem alfabética, temos uma única forma de dar valores às letras:

A	E	F	I	L	N	O	V	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Logo o valor da expressão fica sendo

$$(3+2+5+4+9) \times (1+6+7) \times (6+7+8+7) = 23 \times 14 \times 28 = 9016.$$

b) Primeiro, repare que a decomposição em primos de 2015 é $2015 = 5 \times 13 \times 41$. O fator associado a cada palavra tem que corresponder a um dos primos 5, 13 e 41.

Todavia cada palavra tem pelo menos três letras distintas, ou seja, o fator correspondente é maior ou igual à soma de três algarismos distintos. Portanto cada fator é maior ou igual a $1+2+3 = 6$, e nenhum dos termos poderá corresponder ao fator 5 na decomposição em primos de 2015.

c) Inicialmente, observe que cada um dos fatores deve ser menor ou igual a $5+6+7+8+9 = 35$, sendo que apenas o fator correspondente a FELIZ consegue atingir este máximo.

A decomposição em primos de 1715 é $1715 = 5 \times 7^3$. Com isso, há apenas uma possibilidade para o valor dos fatores de cada termo, com o fator de FELIZ valendo 35 e os fatores correspondendo a ANO e NOVO valendo 7.

A primeira igualdade diz que $\{F,E,L,I,Z\} = \{5,6,7,8,9\}$. Então, por eliminação, $\{A,N,V,O\} = \{1,2,3,4\}$.

Como $N+O+V \geq 6$, a letra O só pode valer 1, e N e V só podem valer 2 ou 3 (não sabemos qual é qual, ainda). Temos que $A = 4$ (que é o dígito que sobrou) e $N = 2$ (pois $A+N+O = 7$). Sobra $V = 3$.

Assim, as soluções são $O = 1$, $N = 2$, $V = 3$ e $A = 4$, e F, E, L, I e Z correspondendo a quaisquer elementos distintos de $\{5,6,7,8,9\}$.

5) a) Como $BC = 2 \times BM$, a área de ABC é o dobro da área de ABM, então temos $A_{ABC} = 2 \times 5 = 10\text{cm}^2$.

b) Compare, com atenção, a Figura 2 com a Figura 1. Seguindo o mesmo raciocínio do item anterior, concluímos que o triângulo rosa tem área 10cm^2, e assim a área da Figura 2 é $4 \times 10 = 40\text{cm}^2$.

c) Seguindo um raciocínio análogo ao dos itens anteriores, temos

$$A_{DCJ} = A_{CBI} = \frac{12 \times 5}{2} = 30\text{cm}^2 = A_{IEH} = A_{JHG}.$$

Como $CI^2 = 12^2 + 5^2 = 169$, segue que $CI = 13$. Logo

$$\begin{aligned} A_{AFGJD} &= A_{ABCD} + A_{CBI} + A_{IEH} + A_{EFGH} + A_{CIHJ} + A_{DCJ} + A_{JHG} \\ &= 25 + 30 + 30 + 144 + 169 + 30 + 30 \\ &= 458. \end{aligned}$$

Além disso,

$$A_{AFGD} = \frac{(5+12) \times (5+12+5+12)}{2} = 289.$$

Finalmente,

$$A_{MNJ} = A_{JDG} = A_{AFGJD} - A_{AFGD} = 458 - 289 = 169.$$

Premiados

Medalha de Ouro

Nome	Cidade – Estado	Pontos
Eduardo Quirino de Oliveira	Brasília – DF	277
Enzo Pontes Saraiva de Moraes	Fortaleza – CE	248
Luís Carlos Ho dos Santos	Brasília – DF	245
Pedro Lopes Carneiro Neto	Fortaleza – CE	243
Vítor Fitzherbert Souza	Belo Horizonte – MG	243
Filipe Franco Ferreira	Belo Horizonte – MG	237

Medalha de Prata

Nome	Cidade – Estado	Pontos
Solano Monteiro Paes	Belo Horizonte – MG	230
Daniel Henrique Barbosa dos Santos	Curitiba – PR	227
Bernardo Henkel Estivalet	Porto Alegre – RS	226
Mateus França Giordano	Belo Horizonte – MG	225
Gabriel Ribeiro Paiva	Fortaleza – CE	217
Natan Costa Maia	Fortaleza – CE	213
Júlia Félix Salles	Belo Horizonte – MG	206
David Nicilovitz Chapper	Porto Alegre – RS	204
Felipe Reinaldo Mentz	Portão – RS	204
Mattias Anders Silva Larsson	Campinas – SP	203
Lucca Duarte Rodrigues	Brasília – DF	201
Maria Eduarda Alencar Costa	Fortaleza – CE	200

Medalha de Bronze

Nome	Cidade – Estado	Pontos
Daniel Yamamoto Damico	Campinas – SP	198
Bruno Jansen Amaral Oliveira	Belo Horizonte – MG	197
Letícia Brandão Gonçalves Silva	Brasília – DF	195
Rodrigo Salgado Domingos Porto	Rio de Janeiro – RJ	193
Enzo Jardim Vendramin	Florianópolis – SC	191
Luis Augusto de Oliveira Sá	Fortaleza – CE	190
Bernardo Panka Archegas	Curitiba – PR	187
Wilson Oliveira Guimarães Neto	Brasília – DF	187
Guilherme Culau	Porto Alegre – RS	185
Luciano Rodrigues de Oliveira Júnior	Fortaleza – CE	185
Francisco de Cerqueira Fortes Neto	Teresina – PI	184
Maria Júlia Lucas Lima	Rio de Janeiro – RJ	184
Jamile Falcão Rebouças	Fortaleza – CE	183
Afonso Yu	Curitiba – PR	183

Menção Honrosa

Nome	Cidade – Estado	Pontos
Rafael Capelo Domingues	Fortaleza – CE	181
Kaio Kumagai	Belo Horizonte – MG	180
Álvaro Leitão Pellegrino	S.R. do Passa Quatro – SP	179
Laís Nuto Rossman	Fortaleza – CE	178
Samuel Sombra de Oliveira	Fortaleza – CE	178
Víctor Manuel Fernández Perez	Santa Maria – RS	178
João Pedro Pandolfi Tedesco	Canoas – RS	176
Gustavo Brum Fernandes Pimentel	Rio de Janeiro – RJ	175
Felipe Reis Maccari	Porto Alegre – RS	174
João Pedro Seibel Cervo	Porto Alegre – RS	174
Ana Luíza Félix de Souza	Goiânia – GO	173
Maria Eduarda Gonçalves Freitas	Salvador – BA	173
Emilie Chen	São Paulo – SP	172
Gabriel Correa Ramos Alves	Brasília – DF	172
Rachel Loriato Nazareth Franco	Sobradinho – DF	172
Thaís Cerqueira Reis Nakamura	S.J. dos Campos – SP	172
Cássio Azevedo Cancio	São Paulo – SP	171
Luis Eduardo Masasuke Mashima	Cuiabá – MT	171
Marina Oba Galvão	Brasília – DF	170
Thiago José Velôso de Souza	Brasília – DF	169
Victor Heine Costa Reis	Fortaleza – CE	169
Jonas Pereira Welter	Ribeirão das Neves – MG	168
Rafael Silva de Oliveira	Fortaleza – CE	168
Luiz Henrique Yuji Delgado Oda	São Paulo – SP	166
Rafael Monti Novaes Dumonceu Bororbia	Rio de Janeiro – RJ	166
Gabriela Martins Jacob	Salvador – BA	165
Rafael Moreira Passos	Brasília – DF	165
Lucas Vinícius Batista Rocha	Fortaleza – CE	163
Gianne Vidal Machado	Fortaleza – CE	162
Martina Neiva Fortes	Teresina – PI	160
Giovanni Borsato da Silva França	Porto Alegre – RS	159
Pedro Nícolas Sampaio Gomes	Salvador – BA	159
Walter de Crasto Monteiro	Recife – PE	159
Alicya Beatriz França dos Santos	Fortaleza – CE	158
João Victor Morel Rodrigues	Fortaleza – CE	158
Larissa Cristina Bertanha	Brasília – DF	158
Ana Beatriz Sena Ximenes Maia	Fortaleza – CE	157
Gustavo Neves da Cruz	Belo Horizonte – MG	157
Pâmela Maria Pontes Frota	Sobral – CE	157
Filipe Augusto Oliveira	Fortaleza – CE	156
Francyélio de Jesus Campos Lima	Teresina – PI	156
Júlia Rodrigues Alencar	Brasília – DF	155
Marlon Fagundes Pereira Junior	Rio de Janeiro – RJ	154
Pedro Arthur Sales Rebouças	Fortaleza – CE	154
Luíz Eduardo Cordeiro Ribeiro	Belo Horizonte – MG	153
Natália Bigolin Groff	F. Westphalen – RS	153
Janaína Oliveira da Cruz	Salvador – BA	152
Marcéli Melchiors	F. Westphalen – RS	150
Maria Clara Morsch Schimd	João Pessoa – PB	150
Emmanuel Maurício Silveira Pinto	Ipatinga – MG	149
Luca Dantas de Britto Monte Araújo	Natal – RN	149
Pedro Kauaii Mesquita Moura Andrade	Fortaleza – CE	149
Ramyro Corrêa Aquines	Porto Alegre – RS	149

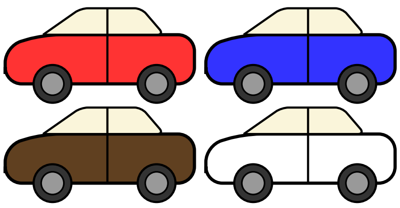
Victor Augusto Merencio	S.J. do Rio Preto – SP	149

37ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Nível 2

Primeira Fase

1) Juquinha e seus amigos organizaram uma corrida com seus carrinhos. O carrinho branco (B) chegou antes do vermelho (V) e do marrom (M). O carrinho azul (A) chegou depois do marrom e antes do vermelho. Qual foi a ordem de chegada dos carrinhos?

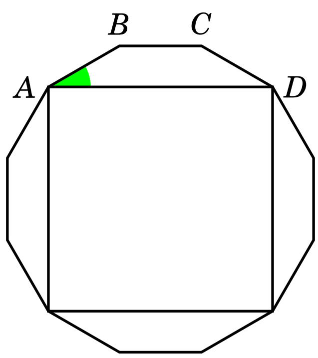


A) B – A – V – M B) B – V – A – M C) B – M – A – V
D) B – M – V – A E) B – A – M – V

2) A média aritmética dos algarismos do ano 2015 é igual a 2, pois $\frac{2+0+1+5}{4} = \frac{8}{4} = 2$. Quantas vezes em nosso século isto irá acontecer com os algarismos dos próximos anos?

A) 3 B) 5 C) 6 D) 7 E) 9

3) Sabendo que a figura ao lado representa um dodecágono regular, qual a medida do ângulo $\angle BAD$?

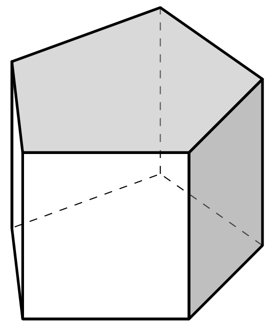


A) 15° B) 30° C) 45°
D) 60° E) 75°

4) João é um homem muito esperto e decidiu comemorar de uma só vez o dia das mães e o aniversário da sua esposa Marta. Sabendo que em certo ano as datas coincidiram e que o dia das mães é comemorado no segundo domingo do mês de maio, qual das opções representa um possível dia para o aniversário de Marta?

A) 04 de maio B) 05 de maio C) 06 de maio D) 07 de maio E) 08 de maio

5) Um bloco de madeira tem faces pentagonais e faces retangulares. Duas faces são vizinhas quando possuem uma aresta comum, como é o caso das duas faces sombreadas na figura. Wagner quer pintar as faces desse bloco de forma que duas faces vizinhas tenham cores diferentes, mas ele quer usar o menor número possível de cores.
Qual é esse número?



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

6) O conjunto de soluções da equação $(x-a)^2 = b^2$, sendo a, b reais positivos, é:

A) $\{a+b\}$ B) $\{a-b\}$ C) $\{a+b, a-b\}$
D) $\{-a+b, a+b\}$ E) $\{a+b, -a-b\}$

7) Na tabela abaixo vemos uma parte dos resultados das eleições num certo país, na qual os porcentuais se referem ao número total de eleitores.

Partidos / Turnos	AA	BB	CC	Outros partidos e votos nulos
1º turno	39%	31%	20%	10%
2º turno	?	?	0	?

No segundo turno, todos os eleitores que votaram no partido AA mantiveram seus votos e o mesmo ocorreu com os eleitores do partido BB. Dos que votaram no partido CC no primeiro turno, 40% votou no partido AA e os demais no partido BB. Dos que haviam votado em outros partidos ou anulado o seu voto, 60% continuou sem votar em AA ou BB e o restante votou parte em AA e parte em BB. Qual partido venceu a eleição do segundo turno e com qual porcentagem do total de votos?

A) AA com mais de 47% dos votos.

B) BB com 47% dos votos.

C) AA com 51% dos votos.

D) BB com mais de 43% dos votos.

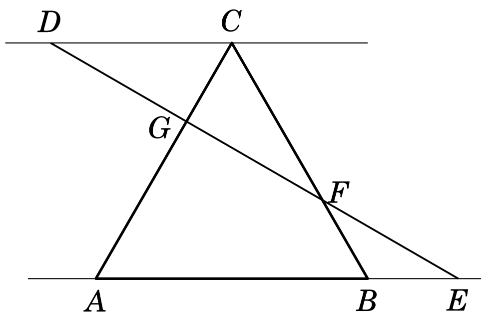
E) Nenhuma das afirmações anteriores.

8) Qual é a soma dos quadrados das quantidades de vogais e consoantes da resposta correta? Não conte as letras A, B, C, D, E das alternativas.

A) Vinte e seis B) Setenta e três C) Oitenta e cinco

D) Noventa e sete E) Cento e dezesseis

9) Na figura ao lado, as retas CD e AB são paralelas. Se ABC é um triângulo equilátero, $DG = GF = FE$, e $AB = 12$, determine o comprimento de GC.



A) 4 B) 3 C) 8 D) 5 E) 2

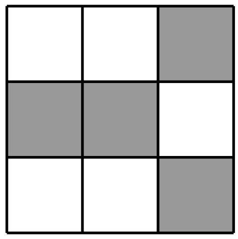
10) Dizemos que dois anos coincidem se têm a mesma quantidade de dias e os dias da semana de todos os seus dias coincidem. O ano de 2015 coincide com 2009; qual é o próximo ano que coincide com 2015? Lembre-se de que os anos múltiplos de 4 no século XXI (com exceção de 2100) são bissextos e têm 366 dias; os demais anos têm 365 dias.

A) 2021 B) 2022 C) 2023 D) 2025 E) 2026

11) O número $5^2 = 25$ é um quadrado perfeito e o número $4^3 = 64$ é um cubo perfeito. Qual é o menor número inteiro positivo n cujo dobro é um quadrado perfeito e cujo triplo é um cubo perfeito?

A) 72 B) 98 C) 144 D) 216 E) 256

12) Violeta quer numerar de 1 a 9 os quadrados do tabuleiro ao lado, de modo que a soma de dois números em quadrados vizinhos (quadrados com lados comuns) seja um número ímpar. Além disso, ela quer que a soma dos números escritos nos quadrados cinza seja a maior soma possível.
Qual é a soma dos números escritos nos quadrados brancos?

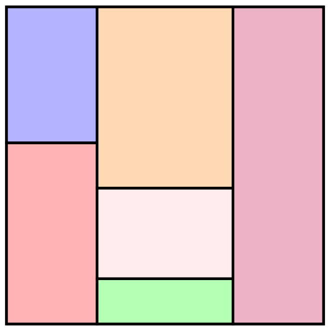


A) 15 B) 16 C) 22 D) 29 E) 30

13) Carlos e seus dois amigos, Danilo e Edson, foram ao cinema. Carlos pagou a entrada de todos, Danilo pagou a pipoca e o suco para todos e Edson pagou o estacionamento do carro. Para acertar as contas, Danilo e Edson pagaram R$ 8,00 e R$ 14,00, respectivamente, para Carlos, pois a despesa total de cada um foi de R$ 32,00. Qual era o preço da entrada no cinema?

A) R$ 10,00 B) R$ 12,00 C) R$ 15,00 D) R$ 18,00 E) R$ 20,00

14) A artista Juliana quer recobrir um mural quadrado de 7 metros de lado com placas retangulares, sem superposição dessas placas. Ela não quer usar nenhuma placa quadrada. Além disso, as medidas das placas são números inteiros de metros (na figura, um modelo do que poderia ser feito). Entretanto, Renata quer fazer o revestimento com o maior número possível de placas. Quantas placas ela irá usar?



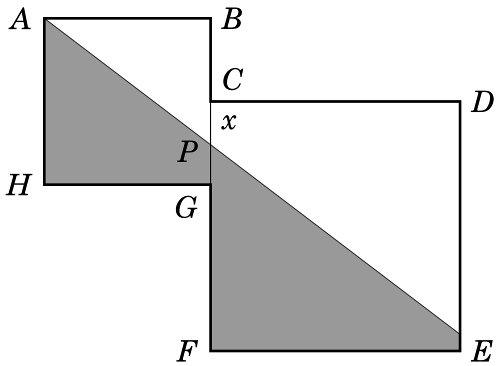
A) 10 B) 14 C) 18 D) 20 E) 24

15) Fabiana tem 55 cubos de mesmo tamanho, sendo 10 deles vermelhos, 15 azuis e 30 verdes. Ela quer construir uma torre empilhando esses cubos de modo que dois cubos vizinhos tenham cores diferentes. No máximo, quantos cubinhos ela poderá empilhar?

A) 39 B) 51 C) 52 D) 54 E) 55

16)

Na figura, os quadrados $ABGH$ e $CDEF$ têm lados de medidas 4 e 6 cm, respectivamente. O ponto P pertence à reta contendo os pontos B, C, G, e F, sendo C o ponto médio do lado BG. A semirreta AP divide a figura formada pelos dois quadrados em duas regiões, uma branca e uma cinza. Para que essas duas regiões tenham áreas iguais, qual deve ser o valor de $x = CP$?



A) $\dfrac{2}{5}$ B) $\dfrac{18}{25}$ C) 1 D) $\dfrac{26}{25}$ E) $\dfrac{3}{2}$

17) Um triângulo tem lados inteiros distintos, o maior deles medindo 2015. Quais são as medidas dos dois outros lados se a área do triângulo é a menor possível?

A) 2 e 2014 B) 3 e 2013 C) 1006 e 1010 D) 1007 e 1009 E) 1008 e 1009

18) No triângulo ABC, $AB = 2$ e $BC = \sqrt{2}$. Seja M o ponto médio do lado AB. Se $\angle BAC = \alpha$, $\angle BMC = \beta$ e $\angle MBC = \gamma$, então:

A) $\alpha + \beta = \gamma$ B) $\alpha + \beta = 2\gamma$ C) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$
D) $\alpha + \beta = 90°$ E) $\alpha + \beta = 45°$

19) A média de n números naturais é maior que $25,65$ e menor que $25,75$. Qual o menor valor possível para n?

A) 5 B) 3 C) 6 D) 100 E) 50

20) Existem quantos números inteiros positivos n tais que ao dividir 2032 por n temos resto 17?

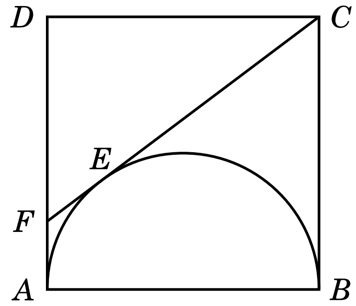
A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

21) Jonas gosta de observar os relógios digitais espalhados por sua cidade que informam a hora e a data. Por coincidência ele viu que hoje é dia 12/06 e naquele momento marcava 12:06, ou seja, data e hora são formados com os mesmos números! Ele ficou encucado com a coincidência e chamou o momento (data e hora) de *encucado*.

Ele pensou que também seria interessante se a hora fosse formada com os mesmos números, mas na ordem trocada, por exemplo, no dia 21/06 às 06:21, então chamou esse momento de *encucado reverso*. Considerando que 2015 não é um ano bissexto, desde 01/01/2015 às 00:00 até 31/12/2015 às 23:59 quantos momentos são encucados ou encucados reversos?

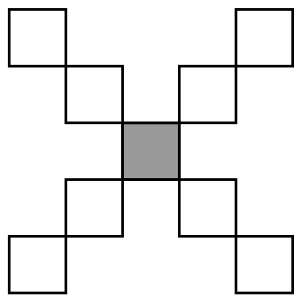
A) 365 B) 455 C) 465 D) 629 E) 699

22) No desenho ao lado, o segmento CF é tangente ao semicírculo de diâmetro AB. Se $ABCD$ é um quadrado de lado 4, determine o comprimento de CF.



A) $\frac{9}{4}$ B) 3 C) 4 D) $\frac{5}{4}$ E) 5

23) Julieta fez um X com nove quadradinhos, conforme figura ao lado. Ela quer escrever os números de 1 a 9 nesses quadradinhos, sem repetição, de forma que as somas dos dois números em cada uma das quatro perninhas do X seja a mesma. Quantos dos números de 1 a 9 podem ocupar a casa central (em cinza) do X?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

24) Esmeralda e Jade saíram da secretaria da OBM e foram para o Jardim Botânico. As duas saíram ao mesmo tempo, Esmeralda de bicicleta e Jade caminhando. A velocidade de Esmeralda é o quádruplo da velocidade de Jade, e as duas velocidades são constantes. Esmeralda chegou ao Jardim Botânico, esperou 5 minutos e depois voltou pelo mesmo caminho, encontrando Jade indo, bem na metade do caminho. Quanto tempo demora a caminhada de Jade da secretaria até o Jardim Botânico?

A) 30 min B) 35 min C) 40 min D) 45 min E) 50 min

25) Esmeralda brinca de escrever o número 2015 como a soma de três números, todos com três algarismos. Ela sempre os escreve em ordem não decrescente, como, por

exemplo, $670+671+674=2015$ e $175+920+920=2015$. Note que, no segundo exemplo, o número 920 aparece duas vezes como parcela. Se ela escrevesse todas as somas possíveis, quantos números apareceriam duas vezes como parcela?

A) 50 B) 100 C) 450 D) 858 E) 907

Primeira Fase – Soluções

Gabarito

1) C	6) C	11) A	16) D	21) D
2) B	7) A	12) B	17) A	22) E
3) B	8) C	13) D	18) C	23) C
4) E	9) A	14) E	19) B	24) C
5) B	10) E	15) B	20) D	25) C

1) **(C)** Como o carrinho azul (A) chegou depois do marrom (M) e antes do vermelho (V), significa que A está entre M e V, ou seja, a ordem entre eles é M–A–V. Além disso, como carrinho B chegou na frente do V e do M, vemos então que B está na frente dos outros três carrinhos.
Assim, a ordem de chegada dos carrinhos é B–M–A–V.

2) **(B)** Veja a solução da questão 8 da prova do Nível 1, página 7.

3) **(B)** Seja x o valor do ângulo $\angle BAD$. O ângulo interno de um dodecágono regular é $\frac{180°}{12} = 150°$. Considerando o circuncírculo do dodecágono, podemos concluir que seu interior foi decomposto em quatro trapézios congruentes e um quadrado. Se x é o ângulo procurado, o ângulo interno ao vértice A possui medida $2x + 90° = 150°$. Portanto, $x = 30°$.

4) **(E)** Como um intervalo de 7 dias consecutivos possui exatamente um domingo, o dia das mães sempre deve ocorrer após o dia 07 de maio. Como em algum ano o aniversário de Marta também foi no dia das mães, a única opção possível é a letra E.

5) **(B)** Veja a solução da questão 9 da prova do Nível 1, página 7.

6) **(C)** Usando a diferença de quadrados, a equação pode ser reescrita como $[(x-a)-b][(x-a)+b] = 0$. Assim, ou $x-a-b=0$ ou $x-a+b=0$ e o conjunto solução é $\{a+b, a-b\}$.

7) **(A)** Veja a solução da questão 15 da prova do Nível 1, página 9.

8) **(C)** Vamos analisar alternativa a alternativa:

A) Vinte e seis: 5 consoantes e 5 vogais: $5^2+5^2 \neq 26$.

B) Setenta e três: 7 consoantes e 5 vogais: $7^2+5^2=84 \neq 73$.

C) Oitenta e cinco: 6 consoantes e 7 vogais: $6^2+7^2=85$.

D) Noventa e sete: 6 consoantes e 6 vogais: $6^2+6^2=72 \neq 97$.

E) Cento e dezesseis: 8 consoantes e 7 vogais: $8^2+7^2=113 \neq 116$.

9) **(A)** Como as retas AB e CD são paralelas, temos $\Delta CDG \sim \Delta GAE$ e, consequentemente, $\dfrac{GC}{AG}=\dfrac{DG}{GE}=\dfrac{1}{2} \Longrightarrow 2GC=AG$. Como $AC=AG+GC=12$, temos $CG=4$.

10) **(E)** Quando passamos de um ano não bissexto para outro bissexto, um mesmo dia do ano salta uma unidade com relação aos dias da semana (por exemplo, se 1ºde janeiro é sábado, então no outro ano 1ºde janeiro é domingo).

Quando passamos de um ano não bissexto para outro bissexto, um dia do ano até o dia 28 de fevereiro salta uma unidade com relação aos dias da semana e um dia do ano após o dia 28 de fevereiro salta duas unidades com relação aos dias da semana.

Por fim, quando passamos de um ano bissexto para um não bissexto, um dia do ano até o dia 28 de fevereiro salta duas unidades com relação aos dias da semana e um dia do ano após o dia 28 de fevereiro salta uma unidade com relação aos dias da semana.

Assim, digamos que um dia do ano antes de 28 de fevereiro de 2015 caiu no dia da semana x e que um dia do ano depois de 28 de fevereiro de 2015 caiu no dia da semana y. Consideraremos a sequência de dias da semana módulo 7, o que nos dá por exemplo $x+7=x$, $x+8=x+1$ e assim por diante. Temos então a seguinte tabela:

Ano	Antes de 28 de fevereiro	Depois de 28 de fevereiro
2016	$x+1$	$y+2$
2017	$x+3$	$y+3$
2018	$x+4$	$y+4$
2019	$x+5$	$y+5$
2020	$x+6$	y
2021	$x+1$	$y+1$
2022	$x+2$	$y+2$
2023	$x+3$	$y+3$
2024	$x+4$	$y+5$
2025	$x+6$	$y+6$
2026	x	y

Pela tabela, vemos que 2026 é o próximo ano a coincidir com 2015.

11) **(A)** Veja a solução da questão 18 da prova do Nível 1, página 11.

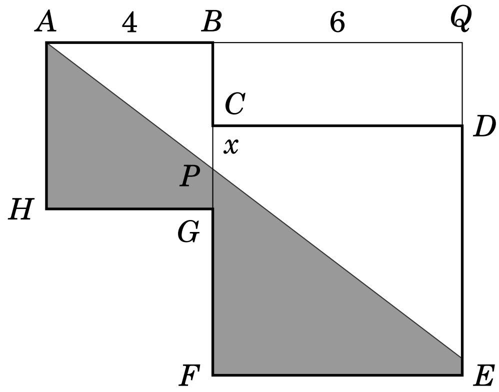
12) **(B)** Veja a solução da questão 5 da prova do Nível 1, página 6.

13) **(D)** Veja a solução da questão 10 da prova do Nível 1, página 8.

14) **(E)** Veja a solução da questão 13 da prova do Nível 1, página 9.

15) **(B)** Veja a solução da questão 14 da prova do Nível 1, página 9.

16) **(D)** A soma das áreas cinza e branca é igual à soma das áreas dos quadrados, que é $4^2+6^2=52$. Assim, para que as regiões possuam a mesma área, a área branca $ABCDR$ deve ser igual a 26.



Seja Q a interseção de AB e DE.

A área branca é igual a $S_{AQR} - S_{BCDQ}$. Os triângulos AQR e ABP são semelhantes na razão $\dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2}$. Como $S_{ABP} = \dfrac{4(2+x)}{2} = 2(2+x)$,

$$\frac{S_{AQR}}{S_{ABP}} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \iff S_{AQR} = \frac{25(2+x)}{2}$$

Logo a área branca é igual a $\dfrac{25(2+x)}{2} - 6\cdot 2$ e, então, $\frac{25(2+x)}{2} - 12 = 26 \iff x = 26$.

17) **(A)** Sejam $a > b$ os outros dois lados do triângulo. Pela desigualdade triangular, $2015 < a+b$ e, além disso, $a, b < 2015$. Pela fórmula de Heron, o quadrado da área do triângulo é dado por

$$S^2 = \left(\frac{a+b+2015}{2}\right)\left(\frac{a+b-2015}{2}\right)\left(\frac{2015+a-b}{2}\right)\left(\frac{2015-a+b}{2}\right).$$

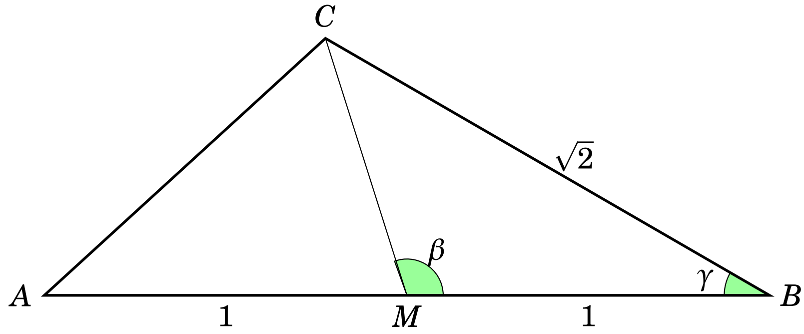
Fazendo $a+b = x$ e $a-b = y$, a área é

$$S = \sqrt{\frac{(x+2015)(x-2015)(2015-y)(2015+y)}{2}}.$$

Assim, queremos minimizar $(x^2-2015^2)(2015^2-y^2)$. Como a e b são inteiros, x e y devem possuir a mesma paridade. Minimizaremos x e maximizaremos y.

Tomando $x = 2016$ e $y = 2014$, obteríamos um dos lados iguais a 2015, o que não é permitido. Tomamos, então, $x = 2016$ e $y = 2012$, o que nos dá $a = 2014$ e $b = 2$.

18) **(C)**



Veja que $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = \frac{BC}{BM}$, e $\hat{B}$ é comum, logo os triângulos ABC e CBM são semelhantes pelo caso LAL. Com isso, $m(M\hat{C}B) = m(M\hat{A}C) = \alpha$.

Desta forma, no triângulo BMC, temos que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

19) **(B)** Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ os n naturais e $b_i = a_i - 25$. Devemos ter que

$$n(0,65) < b_1 + b_2 + \cdots + b_n < n(0,75)$$

Ou seja, deve existir um inteiro entre dois múltiplos de $0,65$ e $0,75$. Considere agora os primeiros múltiplos de ambos:

n	$n(0,65)$	$n(0,75)$
1	0,65	0,75
2	1,30	1,5
3	1,95	2,25
4	2,6	3

O primeiro n para o qual isso ocorre é $n = 3$. Um exemplo de tal conjunto de números é o conjunto $\{25, 26, 26\}$.

20) **(D)** Como o divisor é maior que o resto, o número n deve ser um divisor do número $2032 - 17 = 2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$ maior que 17. Tais divisores possíveis são: 31, $5 \cdot 31$, $31 \cdot 13$, $5 \cdot 13 \cdot 31$ e $5 \cdot 13$.

21) **(D)** Como os números que indicam os meses sempre são menores que 24, qualquer um deles serve para indicar as horas. Além disso, como o número que indica os dias é sempre menor que 60, qualquer um deles serve para indicar os minutos. Assim,

em todo dia do ano existe um momento encucado reverso. Para que uma data admita um momento encucado, basta que o número que indica o dia seja menor que 24. Além disso, existem momentos que podem ser simultaneamente encucados e encucados reversos. Isso ocorre quando tanto as horas e os minutos são iguais e menores ou iguais a 12. Portanto, existem 365 momentos encucados reversos, $23 \times 12 = 276$ momentos encucados e 12 momentos tanto encucados reversos quanto encucados. A resposta é $365 + 276 - 12 = 629$.

22) **(E)** Seja x o comprimento do segmento FA. Como FC é tangente ao semicírculo, segue que $FE = FA = x$ e $CE = CB = 4$. Consequentemente, $DF = 4 - x$ e $FC = 4 + x$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ΔDCF, obtemos

$$4^2 + (4 - x)^2 = (4 + x)^2.$$

Resolvendo a equação anterior, encontramos $x = 1$. Portanto, $FC = 5$.

23) **(C)** Seja x o número escrito no quadrado central. Como cada perninha tem a mesma soma, a soma de todos os números escritos com exceção de x deve ser um múltiplo de 4. Ou seja, $1 + 2 + \cdots + 9 - x = 45 - x$ é um múltiplo de 4. Apenas 1, 5 e 9 possuem o mesmo resto que 45 na divisão por 4 e são, portanto, os únicos candidatos a ocupar o quadrado central. Resta mostrar que para cada um deles existe uma distribuição possível.

Para $x = 1$, considere os pares $(2,9)$, $(3,8)$, $(4,7)$ e $(5,6)$. Para $x = 5$, considere os pares $(1,9)$, $(2,8)$, $(3,7)$ e $(4,6)$. Para $x = 9$, considere os pares $(1,8)$, $(2,7)$, $(3,6)$ e $(4,5)$.

24) **(C)** Sejam v e $4v$ as velocidades de Jade e Esmeralda, respectivamente. Se t é o tempo que Esmeralda gastou para chegar no Jardim Botânico e d é a distância percorrida nesse trajeto, temos que $4vt = d$. Na volta de Esmeralda até metade do caminho, ela percorreu $d/2 = 2vt$ e gastou $t/2$ minutos após o descanso. Portanto, Jade gastou $t + t/2 + 5$ minutos para percorrer $d/2 = 2vt$ do caminho. Ou seja, $v(t + t/2 + 5) = 2vt$ e, consequentemente, $t = 10$. Finalmente, o tempo gasto por Jade é $2(t + t/2 + 5) = 40$ minutos.

25) **(C)** Veja a solução da questão 16 da prova do Nível 1, página 10.
Uma solução anternativa é a seguinte: Como 2015 não é múltiplo de 3, não é

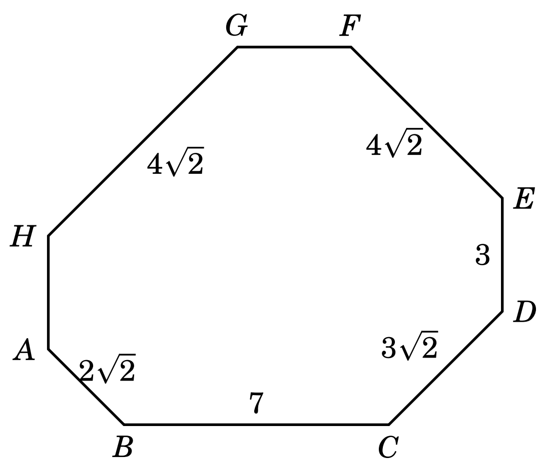
possível termos três parcelas iguais nas somas de Esmeralda. Se aparecerem dois números repetidos, a soma será da forma $x+2y$. Como queremos $x+2y=2015$, x é necessariamente ímpar e, uma vez definido o seu valor, teremos $y=\dfrac{2015-x}{2}$. Além disso, como x e y devem possuir três dígitos, temos $101 \le x \le 999$. Como existem 450 ímpares nesse intervalo, existem 450 possíveis somas da forma desejada. Note que o valor máximo $x=999$ implica que o valor mínimo $y=508$, e o valor mínimo $x=101$ implica que o valor máximo $y=957$, então os 450 ímpares geram valores válidos de y.

Segunda Fase

PARTE A

A1) Qual é menor número inteiro positivo que deixa cinco restos diferentes quando dividido por 2, 3, 4, 5 e 6?

A2) João cortou os quatro cantos de uma folha retangular e obteve o octógono equiângulo $ABCDEFGH$, como mostra a figura a seguir. Sabendo que $AB = 2\sqrt{2}$, $BC = 7$, $CD = 3\sqrt{2}$, $DE = 3$, $EF = 4\sqrt{2}$ e $GH = 5\sqrt{2}$, determine a área desse octógono.



A3) O professor Piraldo passou para Esmeralda uma equação da forma $ax = b$, sendo a e b reais. Esmeralda se enganou e resolveu a equação $bx = a$, obtendo uma solução que é igual à correta menos 60. Se a solução correta é da forma $m + \sqrt{n}$ com m e n inteiros, qual é o valor de $m + n$?

A4) Uma fábrica possui várias caixas, cada uma com capacidade de 31 litros. Ela fabricou 2015 garrafas de água, cada uma com 3 litros, e 2015 garrafas de suco de laranja, cada uma com 5 litros. Cada caixa acomoda qualquer quantidade de garrafas, desde que seu volume total não ultrapasse a sua capacidade. Não é permitido abrir as garrafas. Qual é a quantidade mínima de caixas que a fábrica deve usar para armazenar todas as garrafas fabricadas?

A5) Os números reais x, y e z satisfazem o sistema de equações:

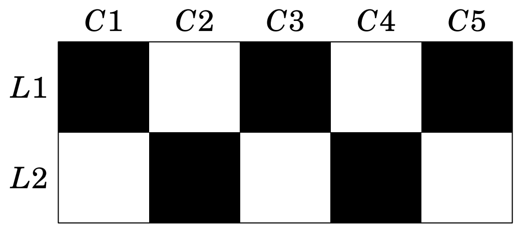
$$\begin{cases} \dfrac{x}{z} + \dfrac{z}{y} = 2015 \\ \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} = 37 \end{cases}$$

Determine o inteiro mais próximo de $\dfrac{x}{y}$.

A6) Duas circunferências C_1 e C_2 se intersectam nos pontos A e B. A tangente a C_1 por A corta novamente no ponto P e a tangente a C_2 por B corta novamente C_1 no ponto Q. Sabendo que $PB = 640$ e $QB = 1000$, determine o comprimento do segmento AB.

PARTE B

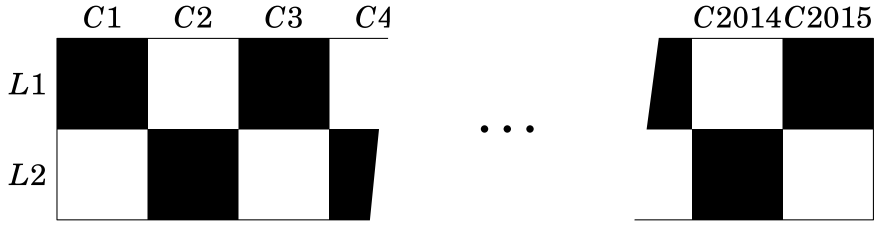
B1) Maria possui um tabuleiro 2×5 dividido em quadradinhos 1×1, pintados alternadamente de preto e branco como um tabuleiro de xadrez. Associado a cada linha e a cada coluna existe um botão que troca a cor, de preto para branco ou de branco para preto, de cada quadradinho da linha ou da coluna correspondente.



a) Considerando o tabuleiro com a coloração inicial dada na figura acima, desenhe o tabuleiro 2×5 com as cores de cada quadradinho após Maria apertar os botões L_2, C_1 e C_4.

b) Considerando novamente o tabuleiro com a coloração inicial dada na figura acima, desenhe o tabuleiro 2×5 com as cores de cada quadradinho após Maria apertar os botões L_1, C_2, C_3 e C_5.

c) Maria trocou seu tabuleiro 2×5 por um tabuleiro 2×2015, como indicado na figura abaixo.



Associado a cada linha e a cada coluna existe um botão que troca a cor de cada quadradinho da linha ou coluna correspondente, num total de botões. Quantas colorações diferentes do tabuleiro podem ser obtidas apertando-se alguns dos botões?

B2) Uma fração é chamada de irredutível quando o máximo divisor comum (MDC) entre o seu numerador e o seu denominador é igual a 1. Determine o número de inteiros positivos n menores que 100 de modo que a fração $\frac{8n+5}{5n+8}$ não seja irredutível.

B3) Em um triângulo acutângulo ABC, o ângulo $\hat{A}$ mede 45°. Sejam BE e CF alturas com E sobre AC e F sobre AB, e O o circuncentro de ABC, ou seja, o centro do círculo que passa por A, B e C. Calcule a medida do ângulo $E\hat{O}F$.

Segunda Fase – Soluções

Parte A

Problema	1	2	3	4	5	6
Resposta	0035	0093	0931	0520	0054	0800

A1) Observe que o resto da divisão por 12 determina os restos da divisão por 2, 3, 4 e 6. Assim podemos gerar a seguinte tabela de restos, onde a primeira linha corresponde aos restos da divisão por 12.

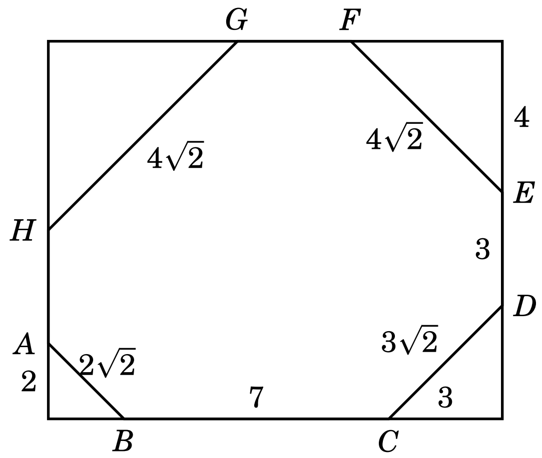
$\div 12$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\div 2$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$\div 3$	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
$\div 4$	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
$\div 6$	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5

As únicas colunas onde os restos da divisão por 2, 3, 4 e 6 são distintos são as últimas duas, isto é, quando os restos da divisão por 12 são iguais a 10 e 11. Chamemos de n o número procurado.

Caso n deixe resto 10 na divisão por 12, temos que o resto de n na divisão por 5 teria que ser 3, pois é o único número que não aparece com resto nessa linha. Logo $n+2$ é divisível por 2, 3, 4 e 5, e, portanto, $n+2$ é múltiplo de $\text{MDC}(2,3,4,5,6) = 60$. Assim neste caso o mínimo valor para n é $60-2 = 58$.

No caso que n deixe resto 11 na divisão por 12, temos que o resto n na divisão por 5 pode ser 0 ou 4. No caso que seja 4 temos, pelo mesmo argumento anterior, que $n+1$ é divisível por 60 e, portanto, o mínimo valor de n neste caso é $60-1 = 59$. Finalmente, se o resto da divisão por 5 é 0, como o número tem que estar na lista $11, 23, 35, 47, \ldots$, segue que o mínimo valor de n neste caso é $n = 35$.

A2) Prolongando AH, BC, DE e FG, obtemos um retângulo subtraído de quatro triângulos retângulos, cujos ângulos agudos são complementos dos ângulos internos do octógono. Como o óctogono é equiângulo, concluímos que os triângulos retângulos obtidos são isósceles.



Os lados do retângulo são

$$\frac{AB}{\sqrt{2}} + BC + \frac{CD}{\sqrt{2}} = 2 + 7 + 3 = 12, \text{ e } \frac{CD}{\sqrt{2}} + DE + \frac{EF}{\sqrt{2}} = 3 + 3 + 4 = 10.$$

Com isso, a área do octógono $ABCDEFGH$ é

$$10 \times 12 - \frac{2^2}{2} - \frac{3^2}{2} - \frac{4^2}{2} - \frac{5^2}{2} = 93.$$

A3) Seja r a solução correta de $ax = b$. A solução de $bx = a$ é

$$x = \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{1}{r}.$$

Logo

$$\frac{1}{r} = r - 60 \iff r^2 - 60r - 1 = 0 \iff r = 30 \pm \sqrt{901}.$$

Como r é da forma $m + \sqrt{n}$, com m e n inteiros, temos $m = 30$ e $n = 901$ e, assim, $m + n = 931$.

A4) Precisamos armazenar $2015 \times 3 + 2015 \times 5 = 2015 \times 8$ litros de líquido. Portanto, precisamos de pelo menos $\dfrac{2015 \times 8}{31} = 520$ contêneires. Pode-se verificar que é possível fazer isso com 325 contêineres contendo 2 garrafas de água e 5 garrafas de suco e 195 contêineres contendo 7 garrafas de água e 2 garrafas de suco.

A5) Temos

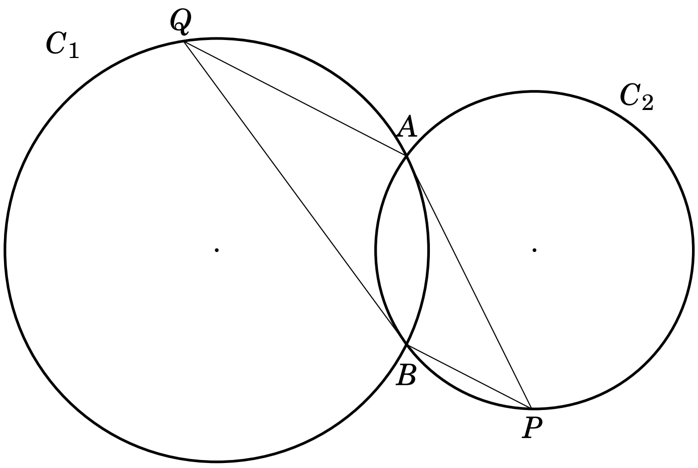
$$\frac{x}{z}+\frac{z}{y}=2015 \iff \frac{xy+z^2}{yz}=2015,$$
$$\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=37 \iff \frac{xy+z^2}{xz}=37.$$

Dividindo uma equação por outra, obtemos

$$\frac{xy+z^2}{yz}\cdot\frac{xz}{xy+z^2}=\frac{2015}{37} \iff \frac{x}{y}=\frac{2015}{37}=54+\frac{17}{37}.$$

Assim, o inteiro mais próximo de $\dfrac{x}{y}$ é 54.

A6) Como AP é tangente a C_1, $\angle BAP=\angle BQA$. Analogamente, como BQ é tangente a C_2, $\angle APB=\angle ABQ$.

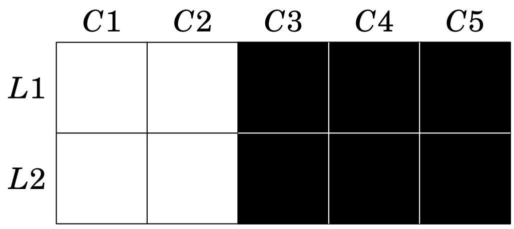


Portanto os triângulos AQB e PAB são semelhantes. Logo

$$\frac{AB}{PB}=\frac{QB}{AB} \iff AB=\sqrt{PB\cdot QB}=\sqrt{640\times 1000}=800.$$

Parte B

B1) a)



b) O desenho é o mesmo do item anterior.

c) Não apertando os botões das linhas, existem 2^{2015} escolhas possíveis, entre apertar ou não, cada botão das colunas e todas essas escolhas produzem colorações diferentes. Além disso, apertar o botão da primeira linha para cada uma dessas colorações nos gera uma nova coloração, pois nas colorações anteriores não existem colunas com a mesma cor. Assim, existem $2 \times 2^{2015} = 2^{2016}$ colorações distintas usando-se apenas os botões das colunas e o botão da primeira linha. Qualquer coloração obtida usando-se apenas o botão da segunda linha e os botões de um conjunto C de colunas equivale a

1) não mudar a cor dos quadrados da segunda linha que estão no conjunto C de colunas;
2) não mudar a cor dos quadrados da primeira linha que não estão no conjunto C de colunas;
3) mudar a cor dos quadrados da primeira linha que estão no conjunto C de colunas;
4) mudar a cor dos quadrados da segunda linha que não estão no conjunto C de colunas.

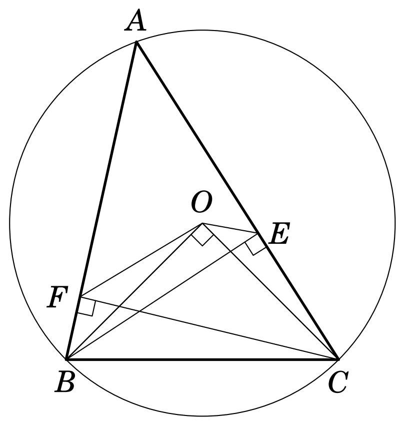
Essa mesma configuração pode ser obtida apertando-se o botão da primeira linha e os botões das colunas que não estão em C. Apertar os dois botões das linhas e um conjunto C de colunas é o mesmo que não apertar nenhum deles e apertar os botões das colunas que não estão em C. Assim, o uso do segundo botão não acrescenta novas colorações às que já foram mencionadas. Portanto, o total de colorações é 2^{2016}.

B2) Seja $d = \text{MDC}(8n+5, 5n+8)$. Então d também é divisor de $-5(8n+5)+8(5n+8) = 39$. Assim, $d = 1$, 3, 13 ou 39, mas $d \neq 1$ pois, neste caso, a fração é irredutível. Logo, é possível simplificar a fração por 3 ou por 13 (ou por ambos).

- Se $d = 3$, então $8n+5$ e $5n+8$ são múltiplos de 3, ou seja, $8n+5 \equiv 0 \mod 3$, que equivale a $n \equiv 2 \mod 3$. Com isso, n pode ser 2, 5, 8, … ou 98, num total de 33 números.
- Se $d = 13$, então $8n+5$ e $5n+8$ são múltiplos de 13, ou seja, $5n+8 \equiv 5n-5 \equiv 0$ mod 13, assim $n \equiv 1 \mod 13$. Com isso, n pode ser 1, 14, 26, 40, 53, 66, 79 ou 92. Desses, 14, 53 e 92 já apareceram na lista anterior. Assim, adicionamos mais $8-3 = 5$ números.

Com isso, o total de números n menores que 100 tal que $\dfrac{8n+5}{5n+8}$ é irredutível é $33+5 = 38$.

B3) O arco BC mede $2m(\hat{A}) = 2 \times 45° = 90°$, logo $m(B\hat{O}C) = 90° = m(B\hat{E}C)$. Portanto o quadrilátero $BOEC$ é inscritível e $m(E\hat{O}C) = m(E\hat{B}C) = 90° m(\hat{C})$.



Analogamente, $m(F\hat{O}B) = 90° - m(\hat{B})$. Portanto

$$\begin{aligned} m(E\hat{O}F) &= m(F\hat{O}B) + 90° + m(E\hat{O}C) \\ &= 90° - m(\hat{C}) + 90^{]}circ + 90° - m(\hat{B}) \\ &= 90° + m(\hat{A}) = 135°. \end{aligned}$$

Terceira Fase – Nível 2

1) Prove que existe um número que pode ser representado de pelo menos 2015 maneiras diferentes como a soma de quadrados de números naturais não nulos, não necessariamente todos distintos. Considera-se que duas somas que alteram apenas a ordem das parcelas representam uma mesma maneira.

   Por exemplo, $1^2+1^2+3^2+3^2+7^2+10^2+$ e 5^2+12^2 são duas maneiras distintas de escrevermos 169 como soma de quadrados.

2) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. As retas AB e CD cortam-se em E e as retas BC e AD cortam-se em F. Sejam P e Q as projeções ortogonais de E sobre as retas AD e BC, respectivamente, e sejam R e S as projeções ortogonais de F sobre as retas AB e CD, respectivamente. As retas ER e FS se cortam em T.

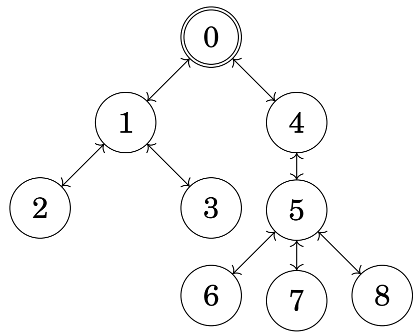
   a) Mostre que há uma circunferência que passa pelos pontos E, F, P, Q, R e S.

   b) Prove que a circunferência que passa pelos vértices do triângulo RST é tangente à circunferência que passa pelos vértices do triângulo QRB.

3) Seja ABC um triângulo e n um inteiro positivo. Sobre o lado BC considere os pontos $A_1, A_2, \ldots, A_{2^n-1}$ que dividem o lado em 2^n partes iguais, ou seja, $BA_1 = A_1A_2 = \cdots = A_{2^n-2}A_{2^n-1} = A_{2^n-1}C$. Defina os pontos $B_1, \ldots, B_{2^n-1}$ e $C_1, \ldots, B_{2^n-1}$ sobre os lados CA e AB, respectivamente, de maneira análoga. Trace os segmentos $AA_1, AA_2, \ldots, ..., AA_{2^n-1}, BB_1, \ldots, BB_{2^n-1}, CC_1, \ldots, CC_{2^n-1}$. Determine, em função de n, em quantas regiões foi dividida a região delimitada pelo triângulo ABC por esses segmentos.

4) No país Arnaldos Unidos, existem n cidades conectadas por $n-1$ estradas e, a partir de qualquer cidade, é possível chegar até a capital Arnaldópolis usando as estradas.

   Durante os $n-1$ primeiros dias do ano, uma das estradas é escolhida em cada dia e tem o seu tráfego interrompido para passar por uma reforma que durará pelo menos n dias. Durante qualquer momento desse processo, chamaremos uma cidade de *folha* se ela não for a capital e estiver conectada a apenas uma outra cidade por uma estrada que não teve seu tráfego interrompido. Para minimizar os transtornos, uma estrada só pode ser reformada uma única vez e, além disso, apenas quando uma das cidades que ela conecta é uma folha. Por exemplo, no mapa a seguir em que a cidade 0 é a capital Arnaldópolis, as cidades 2, 3, 6, 7 e 8 são folhas. Veja que uma reforma iniciada na estrada entre as cidades 1 e 2 reduz o número de folhas de 5 para 4 e que uma reforma no dia seguinte na estrada entre as cidades 1 e 3 mantém o número de folhas constante e igual a 4.



a) No mapa acima, com $n = 9$ cidades, determine uma ordem apropriada de reformas para as 8 estradas e, em seguida, determine o número de dias em que a quantidade de folhas não é alterada durante o processo de reformas.

b) Supondo agora que $n = 230$ e que existem inicialmente 69 folhas, determine o número de dias em que a quantidade de folhas não é alterada durante um processo qualquer de reformas envolvendo todas as estradas nos primeiros 229 dias do ano.

5) Seja n um inteiro positivo e sejam $n = d_1 > d_2 > \cdots > d_k = 1$ seus divisores positivos.

a) Prove que

$$d_1 - d_2 + d_3 - \cdots + (-1)^{k-1} d_k = n - 1$$

se, e somente se, n é primo ou $n = 4$.

b) Determine os três inteiros positivos n para os quais

$$d_1 - d_2 + d_3 - \cdots + (-1)^{k-1} d_k = n - 4.$$

6) Seja ABC um triângulo escaleno e AD, BE e CF as bissetrizes internas, com D sobre BC, E sobre AC e F sobre AB. É dado que $\angle AFE = \angle ADC$. Calcule a medida do ângulo $\angle BCA$.

Terceira Fase – Nível 2 – Soluções

1. O número 2014×5^2, que pode ser escrito como

$$\underbrace{5^2 + \cdots + 5^2}_{2014-k \text{ vezes}} + \underbrace{4^2 + \cdots + 4^2}_{k \text{ vezes}} + \underbrace{3^2 + \cdots + 3^2}_{k \text{ vezes}},$$

onde $k = 0, 1, \ldots, 2014$. Logo ele pode ser escrito como soma de quadrados de pelo menos 2015 maneiras distintas.

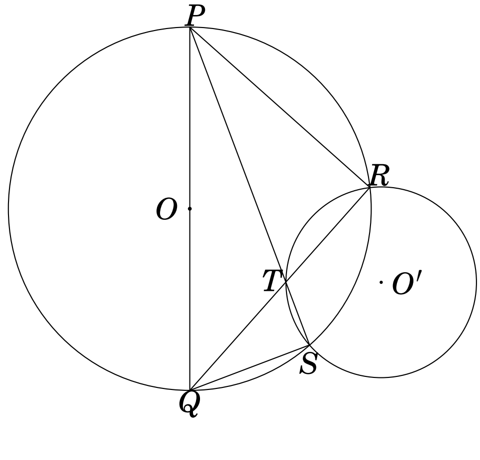
Observação: existem números que podem ser escritos como a soma de *apenas dois* quadrados de 2015 formas distintas. Por exemplo,

$$5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 53 \cdot 61 \cdot 73 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 101$$

pode ser escrito como a soma de 2 quadrados de $2^{11} = 2048$ formas distintas. Os números primos no produto acima são os doze primeiros primos que podem ser hipotenusas de triângulos retângulos com lados inteiros.

2. Para resolver o problema, precisaremos do seguinte resultado.

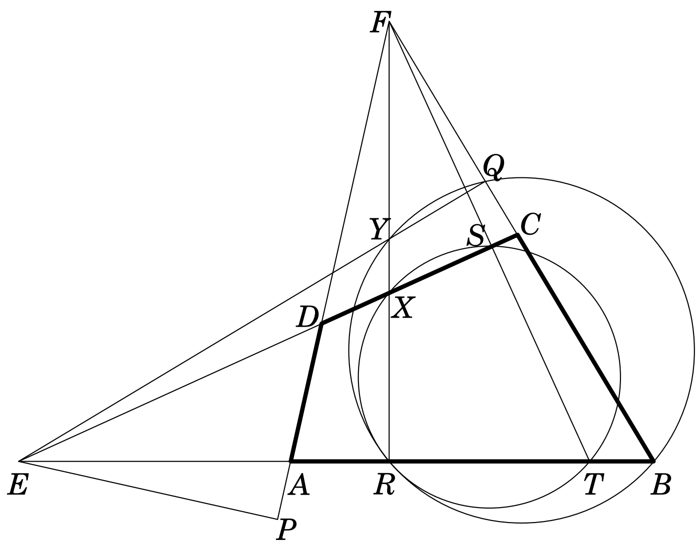
Lema: Seja **C** uma semicircunferência com diâmetro PQ e R, S pontos sobre a semicircunferência tais que PS e RQ se cortam no ponto T. Se **D** é a circunferência que passa pelos pontos R, T e S, então **C** é perpendicular a **D**, isto é, os raios de **C** e **D** que passam por R (ou S) são perpendiculares.



Para a prova do lema, denotemos por O ponto médio do segmento PQ (logo o centro de **C**) e O' o ponto tal que $OR \perp RO'$ e $OS \perp SO'$. Como $OR = OS$, segue que $SO' = RO'$, e se denotamos por $\alpha := \angle OPS$ e $\beta := \angle OQR$, segue que $\angle QOS = 2\alpha$ e $\angle POR = 2\beta$, assim $\angle ROS = 180° - 2\alpha - 2\beta$. Além disso, $\angle RTS = \angle PTQ = 180° - \alpha - \beta$. Por outro lado, como o quadrilátero $ORO'S$ é concíclico, temos que

$$\angle SO'R = 180° - \angle ROS = 2\alpha + 2\beta.$$

Portanto $\angle RTS$ é a metade do ângulo exterior a $\angle RO'S$ e, assim, T está também sobre a circunferência de centro O' e raio $O'R = O'S$.□



Agora, para resolver o problema, consideremos a circunferência com diâmetro EF. Como

$$\angle FQE = \angle FSE = \angle FRE = \angle FPE = 90°,$$

segue que os pontos Q, S, R e P estão sobre esta circunferência, o que prova a parte a) do problema. Para provar a parte b), denotemos por X o ponto de interseção de FR com CD e Y o ponto de interseção de FR com EQ. Como os ângulos em R e S são retos, segue que o quadrilátero $SXRT$ é concíclico; da mesma forma o quadrilátero $QYRB$ também é concíclico.

Finalmente, pelo lema, temos que a circunferência que passa por S, X e R e a circunferência que passa por Q, Y e R é são perpendiculares à circunferência com diâmetro EF. Como as duas circunferências passam por R, segue que os centros e R são colineares e elas são tangentes em R.

3. a) Vamos traçar primeiro as linhas desde A e B. Quando traçamos somente estas linhas estaremos formando $2^n \cdot 2^n = 2^{2n}$ regiões. Suponhamos, por enquanto, que nenhuma linha que traçamos desde C passa por nenhum cruzamento dos feitos anteriormente. Como cada vez que uma linha desde C corta uma das linhas desde A ou B se cria uma nova região, e como o total de número de linhas desde A e B é $2(2^n - 1)$, temos que cada linha que trazemos desde C vai formar $2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$ regiões novas. Logo, supondo que não tem três linhas concorrentes, o número de regiões é

$$2^{2n} + (2^n - 1)(2^{n+1} - 1) = 3 \cdot 2^{2n} - 3 \cdot 2^n + 1.$$

Agora, precisamos contar o número de linhas que são concorrentes três a três. Para isso, suponhamos que as linhas AA_s, BB_r e CC_t são concorrentes, onde $1 \le s, r, t \le 2^n - 1$, assim temos as relações

$$\frac{BA_s}{A_sC} = \frac{s}{2^n - s}, \qquad \frac{CB_r}{B_rA} = \frac{r}{2^n - r}, \qquad \frac{AC_t}{C_tB} = \frac{t}{2^n - t}.$$

Segue pelo Teorema de Ceva que

$$\frac{BA_s}{A_sC} \cdot \frac{CB_r}{B_rA} \cdot \frac{AC_t}{C_tB} = \frac{s}{2^n - s} \cdot \frac{r}{2^n - r} \cdot \frac{t}{2^n - t} = 1,$$

ou equivalentemente

$$rst = (2^n - r)(2^n - s)(2^n - t).$$

Escrevendo $r = 2^{n_1}u$, $s = 2^{n_2}v$ e $t = 2^{n_3}w$, com u, v e w ímpares, substituindo na identidade anterior e simplificando obtemos

$$uvw = (2^{n-n_1} - u)(2^{n-n_2} - v)(2^{n-n_3} - w).$$

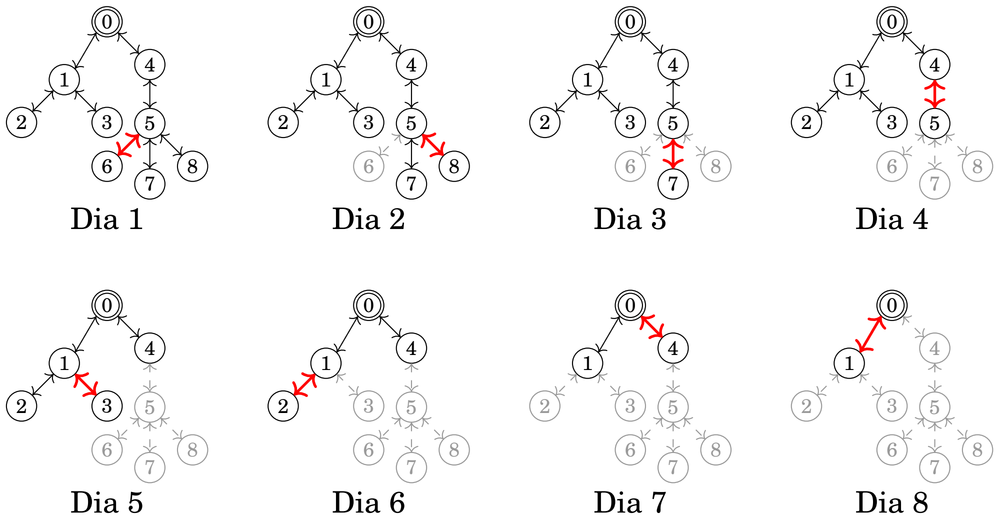
Agora, supondo que $n_1 \ge n_2 \ge n_3$ (os outros casos são análogos), considerando a equação anterior módulo 2^{n-n_1} obtemos que $uvw \equiv -uvw \pmod{2^{n-n_1}}$ e desta forma uvw é divisível por 2^{n-n_1-1}. Porém, como uvw é ímpar, temos que $n_1 = n-1$, isto é, o ponto A_s é ponto médio. Segue que somente teremos linhas concorrentes, quando uma das linhas é uma mediana. Por outra parte, se fixamos uma mediana vamos a ter $2^n - 1$ pontos de concorrência sobre ela. Assim o número de pontos de concorrência é

$$3(2^n - 1) - 2 = 3 \cdot 2^n - 5$$

onde temos que tirar 2 pois o baricentro está sendo contado três vezes. Concluímos que o número de regiões é

$$3 \cdot 2^{2n} - 3 \cdot 2^n + 1 - (3 \cdot 2^n - 5) = 3 \cdot 2^{2n} - 3 \cdot 2^{n+1} + 6.$$

b) Os seguintes desenhos ilustram uma forma de escolher a ordem em que as estradas estarão em obras, onde a estrada marcada em vermelho é “eliminada” nesse dia.



Nos dias 3, 4 e 6 o número de folhas se mantém, assim para esta escolha de ordem de obras de estradas temos três dias onde não tem mudança do número de folhas.

c) Como as obras acontecem nos primeiros 229 dias no ano, segue que o número de cidades é 230. Destas temos 69 que são folhas, a capital e 160 cidades que podem em algum momento virar folhas. Agora suponhamos que as cidades i

e j estão ligadas e i é folha. No momento em que a estrada entre i e j entra em obras(e i fica isolada) temos duas possibilidades: se j não virar folha temos mudança do número de folhas (diminui em 1), pois i deixará de ser folha, e se j virar folha o número de folhas não será alterado. Como cada cidade não folha somente pode virar folha uma vez, temos que o número de dias em não tem mundança no número de folhas corresponde ao número de cidades que não são folha nem capital, isto é, 160.

4. Primeiro note que se um inteiro n for quadrado de outro inteiro m, então n possui um número ímpar de divisores. De fato, se $n = m^2$ e a decomposição de m em primos é $m = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}$, então $n = p_1^{2x_1} p_2^{2x_2} \dots p_k^{2x_k}$ e o número de divisores primos de n é $(2x_1+1)(2x_2+1)\dots(2x_k+1)$, que é ímpar por ser o produto de k números ímpares.

   a) Dividimos o problema em dois casos:

      - *Se n for um quadrado*, então o número de divisores positivos é ímpar, isto é, $k = 2\ell + 1$. Note que soma alternada termina, então, em $+1$,

        $$d_1 - d_2 + \cdots + (-1)^{k-1} d_k = n - d_2 + d_3 + \cdots - d_{k-1} + 1 = n - 1 - (B - 2),$$

        onde $B = (d_2 - d_3) + (d_4 - d_5) + \cdots + (d_{k-3} - d_{k-2}) + d_{k-1}$.
        A soma alternada vale $n-1$ apenas se $B = 2$. Isto implica que o somatório de B só tem um termo, que é igual a 2.
        Portanto n é um quadrado par com apenas três divisores; a única possibilidade é $n = 4$.

      - *Se n não for um quadrado,* então o número de seus divisores positivos é par, isto é, $k = 2\ell$. Note que soma alternada termina, então, em -1,

        $$d_1 - d_2 + \cdots + (-1)^{k-1} d_k = n - d_2 + d_3 + \cdots + d_{k-1} - 1 = n - 1 - A,$$

        onde $A = (d_2 - d_3) + (d_4 - d_5) + \cdots + (d_{k-2} - d_{k-1})$.
        A soma alternada vale $n-1$ apenas se $A = 0$. Porém, se $k > 2$, então cada termo entre parênteses acima é maior que zero, e portanto $A > 0$.
        Logo a soma alternada vale $n-1$ apenas se $k = 2$, isto é, n é primo.

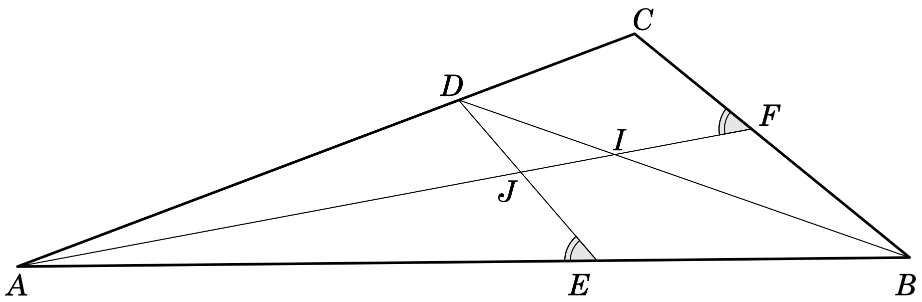
b) Usamos a notação do item anterior.

Se n é um quadrado, temos $n-1-(B-2)=n-4 \iff B-2=3 \iff B=5$. Se n tem 3 divisores, então $n=p^2$ (com p primo) e $B=d_2=p=5$ nos dando a solução $n=5^2=25$. Se n tem 5 divisores então $n=p^4$ e $B=d_2-d_3+d_4=p^3-p^2+p=5$, mas essa equação não tem solução com p primo já que p seria divisor de 5 (logo igual a 5), e o lado esquerdo seria maior que 5. Se n tem 7 divisores então $n=p^6$ e $B=d_2-d_3+d_4-d_5+d_6=p^5-\cdots+p=5$, que novamente não tem solução, como no caso anterior. Se n tem 9 divisores ou mais, então $B=(d_2-d_3)+(d_4-d_5)+(d_6-d_7)+\cdots+d_{k-1}\geq 1+1+1+2=5$ e o único caso possível de igualdade seria se n tivesse 9 divisores, seu menor fator primo fosse $d_8=2$ e as diferenças entre divisores consecutivos maiores fosse 1. Teríamos porém nesse caso $1=d_2-d_3\geq n/2-n/3=n/6$, donde $n\leq 6$, absurdo, pois nesse caso n não poderia ter 9 divisores. Assim, a única solução com n quadrado é $n=25$.

Se n não é um quadrado, temos $n-1-A=n-4 \iff A=3$. Se n tem 4 divisores, $d_2-d_3=3$; note que o menor divisor maior que 1 de n (que nesse caso é d_3) é sempre primo. Se $d_3>2$, então $d_2=d_3+3$ seria par e 2 seria um divisor de n, absurdo. Portanto, nesse caso, $d_3=2$ e $d_2=d_3+3=5$ e, como n tem 4 divisores, $n=10$. Se n tem 6 divisores, $d_2-d_3+d_4-d_5=3$. Há dois casos: ($d_2-d_3=1$ e $d_4-d_5=2$) ou ($d_2-d_3=2$ e $d_4-d_5=1$). Nos dois casos temos divisores consecutivos, um deles sendo par e portanto $d_5=2$. No primeiro caso temos $1=d_2-d_3\geq n/2-n/3=n/6$, donde $n\leq 6$, o que não dá nenhuma solução. No segundo caso temos $2=d_2-d_3\geq n/2-n/3=n/6$, donde $n\leq 12$ - a única solução nesse caso é $n=12$. Se n tem 8 divisores ou mais, então $A\geq(d_2-d_3)+(d_4-d_5)+(d_6-d_7)\geq 1+1+1=3$, e a única possibilidade seria termos 8 divisores com $d_2-d_3=d_4-d_5=d_6-d_7=1$, mas então $1=d_2-d_3\geq n/2-n/3=n/6$, donde $n\leq 6$, contradizendo o fato de n ter 8 divisores. Assim, nesse caso em que n não é quadrado, as únicas soluções são $n=10$ e $n=12$.

5. Denotemos por I o ponto de interseções das bissetrizes de ABC, e sejam a, b e c os comprimentos dos lados opostos a A, B e C, respectivamente, conforme a figura

abaixo.



Pelo teorema das bissetrizes, sabemos que

$$\frac{AF}{FB} = \frac{b}{a}, \quad \frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}, \quad \frac{CE}{EA} = \frac{a}{c}.$$

Segue que

$$\begin{aligned} AF &= \frac{bc}{a+b}, \quad BD = \frac{ca}{c+b}, \quad CE = \frac{ab}{a+c}, \\ FB &= \frac{ac}{a+b}, \quad DC = \frac{ba}{c+b}, \quad EA = \frac{cb}{a+c}. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos, por hipótese, que $\angle EFB = \angle IDB$. Logo os triângulos EFB e IDB são semelhantes, e em particular

$$\frac{BF}{BD} = \frac{EB}{IB} = 1 + \frac{EI}{IB} = 1 + \frac{EC}{CB}.$$

Assim,

$$\frac{\frac{ac}{a+b}}{\frac{ca}{c+b}} = 1 + \frac{\frac{ab}{a+c}}{a} \implies \frac{\frac{ac}{a+b}}{\frac{ca}{c+b}} = \frac{a+b+c}{a+c}.$$

Portanto $(c+b)(a+c) = (a+b)(a+b+c)$ e então $c^2 = a^2 + b^2 + ab$. Aí, podemos usar a lei dos cossenos sobre o ângulo $\angle ACB$,

$$\cos(\angle ACB) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = -\frac{1}{2}.$$

Logo $\angle ACB = 120°$.

Premiados Nível 2

Medalha de Ouro

Nome	Cidade – Estado	Pontos
Mariana Bigolin Groff	F. Westphalen – RS	307
Pedro Lucas Lanaro Sponchiado	S.C. do Rio Pardo – SP	306
Bernardo Peruzzo Trevisan	Canoas – RS	245
Felipe Chen Wu	Rio de Janeiro – RJ	245
Bruno Barros de Sousa	Xambioá – TO	243
Vilmar Ribeiro Machado Júnior	Fortaleza – CE	240

Medalha de Prata

Nome	Cidade – Estado	Pontos
Davi Xie	Curitiba – PR	223
Marcelo Hippólyto de Sandes Peixoto	Fortaleza – CE	218
Antonio Luis Alves Azevedo	Rio de Janeiro – RJ	217
Gustavo Farani de Farias	Aracajú – SE	217
Juliana Carvalho de Souza	Igarapé – MG	215
Lara Franciulli Teodoro de Souza	Guarulhos – SP	211
Dikson Ferreira dos Santos	Araci – BA	209
Samuel Prieto Lima	Goiânia – GO	196
Rodrigo Ribeiro da Silva	Rio de Janeiro – RJ	194
Francisco José Martins de Lima	Duque de Caxias – RJ	193
Mórmon Lima dos Santos	Campina Grande – PB	191
Eduardo Ventilari Sodré	Brasília – DF	190

Medalha de Bronze

Nome	Cidade – Estado	Pontos
Mariana Quirino de Oliveira	Brasília – DF	186
Yan Victor Souza Guimarães	Fortaleza – CE	182
Carlos Eduardo Sousa de Magalhães Bastos Gomes	Rio de Janeiro – RJ	177
Uerê Backhaus	Canoas – RS	173
Felipe Bezerra de Menezes Benício de Sousa	Fortaleza – CE	172
Juan de Araújo Nogueira	Duque de Caxias – RJ	172
Yu Yi Wang Xia	Brasília – DF	169
Vanessa Carvalho do Nascimento	Sobral – CE	163
Catulo Axel Teixeira Vasconcelos Alves	Fortaleza – CE	162
Gustavo Goulart Saliba	Belo Horizonte – MG	159
Ícaro Andrade Souza Bacelar	Ipatinga – MG	155
Raquel Folz Cavalcante	Manaus – AM	155
Bernardo Quintão Oliveira	Ipatinga – MG	154
Gabriel Marques Domingues	Salvador – BA	153
Júlia Barbate Pintão	Vinhedo – SP	153

Menção Honrosa

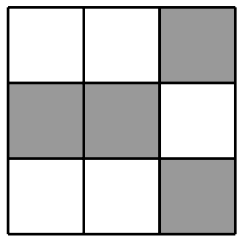
Nome	Cidade – Estado	Pontos
André Diogo Firmino dos Santos	Fortaleza – CE	151
Daniel Jantorno Alves da Rocha	Rio de Janeiro – RJ	151
João Pedro Quaranta de Almeida	Salvador – BA	151
Guilherme Zamponi Ramos	Taboão da Serra – SP	147
Levy Bruno do Nascimento Batista	Fortaleza – CE	147
Sabrina Teodoro Alberto da Silva	Luiz Antônio – SP	147
Luiz Vasconcelos Júnior	S.L. de Montes Belos – GO	146
Julia Filizola Chancey	São Paulo – SP	143
Savio Vinicius Costa do Amaral	Cocal dos Alves – PI	143
Gabriel Manini Cypriano	São Paulo – SP	142
João Lucas Foltran Consoni	Maringá – PR	142
Maria Carolina Paraiso Lopes	Lauro de Freitas – BA	142
Pedro Henrique Casimiro Monteiro	Fortaleza – CE	141
Thiago Lopes de Araújo	Rio de Janeiro – RJ	140
Francisco Savio Rodrigues Alves	Sobral – CE	139
Eduarda Vitória da Costa Silva	Vitória – ES	139
Carlos Eduardo Noleto de Souza Ximenes	Teresina – PI	138
Gabriel Rocha Porto	João Pessoa – PB	136
Victor Hugo de Oliveira Bastos	Fortaleza – CE	136
Bruna Xavier Nunes de Medeiros	Belo Horizonte – MG	135
Gabriel Ferreira Cândido	Fortaleza – CE	135
Davi Rodrigues de Vasconcelos	Sobral – CE	134
Serena Xiao Ying Qi	São Paulo – SP	134
Alan Esquenazi	Rio de Janeiro – RJ	132
Kevyn Djhonatha Dias de Lacerda	Campo ALegre – AL	131
Luan Arjuna Fraga Ramires	Andaraí – BA	130
Matheus Canguçu de Paiva Queiroz	Goiânia – GO	130
Lethycia Maia de Sousa	Recife – PE	129
Gabriel Chung Ravanini	Mogi Mirim – SP	128
Ana Chen	São Paulo – SP	127
George Moreira de Barros Leal	Fortaleza – CE	127
Rodrigo Napoleão Brito Linkevicius	Recife – PE	125
Álvaro Bernardo Rodrigues de Almeida	Fortaleza – CE	124
Antonia Kaele Leite de Sá	Jucás – CE	124
Gabriel Gandour	Brasília – DF	124
Antonio Henrique Santana de Mello	Vitória – ES	124
Pedro Franca de Figueiredo	Aracajú – SE	123
Carlos Henricco Rabelo de Queiroz	Fortaleza – CE	122
Davi Almeida Mares	Belo Horizonte – MG	122
Igor Brito Andrade	Eusébio – CE	122
Vinicius José Menezes Pereira	J. dos Guararapes – PE	122

37ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

NÍVEL 3

Primeira Fase

1) Violeta quer numerar de 1 a 9 os quadrados do tabuleiro ao lado, de modo que a soma de dois números em quadrados vizinhos (quadrados com lados comuns) seja um número ímpar. Além disso, ela quer que a soma dos números escritos nos quadrados cinza seja a maior soma possível.
Qual é a soma dos números escritos nos quadrados brancos?

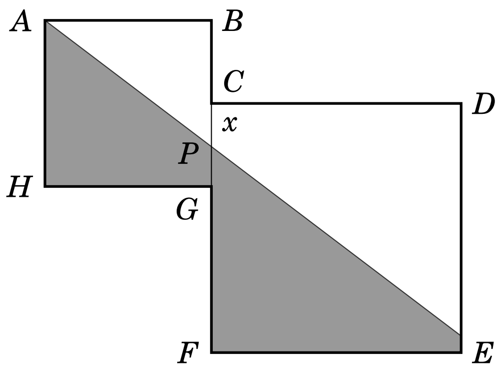


A) 15 B) 16 C) 22 D) 29 E) 30

2) Fabiana tem 55 cubos de mesmo tamanho, sendo 10 deles vermelhos, 15 azuis e 30 verdes. Ela quer construir uma torre empilhando esses cubos de modo que dois cubos vizinhos tenham cores diferentes. No máximo, quantos cubinhos ela poderá empilhar?

A) 39 B) 51 C) 52 D) 54 E) 55

3) Na figura, os quadrados $ABGH$ e $CDEF$ têm lados de medidas 4 e 6 cm, respectivamente. O ponto P pertence à reta contendo os pontos B, C, G, e F, sendo C o ponto médio do lado BG. A semirreta AP divide a figura formada pelos dois quadrados em duas regiões, uma branca e uma cinza.



Para que essas duas regiões tenham áreas iguais, qual deve ser o valor de $x = CP$?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{18}{25}$ C) 1 D) $\frac{26}{25}$ E) $\frac{3}{2}$

4) Qual é a soma dos quadrados das quantidades de vogais e consoantes da resposta correta? Não conte as letras A, B, C, D, E das alternativas.

A) Vinte e seis B) Setenta e três C) Oitenta e cinco
D) Noventa e sete E) Cento e dezesseis

5) Dizemos que dois anos *coincidem* se têm a mesma quantidade de dias e os dias da semana de todos os seus dias coincidem. O ano de 2015 coincide com 2009. Qual é o próximo ano que coincide com 2015? Lembre-se de que os anos múltiplos de 4 no século XXI (com exceção de 2100) são bissextos e têm 366 dias; os demais anos têm 365 dias.

A) 2021 B) 2022 C) 2023 D) 2025 E) 2026

6) Um triângulo tem lados inteiros distintos, o maior deles medindo 2015. Quais são as medidas dos dois outros lados se a área do triângulo é a menor possível?

A) 2 e 2014 B) 3 e 2013 C) 1006 e 1010
D) 1007 e 1009 E) 1008 e 1009

7) Esmeralda e Jade saíram da secretaria da OBM e foram para o Jardim Botânico. As duas saíram ao mesmo tempo, Esmeralda de bicicleta e Jade caminhando. A velocidade de Esmeralda é o quádruplo da velocidade de Jade, e as duas velocidades são constantes. Esmeralda chegou ao Jardim Botânico, esperou 5 minutos e depois voltou pelo mesmo caminho, encontrando Jade indo, bem na metade do caminho. Quanto tempo demora a caminhada de Jade da secretaria até o Jardim Botânico?

A) 30 min B) 35 min C) 40 min D) 45 min E) 50 min

8) Um número é dito *impadrático* quando é raiz de uma equação quadrática com coeficientes inteiros ímpares. Por exemplo, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é impadrático, pois é raiz da equação $x^2 - x - 1 = 0$.

Qual dos números a seguir é impadrático?

A) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ B) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{5}$ C) $\dfrac{1+\sqrt{6}}{2}$ D) $\dfrac{1-\sqrt{7}}{4}$ E) $\dfrac{1-\sqrt{13}}{6}$

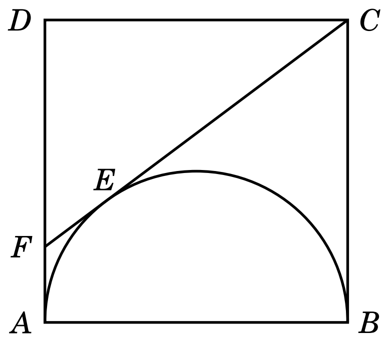
9) Existem quantos números inteiros positivos n tais que ao dividir 2032 por n temos resto 17?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

10) Jonas gosta de observar os relógios digitais espalhados por sua cidade que informam a hora e a data. Por coincidência, ele viu que hoje é dia 12/06 e naquele momento marcava 12:06, ou seja, data e hora são formados com os mesmos números! Ele ficou encucado com a coincidência e chamou o momento (data e hora) de *encucado*. Ele pensou que também seria interessante se a hora fosse formada com os mesmos números, mas na ordem trocada, por exemplo, no dia 21/06 às 06:21, então chamou esse momento de *encucado reverso*. Considerando que 2015 não é um ano bissexto, desde 01/01/2015 às 00:00 até 31/12/2015 às 23:59 quantos momentos são encucados ou encucados reversos?

A) 365 B) 455 C) 465 D) 629 E) 699

11) No desenho abaixo, o segmento CF é tangente ao semicírculo de diâmetro AB. Se $ABCD$ é um quadrado de lado 4, determine o comprimento de CF.



A) $\dfrac{9}{2}$ B) 5 C) $\dfrac{11}{2}$ D) $\dfrac{23}{4}$ E) 6

12) No triângulo ABC, $AB = 2$ e $BC = \sqrt{2}$. Seja M o ponto médio do lado AB. Se $m(BAC) = \alpha$, $m(BMC) = \beta$ e $m(MBC) = \gamma$, então:

A) $\alpha + \beta = \gamma$ B) $\alpha + \beta = 2\gamma$ C) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

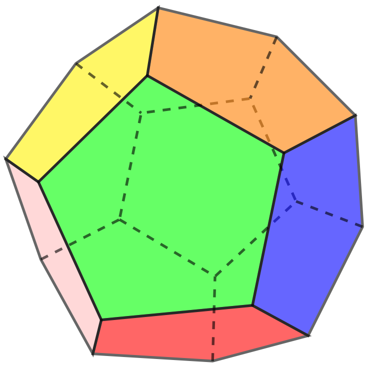
D) $\alpha + \beta = 90°$ E) $\alpha + \beta = 45°$

13) Inicialmente, na tela de um computador, estão escritos os números 1 e 2. A cada segundo, esses dois números são trocados pela soma de seus quadrados e pelo dobro de seu produto. Depois de aproximadamente quanto tempo um desses dois números vai ser maior do que a quantidade de átomos no planeta Terra, que é cerca de 10^{50}?

A) Sete segundos B) Sete horas C) Sete dias

D) Sete meses E) Sete anos

14) Duas retas ou segmentos de retas no espaço são *reversas* quando não existe um plano que contém ambas. Um dodecaedro regular é um poliedro com doze faces pentagonais, todas regulares.



Qual é a maior quantidade de elementos de um conjunto S de arestas de um dodecaedro regular tal que quaisquer dois de seus elementos são reversos?

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15

15) Um conjunto finito A de números reais é *parfeito* quando tem pelo menos dois elementos e $\{ab | a, b \in A \text{ e } a \neq b\} = A$, ou seja, o conjunto obtido multiplicando-se

todos os pares de números distintos de A é o próprio A. Por exemplo, $\{1,2,\frac{1}{2}\}$ é parfeito pois $\left\{1\cdot 2, 1\cdot\frac{1}{2}, 2\cdot\frac{1}{2}\right\} = \left\{1,2,\frac{1}{2}\right\}$, mas $\{1,2,3\} \neq \{1\cdot 2, 1\cdot 3, 2\cdot 3\}$ não é parfeito. Quantos elementos pode ter um conjunto parfeito?

A) Somente 3 ou 4.

B) Qualquer quantidade congruente a 3 ou 4 módulo 4.

C) Qualquer quantidade ímpar.

D) Qualquer quantidade prima ímpar.

E) Qualquer quantidade maior do que 2.

16) Para n inteiro positivo, o *fatorial* de n é $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n$. Não existe n para o qual $n!$ termina em 2015 zeros, mas existe n para o qual $n!$ termina em 2016 zeros. O menor valor de n para o qual isso ocorre é:

A) 8064 B) 8065 C) 8070 D) 8075 E) 8080

17) Em cada ponto do plano cartesiano com ambas as coordenadas inteiras, construímos círculos de raio r. O menor valor de r para o qual qualquer circunferência de raio 1 (com centro de coordenadas reais quaisquer) corte algum dos círculos de raio r é:

A) $\frac{\sqrt{5}}{2} - 1$ B) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D) $\frac{1}{2}$ C) $\sqrt{2} - 1$

18) A função *piso*, $\lfloor x \rfloor$, indica o maior inteiro menor ou igual a x. Por exemplo, $\lfloor 3,45 \rfloor = 3$ e $\lfloor 41 \rfloor = 41$. Considere a função f, definida nos inteiros não negativos, tal que $f(0) = 0$ e $f(n) = f\left(\left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor\right) + n - 10\left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor$. Quantos algarismos tem o menor inteiro positivo m tal que $f(m) = 2015$?

A) 201 B) 202 C) 222 D) 223 E) 224

19) Sejam A e B dois conjuntos disjuntos tais que $n(A) = 5$ e $n(B) = 7$, em que $n(X)$ é a quantidade de elementos do conjunto X. Quantos subconjuntos não vazios C de $A \cup B$ são tais que $n(A \cap C) = n(B \cap C)$?

A) 790 B) 791 C) 792 D) 793 E) 794

20) Existem quantos múltiplos de 99 com quatro dígitos distintos? Lembre-se de que números com quatro algarismos não podem começar com zero à esquerda; em particular, 0123 = 123 tem três algarismos.

A) 18 B) 27 C) 45 D) 72 E) 90

21) O polinômio não constante $P(x)$ tem coeficientes inteiros e é tal que $P(0) = 2015$. No máximo quantas raízes inteiras distintas tem $P(x)$?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

22) Dados cinco pontos no plano, sem três deles colineares, no mínimo quantos dos ângulos determinados por três desses cinco pontos são obtusos (ou seja, medem mais do que $90°$)?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

23) No triângulo ABC, $AB = 40$, $AC = 42$ e $BC = 58$. As bissetrizes internas de $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ cortam novamente a circunferência circunscrita de ABC em K, L e M, respectivamente. As retas tangentes à circunferência circunscrita de ABC que passam por K, L e M determinam um triângulo cujo menor lado é:

A) $\dfrac{290}{3}$ B) 58 C) 145 D) $\dfrac{145}{2}$ E) $\dfrac{2900}{17}$

24) Os inteiros positivos x e y são tais que $\dfrac{1}{2015} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$. Qual é o menor valor possível para $x + y$?

A) 2015 B) 2016 C) 3264 D) 4836 E) 9672

25) Sabendo que $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots = \dfrac{\pi^2}{6}$, então

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{1^2 2^2} + \frac{1}{2^2 3^2} + \frac{1}{3^2 4^2} + \ldots$$

é igual a:

A) $\dfrac{\pi^2}{6} - 1$ B) $\dfrac{\pi^2}{6}\left(\dfrac{\pi^2}{6} - 1\right)$ C) $\dfrac{\pi^2}{3} - 3$ D) $\dfrac{\pi^2}{3} + 1$ E) $\dfrac{\pi^4}{9} - 2$

Primeira Fase – Soluções

Gabarito

1) B	6) A	11) B	16) D	21) C
2) B	7) C	12) C	17) B	22) C
3) D	8) E	13) A	18) E	23) A
4) C	9) B	14) B	19) B	24) C
5) E	10) D	15) A	20) D	25) C

1) **(B)** Veja a solução da questão 5 da prova do Nível 1, página 6.

2) **(B)** Veja a solução da questão 14 da prova do Nível 1, página 9.

3) **(D)** Veja a solução da questão 16 da prova do Nível 2, página 44.

4) **(C)** Veja a solução da questão 8 da prova do Nível 2, página 42.

5) **(E)** Veja a solução da questão 10 da prova do Nível 2, página 43.

6) **(A)** Veja a solução da questão 17 da prova do Nível 2, página 45.

7) **(C)** Veja a solução da questão 24 da prova do Nível 2, página 47.

8) **(E)** Note que se $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{n}}{m}$, então $(mx-1)^2 = (\sqrt{n})^2$, e

$$m^2x^2 - 2mx - (n-1) = 0.$$

Assim, x é impadrático se m^2, $2m$ e $n-1$ forem ímpares, ou se forem tais que a equação pode ser reduzida para coeficientes ímpares.

Se n for par, então $n-1$ é ímpar e, como $2m$ é par, a equação não poderá ser simplificada. Logo n é ímpar.

Analogamente, m tem que ser par. Com isso, m^2 tem que ser múltiplo de 4, assim como $n-1$. Isso descarta as quatro primeiras alternativas, restando apenas a letra (E). De fato, temos que $\dfrac{1-\sqrt{13}}{6}$ é raiz da equação $3x^2 - x - 1 = 0$.

9) **(B)** Veja a solução da questão 20 da prova do Nível 2, página 46.

10) **(D)** Veja a solução da questão 21 da prova do Nível 2, página 46.

11) **(B)** Veja a solução da questão 22 da prova do Nível 2, página 47.

12) **(C)** Veja a solução da questão 18 da prova do Nível 2, página 45.

13) **(A)** Observe que, a cada momento, a soma dos números escritos na tela é igual ao quadrado da soma dos números escritos no momento anterior, pois se tínhamos a e b na tela em um dado momento, no segundo seguinte, teremos a^2+b^2 e $2ab$. A soma inicial é $a+b$ e a soma final é $a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$, o que mostra o resultado.

Além disso, se em um momento temos dois números consecutivos na tela, no momento seguinte ainda teremos dois números consecutivos, pois se tínhamos k e $k+1$ em um dado momento, em seguida teremos $k^2+(k+1)^2 = 2k^2+2k+1$ e $2k(k+1)=2k^2+2k$, o que mostra o resultado.

Voltando ao problema, temos no começo dois números consecutivos (1 e 2), cuja soma é 3. Desta forma, após n segundos, a soma dos números escritos na tela será 3^{2^n}. Como temos dois números consecutivos, tais números devem ser $\dfrac{3^{2^n}-1}{2}$ e $\dfrac{3^{2^n}+1}{2}$, sendo este último o maior deles.

Para que um dos números escritos na tela seja maior que 1050, devemos ter $\dfrac{3^{2^n}+1}{2} > 10^{50}$.

Se $n=6$, temos que $3^{2^6}=9^{32}<10^{32} \implies \dfrac{3^{2^6}+1}{2}<3^{2^6}<10^{32}$.

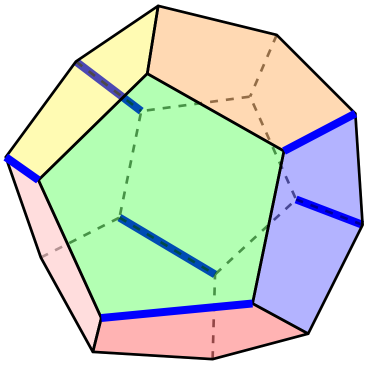
Por outro lado, $3^7=2187>10^3$. Elevando a 17 ambos os lados, obtemos $3^{119}>10^{51}$. Como $3^9=19683>10^4$, $3^{128}>10^{55}$. Assim, $\dfrac{3^{2^7}+1}{2}=\dfrac{3^{128}+1}{2}>\dfrac{10^{55}+1}{2}>10^{50}$.

Assim, um dos números será maior do que a quantidade de átomos do planeta Terra após 7 segundos.

14) **(B)** Provaremos que a maior quantidade de elementos de S é 6.

Se escolhermos 7 arestas, como cada aresta pertence a duas faces, teríamos uma lista de 14 faces contendo estas arestas. Como há 12 faces no dodecaedro, pelo Princípio da Casa dos Pombos, necessariamente há uma face que contém duas arestas, ou seja, há duas arestas que não são reversas. Com isso, S deve ter no máximo 6 elementos.

O exemplo a seguir mostra como escolher 6 arestas do dodecaedro, duas a duas reversas.



15) **(A)** Inicialmente, veja que se A é parfeito e não possui 0 como elemento, então $A \cup \{0\}$ também é. Por outro lado, se A é parfeito e possui 0 como elemento, então $A \setminus \{0\}$ também é. Desta forma, podemos supor que 0 não é elemento de A. Provaremos, então, que um conjunto parfeito que não possua o elemento 0 tem no máximo 3 elementos.

Se A parfeito possui dois elementos de módulo menor que 1, sejam a o elemento de menor módulo e b outro elemento de módulo menor que 1. Então $|ab| < |a|$ e como ab deve pertencer a A, temos uma contradição, pois a era o elemento de A com menor módulo. Da mesma forma, A não pode possuir dois elementos de módulo maior que 1. Assim, se A possui pelo menos 4 elementos, deve possuir, na verdade, exatamente 4 elementos (caso contrário teríamos dois elementos com módulo maior que 1 ou dois com módulo menor que 1) e deve ser da forma $A = \{1, -1, a, b\}$, com $|a| > 1$ e $|b| < 1$.

Com isso, veja que $-a$ deve pertencer ao conjunto e a única possibilidade é que $-a = b$, o que é uma contradição, pois a e b possuem módulos distintos.

Resta, então, exibir conjuntos parfeitos com 3 e 4 elementos: $\left\{1, 2, \frac{1}{2}\right\}$ e $\left\{0, 1, 2, \frac{1}{2}\right\}$.

16) **(D)** Como há mais fatores 2 do que fatores 5 em $n!$, deve haver exatamente 2016 fatores 5 em $n!$ para que $n!$ termine em 2016 zeros. O número N de fatores 5 em $n!$ é dado pela fórmula de de Polignac:

$$N = \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^3} \right\rfloor + \dots$$

Temos $N = 2016$. Como $\lfloor x \rfloor \le x$, segue que

$$N = 2016 \le \frac{n}{5} + \frac{n}{5^2} + \frac{n}{5^3} + \cdots \iff 2016 \le \frac{n/5}{1 - 1/5} = \frac{n}{4} \iff n \ge 8064$$

Para $n = 8064$, temos $\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^5} \right\rfloor = 2012$ (paramos no quinto termo pois $5^6 > n$, logo os outros termos serão nulos). Veja agora que a soma aumenta uma unidade, quando n é múltiplo de 5, mas não de 25, e aumenta duas unidades quando n é múltiplo de 25, mas não de 125.

Assim, para $n = 8065$, a soma valerá 2013. Para $n = 8070$, a soma valerá 2014. Por outro lado, como 8075 é múltiplo de 25, a soma saltará de 2014 para 2016. Com isso, o menor valor de n para o qual $n!$ termina em 2016 zeros é 8075.

Comentários:

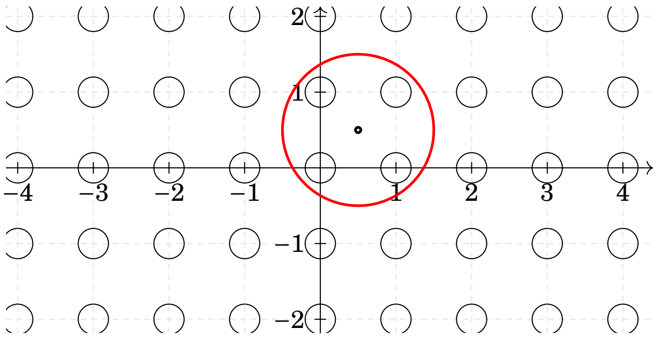
i) A fórmula usada acima,

$$N = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots,$$

é conhecida como *fórmula de de Polignac* ou *fórmula de Legendre* e dá o número de vezes que um fator primo p aparece no fatorial de n. *Sendo $n!$ o produto dos n primeiros inteiros positivos e p um primo, então o expoente de p na fatoração em primos de $n!$ é $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots$, onde $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro que é menor ou igual a x.*

ii) Para descobrir a alternativa, você pode notar que a informação *"Não existe n para o qual $n!$ termina em 2015 zeros."* implica que n é múltiplo de 25, pois 2015 tem que ser pulado. A única alternativa com um múltiplo de 25 é a D.

17) **(B)** Provaremos que o menor valor de r é $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. Para isso, há duas partes a serem feitas:



PARTE 1: Se $r < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, o círculo de centro $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e raio 1 não corta nenhum dos círculos centrados nos pontos de coordenadas inteiras e raio r.

Prova: Suponha por absurdo que existe (m,n) com coordenadas inteiras tal que o círculo de centro (m,n) e raio r corta o círculo de centro e raio 1. Assim,

$$1 - r \leq \sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(n - \frac{1}{2}\right)^2} \leq 1 + r$$

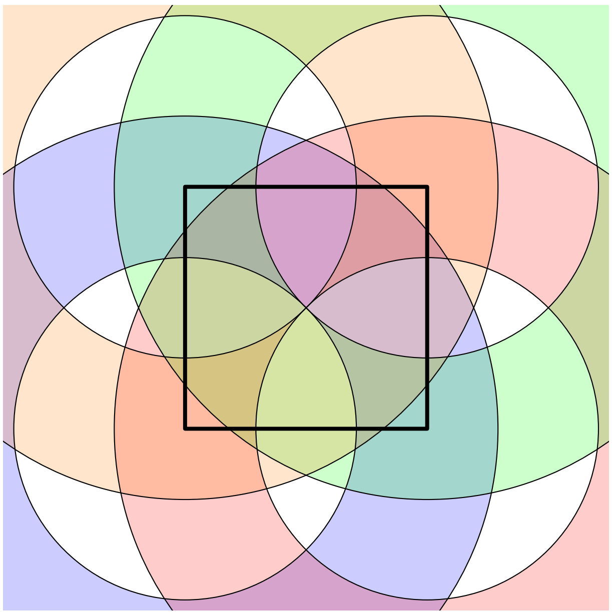
Como $r < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \iff 1 - r > \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $1 + r < 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(n - \frac{1}{2}\right)^2} < 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{1}$$

Como m e n são inteiros, $\left(m - \frac{1}{2}\right)^2, \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \in \left\{\frac{1}{4}, \frac{9}{4}, \frac{25}{4}, \dots\right\}$. Os dois menores valores possíveis de $\sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(n - \frac{1}{2}\right)^2}$ são, portanto, $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{5}{2}} > 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. Desta forma, nenhum dos valores possíveis de $\sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(n - \frac{1}{2}\right)^2}$ é maior que $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e menor que $2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, o que contradiz a inequação (1).

PARTE 2: Se $r = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, então toda circunferência de raio 1 corta alguma das circunferências de raio r.

Prova: Seja (x, y) um ponto qualquer com coordenadas reais. Sem perda de generalidade, podemos supor, por meio de uma translação, que $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$. Para que a circunferência de centro (x, y) e raio 1 corte alguma das circunferências de raio $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ centradas nos vértices do quadrado unitário, a distância de (x, y) até um dos vértices deve estar entre $1-r=\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $1+r=2-\frac{\sqrt{2}}{2}$, ou seja, (x, y) deve estar dentro de um anel centrado em um dos vértices do quadrado unitário com raios $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $2-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Consideremos a seguinte figura:



Observemos que cada uma das regiões dentro do quadrado é coberta por um ou mais anéis coloridos. Isto mostra que os anéis cobrem todo o quadrado, como queríamos.

18) **(E)** Suponhamos que n se escreve na notação base 10 como $n=(a_1 \dots a_k)_{10}$, de modo que

$$\left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor = (a_1 \dots a_{k-1})_{10} \Longrightarrow 10\left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor = (a_1 \dots a_{k-1}0)_10.$$

Portanto

$$n-10\left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor = a_k,$$

isto é, o algarismo das unidades de n. Assim,

$$\begin{aligned} f(n) = f((a_1 \dots a_k)_{10}) &= f((a_1 \dots a_{k-1})) + a_k \\ &\vdots \\ &= a_1 + a_2 \cdots + a_k. \end{aligned}$$

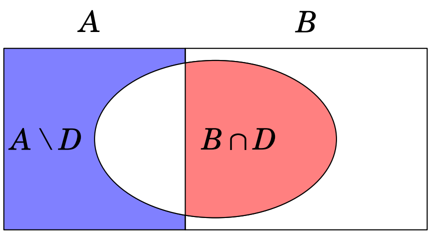
Com isto, o número m buscado é o menor número cuja soma dos algarismos é 2015. Como $2015 = 9 \times 223 + 8$, $m = 8\underbrace{99\dots99}_{223 \text{ noves}}$, que possui 224 algarismos.

19) **(B)** Seja $n(A \cap C) = n(B \cap C) = k$, $1 \le k \le 5$. Há $\binom{5}{k}$ maneiras de escolher os elementos de C provenientes de A e $\binom{7}{k}$ maneiras de escolher os elementos de C provenientes de B. Desta forma, há $\binom{5}{k}\binom{7}{k}$ maneiras de formar o conjunto C.

Queremos calcular, então,

$$\sum_{k=1}^{5} \binom{5}{k}\binom{7}{k} = 35 + 210 + 350 + 175 + 21 = 791.$$

Solução alternativa: seja $D \subset A \cup B$ com $n(D) = 5$ e $C = (\underbrace{D \cap B}_{\subset B}) \cup (\underbrace{A \setminus D}_{\subset A})$. Perceba que C satisfaz a propriedade desejada.



Assim, C fica determinada pela escolha de D, e há $\binom{12}{5}$ maneiras de fazer isso. O único caso em que tal escolha falha é quando $C \subset A$, pois aí $B \cap C = \emptyset$, portanto a resposta é $\binom{12}{5} - 1 = 791$.

20) **(D)** Seja $n < 9999$ um múltiplo de 99 com 4 algarismos. Como, $\dfrac{n}{99} < \dfrac{9999}{99} = 101$, temos $n = 99((ab)_{10} + 1)$, onde $(ab)_{10}$ é a representação decimal de um número de

dois algarismos. Assim,

$$\begin{aligned} n &= 99((ab)_{10}+1) \\ &= (100-1)(10a+b+1) \\ &= 1000a+100b+10(9-a)+(9-b) \\ &= (abcd)_{10}, \text{ onde } c = 9-a \text{ e } d = 9-b. \end{aligned}$$

As possibilidades para (a,c) são (1,8), (2,7), (3,6), (4,5), (5,4), (6,3), (7,2), (8,1), (9,0).

As possibilidades para (b,d) são (0,9), (1,8), (2,7), (3,6), (4,5), (5,4), (6,3), (7,2), (8,1), (9,0).

Há 9 possibilidades para (a,c) e uma vez escolhido (a,c), eliminamos dois pares (b,d), e restam 8 possibilidades, o que nos dá um total de $9 \cdot 8 = 72$ números.

21) **(C)** Sejam $r_1, r_2, \ldots, r_k$ as raízes inteiras distintas de $P(x)$. Podemos escrever, então, $P(x) = (x-r_1)^{a_1}(x-r_2)^{a_2}\cdots(x-r_k)^{a_k}Q(x)$, em que $Q(x)$ possui coeficientes inteiros. Queremos assim determinar o maior valor possível de k para o qual $P(0) = 2015$.

Para que $P(0) = 2015$, devemos ter $r_1^{a_1}r_2^{a_2}\cdots r_k^{a_k}Q(0) = \pm 2015$. Aplicando módulo em ambos os lados, obtemos $|r_1^{a_1}||r_2^{a_2}|\cdots|r_k^{a_k}||Q(0)| = 2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$.

Assim, os módulos de todas as raízes são divisores positivos de 2015. Como 2015 tem três fatores primos (todos com expoente 1), e, considerando os números 1 e -1, devemos ter $k \le 5$.

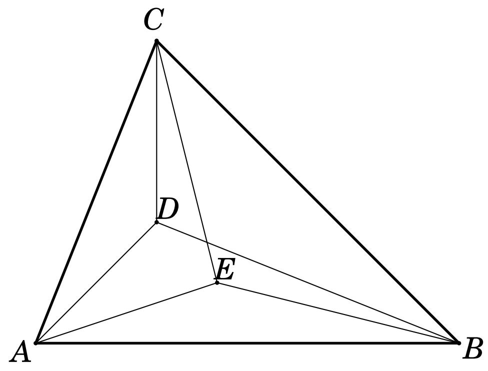
Por outro lado, o polinômio $P(x) = (x-1)(x+1)(x-5)(x-13)(x-31)$ possui 5 raízes inteiras distintas, possui coeficientes inteiros e é tal que $P(0) = 2015$.

Logo $P(x)$ possui no máximo 5 raízes inteiras.

22) **(C)** Vamos provar inicialmente que dados 5 pontos, sem três colineares, há dois triângulos obtusângulos, com vértices nesses pontos. Para isso, temos três casos a considerar:

1) *O fecho convexo é um triângulo*

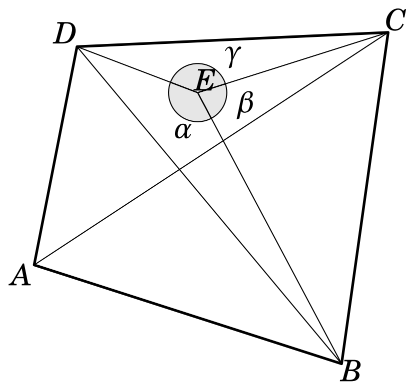
   Aqui, há um triângulo e dois pontos em seu interior. Um desses pontos necessariamente enxerga um dos lados do triângulo com um ângulo pelo menos igual a 120°.



Assim, formamos um triângulo obtusângulo. Como o mesmo argumento vale para o outro ponto no interior, temos necessariamente dois ângulos obtusos.

2) *O fecho convexo é um quadrilátero*

Traçando uma das diagonais do quadrilátero, o ponto interior ao fecho convexo está no interior de um dos triângulos determinados. Assim, pelo caso anterior, temos pelo menos um ângulo obtuso. Se o quadrilátero do fecho não é um retângulo, necessariamente deve possuir um ângulo obtuso, o que terminaria o problema.

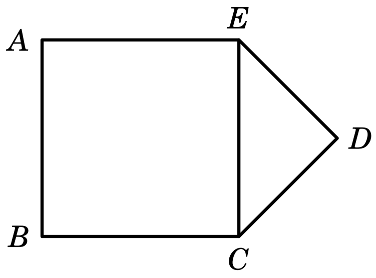


Resta agora considerar o caso em que o quadrilátero do fecho é um retângulo. Neste caso, o ponto interior enxerga as duas diagonais com um ângulo maior que 90° (pois está no interior do arco capaz de 90°) e isso conclui.

3) *O fecho convexo é um pentágono*

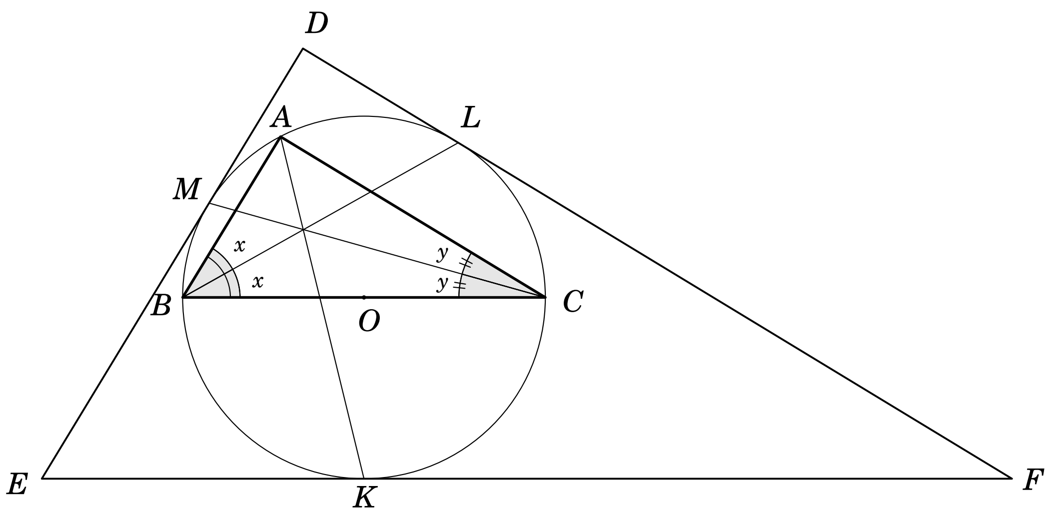
Se 4 dos ângulos internos do pentágono são não obtusos, a soma deles é no máximo 360°. Assim, o quinto ângulo deveria ser pelo menos 180°, o que é um absurdo. Desta forma, há pelo menos 2 ângulos internos obtusos.

Para finalizar, basta um exemplo onde haja exatamente dois ângulos obtusos:



Neste exemplo, $ABCE$ é um quadrado e CED é um triângulo retângulo isósceles em D. Os únicos ângulos obtusos são $D\hat{E}A$ e $D\hat{C}B$.

23) **(A)** Inicialmente, veja que $58^2 = 42^2 + 40^2$, o que mostra que o triângulo ABC é retângulo em A.



Sejam $\angle(A\hat{B}C) = 2x$ e $\angle(A\hat{C}B) = 2y$, de modo que $x + y = 45°$. Sejam D, E e F os vértices do triângulo formado pelas tangentes, como mostra a figura.

Por ângulos na circunferência,

$$\begin{aligned}
\angle(E\hat{D}F) &= \widehat{MKL} - \widehat{MAL}2 \\
&= \frac{180^\circ + 2x + 2y - 2x - 2y}{2} \\
&= 90^\circ \\
\angle(D\hat{E}F) &= \frac{\widehat{MCK} - \widehat{MBK}}{2} \\
&= \frac{2y + 4x + 90^\circ - 2y - 90^\circ}{2} && = 2x
\end{aligned}$$

Desta forma, os triângulos DEF e ABC são semelhantes pois possuem ângulos iguais.

A circunferência inscrita no triângulo DEF coincide com a circunferência circunscrita no triângulo ABC. Assim, o raio da circunferência inscrita em DEF é $\frac{58}{2} = 29$. Por outro lado, em um triângulo retângulo, o raio da circunferência inscrita é dado por $p - a$, onde p é o semiperímetro e a é a hipotenusa. Com isso, o raio da circunferência inscrita no triângulo ABC é $\frac{40+42+58}{2} - 58 = 12$.

Isto nos dá a razão de semelhança entre os dois triângulos, que é $\frac{12}{29}$.

O menor lado do triângulo DEF é DE (homólogo a AB) e este pode ser calculado através da semelhança:

$$\frac{DE}{AB} = \frac{29}{12} \iff DE = \frac{40 \cdot 29}{12} = \frac{290}{3}.$$

24) **(C)** Temos que

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2015} \iff 2015y - 2015x = xy \iff (2015 - x)(y + 2015) = 2015^2.$$

Sejam $a = 2015 - x$ e $b = y + 2015$. Como x e y são inteiros positivos, temos que $1 \le a \le 2014$ e $b \ge 2016$. Veja ainda que $b - a = x + y$. Queremos, então, minimizar $b - a$, sabendo que $ab = 2015^2$. Para isso, tomaremos b como sendo o menor divisor de 2015^2 maior que 2015. Assim, tomamos $b = 4225$ e $a = 961$. Neste caso, temos $b - a = 3264$, que é o valor mínimo pedido.

25) **(C)** Notando que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, temos

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)^2 = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+1)^2} - 2\cdot \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Pelo enunciado,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ e } \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1.$$

Por fim,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Logo a soma pedida é $\dfrac{\pi^2}{6} + \dfrac{\pi^2}{6} - 1 - 2 = \dfrac{\pi^2}{3} - 3.$

Segunda Fase

PARTE A

A1) O professor Piraldo passou para Esmeralda uma equação da forma $ax = b$, sendo a e b reais. Esmeralda se enganou e resolveu a equação $bx = a$, obtendo uma solução que é igual à correta menos 60. Se a solução correta é da forma $m + \sqrt{n}$ com m e n inteiros, qual é o valor de $m + n$?

A2) Duas circunferências C_1 e C_2 se intersectam nos pontos A e B. A tangente a C_1 por A corta C_2 novamente no ponto P e a tangente a C_2 por B corta C_1 novamente no ponto Q. Sabendo que $PB = 640$ e $QB = 1000$, determine o comprimento do segmento AB.

A3) Três pontos A, B e C são marcados no bordo de um círculo de modo que $m(B\hat{A}C) = 60°$, $m(A\hat{B}C) = 80°$ e $m(A\hat{C}B) = 40°$. Escolhemos ao acaso um ponto X no interior do círculo. A probabilidade de que, entre os pontos A, B e C, o mais distante de X seja B é $\dfrac{p}{q}$, em que p e q são primos entre si. Quanto vale $p \cdot q$?

A4) Um subconjunto de 5 elementos do conjunto $\{1,2,\ldots,20\}$ é dito *largo* se ao colocar seus elementos em ordem crescente tivermos a propriedade de que a diferença do segundo menos o primeiro é maior que 1, do terceiro para o segundo é maior que 2, do quarto para o terceiro é maior que 3 e do quinto para o quarto é maior que 4. Quantos subconjuntos largos existem?

A5) Sejam f e g funções dos inteiros não negativos nos inteiros não negativos tais que $f(0) = g(0) = 0$, $f(2x+1) = g(x)$, $g(2x) = f(x)$ e $f(2x) = g(2x+1) = x$ para todo x inteiro não negativo. Quantos valores de n tais que $0 \le n \le 2015$ satisfazem $f(n) = 0$?

A6) Os reais a, b e c satisfazem as equações

$$\frac{1}{ab} = b+2c, \quad \frac{1}{bc} = 2c+3a, \quad \frac{1}{ca} = 3a+b.$$

Temos $(a+b+c)^3 = \dfrac{p}{q}$, onde p e q são inteiros primos entre si e $q > 0$. Calcule $p+q$.

PARTE B

B1) Considere um tabuleiro 2015×37, pintado como um tabuleiro de xadrez. Cada linha e coluna tem um botão que inverte a cor de cada casinha da linha ou coluna correspondente, num total de $2015 + 37 = 2052$ botões. Quantas colorações diferentes do tabuleiro podem ser obtidas?

B2) Seja $ABCD$ um paralelogramo com $AB = 8$ e $BC = 4$. O círculo Γ passa por A, C e pelo ponto médio M de BC, e corta o lado CD no ponto $P \neq C$. Sabendo que AD é tangente a Γ, calcule a medida do segmento.

B3) Qual é o menor inteiro $a > 1$ para o qual existe inteiro positivo n tal que $a^{2^n} - 1$ é múltiplo de 2015?

Segunda Fase – Soluções

Parte A

Problema	1	2	3	4	5	6
Resposta	0931	0800	0090	0252	0012	0141

A1) Seja r a solução correta de $ax = b$. A solução de $bx = a$ é

$$x = \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{1}{r}$$

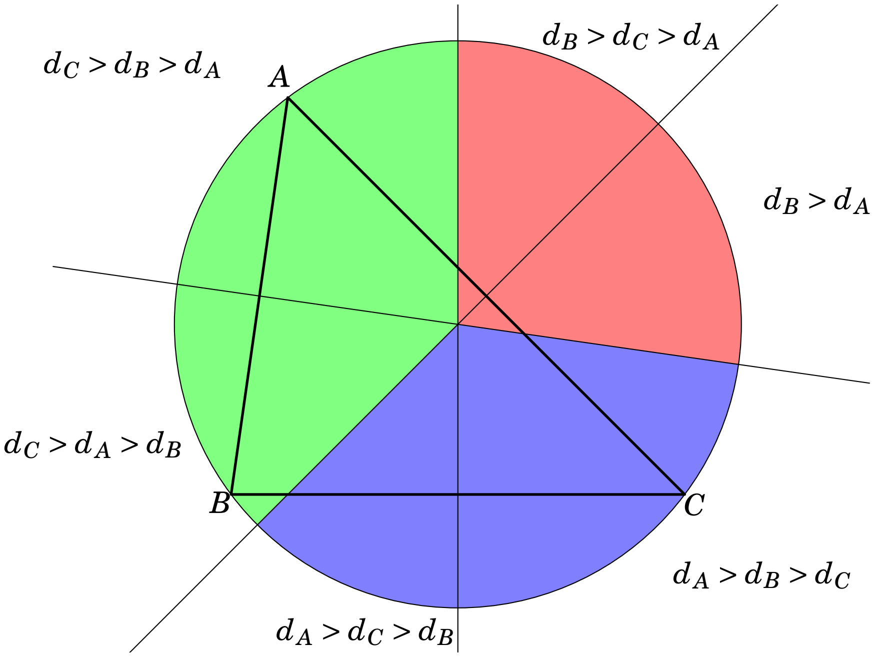
Logo

$$\frac{1}{r} = r - 60 \iff r^2 - 60r - 1 = 0 \iff r = 30 \pm \sqrt{901}.$$

Como r é da forma $m + \sqrt{n}$, com m e n inteiros, temos $m = 30$ e $n = 901$. Logo $m + n = 931$.

A2) Ver questão A6 nível 2 segunda fase, página 54.

A3) Dados dois pontos Z e Y sobre o plano, considere a mediatriz de ZY, que é o conjunto dos pontos que estão à mesma distância de Z e de Y. A mediatriz divide o plano em duas regiões: uma, que contém Y, são os pontos que estão mais distantes de Z do que de Y, e a outra, que contém Z, consiste nos pontos mais distantes de Y do que de Z.
Usando essa ideia, podemos construir a seguinte figura, que mostra a ordem das distâncias d_A, d_B e d_C do ponto para cada vértice.



Com isso, a probabilidade pedida corresponde à área vermelha, que é proporcional ao ângulo obtuso entre as mediatrizes de BC e AB, que por sua vez é igual ao suplementar do ângulo $A\hat{B}C$. Logo a probabilidade é $\dfrac{180^\circ - 80^\circ}{360^\circ} = \dfrac{5}{18}$, e, então, $p = 5$ e $q = 18$, portanto $p \cdot q = 90$.

A4) Sejam $a < b < c < d < e$ os elementos de um conjunto largo, isto é, $b > a+1$, $c > b+2$, $d > c+3$ e $e > d+4$, e logo $1 \le a < b-1 < c-3 < d-6 < e-10 \le 10$.

Desta forma, $\{a, b-1, c-3, d-6, e-10\}$ é um subconjunto de $\{1,2,\ldots,10\}$. Reciprocamente, se $\{x,y,z,w,t\}$ é um subconjunto de $\{1,2,\ldots,10\}$ com $x < y < z < w < t$, então $\{x, y+1, z+3, w+6, t+10\}$ é um conjunto largo, pois $y+1-x > 1$, $z+3-(y+1) > 2$, $w+6-(z+3) > 3$ e $t+10-(w+6) > 4$.

Com isso, a quantidade de subconjuntos largos é igual à quantidade de subconjuntos de 5 elementos de $\{1,2,\ldots,10\}$, que é $\binom{10}{5} = 252$.

A5) Note que se $x > 0$ então $f(2x) = x \neq 0$, ou seja, f não tem raízes pares além de 0. Além disso, $f(4x+1) = g(2x) = f(x)$, e $f(4x+3) = g(2x+1) = x \neq 0$. Assim a única raiz na forma $4x+3$ é 3.

Falta encontrar as raízes da forma $4x+1$, o que acontece se, e somente se, x é raiz. Com isso, podemos reduzir todas as raízes para algum número menor do que 4. Temos $f(0)=0$, $f(1)=f(0)=0$, $f(2)=1$ e $f(3)=0$. Com isso, as raízes são obtidas iterando as sequências a_n e b_n definidas por $a_0=0$ e $a_n=4a_{n-1}+1$ e $b_0=3$ e $b_n=4b_{n-1}+1$. A seguinte tabela nos dá as raízes até 2015.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
a_n	0	1	5	21	85	341	1365	>2015
b_n	3	13	53	213	853	>2015		

Logo temos $7+5=12$ raízes entre 0 e 2015.

Observação: pode-se provar que as raízes são da forma $\dfrac{4^k-1}{3}$ ou $\dfrac{10\times 4^k-1}{3}$, onde k é inteiro não negativo.

A6) Dividindo a primeira equação por c, a segunda por a e a terceira por b, obtemos

$$\frac{1}{abc}=\frac{b}{c}+2,\qquad \frac{1}{abc}=2\cdot\frac{c}{a}+3\ ,\quad \frac{1}{abc}=3\cdot\frac{a}{b}+1.$$

Seja $P=\dfrac{1}{abc}$, e então

$$\frac{b}{c}=P-2,\qquad \frac{c}{a}=\frac{P-3}{2},\qquad \frac{a}{b}=\frac{P-1}{3}.$$

Multiplicando as três equações, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}=\frac{(P-2)(P-3)(P-1)}{6} &\iff 6=P^3-6P^2+11P-6\\ &\iff P^3-6P^2+11P-12=0\\ &\iff (P-4)(P^2-2P+3)=0\\ &\iff P=4 \text{ ou } P^2-2P+3=0.\end{aligned}$$

Note que o discriminante da equação quadrática é $\Delta=(-2)^2-4\cdot1\cdot3=-8<0$, logo ela não possui soluções reais. Assim, como a, b e c são reais e $P=\frac{1}{abc}$, apenas consideramos o caso $P=4$. Com isso, $abc=\frac{1}{4}$, $\frac{b}{c}=2$, $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$ e $\frac{a}{b}=1$, ou seja,

$a = b = 2c$. Pode-se verificar que, neste caso, a equação é satisfeita. Com isso, $2c \cdot 2c \cdot c = \frac{1}{4} \iff c = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$ e $a = b = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Logo

$$(a+b+c)^3 = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\right)^3 = \frac{125}{16}.$$

Assim, a soma é $125 + 16 = 141$.

Parte B

B1) Primeiro, note que o que determina a cor final da casinha é a paridade da soma da quantidade de vezes que os botões da sua linha ou da sua coluna são apertados. Com isso, concluímos que

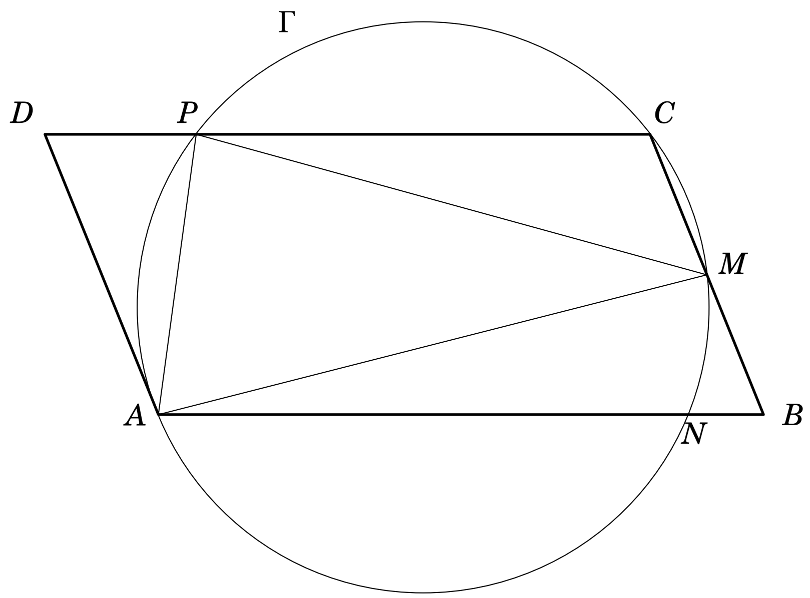
- apertar duas vezes o mesmo botão é o mesmo que não apertar o botão;
- a ordem em que os botões são apertados não importa.

Com isso, podemos escolher apertar ou não cada botão, dando duas escolhas para cada, em um total de 2^{2052} combinações dos botões.
Sejam L e C os conjuntos dos botões apertados nas linhas e nas colunas, respectivamente. Denote por $\bar{L}$ e $\bar{C}$ os conjuntos dos botões **não** apertados nas linhas e nas colunas, respectivamente. Portanto:

- as casas nas interseções das linhas e colunas correspondentes a L e C mudam de estado duas vezes, ou seja, se mantêm iguais;
- as casas nas interseções das linhas e colunas correspondentes a $\bar{L}$ e C mudam de estado uma vez, ou seja, mudam de cor;
- as casas nas interseções das linhas e colunas correspondentes a L e $\bar{C}$ mudam de estado uma vez, ou seja, mudam de cor;
- as casas nas interseções das linhas e colunas correspondentes a $\bar{L}$ e $\bar{C}$ não mudam de cor.

Em resumo: (L,C) e $(\bar{L},\bar{C})$ não mudam, mas $(\bar{L},C)$ e $(L,\bar{C})$ mudam.
Note que se fizermos outra combinação de botões, correspondentes $\bar{L}$ a $\bar{C}$ e (ou seja, apertamos os botões que não apertamos na outra combinação e vice-versa), obtemos a mesma configuração. Reciprocamente, se temos uma configuração, podemos identificar as casas que não mudaram, e com isso, encontrar (L,C) ou $(\bar{L},\bar{C})$. Mas esses pares são correspondentes entre si, então cada tabuleiro é gerado por exatamente dois pares.
Então cada configuração pode ser obtida de duas maneiras, e logo há $\frac{2^{2052}}{2} = 2^{2051}$ configurações.

B2) Usando potência de ponto, obtemos $BM \cdot BC = BN \cdot BA$ e $DA^2 = DP \cdot DC$.



Dividindo as duas equações obtemos $\dfrac{BM}{DA} = \dfrac{BN}{DP}$. Sendo $A\hat{D}P \equiv N\hat{B}M$, os triângulos ADP e MBN são semelhantes pelo caso LAL. Portanto $A\hat{P}D \equiv M\hat{N}B$. Notando que $AB \parallel CD$ e $MN \parallel AP$, concluímos que $ANMP$ é um trapézio, e, por ser um trapézio inscrito, é isósceles. Dessa maneira,

$$MP = AN = AB - BN = AB - \frac{BM \cdot BC}{AB} = 8 - \frac{2 \times 4}{8} = 7.$$

B3) É um fato muito conhecido que $\operatorname{mdc}(a^r - 1, a^s - 1) = a^{\operatorname{mdc}(r,s)} - 1$. De fato, seja $d = \operatorname{mdc}(a^r - 1, a^s - 1)$. Então $a^r \equiv 1 \mod d$ e $a^s \equiv 1 \mod d$, portanto $a^{rx+sy} \equiv 1 \mod d$ para todos x, y inteiros. Pelo Teorema de Bezóut, o menor valor inteiro positivo de $rx + sy$, com x, y inteiros, é $\operatorname{mdc}(r,s)$, logo $a^{\operatorname{mdc}(r,s)} \equiv 1 \mod d$, ou seja, d divide $a^{\operatorname{mdc}(r,s)} - 1$. Segue que $d \le a^{\operatorname{mdc}(r,s)} - 1$. Por outro lado, como $\operatorname{mdc}(r,s)$ divide r e s, $a^r \equiv 1 \mod (a^{\operatorname{mdc}(r,s)} - 1)$ e $a^s \equiv 1 \mod (a^{\operatorname{mdc}(r,s)} - 1)$. Logo $a^{\operatorname{mdc}(r,s)} - 1$ é divisor comum de $a^r - 1$ e $a^s - 1$, e d divide $a^{\operatorname{mdc}(r,s)} - 1$ pela definição de mdc. Portanto $d \ge a^{\operatorname{mdc}(r,s)} - 1$. Concluímos que $d = a^{\operatorname{mdc}(r,s)} - 1$.

Agora, para resolver o problema, observe que $2015 = 5 \times 13 \times 31$, então basta que $a^{2^n} - 1$ seja múltiplo de 5, 13 e 31 para algum inteiro positivo n. O número a não pode ser múltiplo de nenhum desses primos.

- Pelo pequeno Teorema de Fermat, $a^4 \equiv 1 \mod 5$. Assim, a pode ser qualquer inteiro positivo não múltiplo de 5.
- Aplicando o pequeno Teorema de Fermat novamente, temos $a^{12} \equiv 1 \mod 13$. Como $\text{mdc}(2^n, 12) \le 4$,

$$a^{\text{mdc}(2^n,12)} \equiv 1 \mod 13 \implies a^4 \equiv 1 \mod 13 \iff a \equiv (\pm 1 \text{ ou } \pm 5) \mod 13.$$

- Finalmente, $a^{30} \equiv 1 \mod 31$, e portanto

$$a^{\text{mdc}(2^n,30)} \equiv 1 \mod 13 \implies a^2 \equiv 1 \mod 31 \iff a \equiv \pm 1 \mod 13.$$

Com isso, podemos formar a seguinte tabela com os menores valores de $a > 1$ que não são múltiplos de 5 e satisfazem cada sistema de congruências. O valor mínimo

	$a \equiv 1 \mod 13$	$a \equiv 5 \mod 13$	$a \equiv 8 \mod 13$	$a \equiv 10 \mod 13$
$a \equiv 1 \mod 31$	404	187	528	311
$a \equiv 30 \mod 31$	92	278	216	402

de a é, então, 92. Nesse caso, podemos escolher $n = 2$, e $92^4 - 1$ é múltiplo de 2015.

Terceira Fase – Nível 3

1) Seja ABC um triângulo escaleno e acutângulo e N o centro do círculo que passa pelos pés das três alturas do triângulo. Seja D a interseção das retas tangentes ao circuncírculo de ABC e que passam por B e C. Prove que A, D e N são colineares se, e somente se, $\angle BAC = 45°$.

2) Seja $S = \{1,2,3,\ldots,6n\}$, $n > 1$. Encontre o maior valor de k para o qual a seguinte afirmação é verdadeira: *"Todo subconjunto A de S com* $4n$ *elementos tem pelo menos* k *subconjuntos* $\{a,b\}$*, onde* $a < b$ *e* b *é múltiplo de* a*"*.

3) Dado um número natural $n > 1$ e sua fatoração em primos $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, sua *falsa derivada* é definida por

$$f(n) = \alpha_1 p_1^{\alpha_1 - 1} \alpha_2 p_2^{\alpha_2 - 1} \ldots \alpha_k p_k^{\alpha_k - 1}$$

Prove que existem infinitos naturais n tais que $f(n) = f(n–1) + 1$.

4) Seja n um inteiro positivo e sejam $n = d_1 > d_2 > \cdots > d_k = 1$ seus divisores positivos.

   a) Prove que

   $$d_1 - d_2 + d_3 - \cdots + (-1)^{k-1} d_k = n - 1$$

   se, e somente se, n é primo ou $n = 4$.

   b) Determine os três inteiros positivos n para os quais

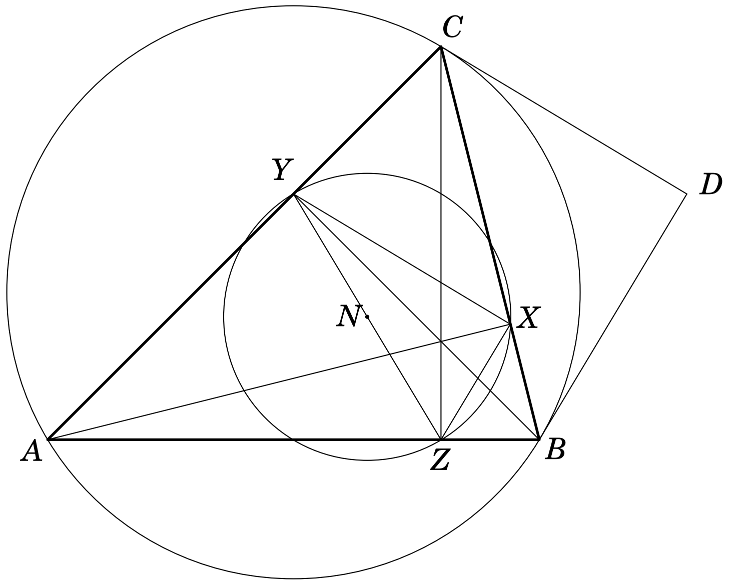
   $$d_1 - d_2 + d_3 - \cdots + (-1)^{k-1} d_k = n - 4.$$

5) É verdade que existem um polinômio $f(x)$ de coeficientes racionais, nem todos inteiros, de grau $n > 0$, um polinômio $g(x)$, com todos os coeficientes inteiros, e um conjunto S com $n + 1$ inteiros tais que $g(t) = f(t)$ para todo $t \in S$?

6) Seja ABC um triângulo escaleno e X, Y e Z pontos sobre as retas BC, CA, AB, respectivamente, tais que $\angle AXB = \angle BYC = \angle CZA$. Os circuncírculos de BXZ e CXY se cortam em $P \neq X$. Prove que P está sobre a circunferência cujo diâmetro tem extremidades no ortocentro H e no baricentro G de ABC.

Terceira Fase – Nível 3 – Soluções

1) Denotemos por X, Y e Z os pés das alturas desde os vértices A, B e C respectivamente.



Suponhamos que o ângulo em A mede 45°. Como os quadriláteros $ACXZ$ e $AYXB$ são cíclicos, temos que

$$\angle ZXB = \angle YXC = \angle BAC = 45^\circ,$$

o que nos dá $\angle ZXY = 90^\circ$, logo o centro do circuncírculo do triângulo XYZ está no ponto médio da hipotenusa YZ. Temos também que $\angle CDB = 90^\circ$, e assim o quadrilátero $BDCZ$ é cíclico, em particular $\angle BZD = \angle BCD = 45^\circ$, portanto AY é paralela a ZD. Analogamente, YD é paralelo a AZ, portanto $AZDY$ é um paralelogramo.

Portanto as diagonais de $AZDY$ se cortam em seus pontos médios, o que implica que A, N e D estão alinhados (e além disso, $AN = ND$).

Suponhamos agora que A, N e D são colineares. Sejam O e H o circuncentro e o ortocentro, respectivamente, de ABC, seja M o ponto médio de BC e seja T o ponto médio de AH.

Observe que MT é um diâmetro da circunferência dos nove pontos de ABC e, portanto, N é ponto médio de MT e OH. Como o triângulo ABC é escaleno, o quadrilátero $MOTH$ é não degenerado e é um paralelogramo, pois suas diagonais se cortam ao meio.

Considerando agora a simetria com relação ao ponto N, temos que a imagem da reta AH é a reta OM. Como A, N e D são colineares e como D está na reta OM, segue que D é a imagem de A através dessa simetria e, portanto, o quadrilátero $AHDO$ é paralelogramo, pois suas diagonais se cortam ao meio. Isso implica que $AH = DO$, o que nos dá $2OM = DO$, donde $OM = MD$. Obtemos assim que $BOCD$ também é paralelogramo, pois suas diagonais se cortam ao meio.

Como esse paralelogramo possui dois lados não adjacentes iguais (OBO e OC) e dois ângulos de $90°$, segue que deve ser um quadrado. Finalmente isso nos dá que $90° = \angle BOC = 2\angle BAC$ e, portanto, $\angle BAC = 45°$.

2) A resposta é $k = n$. Primeiro provaremos o seguinte lema.

Lema: Seja $n \in \mathbb{N}$ e seja S um subconjunto de $\{1,2,\ldots,2n\}$ com $n+1$ elementos. Então S possui dois elementos tal que um divide o outro.

Demonstração: Distribuímos os elementos do conjunto $\{1,2,\cdots,2n\}$ em subconjuntos $S_i = \{2^k(2i-1) : k \geq 0\} \cap S$, com $i = 1,2,\ldots n$ (perceba que, em cada S_i, x divide y se $x < y$). Escolhendo quaisquer $n+1$ elementos de S, pelo menos dois deles pertencem ao mesmo S_i, portanto um divide o outro, como desejado.

Retornando ao problema, considere $A = \{2n+1, 2n+2, \ldots, 6n\}$. Se $x, y \in A$ são números distintos tais que $x \mid y$, como $y/x < 3$ pela construção de A, devemos ter $y/x = 2$. Com isso, fica fácil classificar todos os pares $(x,y) \in A \times A$ tais que $x \mid y$ e $x \neq y$: eles são da forma $(2n+t, 4n+2t)$ para $t = 1,2,\ldots,n$. Portanto $k \leq n$.

Resta mostrar que $k \geq n$. Suponha por absurdo que $k < n$ e sejam (x_1,y_1), (x_2,y_2), $\ldots$, (x_m,y_m), com $m < n$, todos os pares $(x,y) \in A \times A$ tal que $x \mid y$ e $x \neq y$. Agora, remova $x_1, x_2, \cdots, x_m$ de A, criando um novo conjunto B. Em particular, não há pares $(x,y) \in B \times B$ tal que $x \mid y$ e $x \neq y$. Por outro lado, temos $|B| \geq |A| - m \geq 3n+1$, e $B \subset \{1,2,\ldots,6n\}$, o que contradiz o lema. Portanto $k \geq n$, e, então, $k = n$.

3) Observemos que se n é livre de quadrados, então $f(n) = 1$. Em geral, se $\text{mdc}(n,m) = 1$, com n livre de quadrados, temos que $f(nm) = f(m)$. Assim podemos calcular os valores “interessantes” menores que 100 desta função na seguinte tabela

n	4	8	9	16	25	27	32	36	49	64	72	81	100
$f(n)$	4	12	6	32	10	27	80	24	14	192	72	108	40

Nestes primeiros valores não existem dois valores consecutivos para a imagem da função f. De fato, o primeiro valor consecutivo acontece com $f(13^2) = 26 = f(3^3) - 1$. Outro par de valores consecutivos é $f(15^3) = f(3^3) \cdot f(5^3) = 3^4 \cdot 5^2 = 2025 = f(1013^2) - 1$.

Daqui, basta mostrar que existem infinitos inteiros s e t, livres de quadrados, s primo entre si com 3 e t primo entre si com 13 tais que $27s = 169t + 1$, pois nesse caso, fazendo $n = 27s$ temos que

$$f(n) = f(27s) = f(27) = 27 = f(169) + 1 = f(169t) + 1 = f(n-1) + 1.$$

Observemos que o par $(s,t) = (77,482)$ é uma solução da equação $27s = 169t + 1$ com s e t livres de quadrados. Observe ainda que para todo $k \geq 0$, o par $(s_k, t_k) = (77 + 169k, 482 + 27k)$ também satisfaz a equação $27s = 169t + 1$. Provaremos então que existem infinitos naturais k tais que s_k e t_k sejam ambos livres de quadrados.

Para isso, seja C uma constante positiva (a ser determinada). Consideremos todos os $k = P\ell$, onde P é o produto dos quadrados dos primos menores que C e $1 \leq \ell \leq L$. Mostraremos que para todo L suficientemente grande, pelo menos $\frac{L}{2}$ dos valores de ℓ fazem com que s_k e t_k sejam livres de quadrados, o que mostrará a existência de infinitas soluções.

Notemos que, pela escolha de k, tanto $s_k = 77 + 169k$ como $t_k = 482 + 27k$ não são divisíveis por p^2 para todo primo $p < C$ e também é verdade que $\text{mdc}(s_k, 3) = \text{mdc}(t_k, 13) = 1$, desde que $C > 13$.

Por outro lado, para todo primo $p \geq C$ temos que o número de $1 \leq \ell \leq L$ tais que p^2 divide $s_{P\ell}$ ou $t_{P\ell}$ é limitado por $2\left\lceil \frac{L}{p^2} \right\rceil$ e, portanto, o número de $\ell \leq L$ tais que $s_{P\ell}$ ou $t_{P\ell}$ é divisível por um quadrado é limitado por

$$\sum_{C \leq p \leq \sqrt{77+169PL}} 2\left\lceil \frac{L}{p^2} \right\rceil \leq \sum_{C \leq p \leq \sqrt{77+169PL}} 2\left(\frac{L}{p^2} + 1\right) \leq 2L\epsilon + \sqrt{77 + 169PL},$$

onde ϵ é a soma dos quadrados dos inversos dos primos maiores que C. Observe agora que

$$\begin{aligned}\epsilon < \sum_{n\geq C}\frac{1}{n^2} &< \sum_{n\geq C}\frac{1}{n(n-1)}\\ &= \sum_{n\geq C}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\\ &= \frac{1}{C-1}.\end{aligned}$$

Com isso, para $C \geq 9$, temos que $\epsilon < \frac{1}{8}$ e para L suficientemente grande, temos que $\sqrt{77+169PL} < \frac{L}{4}$. Assim temos que pelo menos a metade dos $\ell \leq L$ satisfazem que $s_{P\ell}$ e $t_{P\ell}$ são livres de quadrados, o que conclui o problema.

4) Veja a solução da questão 5 da prova do Nível 2, página 63.

5) A afirmação *não* é verdadeira.

De fato, seja $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$. Usando o algoritmo da divisão, escrevemos $g(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n+1})h(x)+r(x)$, onde $r(x)$ tem grau menor ou igual a n. Então $f(x)-r(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n+1})$ e, como $f-r$ tem grau menor ou igual a n e o lado direito da igualdade tem grau $n+1$ ou é 0, $f-r$ tem que ser 0 e, então, $f = r$, o que não é possível pois r também tem coeficientes inteiros.

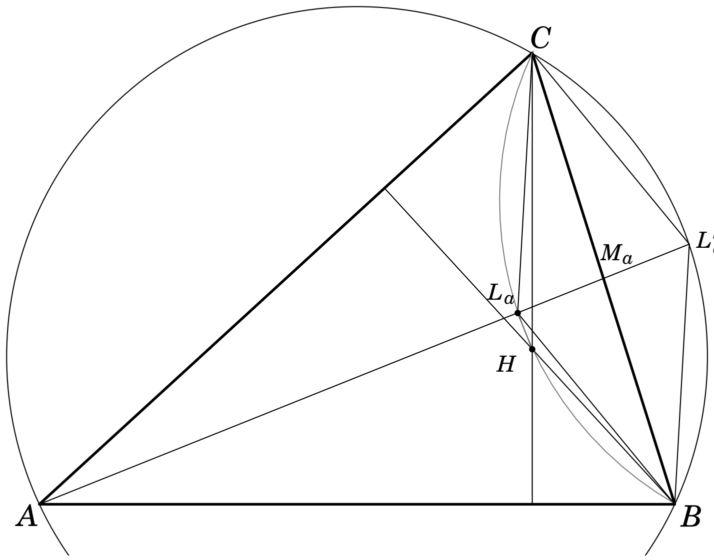
6) Denotemos por L_a o ponto de interseção da circunferência que passa por B, C e H com a mediana AM_a. Afirmamos que o ponto L_a cumpre as seguintes propriedades:

a) O ângulo $\angle HL_aA$ é reto, em particular, L_a está sobre a circunferência com diâmetro HG.

b) L_a está sobre a circunferência que passa pelos pontos A, Y e Z.

Denotemos por L'_a o ponto de interseção do circuncírculo de ABC com a mediana AM_a. Como ABL'_aC é cíclico, segue que $\angle AL'_aC = \angle ABC$ e $\angle AL'_aB = \angle ACB$. Se L''_a é a reflexão de L'_a com relação a M_a, temos que $CL'_aBL''_a$ é um paralelogramo e, assim,

$$\angle CL''_aB = 180^\circ - \angle BAC = \angle CHB = \angle CL_aB.$$



Segue que $L_a = L''_a$. Em particular temos que $\angle CL_aM_a = \angle AL'_aB = \angle ACB$. Por outro lado, CL_aHB é um quadrilátero cíclico, assim

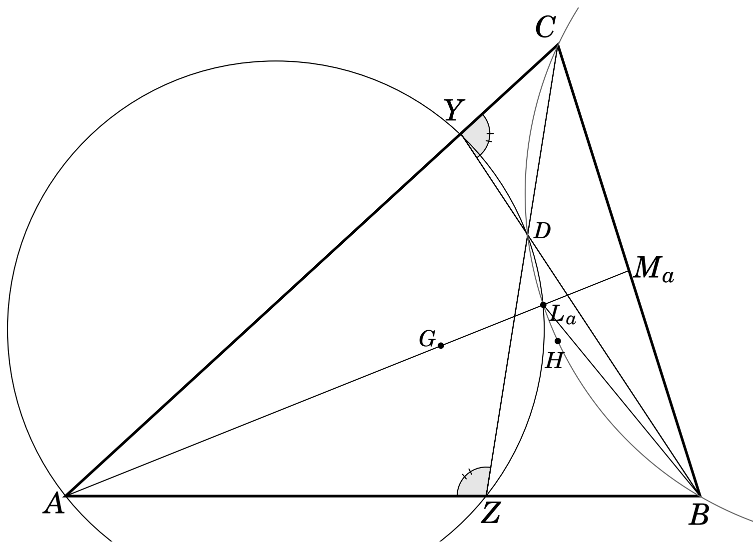
$$\angle CL_aM_a + \angle M_aL_aH = \angle CL_aH = 180^\circ - \angle HBC = 90^\circ + \angle ACB,$$

logo $\angle M_aL_aH$ é reto, o que prova a primeira afirmação.

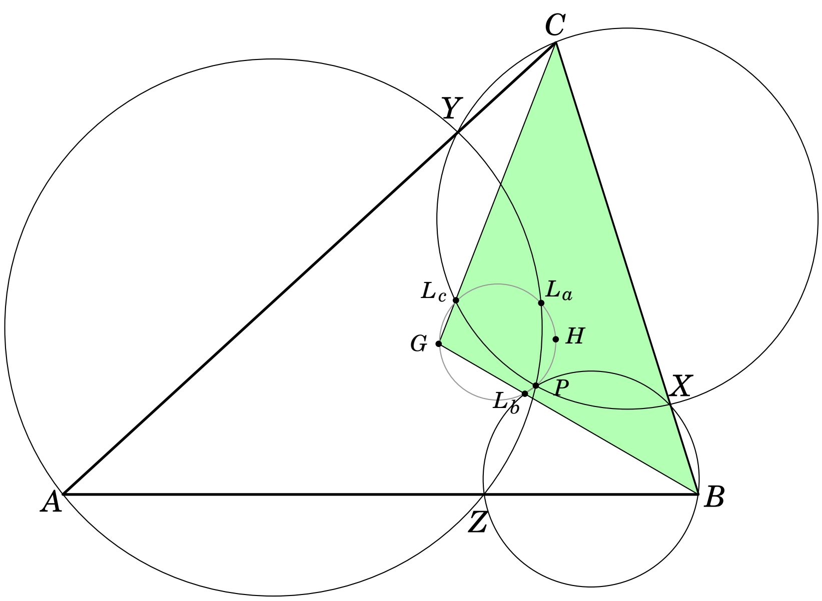
Para provar a segunda afirmação, denotemos por D o ponto de interseção de CZ com YB. Como $\angle AYD + \angle AZD = 180^\circ$, segue que o quadrilátero $AZDY$ é cíclico e do fato que $\angle CDB = \angle YDZ = 180^\circ - \angle BAC$, temos que D está sobre a circunferencia que passa por C, L_a H e B. Por outro lado,

$$\angle M_aAB = \angle BCL'_a = \angle L_aBC = 180^\circ - CDL_a = \angle ZDL_a,$$

portanto AZL_aA é um quadrilátero cíclico, o que prova a afirmativa b).



Finalmente, para resolver o problema, definamos L_b e L_c de forma análoga a L_a. Logo os pontos L_a, L_b, L_c estão sobre a circunferência de diâmetro GH. Considerando o triângulo GBC, como a circunferência que passa por B, X e L_b corta a circunferência que passa por C, X e L_c no ponto P, segue pelo Teorema de Miquel que o ponto P também está na circunferência que passa por G, L_c e L_b. Mas esta última circunferência tem como um de seus diâmetros GH, que é o que queríamos mostrar.



Premiados Nível 3

Medalha de Ouro

Nome	Cidade – Estado	Pontos
Pedro Herique Sacramento de Oliveira	São Paulo – SP	353
Andrey Jhen Shan Chen	Campinas – SP	329
Gabriel Toneatti Vercelli	Osasco – SP	329
João César Campos Vargas	Passa Tempo – MG	314
Daniel Lima Braga	Eusébio – CE	283
George Lucas Diniz Alencar	Fortaleza – CE	270

Medalha de Prata

Nome	Cidade – Estado	Pontos
Mateus Siqueira Thimóteo	Mogi das Cruzes – SP	241
Guilherme Goulart Kowalczuk	Porto Alegre – RS	232
Rafael Filipe dos Santos	Rio de Janeiro – RJ	230
Luiz Henrique Aguiar de Lima Alves	Rio de Janeiro – RJ	218
João Pedro Sedeu Godoi	Rio de Janeiro – RJ	215
Valentino Amadeus Sichinel	Santa Maria – RS	213
Bruno Uchôa Cirne	Natal – RN	196
André Yuji Hisatsuga	São Paulo – SP	190
Vitor Augusto Carneiro Porto	Fortaleza – CE	185
Daniel Quintão de Moraes	Rio de Janeiro – RJ	179

Medalha de Bronze

Nome	Cidade – Estado	Pontos
Bruno Brasil Meinhart	Fortaleza – CE	167
Renan Felipe Bergamaschi de Morais	Bariri – SP	164
Iuri Grangeiro Carvalho	Fortaleza – CE	162
Gabriel Ribeiro Barbosa	Fortaleza – CE	161
Matheus Leite Queiroz Nunes	Recife – PE	160
Bryan Diniz Borck	Porto Alegre – RS	159
Lorenzo Andreaus	Blumenau – SC	159
Tarcisio Soares Teixeira Neto	Fortaleza – CE	156
Carlos Roberto Bastos Lacerda	Rio de Janeiro – RJ	156
Lucas Pereira Galvão de Barros	São Paulo – SP	152
Ana Emília Hernandes Dib	S.J. do Rio Preto	151
Ana Paula Lopes Schuch	Porto Alegre – RS	148
Gabriel Tostes Messias Pereira	Brasília – DF	145
Davi Cavalcanti Sena	Recife – PE	142
Yu Hao Wang Xia	Brasília – DF	142
Daniel de Almeida Souza	Brasília – DF	141
João Gomes de Medeiros Neto	Fortaleza – CE	141
Loïc Dominguez	Fortaleza – CE	140

Menção Honrosa

Nome	Cidade – Estado	Pontos
Julia Perdigão Saltiel	Rio de Janeiro – RJ	134
Mikael Akihitto Hirata Iwamoto	Brasília – DF	134
Mark Helman	Rio de Janeiro – RJ	133
Diemison Vargas de Cerqueira	Belo Horizonte – MG	131
Lucas Hiroshi Hanke Harada	São Paulo – SP	130
Brendon Diniz Borck	Porto Alegre – RS	128
João Luis Reis Freitas	Goiânia – GO	128
Nathan Luiz Bezerra Martins	Fortaleza – CE	126
Gabriel Pereira Crestani	Fortaleza – CE	124
Rafael Seiji Uezu Higa	São Paulo – SP	124
Rogerio Aristida Guimarães Junior	Fortaleza – CE	122
Bruno Visnadi da Luz	Florianópolis – SC	121
Helena Veronique Rios	São Carlos – SP	121
Pedro Henrique Alencar Costa	Fortaleza – CE	121
Joel do Nascimento da Silva	Caucaia – CE	120
Douglas de Araújo Smigly	São Caetano do Sul – SP	117
Bruno Kenzo Ozaki	São Paulo – SP	116
Alicia Fortes Machado	Teresina – PI	114
Pedro Leite Galvão	Rio de Janeiro – RJ	112
Joémerson de Oliveira Maia	João Pessoa – PB	108
Lucas Bastos Germano	Fortaleza – CE	107
Eric Arcanjo Bringel	Fortaleza - CE	106
Fernando Possari da Cunha	São Paulo – SP	106
Geovanna Santos Nobre de Oliveira	Rio de Janeiro – RJ	106
Rodrigo Fontenelle Brilhante	Fortaleza – CE	104
Lucca Morais de Arruda Siaudizionis	Fortaleza – CE	102
Edson Luiz Ferreira Santos	Salvador – BA	101
Igor Mourão Ribeiro	Fortaleza – CE	101
Tafnes Silva Barbosa	Fortaleza – CE	101
Vinicius Francisco Vieira Ferreira	Caucaia – CE	101

37ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Primeira Fase

1) Sejam m e n inteiros positivos, X um conjunto com n elementos e seja $0 \le k \le n$ um inteiro. São escolhidos aleatória e independentemente subconjuntos $X_1, X_2, \ldots, X_m$ de X. Portanto, dado um subconjunto $Y \subset X$ qualquer, a probabilidade de termos, por exemplo, $X_1 = Y$ é igual a $1/2^n$. Calcule a probabilidade de $X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_m$ possuir exatamente k elementos.

2) Seja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots + \sqrt{x + \sqrt{x+1}}}},$$

com dez raízes quadradas. Calcule $f'(0)$.

3) Randonaldo escolhe ao acaso dois números reais b e c do intervalo $[0, \alpha]$ (ou seja, tanto b quanto c têm distribuição uniforme no intervalo $[0, \alpha]$), e resolve a equação $x^2 + bx + c = 0$. A probabilidade de a equação ter soluções reais é 1/2. Qual é o valor de α?

4) Seja N um inteiro positivo dado. Determine todas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ tais que

$$f(m+N) = f(m) \text{ e } f(m)\overline{f(m+n)f(m+p)}f(m+n+p) = 1$$

para quaisquer $m, n, p \in \mathbb{Z}$.

Obs.: Se $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$ é um número complexo, $\overline{z}$ denota seu conjugado, dado por $\overline{z} = a - bi$.

5) Um número natural é *bit-par* se, ao escrevermos esse número em base 2, temos um número par de dígitos (*bits*) iguais a 1. Isto é, se

$$n = \sum_{i=0}^{k} b_i 2^i$$

com $b_i \in \{0,1\}$, então n é bit-par se $\sum_{i=0}^{k} b_i$ é par. Um número natural é *bit-ímpar* se ele não for bit-par. Defina

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é bit-par} \\ 1 & \text{se } n \text{ é bit-ímpar.} \end{cases}$$

Considere a sequência de 0s e 1s

$$s = s_0 s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 \ldots = 011010\ldots$$

Determine todas as sequências formadas por 5 elementos do conjunto $\{0,1\}$ (bits) que são da forma $s_n s_{n+1} s_{n+2} s_{n+3} s_{n+4}$ para algum $n \geq 0$.

6) Sejam C_1 e C_2 círculos situados em um mesmo plano. Seja, ainda, P um ponto desse plano, exterior às regiões limitadas delimitadas por C_1 e C_2. Mostre como construir os pontos Q do plano, a partir dos quais é possível traçar tangentes $\overline{QA_1}$ e $\overline{QB_1}$ a C_1, e $\overline{QA_2}$ e $\overline{QB_2}$ a C_2, tais que $\overline{A_1B_1} \cap \overline{A_2B_2} = \{P\}$.

Primeira Fase – Soluções

1) Cada conjunto X_i pode ser escolhido de 2^n maneiras distintas. Assim, o espaço amostral pode ser tomado com $(2^n)^m = 2^{mn}$ possibilidades de escolhas para os subconjuntos.

   Agora, contemos as escolhas onde $\#(X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_m) = k$, como pedido. Para tanto escolha primeiramente os k elementos da interseção: temos $\binom{n}{k}$ maneiras de fazer isso. Cada um desses K elementos vai aparecer em todos os conjuntos X_i.

   Enfim, onde colocar os outros $n-k$ elementos de X? A princípio, teríamos 2^m escolhas para cada um deles (colocá-lo ou não colocá-lo em cada X_i), mas exatamente uma destas escolhas é proibida – não podemos colocar tal elemento em todos os X_i, pois, nesse caso, a interseção teria mais um elemento. Ou seja, cada um desses $n-k$ elementos tem 2^m-1 possibilidades de alocação.

Assim, temos um total de $(2^m-1)^{n-k}$ possibilidades de alocação para os outros $n-k$ elementos. Juntando tudo, a probabilidade pedida é

$$\Pr(\#(X_1\cap X_2\cap\cdots\cap X_m)=k)=\frac{\binom{n}{k}(2^m-1)^{n-k}}{2^{mn}}=\frac{n!(2^m-1)^{n-k}}{k!(n-k)!2^{mn}}.$$

2) Tome $f_0(x)=1$ e defina $f_{n+1}(x)=\sqrt{x+f_n(x)}$ para $n=0,1,\ldots$ Com esta notação, queremos $f'_{10}(0)$.

Em primeiro lugar, note que $f_0(0)=1$. Como $f_k(0)=1\implies f_{k+1}(0)=\sqrt{0+f_k(0)}=1$, por indução, vemos que $f_n(0)=1$ para $n=0,1,\ldots$

Pela Regra da Cadeia, temos $f'_{n+1}(x)=\frac{1}{2}(x+f_n(x))^{-1/2}(1+f'_n(x))$. Assim,

$$f'_{n+1}(0)=\frac{1}{2}(0+f_n(0))^{-1/2}(1+f'_n(0))=\frac{1}{2}(1+f'_n(0)).$$

Agora, $f'_0(0)=0$. Então $f'_1(0)=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$, $f'_2(0)=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})=\frac{3}{4}$, $f'_3(0)=\frac{1}{2}(1+\frac{3}{4})=\frac{7}{8}\ldots$ Isto sugere que $f'_n(0)=1-\frac{1}{2^n}$. Vamos provar, por indução, esta hipótese.

De fato, $f'_0(0)=1-\frac{1}{2^0}$. Além disso, como

$$f'_k(0)=1-\frac{1}{2^k}\implies f'_{k+1}(0)=\frac{1}{2}(1+f'_k(0))=\frac{1}{2}(1+1-\frac{1}{2^k})=1-\frac{1}{2^{k+1}},$$

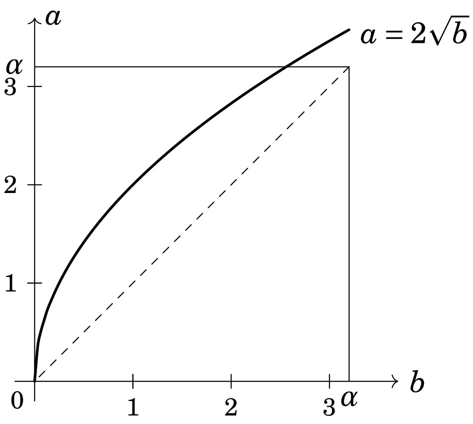
por indução, vemos que $f'_n(0)=1-\frac{1}{2^n}$.

Enfim, a resposta é

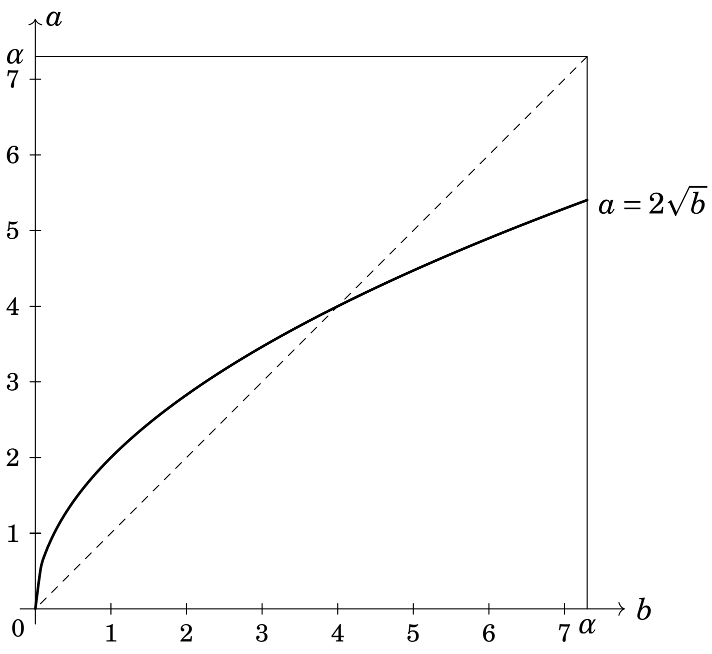
$$f'_{10}=1-\frac{1}{2^{10}}=\frac{1023}{1024}.$$

3) As raízes são reais se, e somente se, $a^2-4b\geq 0$, isto é, $a\geq 2\sqrt{b}$. Então queremos que a área da região $a\geq 2\sqrt{b}$ dentro do quadrado $[0,\alpha]\times[0,\alpha]$ do plano seja metade da área do quadrado, isto é, seja $\alpha^2/2$.

Se a parábola $a=2\sqrt{b}$ intersectar o lado $a=\alpha$ do quadrado, a área acima da parábola é claramente menor que metade da área do quadrado.



Assim o gráfico deve cortar o lado $b = \alpha$ do quadrado, obtendo a seguinte figura,



com a parábola dividindo o quadrado em duas regiões de mesma área.

A área abaixo da curva é dada por $\int_0^\alpha 2\sqrt{b}db = \dfrac{4}{3}\alpha^{3/2}$. Igualando-a com a área do triângulo, temos

$$\frac{4}{3}\alpha^{3/2} = \frac{\alpha^2}{2} \quad \Longrightarrow \alpha = \frac{64}{9}.$$

4) Tomando $n = p = 0$, vem

$$f(m)\overline{f(m)f(m)}f(m) = 1 \Rightarrow |f(m)|^4 = 1 \Rightarrow |f(m)| = 1$$

para todo m inteiro.

Assim, podemos escrever

$$f(m) = e^{i\theta_m} \text{ onde } \theta_m \in \mathbb{R}$$

onde θ_m é determinado a menos de uma constante aditiva múltipla de 2π. A partir daqui, faremos todas as contas em θ modulo 2π. Com esta notação, as condições iniciais são equivalentes a

$$\theta_{m+N} \equiv \theta_m$$
$$\theta_{m+n+p} \equiv \theta_{m+n} + \theta_{m+p} - \theta_m$$

Tomando $n = p = -m$, obtemos

$$\theta_{-m} \equiv 2\theta_0 - \theta_m$$

o que mostra como obter os termos de índice negativo a partir dos positivos.

Agora, tomando $n = p = 1$ obtemos uma recorrência

$$\theta_{m+2} \equiv 2\theta_{m+1} - \theta.$$

Vamos mostrar, por indução, que isto implica em

$$\theta_m \equiv m\theta_1 - (m-1)\theta_0.$$

para $m \in \mathbb{Z}$. A fórmula é trivial para $m = 0$ e $m = 1$. Supondo que ela vale para $m = k$ e $m = k+1$:

$$\theta_{k+2} \equiv 2\theta_{k+1} - \theta_k \equiv 2[(k+1)\theta_1 - k\theta_0] - [k\theta_1 - (k-1)\theta_0] \equiv$$
$$\equiv (2k+2-k)\theta_1 - (2k-k+1)\theta_0 = (k+2)\theta_1 - (k+1)\theta_0$$

o que mostra a fórmula para $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ por indução. Para índices negativos, basta ver que

$$\theta_{-m} \equiv 2\theta_0 - \theta_m \equiv 2\theta_0 - [m\theta_1 - (m-1)\theta_0] \equiv -m\theta_1 - (-m-1)\theta_0$$

confirmando a nossa fórmula.

Enfim, a periodicidade de θ implica em

$$\theta_N \equiv \theta_0 \Rightarrow N\theta_1 - (N-1)\theta_0 \equiv \theta_0 \Rightarrow N\theta_1 \equiv N\theta_0 \Rightarrow \theta_1 \equiv \theta_0 + \frac{2k\pi}{N}$$

para algum k inteiro. Substituindo de volta na fórmula para θ_m, obtemos

$$\theta_m \equiv \theta_0 + \frac{2k\pi m}{N}.$$

Enfim, é fácil verificar que qualquer escolha de θ_0 e k faz com que esta fórmula satisfaça ambas as condições originais. Assim, concluímos que a função f pedida deve ser da forma

$$f(m) = e^{i\theta_0} e^{i2k\pi m/N}$$

ou seja, a sequência $f(m)$ forma um polígono regular de L lados no plano complexo inscrito no círculo de raio 1 (onde L é um divisor de N; o polígono pode ser degenerado, ou estrelado).

5) Escrevamos os primeiros 28 termos da sequência explicitamente:

$$s = 0110/1001/1001/0110//1001/0110/0110\ldots$$

Afirmamos que:

- Se n é par, então $n = (A0)_2$, portanto $n+1 = (A1)_2$ e assim $s_{n+1} = 1 - s_n$, isto é, s_{n+1} é determinado por s_n. De fato, teremos a partir de s_n a sequência 01 ou 10.
- Se n é múltiplo de 4, então $n = (A00)_2$, portanto $n+1 = (A01)_2$, $n+2 = (A10)_2$ e $n+3 = (A11)_2$. Portanto, temos $s_{n+3} = 1 - s_{n+2} = 1 - s_{n+1} = s_n$, isto é, s_{n+1}, s_{n+2} e s_{n+3} são completamente determinados por s_n. De fato, a partir de s_n, a sequência seria 0110 ou 1001.

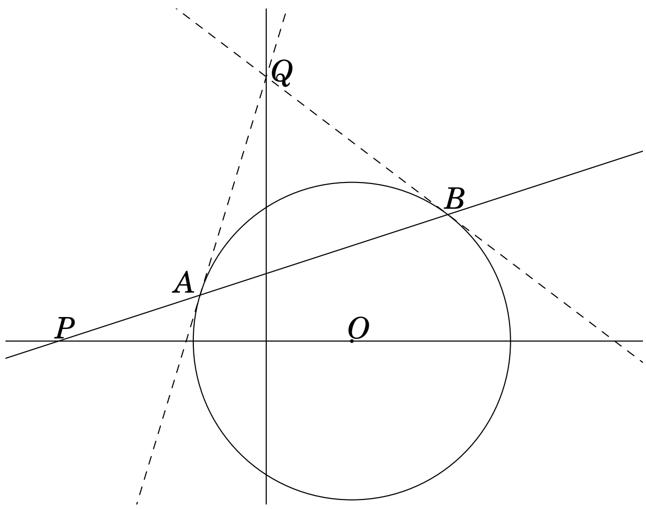
Agora, como há 5 índices na sequência pedida, um deles tem que ser múltiplo de 4. Analisemos cada caso separadamente:

- Se $n = 4k$, a sequência fica determinada por s_n (ina s_{n+1}, s_{n+2} e s_{n+3}) e s_{n+4}. São, ao todo, 4 possibilidades, a saber 01100, 01101, 10010 e 10010. Todas elas, aparecem, respectivamente, em $n = 20, 0, 8, 4$.
- Se $n+1 = 4k$, a sequência fica determinada por s_n e s_{n+1} (que determina s_{n+2}, s_{n+3} e s_{n+4}). São, ao todo, 4 possibilidades, a saber 00110, 01001, 10110 e 11001. Todas elas aparecem, em $n = 32, 3, 11, 7$.
- Se $n+2 = 4k$, a sequência fica determinada por s_n (que determina s_{n+1}) e s_{n+2} (que determina s_{n+3} e s_{n+4}). São, de novo, 4 possibilidades, a saber 01011, 01100 10011 e 10100, presentes em $n = 10, 6, 22, 2$.
- Se $n+3 = 4k$, a sequência fica determinada por s_{n-1} (que determina $s_n s_{n+1} s_{n+2} =$ 110 ou 001) e s_{n+3} (que determina s_{n+4}). Mais 4 possibilidades: 11001, 11010, 00101 e 00110, em $n = 21, 1, 9, 5$.

Assim, as 12 sequências acima listadas (contando as repetições) são todas as possíveis:

$$00101, 00110, 01001, 01011, 01100, 01101, 10010, 10100, 10110, 10011, 11001, 11010$$

6) Vamos demonstrar o seguinte lema: dado um círculo C de centro O e um ponto P fixo, o lugar geométrico dos pontos Q (a partir dos quais é possível traçar tangentes $\overline{QA}$ e $\overline{QB}$ a C de forma que $\overleftrightarrow{AB}$ passa por P) está contido numa reta perpendicular a PO.



Para tanto, coloque um sistema de coordenadas de forma que $C : x^2 + y^2 = 1$ e $P = (-p, 0)$ (com $p > 1$). Denote $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$. Então

$$
\begin{aligned}
&A \in C : x_A^2 + y_A^2 = 1\\
&B \in C : x_B^2 + y_B^2 = 1\\
&P \quad \in \quad \overleftrightarrow{AB}\colon \tfrac{y_B-0}{x_B+p} = \tfrac{y_A-0}{x_A+p} \Rightarrow y_B x_A - y_A x_B = p(y_A - y_B)
\end{aligned}
$$

Agora, as retas tangentes a C em A e B são

$$
\begin{aligned}
xx_A + yy_A &= 1\\
xx_B + yy_B &= 1
\end{aligned}
$$

cuja interseção é o ponto $Q(x, y)$. Multiplicando a primeira equação por y_B, a segunda por y_A e subtraindo, temos

$$x(x_A y_B - x_B y_A) = y_B - y_A \Rightarrow x = \frac{y_B - y_A}{x_A y_B - x_B y_A} = -\frac{1}{p}$$

o que mostra que a coordenada x de Q depende apenas da posição de P com relação a C e não de A e B, CQD.

Note também que este lugar geométrico pode ser obtido unindo os pontos $T_1, T_2 \in C$ tais que PT_1 e PT_2 são tangentes a C. De fato, é fácil ver que estes são os casos limites quando tomamos $A \to T_1$ (portanto $B \to T_1$ também) ou $A \to T_2$. Mais exatamente, como Q tem que ser exterior a C, o lugar geométrico consiste de duas semirretas a partir de T_1 e de T_2, como na figura acima.

Com o lema em mãos, a construção é simples: encontre as tangentes por P ao círculo C_1 e una os pontos de tangência para obter a reta r_1. Analogamente, trace as tangentes por P ao círculo C_2 e una os novos pontos de tangência para encontrar a reta r_2. O ponto Q tem que estar em ambas r_1 e r_2; então, se essas retas se encontram no exterior dos círculos, a solução é sua interseção. Se elas forem paralelas ou se encontrarem no interior de um dos círculos, o ponto Q não existe. Enfim, se elas forem coincidentes, qualquer ponto no exterior de ambas C_1 e C_2 nessa reta comum serve.

Segunda Fase

1. Encontre todas as funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tais que
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y^2) = f(x) + f(y)^2.$$

2. Dada uma reta $r \subset \mathbb{R}^2$, seja ρ_r a reflexão em relação a r (em particular, $\rho_r(p) = p$ se e somente se $p \in r$). Dizemos que r é *eixo de simetria* de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ se $\rho_r(X) = X$.

   Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua cujo gráfico admite dois eixos de simetria distintos. Prove que o limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$
   existe e é finito.

3. Mostre que, para todo $b > 0$, temos
$$I(b) = \int_1^\infty \frac{\sqrt{u+b}}{u^2+b} du > \frac{\pi}{2}\cdot$$

4. Seja Q uma matriz real ortogonal $n\times n$ (ou seja, temos $QQ^T = Q^TQ = I$). Seja P uma matriz de permutação $n\times n$ (ou seja, as entradas de P são iguais a 0 ou 1, com exatamente uma entrada igual a 1 por linha ou por coluna).

   Prove que as duas condições abaixo são equivalentes:

   (a) Existem matrizes triangulares superiores U_0 e U_1 com
$$Q = U_0PU_1.$$

   (b) Existem matrizes triangulares inferiores L_0 e L_1 com
$$Q = L_0PL_1.$$

5. Thor e Loki jogam o seguinte jogo: Thor escolhe um inteiro $n_1 \geq 1$, Loki escolhe $n_2 > n_1$, Thor escolhe $n_3 > n_2$, e assim por diante. Sejam
$$X = \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} \left([n_{2j-1}, n_{2j}) \cap \mathbb{Z}\right);$$
$$s = \sum_{n\in X} \frac{1}{n^2}.$$

Thor ganha se s é racional e Loki ganha se s é irracional.

Determine quem tem estratégia para ganhar.

6. Seja $n \geq 1$. Sejam $A(z)$ e $B(z)$ polinômios de coeficientes reais de graus $n+1$ e n, respectivamente. Sejam $\{a_i\}_{i=1}^{n+1}$ e $\{b_j\}_{j=1}^{n}$ as raízes de A e B, respectivamente. Suponha que os a_i's e os b_j's sejam todos reais e que valha

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < a_n < b_n < a_{n+1}.$$

Mostre que uma das funções $E(z) = A(z) - iB(z)$ ou $E(z) = A(z) + iB(z)$ satisfaz a desigualdade

$$|E(x - iy)| < |E(x + iy)|$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ com $y > 0$.

Segunda Fase – Soluções

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo $f(x + y^2) = f(x) + f(y)^2$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Denotaremos esta identidade por $I(x, y)$. Então

$$y = 0 \implies f(x) = f(x) + f(0)^2 \implies f(0) = 0.$$
$$x = 0 \implies f(y^2) = f(0) + f(y)^2 \implies f(y^2) = f(y)^2$$
$$x = -y^2 \implies 0 = f(0) = f(-y^2) + f(y)^2 \implies f(-y^2) = -f(y^2) \implies f(-x) = -f(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Além disso, se $y > 0$, escrevendo $x = a$ e $y = \sqrt{b}$ temos

$$f(a + b) = f(a) + f(b).$$

Ademais, tomando $x = a - b$ e $y = \sqrt{b}$ temos

$$f(a - b) = f(a) + f(-b).$$

Unindo as duas igualdades anteriores ao fato de f ser ímpar, concluímos que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Agora, provaremos que $f(x) = xf(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Como $f(1^2) = f(1)^2$, então as únicas funções possíveis serão $f(x) = x$ e $f(x) = 0$ (que, de fato, satisfazem a condição desejada).

Como a função é ímpar, é suficiente mostrar o resultado para valores positivos. Primeiro, provaremos-no, por indução, para inteiros não negativos. O caso base $f(1) = f(1)$ é trivial, e para o passo indutivo temos $f(n+1) = f(n)+f(1) = nf(1)+f(1) = (n+1)f(1)$.

Para racionais da forma $\frac{n}{m}$ temos que

$$nf(1) = f(n) = f\left(\frac{n}{m} + \cdots + \frac{n}{m}\right) = f\left(\frac{n}{m}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{m}\right) = mf\left(\frac{n}{m}\right) \Rightarrow f\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{n}{m}f(1),$$

então $f(q) = qf(1)$ para todo $q \in \mathbb{Q}$.

Podemos ver que f é crescente, pois se $b \geq a$, então

$$I(a, \sqrt{b-a}) : f(b) = f(a) + f(\sqrt{b-a})^2 \geq f(a).$$

Isso nos permite estender a identidade $f(q) = qf(1)$ para todos os reais.

2. Vamos separar a solução em dois casos:

   1) O primeiro caso é quando as retas r e s se intersectam, digamos no ponto O. Vamos dar orientação para os ângulos como no círculo trigonométrico, com o eixo de referência sendo a reta r e a origem o ponto O. Seja θ o ângulo (orientado) que a reta s faz com a reta r. Podemos supor, sem perda de generalidade (talvez trocando os papéis de r e s), que $0 < \theta \leq \pi/2$. Agora, seja $P \neq O$ um ponto qualquer do gráfico de f e consideremos α o ângulo que a reta OP forma com r. Ao refletirmos o ponto P em relação a r, obtemos um ponto $P' = \rho_r(P)$ à mesma distância do ponto O tal que OP' faz um ângulo de $-\alpha$ em relação a r. Ao refletir P' em relação a s obtemos um ponto $Q = R(P) := \rho_s(P')$ à mesma distância do ponto O tal que OQ forma um ângulo $(\theta - (-\alpha - \theta) = \alpha + 2\theta$ com a reta r. Portanto $R(P)$ é a rotação de P de ângulo 2θ em torno do ponto O. Definindo $R^0(P) = P$ e, para todo $n \geq 0$, $R^{n+1}(P) = R(R^n(P))$, temos que R^n é a rotação de ângulo $2n\theta$ em torno do ponto O e $R^n(P)$ pertence ao gráfico de f e ao círculo C de centro O que contém o ponto P, para todo n natural. Temos agora três subcasos:

1.i) θ/π é irracional.

Nesse caso, como $R^n(P)$ é a rotação de P de ângulo $2n\theta$ em torno do ponto O, os pontos $R^n(P)$ serão densos no círculo C. Como f é contínua, seu gráfico teria que conter o círculo C, o que é claramente um absurdo.

1.ii) $\theta \neq \pi/2$ e θ/π é racional.

Nesse caso, escrevendo $\theta = p\pi/q$, com p, q inteiros positivos e $\text{mdc}(p,q) = 1$, temos $q > 2$, $2\theta = 2p\pi/q$ e existe n natural com $np \equiv 1 \pmod q$, donde $T := R^n$ é a rotação de ângulo $2\pi/q$ em torno do ponto O, que podemos supor sem perda de generalidade ser o ponto $(0,0)$.

Considerando os $q \geq 3$ pontos $T^j(P), 0 \leq j < q$, haverá necessariamente dois deles cujo produto das abscissas é maior ou igual a 0. Sejam A e B esses pontos, cujas abscissas vamos supor serem maiores ou iguais a 0, sem perda de generalidade. Então A e B pertencem ao gráfico de f e ao círculo C. Se α e β são os ângulos que OA e OB fazem com a reta r, respectivamente, podemos supor que $-\pi/2 \leq \alpha < \beta \leq \pi/2$, e não podemos ter simultaneamente $\alpha = -\pi/2$ e $\beta = \pi frm{-}e$, pois A e B pertencem ao gráfico de f. Assim, a parte do gráfico entre A e B tem sempre abscissa positiva, e $\beta - \alpha$ é um múltiplo positivo de $2\pi/q$, digamos $\beta - \alpha = 2k\pi/q$, com $k \geq 1$.

Temos que $OT^j(A)$ faz um ângulo $\alpha + 2j\pi/q$ com a reta r. Existirá j inteiro tal que $-\pi/2 \leq \alpha + 2j\pi/q \leq -\pi/q < \alpha + 2(j+1)\pi/q \leq \pi/2$ ou $-\pi/2 \leq \alpha + 2j\pi/q \leq \pi/q < \alpha + 2(j+1)\pi/q \leq \pi/2$ (pois se $\gamma > -\pi/q$ e $\gamma - 2\pi/q < -\pi/2$, então $\gamma \leq \alpha$, donde $\gamma + 2\pi/q \leq \beta$ e $\gamma + 2\pi/p > \pi/q$). Em qualquer caso, como o gráfico de f é conexo, e os pontos da parte do gráfico de f que liga $T^j(A)$ a $T^{j+1}(A)$ têm abscissas positivas, obteremos na parte do gráfico de f que liga $T^j(A)$ a $T^{j+1}(A)$ algum ponto X com abscissa estritamente positiva e tal que OX faz ângulo π/q ou $-\pi/q$ com a reta r, e então o ponto $T^{-1}(X) = T^{q-1}(X)$ ou o ponto $T(X)$ será um ponto distinto de X no gráfico de f com exatamente a mesma abscissa, o que é um absurdo.

1.iii) $\theta = \pi/2$.

Nesse caso, os eixos de simetria r e s são perpendiculares. Vamos mostrar que o gráfico de f precisa ser igual a um dos eixos de simetria, o que claramente implica a afirmação do enunciado nesse caso. De fato, suponha que existe P no gráfico de f

fora das retas. Tomemos as duas reflexões de P em relação a cada eixo de simetria e a reflexão desses em relação ao outro eixo (esses pontos coincidem e são vértices de um retângulo). Como o gráfico de f é conexo, temos que existe caminho entre os quatro pontos contido no gráfico. Ordenando os pontos P_1, P_2, P_3, P_4 de forma que suas abscissas estejam em ordem crescente, consideremos a parte do caminho passando pelos quatro pontos que liga P_2 e P_3 (e portanto não contém P_1 nem P_4). Como a reflexão de $\{P_2, P_3\}$ em relação a um dos eixos de simetria será $\{P_1, P_4\}$, a reflexão dessa parte do caminho que liga P_2 a P_3 em relação a esse eixo liga P_1 a P_4, e portanto tem que conter a parte do gráfico entre as retas paralelas ao eixo y passando por P_2 e P_3, ou seja, essa parte do caminho que liga P_2 a P_3, pois não há dois pontos no gráfico de f com a mesma abscissa. Mas então aplicando de novo a mesma reflexão, por um lado reobtemos essa parte do caminho que liga P_2 e P_3, mas por outro lado a imagem terá que conter as imagens de P_2 e P_3 por essa reflexão, que são P_1 e P_4, absurdo. Portanto, o gráfico de f está contido na união dos dois eixos de simetria, e logo coincide com um dos eixos de simetria ou coincide até o ponto de interseção dos eixos com um deles e após esse ponto com o outro (pois f é uma função contínua) - no segundo caso, é fácil ver que o gráfico de f não é invariante pelas simetrias, e portanto o gráfico de f coincide com um dos eixos de simetria, o que claramente implica o resultado desejado, pois nesse caso f será uma função afim.

2) O segundo caso é quando os eixos de simetria são duas retas paralelas. Claramente os eixos não podem ser paralelos ao eixo x, pois senão haveria dois pontos no gráfico de f com a mesma abscissa. Considere t uma reta ortogonal aos eixos. Primeiro, vamos considerar o caso em que t é paralela ao eixo x. Considerando um ponto P qualquer pertencente ao gráfico da função f temos que o ponto P' com a mesma ordenada de P e abscissa igual à de P mais duas vezes a distância entre os eixos de simetria pertence ao gráfico da função pois é resultado de uma composição de reflexões do ponto P - por exemplo, $\rho_s(\rho_r(P))$. Isso mostra que a função é periódica, portanto $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Agora, assuma que t é paralela à reta $y = mx$. Sejam $A \in r$ e $B \in s$ tais que AB é paralelo a t, e seja $(a,b) = B - A = \overrightarrow{AB}$. Então $b/a = m$ e, como antes, se $P = (x, f(x))$, $\rho_s(\rho_r(P)) = P + 2(a,b)$, ou seja, $f(x+2a) = f(x) + 2b = f(x) + m\cdot(2a)$. Assim, $f(x) - mx$ é uma função periódica (e $2a$ é um período), e portanto

$|f(x) - mx|$ é limitado, o que implica o resultado nesse caso: teremos $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m$.

3. Se $b < 1$, então $y^4 + b < y^4 + 1 \le y^4 + y^2$ para $y \ge 1$. Fazendo a substituição $y^2 = u$ temos

$$I(b) > \int_1^\infty \frac{\sqrt{u}}{u^2+b} du = 2\int_1^\infty \frac{y^2}{y^4+b} dy > 2\int_1^\infty \frac{1}{1+y^2} dy = 2\Big(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\pi}{2}.$$

Se $b \ge 1$ então escrevemos

$$A(b) = \int_1^b \frac{\sqrt{u+b}}{u^2+b} du \ \text{ e } \ B(b) = \int_b^\infty \frac{\sqrt{u+b}}{u^2+b} du.$$

$$B(b) > \int_b^\infty \frac{\sqrt{u}}{u^2+b} du = 2\int_{\sqrt{b}}^\infty \frac{y^2}{y^4+b} dy \ge 2\int_{\sqrt{b}}^\infty \frac{y^2}{y^4+y^2} dy = 2\Big(\frac{\pi}{2} - \arctan\big(\sqrt{b}\big)\Big)$$

$$A(b) = \int_1^b \frac{\sqrt{u+b}}{u^2+b} du > \int_1^b \frac{\sqrt{b}}{u^2+b} du = \frac{\sqrt{b}}{b} \int_1^b \frac{1}{1+\big(\frac{u}{\sqrt{b}}\big)^2} du =$$

$$\frac{1}{\sqrt{b}} \int_{1/\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} \frac{\sqrt{b}}{1+x^2} dx = \arctan\big(\sqrt{b}\big) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right) = 2\arctan\big(\sqrt{b}\big) - \frac{\pi}{2}$$

$$I(b) = A(b) + B(b) > 2\arctan\big(\sqrt{b}\big) - \frac{\pi}{2} + 2\Big(\frac{\pi}{2} - \arctan\big(\sqrt{b}\big)\Big) = \frac{\pi}{2}.$$

4. Provaremos que $(a) \implies (b)$, a direção contrária é completamente análoga.

Temos

$$Q = U_0 P U_1 \iff Q^t = U_1^t P^t U_0^t \iff (Q^t)^{-1} = (U_0^t)^{-1} (P^t)^{-1} (U_1^t)^{-1}$$

Como toda matriz de permutação é ortogonal, P e Q são ortogonais, então $(Q^t)^{-1} = Q$ e $(P^t)^{-1} = P$, assim $Q = (U_0^t)^{-1} P (U_1^t)^{-1}$, onde $L_0 = (U_0^t)^{-1}$ e $L_1 = (U_1^t)^{-1}$ são matrizes triangulares inferiores pelo seguinte lema.

Lema: Se U e L forem matrizes inversíveis, com U triangular superior e L triangular inferior, então U^t e L^{-1} são matrizes triangulares inferiores, U^{-1} e L^t são matrizes triangulares superiores.

Prova do Lema: É claro para U^t e L^t. Para U^{-1} observe (utilizando a fórmula da inversa a partir da matriz dos cofatores) que o cofator em uma entrada acima da diagonal será nulo. De fato, se U é uma matriz $n \times n$, e a entrada em questão é u_{ij}, com $1 \le i < j \le n$, o cofator correspóndente resultará num múltiplo do determinante de uma matriz $(n-1)\times(n-1)$ cujas entradas a_{rs} com $j-1 \le r \le n-1$ e $s \le j-1$ são todas nulas, o qual é 0 pois as $n-j+1$ últimas linhas dessa matriz serão linearmente dependentes (de fato, em cada uma delas, só as $n-j$ últimas entradas poderiam ser não nulas). Assim a inversa, que é um múltiplo da transposta da matriz dos cofatores, será triangular inferior. Para L^{-1} a prova é análoga.

5. Loki tem a seguinte estratégia vencedora: Dada uma enumeração dos racionais $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$, na sua i-ésima jogada ele fará com que a soma final s não possa ser q_i. Dessa forma, ele garante que a soma final s não será igual a nenhum racional.

   Repare que quando o jogo começa os possíveis valores para s são números no intervalo $(0,T)$, onde $T = \sum_{n\ge1} \frac{1}{n^2}$ $(=\pi^2/6)$. Cada jogada de Thor faz "pular" alguns inteiros na soma e cada jogada de Loki garante que alguns próximos inteiros sejam somados, em outras palavras, Thor movimenta o extremo direito do intervalo acima (subtraindo um racional a ele), enquanto Loki movimenta o limite esquerdo do intervalo (adicionando um racional). Assim se o intervalo depois de i turnos é (a_i, b_i), e se $q_{i+1} \in (a_i, b_{i+1})$, então Loki pode escolher n_{2i+2} suficientemente grande para fazer $a_{i+1} > q_{i+1}$, pois $q_{i+1} < b_{i+1}$.

6. Sejam $E_1(z) = A(z) + iB(z)$ e $E_2(z) = A(z) - iB(z)$. Assim temos que

$$E_1(\overline{z}) = A(\overline{z}) + iB(\overline{z}) = \overline{A(z)} + i\overline{B(z)} = \overline{A(z) - iB(z)} = \overline{E_2(z)}$$

   Analogamente, $\overline{E_1(z)} = E_2(\overline{z})$.

   Assim, $|E_i(\overline{z})| < |E_i(z)|$ é equivalente a $|E_j(z)| < |E_i(z)|$ (onde $j=1$ se $i=2$ e $j=2$ se $i=1$). Ou seja, precisamos mostrar que uma função tem sempre módulo estritamente menor que a outra. Porém, por continuidade, basta mostrar que não pode acontecer $|E_1(x+iy)| = |E_2(x+iy)|$ para nenhum $y > 0$.

   Suponha por absurdo que $|E_1(x+iy)| = |E_2(x+iy)|$. Então

$$|A(z)+iB(z)| = |A(z)-iB(z)| \Rightarrow (A(z)+iB(z))(\overline{A(z)+iB(z)}) = (A(z)-iB(z))(\overline{A(z)-iB(z)})$$

$$\Rightarrow A(z)\overline{B(z)} = \overline{A(z)}B(z) \Rightarrow A(z)\overline{B(z)} \text{ é real.}$$

Escrevendo $A(z) = a\prod_{j=1}^{n+1}(z-a_j)$ e $B(z) = b\prod_{j=1}^{n}(z-b_j)$, temos que

$$A(z)\overline{B(z)} = ab\prod_{j=1}^{n+1}(x-a_j+iy)\prod_{j=1}^{n}(x-b_j-iy) = ab\prod_{j=1}^{n+1}i(y+i(a_j-x))\prod_{j=1}^{n}(-i)(y-i(b_j-x))$$

$$A(z)\overline{B(z)} = abi\prod_{j=1}^{2n+1}(y-i(-1)^j z_j) \text{ onde } a_1-x=z_1<b_1-x=z_2<\cdots<a_{n+1}-x=z_{2n+1}.$$

Sendo θ_j o argumento de $y+iz_j$ (com $y>0$), temos que $-\frac{\pi}{2}<\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_{2n+1}<\frac{\pi}{2}$. Assim $0<\frac{\pi}{2}+(\theta_1-\theta_2+\theta_3-\cdots+\theta_{2n+1})<\pi$, e portanto o argumento de $A(z)\overline{B(z)}$ é $\theta=\frac{\pi}{2}+(\theta_1-\theta_2+\theta_3-\cdots+\theta_{2n+1})$, com $0<\theta<\pi$, o que contradiz o fato de $A(z)\overline{B(z)}$ ser real.

Premiados Nível Univesitário

Medalha de Ouro

Nome	Cidade – Estado	Pontos
Rafael Kazuhiro Miyazaki	São Paulo – SP	255
Thomás Jung Spier	Estância Velha – RS	247
Tadeu Pires de Matos Belfort Neto	Fortaleza – CE	243

Medalha de Prata

Nome	Cidade – Estado	Pontos
Cássio Henrique Vieira Morais	Betim – MG	214
Gabriel Fazoli Domingos	Urupês – SP	206
Victor Seixas Souza	Salvador – BA	205
Wagner Fonseca Rodrigues	S.J. dos Campos – SP	203
Davi Coelho Amorim	Fortaleza – CE	196
Lucas da Silva Reis	Belo Horizonte – MG	193
Lucas Souza Mota de Aragão	Aracajú – SE	188
Maria Clara Mendes Silva	Rio de Janeiro – RJ	187

Medalha de Bronze

Nome	Cidade – Estado	Pontos
João Miranda Carnevale	Rio de Janeiro – RJ	181
Raphael Mendes de Oliveira	Rio de Janeiro – RJ	177
Igor Albuquerque Araujo	Rio de Janeiro – RJ	174
Thiago Ribeiro Tergolino	Rio de Janeiro – RJ	173
Juliano Garcia do Carmo Ribeiro	Rio de Janeiro – RJ	171
Lucas Garcia Gomes	Campinas – SP	165
Victor Tadeu Tetsuo Suzuki	Belo Horizonte – MG	164
Thiago Poeiras Silva	Belo Horizonte – MG	149
Pedro Freire Mascarenhas Pontes	S.J. dos Campos – SP	148
Felipe Magalhães de Matos Gabriel	Niterói – RJ	142
Otavio Araujo de Aguiar	Fortaleza – CE	142
Arthur Ferreira do Nascimento	São Paulo – SP	137
Guilherme Horta Alvares da Silva	Belo Horizonte – MG	135

Menção Honrosa

Nome	Cidade – Estado	Pontos
Daniel Ariano Sortica	São Paulo – SP	133
Erik Gabriel Araújo de Medeiros	S.J. dos Campos – SP	129
Bruno Silva Mucciaccia	S.J. dos Campos – SP	126
Thiago Tarraf Varella	S.J. dos Campos – SP	119
Lucas Mioranci	S.J. do Rio Preto – SP	116
Raoní Cabral Ponciano	João Pessoa – PB	116
Renan Pícoli de Souza	Rio de Janeiro – RJ	112
Sérgio Fernando Hess de Souza Filho	Florianópolis – SC	112
Gabriel Lima de Souza Vidal	Rio de Janeiro – RJ	111
Giancarlo Ferrigno Poli Ide Alves	S.J. dos Campos – SP	109
Vinícius Franco Vasconcelos	Toledo – PR	107
Fernando Lima Saraiva Filho	Eusébio – CE	104
Roberio Soares Nunes	Ribeirão Preto – SP	102
Lucas Medeiros Sobrinho de Sousa	Salvador – BA	100
Filipe Bellio da Nóbrega	Rio de Janeiro – RJ	98
Gabriel Benicio de Almeida Prado Barreto	Belo Horizonte – MG	98
Gabriel Hora de Sá	São Paulo – SP	98
Rafael Rodrigues Rocha de Melo	Rio de Janeiro – RJ	98
José Alves Oliveira	Cláudio – MG	95
Roger Leite Lucena	S.J. dos Campos – SP	95
Luíze Mello D' Urso Vianna	Rio de Janeiro – RJ	93
Erick Gonçalves de Matos	S.J. dos Campos – SP	92
João Pedro de Araújo Xavier	Recife – PE	92
Hugo Terceiro Colares	S.J. dos Campos – SP	90

Coordenadores Regionais

ALAGOAS

Krerley Irraciel Martins Oliveira	Universidade Federal de Alagoas	MACEIÓ

AMAPÁ

André Luiz Dos Santos Ferreira	Instituto Federal do Amapá	MACAPÁ

AMAZONAS

Disney Douglas de Lima Oliveira	Universidade Federal do Amazonas	MANAUS

BAHIA

Luzinalva Miranda de Amorim	Universidade Federal da Bahia	SALVADOR
Tadeu Ferreira Gomes	Universidade do Estado da Bahia	JUAZEIRO

CEARÁ

Esdras Soares de Medeiros Filho	Universidade Federal do Ceará	FORTALEZA

DISTRITO FEDERAL

Diego Marques	Unb Universidade de Brasília	BRASÍLIA

ESPÍRITO SANTO

Florêncio Ferreira Guimarães Filho	Universidade Federal do Espírito Santo	VITÓRIA
Valdinei Cezar Cardoso	Universidade Federal do Espirito Santo	SÃO MATEUS

GOIÁS

Ana Paula de Araújo Chaves	Universidade Federal de Goiás	GOIÂNIA

MARANHÃO

Nivaldo Costa Muniz	Univ. Federal do Maranhão	SÃO LUÍS

MATO GROSSO

André Krindges	Universidade Federal de Mato Grosso	CUIABÁ

MATO GROSSO DO SUL

Edgard José Dos Santos Arinos	Colégio Militar de Campo Grande	CAMPO GRANDE

MINAS GERAIS

Antonio Carlos Nogueira	Universidade Federal de Uberlândia	UBERLÂNDIA
Daniele Cristina Gonçalves	Universidade do Estado de Minas Gerais	JOÃO MONLEVADE
Francinildo Nobre Ferreira	Universidade F. de S. João Del Rei	SÃO JOÃO DEL REI
Glauker Menezes de Amorim	Universidade Federal de Juiz de Fora	JUIZ DE FORA
João Batista Queiroz Zuliani	Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais	TIMÓTEO
Lucio Paccori Lima	Universidade Federal de Viçosa	FLORESTAL
Marcelo Ferreira	Universidade Federal do Triângulo Mineiro	UBERABA
Marcio Fialho Chaves	Universidade Federal de Lavras	LAVRAS
Rosivaldo Antonio Gonçalves	Universidade Estadual de Montes Claros	MONTES CLAROS
Seme Gebara Neto	Universidade Federal de Minas Gerais	BELO HORIZONTE

PARÁ

Adenilson Pereira Bonfim	Escola Tenente Rêgo Barros	BELÉM
Mario Tanaka Filho	Universidade Federal do Oeste do Pará	SANTARÉM

PARAÍBA

Alex Pereira Bezerra	Instituto Federal da Paraíba	CAMPINA GRANDE
José Vieira Alves	Universidade Federal de Campina Grande	CAMPINA GRANDE
Romildo Nascimento de Lima	Universidade Federal de Campina Grande	CAMPINA GRANDE

PARANÁ

Alzira Akemi Kushima	Colégio Militar de Curitiba	CURITIBA
Eduardo de Amorim Neves	Universidade Estadual de Maringá	MARINGA
Elisangela Dos Santos Meza	Universidade Estadual de Ponta Grossa	PONTA GROSSA

PERNAMBUCO

Marcos Luiz Henrique	Universidade Federal de Pernambuco	CARUARU
Thiago Dias Oliveira Silva	Universidade Federal Rural de Pernambuco	RECIFE

PIAUÍ

Ítalo Dowell Lira Melo	Universidade Federal do Piauí	TERESINA
Paulo Sérgio Marques Dos Santos	Universidade Federal do Piauí	PARNAÍBA

RIO DE JANEIRO

Jorge Henrique Craveiro de Andrade	Colégio e Curso PENSI	RIO DE JANEIRO
José Luiz Dos Santos	Colégio CPM	BOM JARDIM
Ricardo de Amorim Oliveira	Centro Educacional Logos	NOVA IGUAÇÚ

RIO GRANDE DO NORTE

Carlos Alexandre Gomes da Silva	Universidade Federal do Rio Grande do Norte	NATAL

RIO GRANDE DO SUL

Artur Oscar Lopes	Universidade Federal do Rio Grande do Sul	PORTO ALEGRE
Carmen Vieira Mathias	Universidade Federal de Santa Maria	SANTA MARIA
Denice Aparecida Fontana Nisxota Menegais	Universidade Federal do Pampa	BAGÉ
Elizabeth Quintana Ferreira da Costa	Universidade Federal do Rio Grande do Sul	PORTO ALEGRE

RONDÔNIA

Tomás Daniel Menéndez Rodriguez	Fundação Universidade Federal de Rondônia	PORTO VELHO

RORAIMA

Gilson de Souza Costa	Universidade Federal de Roraima	BOA VISTA

SANTA CATARINA

Alda Dayana Mattos Mortari	Universidade Federal de Santa Catarina	FLORIANÓPOLIS
Licio Hernanes Bezerra	Universidade Federal de Santa Catarina	FLORIANÓPOLIS
Marcelo Zannin da Rosa	Universidade Federal de Santa Catarina	ARARANGUÁ

SÃO PAULO

Ali Tahzibi	Universidade de São Paulo	SÃO CARLOS
Américo Lopez Gálvez	Universidade de São Paulo	RIBEIRÃO PRETO
Armando Ramos Gouveia	Instituto Tecnológico de Aeronáutica	SÃO JOSÉ DOS CAMPOS
Cláudio de Lima Vidal	Colégio Celtas	VOTUPORANGA
Débora Bezerra Linhares Libório	Universidade Metodista de São Paulo	SÃO BERNARDO DO CAMPO
Edson Abe	Colégio Objetivo Campinas	CAMPINAS
Emiliano Chagas	Instituto Federal de São Paulo	SÃO PAULO
Luis Antonio Fernandes de Oliveira	Universidade Estadual Paulista	ILHA SOLTEIRA
Newman Ribeiro Simões	Colégio Luiz de Queiroz	PIRACICABA
Raul Cintra de Negreiros Ribeiro	Colégio Anglo Atibaia	JUNDIAÍ
Reinaldo Gen Ichiro Arakaki	FATEC - São José Dos Campos	SÃO JOSÉ DOS CAMPOS
Samuel Liló Abdalla	Colégio Anglo Sorocaba	SOROCABA

SERGIPE

Valdenberg Araújo da Silva	Universidades Federal de Sergipe	ARACAJU

TOCANTINS

Adriano Rodrigues	Universidade Federal do Tocantins	ARRAIAS