CONTEÚDO

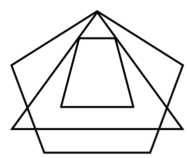
XXXV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e soluções da Primeira Fase

PROBLEMAS – NÍVEL 1

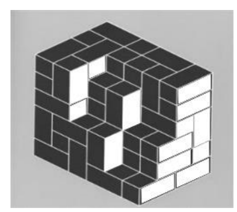
1) Quanto é o dobro de 24 mais o triplo de 13 menos o quádruplo de 15?
A) 17 **B)** 26 **C)** 27 **D)** 37 **E)** 38

2) Quantos triângulos há na figura a seguir?



A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

3) Um mercado vende laranjas apenas em sacos com 5 kg cada. De cada quilo de laranja, 55% é suco. Além disso, 1 kg de suco corresponde a 900 ml de suco. Sendo assim, quantos litros de suco podemos extrair de dois sacos de laranja?
A) 4,5 **B)** 4,8 **C)** 4,95 **D)** 5 **E)** 5,1



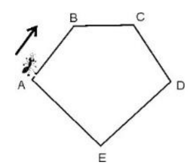
4) Esmeralda está construindo um paralelepípedo usando blocos menores iguais. Para terminar sua tarefa, quantos blocos Esmeralda ainda deve colocar?
A) 12 **B)** 14 **C)** 16 **D)** 18
E) 20

5) Entre os números naturais de 1 até *n*, pelo menos 11 são divisíveis por 5 e no máximo 9 são divisíveis por 6. No máximo, quantos desses números são divisíveis por 7?
A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

6) Os gatos Mate e Tica estão dormindo no sofá. Mate chegou antes e quando Tica chegou, ela ocupou um quarto da superfície que havia sobrado do sofá. Os dois juntos ocupam exatamente a metade da superfície do sofá. Qual parte da superfície do sofá está ocupada por Tica?

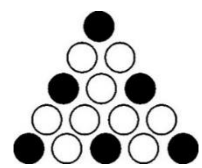
A) $\frac{1}{12}$ **B)** $\frac{1}{8}$ **C)** $\frac{1}{6}$ **D)** $\frac{1}{5}$ **E)** $\frac{1}{2}$

7) No pentágono ABCDE ao lado, $AB = BC = CD = 2$ metros e $DE = EA = 3$ metros. Uma formiguinha parte do vértice A e caminha com velocidade constante de um metro por segundo ao longo de seus lados, sempre no mesmo sentido. Em que ponto estará no 2013º segundo?



A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E

8) Círculos brancos e pretos são usados para construir triângulos como na figura. Começamos com um círculo preto na primeira linha. A partir daí, as linhas pares são formadas apenas por círculos brancos e a linhas ímpares por círculos de cores alternadas, começando com círculo preto na ponta. Se um triângulo como esse tem exatamente 30 círculos brancos, quantos círculos pretos ele tem?



A) 10 **B)** 15 **C)** 18 **D)** 20 **E)** 30

9) Rita escreve a sequência formada por números de três algarismos não nulos a seguir: 123, 234, 345, ... , 789, 891, 912, 123, 234, ... Qual é o 2013º termo dessa sequência?

A) 345 **B)** 456 **C)** 567 **D)** 678 **E)** 789

10) Na adição de termos iguais $2013^{2013} + 2013^{2013} + \cdots + 2013^{2013} = 2013^{2014}$, escrita de forma simplificada, foram escritos muitos sinais de adição (+). Quantos foram escritos?
A) 1006
B) 2009
C) 2012
D) 2014
E) 4026

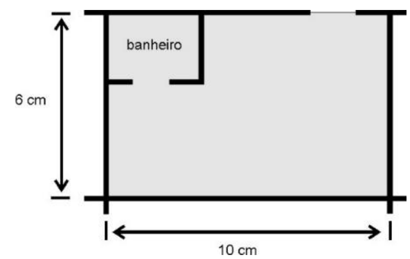
11) Todo número primo é um número inteiro que tem exatamente dois divisores positivos: o número 1 e o próprio número. Por exemplo, 2 e 5 são primos, mas 1 (tem somente o 1 como divisor positivo) e 4 (veja que 1, 2 e 4 são os seus divisores positivos) não são primos. Qual das afirmações a seguir é verdadeira?
A) A soma de quaisquer dois primos é um primo.
B) A soma dos quadrados de quaisquer dois números primos é um número primo.
C) O produto de dois números naturais consecutivos pode ser um número primo.
D) A soma de três primos quaisquer nunca é um número primo.
E) O produto de dois primos quaisquer pode ser um número primo.

12) Se Joana comprar hoje um computador de 2000 reais, ela conseguirá um desconto de 5%. Se ela deixar para amanhã, irá conseguir o mesmo desconto de 5%, mas o computador irá aumentar 5%. Se ela esperar, o que acontecerá?
A) Nada, pois pagará a mesma quantia.
B) Ela perderá 100 reais.
C) Ela ganhará 105 reais.
D) Ela perderá 95 reais.
E) Ela perderá 105 reais.

13) Os preços para a entrada num estádio de futebol são de R$7,50 para os adultos e R$2,50 para as crianças. No último jogo de domingo, o estádio arrecadou R$3.000,00 para um público de menos de 600 pagantes. Pelo menos quantos adultos pagantes havia no estádio?

A) 299 **B)** 301 **C)** 310 **D)** 361
E) 450

14) As medidas indicadas na figura referem-se ao desenho que representa um dormitório retangular, incluindo um banheiro, de uma casa. Se a escala do desenho é de 1:45, qual é a área real desse cômodo?



A) 12,15 m^2
B) 15,5 m^2
C) 27 m^2
D) 32 m^2
E) 60 m^2

15) A professora Marli propôs uma eleição para representante da sala do sexto ano. Cinco alunos se apresentaram como candidatos. Todos os alunos votaram e quem venceu foi Pedrinho, com 10 votos. Os outros quatro candidatos tiveram diferentes números de votos cada um. No mínimo, quantos são os alunos dessa sala?

A) 16 **B)** 30 **C)** 34 **D)** 36 **E)** 40

16) As amigas Ana, Beatriz, Cristina e Dalva nasceram no mesmo ano e no mesmo dia, porém em meses diferentes. Dalva é dois meses mais nova do que Ana e quatro meses mais velha do que Cristina. Beatriz é oito meses mais nova do que Dalva. Qual delas nasceu em março?

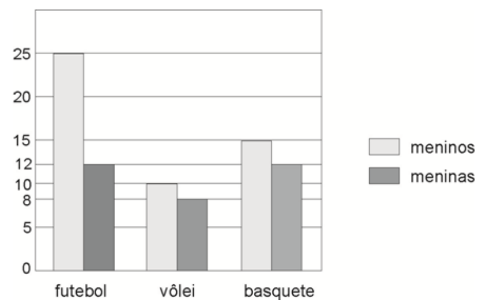
A) Ana
B) Beatriz
C) Cristina
D) Dalva
E) Nenhuma delas

17) Joana preenche completamente um quadriculado retangular escrevendo os números de 1 a 2013, sendo um número para cada quadrado. Ela começa do canto superior esquerdo e preenche a primeira coluna, depois preenche a segunda coluna, de cima para baixo e continua, da mesma forma, preenchendo a terceira coluna, a quarta, etc. até chegar à última coluna e terminar no canto inferior direito. Se o número 50 está na segunda coluna, em qual coluna estará escrito o número 1000?

A) 23 **B)** 31 **C)** 33 **D)** 39 **E)** 61

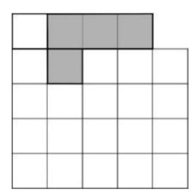
18) Um quadrado de área 144 cm^2 pode ser decomposto em seis quadrados de lados inteiros, não todos iguais. Qual é a soma dos perímetros de todos os seis quadrados?
A) 36 cm
B) 84 cm
C) 96 cm
D) 112 cm
E) 164 cm

19) O gráfico ao lado refere-se à prática esportiva dos alunos do 6º ano de uma escola. Nenhum dos meninos que jogam futebol ou vôlei joga basquete e nenhuma menina que joga basquete ou vôlei joga futebol. Há cinco meninos e três meninas que não praticam nenhum dos três esportes. Pelo menos quantos alunos há no 6º ano?



A) 37 **B)** 45 **C)** 50 **D)** 64 **E)** 72

20) Luísa tem seis peças iguais formadas por 4 quadradinhos de área 1. Ela quer encaixar todas essas peças no quadriculado formado por 24 quadradinhos de área 1 e já colocou uma dessas peças, em destaque na figura ao lado, e as peças podem ser colocadas em qualquer orientação. De quantas maneiras diferentes ela pode terminar seu trabalho?



A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

PROBLEMAS – NÍVEL 2

1) Veja o problema No. 12 do Nível 1.

2) Veja o problema No. 4 do Nível 1.

3) Veja o problema No. 20 do Nível 1.

4) Veja o problema No. 14 do Nível 1.

5) Veja o problema No. 7 do Nível 1.

6) O Aluno *D* (usaremos este codinome para proteger a identidade do aluno) não prestou atenção na aula e não aprendeu como verificar, sem realizar a divisão, se um número é múltiplo de 7 ou não. Por isso, *D* decidiu usar a regra do 3, ou seja, ele vai somar os dígitos e verificar se o resultado é um múltiplo de 7. Para quantos números inteiros positivos menores que 100 esse método incorreto indicará que um número é múltiplo de 7, sendo o número realmente múltiplo de 7?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

7) Dalvenilson (ops, aluno *D*) procurou um amigo para aprender qual era o jeito ensinado pelo professor para verificar se um número é múltiplo de 7 sem realizar a divisão. O método ensinado é tomar o dígito das unidades apagá-lo e subtrair o seu dobro no número que sobrou. Por exemplo, para 1001 teremos: $100-2\cdot 1=98$ e repetindo, teremos $9-2\cdot 8=-7$, que é um múltiplo de 7. Então, 98 e 1001 são múltiplos de 7.

Sabendo disso, qual dos números a seguir é um múltiplo de 7?

A) 102112 **B)** 270280 **C)** 831821 **D)** 925925 **E)** 923823

8) Entre os números naturais de 1 até *n*, pelo menos 11 são divisíveis por 5 e no máximo 9 são divisíveis por 6. No máximo, quantos desses números são divisíveis por 7?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

9) O programa "Quem não quer o bode?" ficou muito famoso nos Estados Unidos. O programa era como a seguir: o participante deve escolher uma dentre três portas. Atrás de uma das portas, há um carro e atrás de cada uma das outras duas, há um bode. O convidado ganhará o que estiver atrás da porta escolhida. Entretanto, os organizadores do programa perceberam, com o passar do tempo, que aproximadamente dois em cada três participantes ganhavam o carro e, com isso, decidiram mudar o programa. Agora, cada uma das três portas teria números de 1 a 3 e haveria um porteiro identificado com o número da porta. Cada porteiro faz uma afirmação que pode ser verdade ou mentira. Em seguida, o participante escolhe a porta na qual acredita que o carro está. Em um dos programas, foram ditas as seguintes afirmações pelos porteiros:

- Porteiro 1: O carro não está atrás da porta 3.
- Porteiro 2: O carro está atrás da minha porta.
- Porteiro 3: O carro não está atrás da minha porta.

Sabe-se que pelo menos uma das afirmações é verdade e que pelo menos uma é mentira.
Atrás de qual porta está o carro?
A) porta 1 **B)** porta 2 **C)** porta 3 **D)** não é possível identificar.
E) não é possível que esteja em nenhuma delas.

10) O triângulo aritmético de Fibonacci é formado pelos números ímpares inteiros positivos a partir do 1 dispostos em linhas com ordem crescente em cada linha e pulando para a linha seguinte. A linha n possui exatamente n números. Veja as quatro primeiras linhas.

Linha 1: **1**
Linha 2: **3 5**
Linha 3: **7 9 11**
Linha 4: **13 15 17 19**
...

Em qual linha aparecerá o 2013?
A) 45 **B)** 46 **C)** 62 **D)** 63 **E)** 64

11) Seja ABC um triângulo retângulo em A. Seja D o ponto médio de AC. Sabendo que $BD = 3DC$ e que $AC = 2$, a hipotenusa do triângulo é:

A) $\sqrt{7}$ **B)** $2\sqrt{2}$ **C)** 3 **D)** $\sqrt{10}$ **E)** $2\sqrt{3}$

12) Um país possui 11 cidades e estradas de mão única que ligam essas cidades. Onze amigos decidiram viajar, cada um saindo de uma cidade diferente. Cada um deles percorre exatamente uma estrada por dia. A tabela abaixo mostra as estradas que os amigos usam para viajar.

Saindo de	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Chegando em	6	9	10	7	2	8	11	1	4	3	5

Os amigos viajam todos os dias e param de viajar apenas quando todos eles estiverem no mesmo dia na cidade onde começaram. Por exemplo, o amigo que começar na cidade 1, após um dia estará na cidade 6 e após dois dias estará na cidade 8. Após quantos dias eles vão parar de viajar?

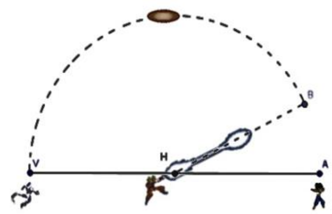
A) 2 **B)** 3 **C)** 6 **D)** 9 **E)** 12

13) Em uma loja de chocolates, existem caixas com 8, 9 e 10 chocolates. Observe que algumas quantidades de chocolates não podem ser compradas exatamente, como por exemplo 12 chocolates. Qual é a maior quantidade de unidades de chocolates que **não** podemos comprar exatamente nessa loja?

A) 25 **B)** 13 **C)** 11 **D)** 31 **E)** 53

14) Uma potência perfeita é um número inteiro da forma a^b, a e b inteiros, $b > 1$. Para quantos inteiros positivos menores ou iguais a 100 a maior potência perfeita que não o excede é um quadrado perfeito?

A) 64 **B)** 72 **C)** 81 **D)** 90 **E)** 96



15) Em um desenho animado, um herói na posição H enfrenta um vilão na posição V para defender o amigo, que está na posição A. O herói está localizado no ponto médio do segmento VA. O vilão usa então um ataque de energia com trajetória de um arco de circunferência de centro em H para acertar o amigo em A. O herói prevê o perigo e simultaneamente solta um ataque de energia em linha reta para colidir com o ataque do vilão no ponto B.

Sabendo que $VA = 60m$, que o ataque do vilão tem velocidade $10\pi\ m/s$ e que o ataque do herói viaja a 15 m/s, determine o valor do ângulo $\angle BHA$.

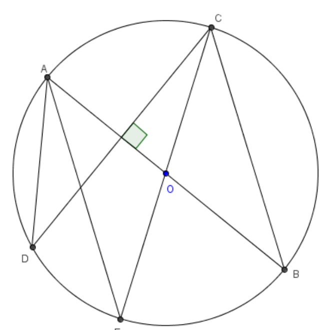
A) 10º **B)** 15º **C)** 30º **D)** 45º **E)** 60º

16) Determine o maior divisor comum de todos os números de 9 algarismos distintos formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

A) 3 **B)** 9 **C)** 18 **D)** 27 **E)** 123456789

17) Determine $x + y$, onde x e y são reais, sabendo que $x^3 + y^3 = 9$ e $xy^2 + x^2y = 6$.

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5



18) Na figura ao lado o ponto O é o centro da circunferência que passa pelos pontos A, B, C, D e E. Sabendo que o diâmetro AB e a corda CD são perpendiculares e que $\angle BCE = 35º$ o valor em graus do ângulo $\angle DAE$ é:

A) 35º **B)** 10º
C) 20º **D)** 30º **E)** 55º

19) Cada termo de uma sequência é definido como o resto por 4 da soma do termo anterior e da quantidade de múltiplos de 4 que já apareceram na sequência. Sabendo que o primeiro termo é 0, o 2013º termo da sequência é:

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** impossível determinar.

20) Juquinha gosta muito de brincar com sua calculadora. Os algarismos na calculadora ficam de acordo com a figura a seguir:

Com isso, ele definiu números *interessantes invertidos* como sendo números que não possuem dígito 1 e tais que se você olhá-lo com a calculadora girada 180º, ele continua sendo um número. Por exemplo, 25 é interessante invertido, pois ao girá-lo obtemos 52 que continua sendo um número. Já 3 não é interessante, pois ao girar a calculadora obtemos algo semelhante a um E.

Existem quantos números interessantes invertidos de 3 algarismos? (Nessa questão, sequências com zero à esquerda não são considerados números válidos)

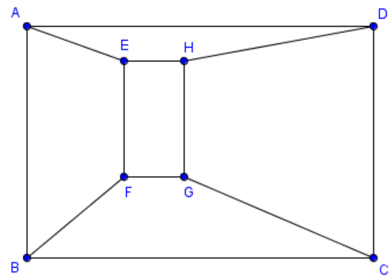
A) 150 **B)** 216 **C)** 125 **D)** 80 **E)** 120

21) Mariazinha, a irmã de Juquinha, tem um espelho. Ao ver Juquinha brincando, ela decidiu criar os números *interessantes espelhados*. Eles são os números que não possuem 1 e que, quando escritos na calculadora e vistos através do espelho posicionado acima do número (na linha superior do visor da calculadora), têm reflexo que também é um número. Por exemplo, 5 tem como reflexo o 2 e 3 tem como reflexo o próprio 3. Já o número 4 tem como reflexo uma figura estranha (parece uma cadeira) que não representa um dígito.

Existem quantos números interessantes espelhados de três dígitos? (Nessa questão sequências com zero à esquerda não são considerados números válidos)

A) 150 **B)** 216 **C)** 125 **D)** 80 **E)** 120

22) Na figura ao lado, os retângulos $ABCD$ e $EFGH$ têm os lados paralelos. Sabendo que $AE = 3,\ BF = 4$ e $DH = 5$. Qual a medida de CG?

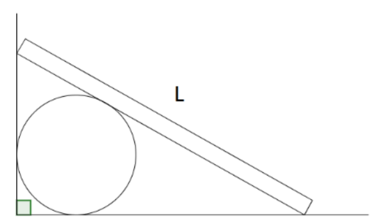


A) 6 **B)** $\sqrt{32}$ **C)** 7 **D)** $\sqrt{40}$ **E)** $\sqrt{60}$

23) João escreveu todos os números de 4 dígitos contendo cada um dos algarismos de 1 até 4 exatamente uma vez. Em quantos desses números a soma dos dois últimos dígitos é maior que a soma dos dois primeiros?

A) 8 **B)** 12 **C)** 4 **D)** 16 **E)** 2

24) Um cilindro de raio R = 1 deve ser colocado no canto de uma sala e preso com uma tábua de mesma altura e comprimento L, conforme a figura ao lado. Sabe-se que o ângulo entre as duas paredes é de 90º. Qual o comprimento mínimo de L de modo que a tábua toque as duas paredes?



A) $2+2\sqrt{2}$ **B)** $1+2\sqrt{2}$

C) $2+\sqrt{2}$ **D)** $1+\sqrt{2}$ **E)** $2\sqrt{2}$

25) Qual dos seguintes números é o mais próximo da quantidade de algarismos de 3^{400}?

A) 100 **B)** 150 **C)** 200 **D)** 240 **E)** 300

PROBLEMAS – NÍVEL 3

1) Os algarismos desse ano, 2013 são 0, 1, 2 e 3, obviamente não nessa ordem. Daqui a quantos anos ocorrerá o próximo ano cujos algarismos serão 0, 1, 2 e 3 novamente?
A) 2 **B)** 9 **C)** 18 **D)** 90 **E)** 1800

2) Veja o problema No. 12 do Nível 1.

3) Veja o problema No. 6 do Nível 2.

4) Veja o problema No. 8 do Nível 2.

5) Joana preenche completamente um quadriculado retangular escrevendo os números de 1 a 2013, sendo um número para cada quadrado. Ela começa no canto superior esquerdo e preenche a primeira coluna, depois preenche a segunda coluna, de cima para baixo e continua, da mesma forma, preenchendo a terceira coluna, a quarta, etc., até chegar à última coluna e terminar no canto inferior direito. Se o número 50 está na segunda coluna e o número 100 na quarta coluna, em qual coluna estará escrito o número 1000?
A) 23 **B)** 31 **C)** 33 **D)** 39 **E)** 61

6) Sejam a, b reais positivos tais que $\frac{a+2b}{b} = \frac{a+b}{a}$. O valor de $\frac{(a+b)^2}{ab}$ é:

A) 4 **B)** $3+\sqrt{3}$ **C)** $2+2\sqrt{2}$ **D)** $2+\sqrt{5}$ **E)** 5

7) Veja o problema No. 11 do Nível 2.

8) O triângulo aritmético de Fibonacci é formado pelos números ímpares inteiros positivos a partir do 1 dispostos em linhas com ordem crescente em cada linha e pulando para a linha seguinte. A linha *n* possui exatamente *n* números. Veja as quatro primeiras linhas.

Linha 1: **1**
Linha 2: **3 5**
Linha 3: **7 9 11**
Linha 4: **13 15 17 19**
...

Em qual linha aparecerá o 2013?

A) 45 **B)** 46 **C)** 62 **D)** 63 **E)** 64

9) Dizemos que duas retas ou segmentos de retas são *reversas* quando não existe um plano que contém ambas as retas ou segmentos de retas. De quantas maneiras podemos escolher três arestas de um cubo de modo que quaisquer duas dessas arestas são reversas?

A) 6 **B)** 8 **C)** 12 **D)** 24 **E)** 36

10) Determine $x + y$, onde x e y são reais, sabendo que $x^3 + y^3 = 9$ e $xy^2 + x^2y = 6$.

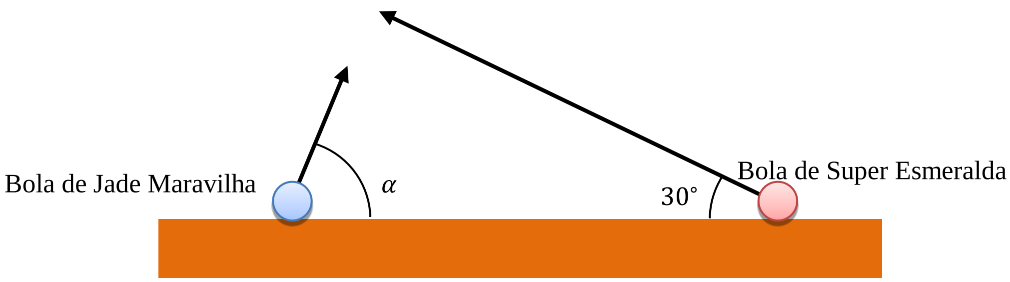
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

11) Considere cinco pontos no plano. Qual é a quantidade máxima de triângulos equiláteros com vértices em três desses cinco pontos?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

12) Veja o problema No. 18 do Nível 2.

13) Super Esmeralda e Jade Maravilha estão jogando bilhar. Super Esmeralda dá uma tacada em uma bola com velocidade de 60 km/h, com um ângulo de 30° com uma das tabelas. Jade Maravilha deve acertar a bola de Super Esmeralda com outra bola. As duas bolas partem da tabela da mesa simultaneamente, e estão a uma distância de 50 cm. Jade Maravilha pode escolher qualquer ângulo para dar a sua tacada.



Qual é a velocidade mínima com que Jade Maravilha pode dar sua tacada?

A) 15 km/h **B)** 30 km/h **C)** $30\sqrt{2}$ km/h **D)** $30\sqrt{3}$ km/h **E)** 60 km/h

14) Seja $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Considere uma função $f: S \to S$ definida pela tabela a seguir

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	8	3	5	7	2	9	6	1	4

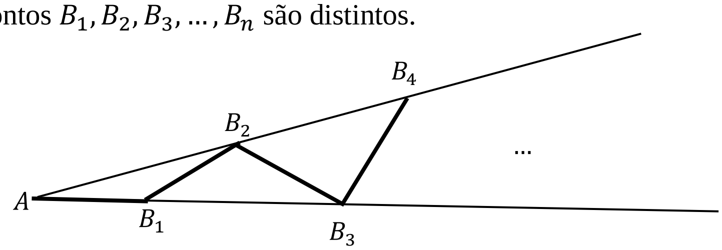
Qual é o menor valor inteiro positivo de n para o qual $\underbrace{f(f(\dots(f}_{n \text{ vezes}}(x))) = x$ para todo $x \in S$?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 12 **E)** 24

15) Uma *potência perfeita* é um número inteiro da forma a^b, a e b inteiros, $b > 1$. Seja $f(n)$ a maior potência perfeita que não excede n. Por exemplo, $f(7) = 4$, $f(8) = 8$ e $f(99) = 81$. Sorteando ao acaso um número inteiro k com $1 \leq k \leq 100$, qual a probabilidade de $f(k)$ ser um quadrado perfeito?

A) 64% **B)** 72% **C)** 81% **D)** 90% **E)** 96%

16) Na figura a seguir, $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \cdots = B_{n-1}B_n$. Os pontos $B_1, B_3, B_5, \dots$ pertencem a uma reta e os pontos $B_2, B_4, B_6, \dots$ pertencem a outra reta. Todos os pontos $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ são distintos.



Sabendo que o ângulo $B_1\hat{A}B_2$ mede 1°, qual é o maior valor possível de n?

A) 6 **B)** 7 **C)** 10 **D)** 90 **E)** n pode ser arbitrariamente grande

17) Num circo, a atração principal é a *Corrida de Pulgas*. Duas pulgas, P_1 e P_2, perfeitamente treinadas, saltam ao longo de uma linha reta, com velocidades constantes, partindo de um mesmo ponto e no mesmo instante. Cada salto da pulga P_1 tem alcance m centímetros e cada salto da pulga P_2 tem alcance n centímetros, com $m < n$, ambos inteiros. Porém a pulga P_1 é mais rápida que a pulga P_2, de modo que, independente da velocidade de P_2, P_1 sempre pode alcançá-la após alguns saltos. Supondo que, após a largada, as pulgas estarão juntas, pela primeira vez, ao final de 1 metro, determine o número de pares (m, n) possíveis.

A) 12 **B)** 24 **C)** 36 **D)** 48 **E)** 100

18) De quantos modos podemos distribuir 10 bolas brancas e 8 bolas vermelhas em cinco caixas iguais, de modo que em cada caixa haja pelo menos uma bola e que em cada caixa haja um número diferente de bolas brancas?
A) 330 **B)** 348 **C)** 512 **D)** 676 **E)** 900

19) Veja o problema No. 25 do Nível 2.

20) Para quantos inteiros positivos k menores que 2013, existem inteiros a, b e c, não necessariamente distintos, satisfazendo

$$a^2 + b + c = b^2 + c + a = c^2 + a + b = k\ ?$$

A) 43 **B)** 44 **C)** 87 **D)** 88 **E)** 89

21) No trapézio $ABCD$, com AB paralelo a CD, o ângulo $B\hat{A}D$ mede $82°$ e o ângulo $A\hat{B}C$ mede $74°$. Suponha que exista um ponto P sobre o lado CD tal que $AD + DP = PC + CB = AB$. Quanto mede o ângulo $A\hat{P}B$?
A) 76º **B)** 77º **C)** 78º **D)** 79º **E)** 80º

22) Quantos números de quatro algarismos distintos não têm 1 nas unidades, nem 2 nas dezenas, nem 3 nas centenas e nem 4 nos milhares?
A) Menos de 1000
B) Mais de 1000 e menos de 2000
C) Mais de 2000 e menos de 3000
D) Mais de 3000 e menos de 4000
E) Mais de 4000

23) Se x e y são inteiros positivos tais que $x(x + 2 + 4 + 6 + \cdots + 4024) = 2013^y$, qual é o valor de y?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

24) Um polinômio $p(x)$ é par quando $p(-x) = p(x)$, para todo x real. Qual é o número máximo de soluções reais da equação $p(x) = k$, sendo p um polinômio par não constante com coeficientes não negativos e k um real fixado?
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 4 **E)** n, em que n é o grau de $p(x)$

25) Oito dos vértices de um dodecaedro regular de aresta 1 são vértices de um cubo. Qual é o volume desse cubo?

A) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **B)** $\sqrt{5}$ **C)** $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ **D)** $1+\sqrt{5}$ **E)** $2+\sqrt{5}$

GABARITO

NÍVEL 1 (6º ou 7º anos do Ensino Fundamental)

1) C	6) C	11) C	16) D
2) D	7) E	12) D	17) B
3) C	8) B	13) B	18) D
4) A	9) D	14) A	19) E
5) E	10) C	15) A	20) D

NÍVEL 2 (8º ou 9º anos do Ensino Fundamental)

1) D	6) D	11) E	16) B	21) Anulada
2) A	7) D	12) C	17) C	22) B
3) D	8) E	13) D	18) C	23) A
4) A	9) A	14) D	19) A	24) A
5) E	10) A	15) E	20) A	25) C

NÍVEL 3 (Ensino Médio)

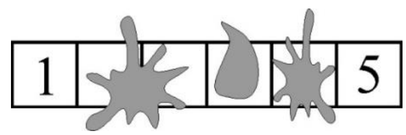
1) C	6) D	11) B	16) D	21) C
2) D	7) E	12) C	17) A	22) C
3) D	8) A	13) B	18) A	23) C
4) E	9) B	14) D	19) C	24) C
5) B	10) C	15) D	20) D	25) E

XXXV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e soluções da Segunda Fase

PROBLEMAS – NÍVEL 1 – PARTE A
(Cada problema vale 5 pontos)

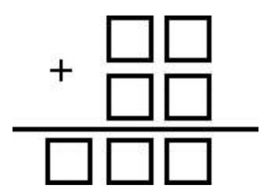
01. Raquel estava completando um quebra-cabeças que consistia em escrever seis números em sequência, um por quadradinho, de modo que a soma de três números consecutivos fosse sempre a mesma. Depois que ela completou a sequência, escrevendo os seis números, derrubou tinta sobre a revista, borrando quatro números, conforme mostra a figura. Ela se lembra de que um dos números borrados era o sete. Qual é o produto dos seis números que ela escreveu?



02. Um número natural é chamado quadrado perfeito quando ele é o quadrado de outro número natural. Por exemplo, 1 e 25 são quadrados perfeitos pois $1 = 1^2$ e $25 = 5^2$.
Qual é o menor valor de $a + b$, com a e b números naturais não nulos, para que os números $28 \cdot a^3 \cdot b$ e $7 \cdot a \cdot b^5$ sejam ambos quadrados perfeitos?

03. Jurema tem 12 peças retangulares de plástico de 3 cm por 4 cm. Ela junta essas peças fazendo coincidir seus lados iguais e monta retângulos maiores, um de cada vez. Um desses retângulos tem o maior perímetro possível. Qual é esse perímetro, em centímetros?

04. Paulo quer usar uma única vez os algarismos 0, 1, 2, 3, 5, 6 e 7, um para cada um dos quadradinhos ao lado, de modo que a conta esteja correta. Qual é o maior resultado que ele pode obter nessa conta?



05. Em uma prova de múltipla escolha, Júlia acertou 100 das 128 questões possíveis. Ela verificou que a maior quantidade de questões consecutivas que ela acertou é N. Qual é o valor mínimo para N?

06. A professora Maria escreveu no quadro-negro todos os números inteiros de 1 a 1000. Chamou um aluno e pediu que ele apagasse os números, a partir do segundo, de dois em dois. Assim, o primeiro aluno apagou o 2, depois o 4, o 6 etc. Em seguida, ela pediu que o próximo aluno fizesse o mesmo, e depois chamou outro para fazer o mesmo, até sobrar um número no quadro-negro. Quantos alunos foram até o quadro negro?

PROBLEMAS – NÍVEL 1 – PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1

Na tabela ao lado, a partir da segunda linha, o número escrito na coluna X é igual ao produto dos números da linha anterior e o número escrito na coluna Y é igual ao quociente do número escrito na coluna X da linha anterior pelo número da coluna Y da linha anterior.

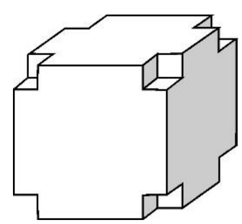
	X	**Y**
1ª	2	1
2ª	2	2
3ª	4	1
4ª	4	4
	...	...

a) Quais são os dois números que aparecem na décima linha? Você pode apresentar a sua resposta usando potências.

b) Qual é a soma dos números que aparecem na linha 2013? Você pode apresentar a sua resposta usando potências.

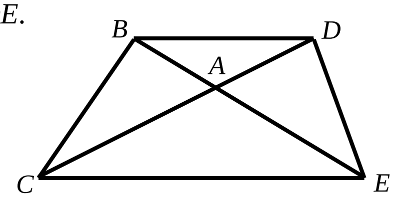
PROBLEMA 2

O ourives Carlos tem um cubo de madeira de arestas de 10 centímetros. Ele retira cubos de 2 centímetros de aresta de cada vértice do cubo e cola sobre toda a superfície do sólido resultante uma folha fina de ouro ao preço de 8 reais por centímetro quadrado. Sem desperdícios, qual é o custo em reais dessa cobertura?

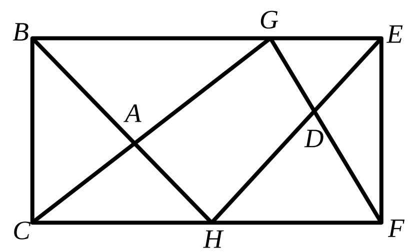


PROBLEMA 3

a) Temos abaixo um trapézio e suas diagonais. Mostre que a área do triângulo ABC é igual à área do triângulo ADE.



b) Na figura a seguir, $BCFE$ é um retângulo, o triângulo ABC tem área 5cm^2 e o triângulo DEF tem área 4cm^2. Calcule a área do quadrilátero $AGDH$.



PROBLEMAS – NÍVEL 2 – PARTE A
(Cada problema vale 4 pontos)

01. Dado o conjunto $\{1, 2, 3, ..., 18\}$, qual a menor quantidade de números distintos que devemos escolher para termos certeza de que há pelo menos 3 números consecutivos entre os escolhidos?

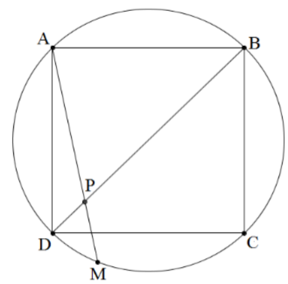
02. Abel guardou suas economias num cofre. Para não esquecer a senha do cofre, ele resolve guardar as seguintes pistas:

- É um número maior que 3001;
- Tem 6 divisores;
- É múltiplo de 5.

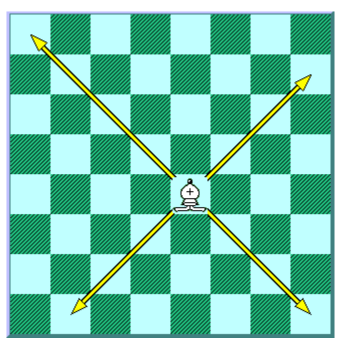
Abel sabe que sua senha é o menor número que satisfaz todas as pistas. Qual é a senha do cofre de Abel?

03. Uma hora potência é uma hora cujo formato representa uma potência perfeita de número inteiro com expoente maior que 1, ou seja, algo no formato a^b em que *a* e *b* são inteiros e $b > 1$. Por exemplo, 03:43 é uma hora potência afinal $343 = 7^3$, mas 01:10 não é uma hora potência, afinal 110 não é potência exata de número inteiro. Também 02:89 não é hora potência, embora $289 = 17^2$, pois não existe a hora 02:89 já que os minutos vão apenas até 60. Quantas horas potências existem depois de 00:00 e antes de 02:59 ?

04. O quadrado *ABCD* está inscrito em um círculo cujo raio mede 30. A corda *AM* intercepta a diagonal *BD* no ponto *P*. Se o segmento *AM* mede 50, determine a medida do segmento *AP*.



05. Um *bispo* é uma peça do jogo de xadrez que só pode fazer movimentos diagonais, isto é, ele pode se deslocar quantas casas quiser desde que elas estejam em uma diagonal. Na figura abaixo, indicamos as possíveis direções de movimentos do bispo a partir de uma determinada casa do tabuleiro. Dizemos que dois bispos se *atacam* quando um deles está em uma casa do tabuleiro que pode ser alcançada pelo outro bispo. Qual é o maior número de bispos que podemos colocar em um tabuleiro 8×8 sem que haja dois bispos se atacando?



PROBLEMAS – NÍVEL 2 – PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1

Na tabela ao lado, a partir da segunda linha, o número escrito na coluna X é igual ao produto dos números da linha anterior e o número escrito na coluna Y é igual ao quociente da divisão do número escrito na coluna X da linha anterior pelo número da coluna Y da linha anterior.

a) Qual o maior número que aparece na décima linha?
b) Qual é a soma dos números que aparecem na linha 21?

	X	Y
1ª	2	1
2ª	2	2
3ª	4	1
...	...	...

PROBLEMA 2

Determine o número de quádruplas ordenadas de inteiros positivos (x, y, z, w) que satisfazem

$$x \cdot y \cdot z \cdot w = 2013.$$

PROBLEMA 3

Led, um famoso herói de jogos, tem um novo desafio: abrir o portal do dragão. O portal possui 10 cadeados distintos. Para o portal ser aberto, o herói deve possuir pelo menos uma chave para cada cadeado. Para conseguir as chaves dos cadeados, Led deve abrir caixas espalhadas pelo jogo. Existem 45 caixas em tal jogo e cada uma delas contém duas chaves distintas. Além disso, cada chave abre exatamente um dos 10 cadeados, duas chaves de uma mesma caixa abrem cadeados diferentes e não existem duas caixas tais que suas chaves abrem exatamente os mesmos dois cadeados. Qual o número mínimo de caixas que Led deve abrir para garantir a posse de 10 chaves distintas e assim abrir o portal?

PROBLEMA 4

Seja M o ponto médio do segmento AC do triângulo ABC. Se $\angle ABM = 2 \cdot \angle BAM$ e $BC = 2 \cdot BM$, determine a medida, em graus, do maior ângulo do triângulo ABC.

PROBLEMAS – NÍVEL 3 – PARTE A
(Cada problema vale 4 pontos)

01. Um retângulo, o qual não é um quadrado, tem lados com comprimentos inteiros, medidos em centímetros. Se o seu perímetro é n centímetros e sua área é n centímetros quadrados, determine n.

02. Veja o problema No. 5 do Nível 2 – Parte A.

03. Observe que

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Assim, podemos calcular a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots = 1.$$

Sabendo que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$, o valor de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{1}{1 \cdot 2^2} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3 \cdot 4^2} + \cdots$$

É da forma $A - \frac{\pi^2}{B}$, com A e B inteiros positivos. Determine o valor de $A + B$.

04. Seja $A = \{1,2,3,\dots,20\}$ o conjunto dos 20 primeiros inteiros positivos. Para cada subconjunto X de 15 elementos de A, calculamos o produto $p(X)$ de seus elementos. Por exemplo, $p(\{1,2,3,\dots,15\}) = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 15 = 15!$. Qual é o máximo divisor comum dos $\binom{20}{15}$ produtos $p(X)$ obtidos com todos os subconjuntos de 15 elementos de A?

05. Pode-se provar que num triângulo acutângulo ABC, o triângulo DEF com D, E e F sobre os lados BC, CA e AB respectivamente com perímetro mínimo é obtido quando D, E e F são as interseções das alturas com os lados. Tal triângulo é o *triângulo órtico* de ABC. Se $AB = 13$, $BC = 14$ e $CA = 15$, o perímetro de seu triângulo órtico pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros primos entre si. Determine o valor de $a + b$.

PROBLEMAS – NÍVEL 3 – PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1

O quadrado *ABCD* está inscrito em um círculo de raio 30. A corda *AM* corta a diagonal *BD* no ponto *P*. Se *AM* = 50, encontre o valor de *AP*.

PROBLEMA 2

Para cobrir um tabuleiro de dimensões 1×112, podemos utilizar heptaminós amarelos, de dimensões 1×7, e octaminós vermelhos, de dimensões 1×8. De quantos modos podemos cobrir completamente o tabuleiro?

PROBLEMA 3

Determine o número de quádruplas ordenadas (x, y, z, w) de reais tais que

$$\begin{cases} -x^3 = y + z + w \\ -y^3 = z + w + x \\ -z^3 = w + x + y \\ -w^3 = x + y + z \end{cases}$$

PROBLEMA 4

Escrevemos a soma dos recíprocos dos números de 1 a 2013 como a fração irredutível $\frac{A}{B}$, ou seja,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2013} = \frac{A}{B}, \qquad \mathrm{mdc}(A, B) = 1$$

Qual é o maior valor inteiro de n tal que B é múltiplo de 3^n?

SOLUÇÕES NÍVEL 1 – SEGUNDA FASE – PARTE A

Problema	01	02	03	04	05	06
Resposta	1225	0008	0102	0120	0004	0010

01. [Resposta: 1225]

Solução: Veja que, se a soma do primeiro, segundo e terceiro é igual à soma do segundo, terceiro e quarto, então o primeiro é igual ao quarto. Do mesmo modo, temos o segundo igual ao quinto e o terceiro igual ao sexto. Assim:

1	x	5	1	x	5

onde x é desconhecido. Porém, sabemos que 7 deveria aparecer e, logo, $x = 7$. Portanto o produto de todos os 6 números é $1 \times 7 \times 5 \times 1 \times 7 \times 5 = 1225$.

02. [Resposta: 0008]
Solução: Um número é quadrado perfeito quando os primos em sua fatoração tem expoente par. Assim, observando que $28 = 7^1.2^2$ e $7 = 7^1$, nota-se que devemos intervir no expoente do 7. Fora isso, não devemos nos preocupar com o 2, pois o seu expoente em 28 é 2, que é par. Então, pelo menos um dos números a ou b é divísvel por 7, ou seja, um deles é pelo menos 7 e o outro é pelo menos 1. Logo a soma é no mínimo 8.
Note que os valores $a = 7$ e $b = 1$ satisfazem a condição, já que $28 \cdot a^3 \cdot b = 98^2$ e que $7 \cdot a \cdot b^5 = 7^2$.

03. [Resposta: 0102]
Solução: Sendo x a quantidade de retângulos que enfileiramos com o lado 3 cm e y a quantidade que enfileiramos com o lado 4 cm, então $x \cdot y = 12$ é o total de retângulos e o perímetro é $3x + 3x + 4y + 4y = 6x + 8y$.
E assim, temos apenas que verificar os seguintes casos:

$$x = 1, y = 12 \to perímetro = 102$$
$$x = 2, y = 6 \to perímetro = 60$$
$$x = 3, y = 4 \to perímetro = 50$$
$$x = 4, y = 3 \to perímetro = 48$$
$$x = 6, y = 2 \to perímetro = 52$$
$$x = 12, y = 1 \to perímetro = 80$$

Vemos, portanto, que o perímetro máximo é 102.

04. [Resposta: 0120]
Solução: Veja que o maior resultado dessa conta acontece quando pegamos o maior par de números possíveis nas dezenas dos números somados. Além disso, devemos ter um "vai um", pois o resultado possui 3 dígitos. Assim, considere os maiores pares em ordem decrescente:

- Caso 7 e 6: no resultado teríamos nas centenas e dezenas 13 ou 14 (havendo vai um das unidades), mas como não temos 4, então teria que ser 13. Aí sobram apenas $0, 2$ e 5 para completar a conta, o que não é possível.

- Caso 7 e 5: no resultado teríamos nas centenas e dezenas 12 ou 13. Restaria nas unidades $0, 3, 6$ ou $0, 2, 6$. E nos dois casos não é possível completar a expressão.

- Caso 5 e 6: no resultado teríamos nas centenas e dezenas 11 ou 12. Como só temos um dígito 1, teria que ser o 12, sobrando $0, 3$ e 7 que permite completar a expressão, que seria $67 + 53 = 120$ ou $63 + 57 = 120$.

Note que se pegarmos uma combinação menor das dezenas teremos soma máxima 10 ou 11, com um "vai um", geraria números menores que 120.

05. [Resposta: 0004]
Solução:
Vamos supor que esse máximo fosse 3. Sendo C a questão que ela marcou a alternativa correta e E a questão que ela errou, então, a maior quantidade que Júlia poderia acertar ocorreria quando

$$C, C, C, E, C, C, C, E, C, C, C, E \ldots$$

Ou seja, ela acertaria 3 e erraria 1 em cada 4 questões. Ora, mas isso seria igual a $\frac{3}{4} \cdot 128 = 96$, que é menor do que as 100 que ela acertou. Desse modo, $N > 3$.
Analisando o caso seguinte, veja que ela pode acertar, por exemplo,

$$C, C, C, C, E, C, C, C, C, E, \ldots, C, C, C, C, E, E, E, E$$

onde ela acertaria $\frac{4}{5} \cdot 125 = 100$ questões até a questão 125 e ela erraria as 3 últimas.

06. [Resposta: 0010]
Solução:
Veja que, se antes de um aluno ir ao quadro, havia n números, então:

- Se n é par, passamos a ter $\frac{n}{2}$ números, apagando-se o segundo, o quarto, ..., e o n-ésimo.
- Se n é ímpar, passamos a ter $\frac{n+1}{2}$ números, apagando-se o segundo, o quarto, ..., e o $(n-1)$-ésimo.

Vamos então olhar quantos números restam após cada aluno ir até o quadro:

$$1000 \to 500 \to 250 \to 125 \to 63 \to 32 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$$

Ou seja, vemos que 10 alunos foram até o quadro.

SOLUÇÕES NÍVEL 1 – SEGUNDA FASE – PARTE B

PROBLEMA 1:

a)

linha	X	Y
1	2	1
2	2	2
3	2^2	1
4	2^2	2^2
5	2^4	1
6	2^4	2^4
7	2^8	1
8	2^8	2^8
9	2^{16}	1
10	2^{16}	2^{16}

b) Vemos, na tabela acima, que os expoentes do 2 nas linhas 2, 4, 6, 8 e 10 são, respectivamente, 1, 2, 4, 8 e 16, isto é, dobram a cada duas linhas. Assim, na linha de número $2n$, o expoente do 2 é 2^{n-1}. Portanto, na linha 2012, o expoente de 2 é 2^{1005} isto é $X = Y = 2^{2^{1005}}$.

Assim, na linha 2013 o expoente de 2 é $2^{2^{1005}} \times 2^{2^{1005}} = 2^{2^{1005}+2^{1005}} = 2^{2\times 2^{1005}} = 2^{2^{1+1005}} = 2^{2^{1006}}$.

Logo $X + Y = 2^{2^{1006}} + 1$

PROBLEMA 2

O corte dos cubinhos em cada vértice do cubo não muda a superfície total do cubo (é como retirar e aumentar três faces de cada cubinho), igual a $6 \times 10^2 = 600\,\text{cm}^2$.
Logo o preço do revestimento é 8 x R$ 600 = R$ 4.800,00.

PROBLEMA 3

a) Como a base BD é paralela à base CE, os triângulos BCD e BED têm a mesma base e a mesma altura, logo têm a mesma área. Como a intersecção desses dois triângulos é o triângulo ABD, concluímos que [BCD] – [ABD] = [BED] – [ABD], ou seja, [ABC] = [ADE].

b) Trace o segmento GH. Os quadriláteros BCHG e EFHG são trapézios. No trapézio BCHG, pelo item a, temos [ABC] = [AGH] = 5 cm^2 e no trapézio EFHG temos [EDF] = [DGH] = 4 cm^2.
Portanto a área do quadrilátero AGDH é [AGH] + [DGH] = 5 + 4 = 9 cm^2.

SOLUÇÕES NÍVEL 2 – SEGUNDA FASE – PARTE A

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**
Resposta	0013	3125 ou 3010	0019	0036	0014	0013

01.[Resposta: 0013]
Solução: Tome os seguintes subconjuntos de três elementos: $\{1,2,3\}; \{4,5,6\}; \ldots; \{16,17,18\}$.

Temos 6 conjuntos. Se tomarmos os dois primeiros elementos de cada conjunto, teremos 12 elementos sem que hajam três consecutivos. Já se tomarmos 13 elementos, pelo princípio das casas dos pombos, tomaremos 3 elementos de um mesmo subconjunto descrito formando assim três elementos consecutivos.
02.[Resposta: 3125 ou 3010]
Houve um pequeno erro no enunciado. A segunda pista deveria ser *"tem exatamente 6 divisores"*. Por isso, aceitam-se duas respostas, uma para cada interpretação possível.

Caso seja feito com exatamente 6 divisores.
Comecemos usando a segunda pista. Se um número possui 6 divisores, então sua fatoração em números primos só pode ser da forma p^6 ou r^2s, para primos r e s distintos.

Pela terceira pista, teremos os seguintes casos para analisar:

- p^5 com $p = 5$.

Neste caso, teremos o número $5^5 = 3125$, que é maior que 3001.

- r^2s com $r = 5$.

Então teremos $25.s$. Para ser maior que 3001, devemos ter $s > \frac{3001}{25} > \frac{3000}{25} = 120$. Notando que não há primos de 121 até 125, vemos que $s > 125$ e consequentemente $r^2s > 3125$. Portanto, este caso gera apenas soluções maiores que 3125.

- $r^2 s$ com $s = 5$.

Teremos o números $5.r^2$. Usando a primeira pista, devemos ter $r^2 > \frac{3001}{5} > \frac{3000}{5} = 600$. Logo, $r^2 > 24^2$, ou seja, $r \geq 25$. Mas como 25 não é primo, teríamos $r > 25$ e consequentemente $r^2 s > 3125$. Então, este caso gera soluções maiores que 3125.
A senha de Abel é 3125.

Caso seja feito sem considerar exatamente 6 divisores, ou seja, possuir 6 ou mais divisores.
Observe que o número é múltiplo de 5 maior que 3001. Fazendo os testes vemos que 3005 possui apenas 4 divisores. O seguinte 3010 possui 16 divisores. Logo, nessa interpretação a senha de Abel é 3010.

03.[Resposta: 0019]
Solução: Vamos contar as potências perfeitas de 0 a 259. Veja que, basta olharmos os expoentes primos, pois se tivermos uma potência composta da forma $x.p$, com p primo, também teremos a potência de um primo uma vez que $a^{xp} = (a^x)^p$. Temos:

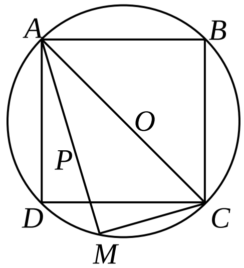
- 16 quadrados perfeitos $1^2, 2^2, \ldots, 16^2$
- 6 cubos perfeitos $1^3, 2^3, \ldots, 6^3$
- 3 potências quintas $1^5, 2^5$e 3^5
- 2 potências sétimas 1^7 e 2^7:

Como citado, as potências de expoentes 4, 6 e 8 já estão incluídas nas potências de 2. Note também que as potências de expoente 9 ou maior, mesmo com base 2, são maiores que 259 e, as que possuem base 1, já foram contadas.

Daí, tomando o cuidado de tirar 3 vezes o número 1, pois ele está sendo contado 4 vezes e 1 vez o número 64 que está sendo contado duas vezes ($64 = 8^2 = 4^3$), concluímos a princípio que existiriam 16 + 6 + 3 + 2 – 3 – 1 = 23 possíveis horas potências distintas.

Entretanto, as potências 8^2, 9^2, 13^2 e 14^2 são as que possuem o número formado pelas dezenas e unidades maiores que 60, logo não são horas potências. Finalmente, temos que a quantidade de horas potências depois de 00:00 e antes de 02:59 é 23 – 4 = 19.

04.[Resposta: 0036]



Trace a diagonal AC que intersecta DB no ponto O. Sendo $ABCD$ um quadrado, O é o centro da circunferência.

Observe que $\angle CMA = 90^\circ$ e $\angle POA = \angle DOA = 90^\circ$. Logo, pelo caso AA, os triângulos AOP e AMC são semelhantes e, portanto,

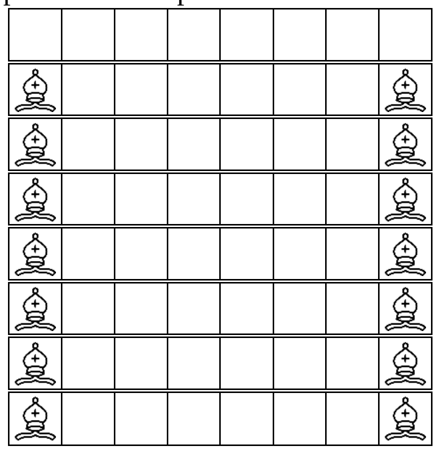
$$\frac{AP}{AC} = \frac{AO}{AM} \Leftrightarrow \frac{AP}{60} = \frac{30}{50} \Leftrightarrow AP = 36$$

05.[Resposta: 0014]

Solução: Um tabuleiro 8 × 8 pode ser dividido em 15 diagonais, como mostra a figura a seguir:

8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8

Dois bispos não podem estar na mesma diagonal; além disso, não é possível que dois bispos ocupem as casas 1 e 15. Logo, há no máximo 14 bispos. A figura a seguir mostra um exemplo com 14 bispos:



Observação: generalizando a ideia acima, prova-se que, em um tabuleiro $n \times n$, a quantidade máxima de bispos é $2n - 2$.

SOLUÇÕES NÍVEL 2 – SEGUNDA FASE – PARTE B

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1

a)

linha	X	Y
1	2	1
2	2	2
3	2^2	1
4	2^2	2^2
5	2^4	1
6	2^4	2^4
7	2^8	1
8	2^8	2^8
9	2^{16}	1
10	2^{16}	2^{16}

b) Vemos, na tabela acima, que os expoentes de 2 nas linhas 2, 4, 6, 8 e 10 são, respectivamente 1, 2, 4, 8 e 16, isto é, dobram a cada duas linhas. Assim, na linha de número $2n$, o expoente de 2 é 2^{n-1}. Portanto, na linha 20, o expoente de 2 é 2^9, isto é, $X = Y = 2^{2^9}$. Portanto, na linha 21, o expoente de 2 é

$$2^{2^9}.2^{2^9} = 2^{2^9+2^9} = 2^{2.2^9} = 2^{2^{10}}.$$

Logo, na linha 21, teremos a soma: $X + Y = 2^{2^{10}} + 1$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2

Como $2013 = 3.11.61$, cada um desses primos deve aparecer na fatoração de exatamente um dos quatro números *x*,*y*,*z* e *w*. Temos 4 opções para escolher em que número da quádrupla o primo irá aparecer, portanto, o número de quádruplas é $4^3 = 64$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3

Suponha que, após abrir C caixas, Led ainda não consiga abrir o portal. Isso significa que há pelo menos uma chave que ele não possui.

Então, as caixas que ele abriu possuíam pares de chaves capazes de abrir não mais que 9 cadeados. Logo, teremos $C \leq \binom{9}{2} = \frac{9.8}{2} = 36$. De fato, se ele abrir caixas que possuem todos os pares das chaves de um conjunto de 9 cadeados ele não conseguirá abrir o portal.

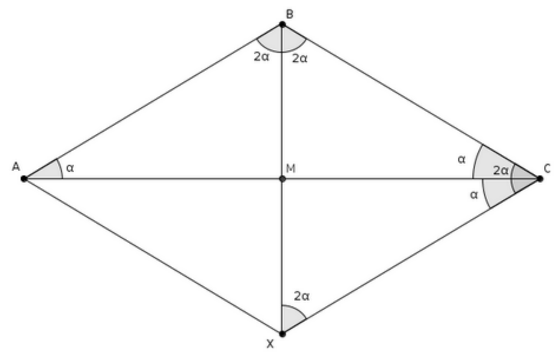
Por outro lado, nota-se também que se Led abrir 37 caixas distintas, saberemos que suas chaves não poderão ser um subconjunto de chaves capazes de abrir não mais que 9 cadeados, pois é maior que 36.

Então, o número mínimo de caixas que Led deve abrir é 37.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4

Solução 1:

Sejam α o valor do ângulo $\angle BAC$ e X o simétrico de B em relação à M, ou seja, $AXCB$ é um paralelogramo.

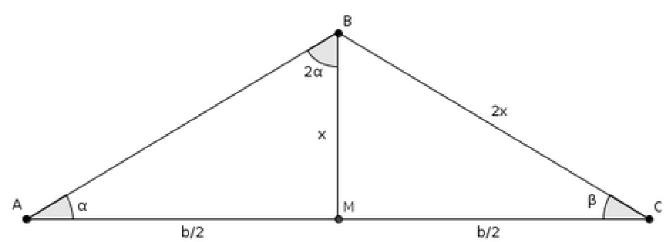


Como $BC = 2.BM$, temos que o ΔBXC é isósceles em B e, por conseguinte, $\angle BCX = \angle BXC = \angle ABM = 2\alpha$. Partindo de $\angle MCX = \angle BAM = \alpha$, temos que $\angle ACB = \angle BCX - \angle MCX = 2\alpha - \alpha = \alpha$.

Por outro lado, de $\angle MCX = \angle BAM = \alpha$ temos que o ΔABC é isósceles em B. Sabendo que BM é mediana, também temos que $\angle MBC = \angle MBA = 2\alpha$. Analisando os ângulos do triângulo *ABC*, temos vemos $\alpha + 2\alpha + 2\alpha + \alpha = 180°$ e consequentemente $\alpha = 30°$. Assim, os ângulos do triângulo *ABC* são $\angle BAC = 30°$, $\angle ABC = 120°$ e $\angle ACB = 30°$. Logo, o maior ângulo é 120°.

Solução 2:

Sejam α o valor do ângulo$\angle BAC$ e β o valor do ângulo $\angle BCA$. Sejam b e x os comprimentos dos lados AC e BM, respectivamente. Pelo enunciado, $\angle ABM = 2\alpha$ e $BC = 2x$.



Por lei dos senos no ΔABM, temos: $\frac{AM}{sen\ 2\alpha} = \frac{BM}{sen\ \alpha} \Rightarrow \frac{\frac{b}{2}}{sen\ 2\alpha} = \frac{x}{sen\ \alpha} \Rightarrow \frac{b}{2x} = \frac{sen\ 2\alpha}{sen\ \alpha}\ (I)$

Novamente, usando lei dos senos no ΔABC, temos que:

$$\frac{AC}{sen(180° - \alpha - \beta)} = \frac{BC}{sen\ \alpha} \Rightarrow \frac{b}{sen(\alpha + \beta)} = \frac{2x}{sen\ \alpha} \Rightarrow \frac{b}{2x} = \frac{sen(\alpha + \beta)}{sen\ \alpha}\ (II)$$

Juntando as equações (I) e(II), temos que:$sen\ 2\alpha = sen(\alpha + \beta)$. Daí, separamos em dois casos:

Caso 1:$2\alpha = \alpha + \beta \rightarrow \alpha = \beta$.

Neste caso, concluímos que ΔABCé isósceles em B. Sabendo que BM é mediana, temos $\angle MBC = \angle MBA = 2\alpha$. Segue o final da solução 1, ou seja, $\alpha = 30°$ e os ângulos do triângulo *ABC* são $\angle BAC = 30°$, $\angle ABC = 120°$ e $\angle ACB = 30°$. Logo, o maior ângulo é 120°.
Caso 2: $2\alpha + \alpha + \beta = 180° \Rightarrow\ 3\alpha + \beta = 180°$
Observando a soma dos ângulos do ΔABC, temos que: $\angle BAC + \angle MBA + \angle MBC + \angle BCA = 180° \Rightarrow 2\alpha + \alpha + \angle MBC + \beta = 180° \Rightarrow \angle MBC = 0°$.
Portanto, este caso não pode acontecer.

SOLUÇÕES NÍVEL 3 – SEGUNDA FASE – PARTE A

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**
Resposta	0018	0014	0008	0096	1409

01. [Resposta: 0018]
Solução: Sejam $a < b$ os lados do retângulo. Então $2(a + b) = ab = n$, e $ab - 2a - 2b = 0$ é equivalente a $(a - 2)(b - 2) = 4$. Como a e b são diferentes, $a - 2 = 1$ e $b - 2 = 4$, de modo que $a = 3$ e $b = 6$, e $n = 2(3 + 6) = 18$.

02. [Resposta: 0014]
Solução: Veja o problema No. 5 do Nível 2 – Parte A.

03. [Resposta: 0008]
Solução: Temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right) = 1 - \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) = 2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

Sendo A e B inteiros positivos, $A = 2$ e $B = 6$, de modo que $A + B = 8$.

04. [Resposta: 0096]

Solução: Contemos os fatores primos que podem aparecer entre 1 e 20:

- 10 + 5 + 2 + 1 = 18 fatores 2 (10 pares, 5 múltiplos de 4, 2 múltiplos de 8 e 1 múltimplo de 16);
- 6 + 2 = 8 fatores 3 (6 múltiplos de 3 e 2 múltiplos de 9);
- 4 fatores 5;
- 2 fatores 7;
- 1 de cada um dos fatores 11, 13, 17 e 19.

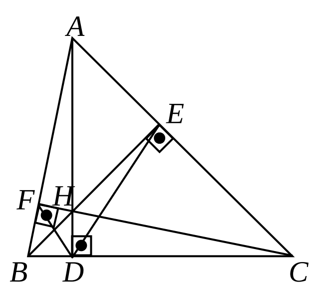
Ao fazermos o produto de 15 números entre 1 e 20, deixamos 5 números de fora. Assim, existem subconjuntos X_i, i = 5, 7, 11, 13, 17 e 19, tais que $p(X_i)$ não têm fator i (deixamos todos os múltiplos de i de fora). Em compensação, há pelo menos 6 – 5 = 1 múltiplo de 3 e 10 – 5 = 5 múltiplos de 2. É possível fazer com que cada múltiplo de 3 tenha somente um fator 3 (escolhemos só o 3, por exemplo) e cada múltiplo de 2 tenha somente um fator 2 (escolhemos 2, 6, 10, 14 e 18). Logo o mdc pedido é $2^5 \cdot 3 = 96$.

05. [Resposta: 1409]

Solução: Primeiro, considere o seguinte lema:

Lema: As alturas *AD*, *BE* e *CF* do triângulo acutângulo *ABC* são as bissetrizes internas de seu triângulo órtico.

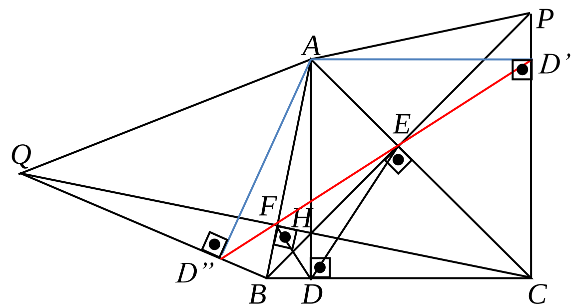
Demonstração: Mostraremos que $\angle ADE = \angle ADF$, ou seja, que *AD* é bissetriz interna de $\angle EDF$. Com isso e os resultados análogos, o lema segue.



Para tanto, basta notar que o quadrilátero *DHEC*, em que *H* é o ortocentro de *ABC*, é cíclico, já que os ângulos $\angle CDH$ e $\angle CEH$ são retos. Com isso,

$\angle ADE = \angle HDE = \angle HCE = \angle ACF = 90^\circ - \angle A$. Analogamente, $\angle ADF = 90^\circ - \angle A$, e o resultado segue.

Agora, voltemos ao problema. Sejam *P* e *Q* as reflexões de *B* e *C* em relação a *AC* e *AB*, respectivamente. Note que os triângulos *ABQ*, *ABC* e *APC* são congruentes.



Sejam *AD*' e *AD''* as alturas relativas a *A* nos triângulos *APC* e *ABQ*, respectivamente. Pelo lema, temos $\angle PED' = \angle BED = \angle BEF$, de modo que *D'*, *E* e *F* são colineares, e pela simetria, *D'E* = *DE*. Analogamente, *D''* está na reta *EF* também e *D''F* = *DF*. Portanto o perímetro de *DEF* é *DE* + *EF* + *DF* = *D'E* + *EF* + *D''F* = *D'D''*. Assim, basta calcular o comprimento do segmento *D'D''*.

No triângulo *D'AD''*, temos *AD'* = *AD''* = *AD* e $\angle D'AD'' = \angle D'AC + \angle A + \angle D'AB = \angle DAC + \angle A + \angle DAB = 2\angle A$. Logo, dividindo o triângulo isósceles *D'AD''* em dois triângulos retângulos congruentes, temos *D'D''* = 2*AD*sen*A*.

Agora note que o triângulo *ABC* é a união de dois triângulos retângulos *ABD* e *ACD* com lados 5, 12, 13 e 9, 12, 15, respectivamente. Logo *AD* = 12 e a área do triângulo *ABC* é $\frac{14 \cdot 12}{2} = 84$. Logo $\frac{AC \cdot AB \cdot \text{sen}\, A}{2} = 84 \Leftrightarrow \text{sen}\, A = \frac{168}{13 \cdot 15}$ e o perímetro de *DEF* é *D'D''* = $2 \cdot 12 \cdot \frac{168}{13 \cdot 15} = \frac{1344}{65}$, de modo que a soma pedida é 1344 + 65 = 1409.

SOLUÇÕES NÍVEL 3 – SEGUNDA FASE – PARTE B

PROBLEMA 1

Veja o problema No. 5 do Nível 2 – Parte A.

PROBLEMA 2

Suponha que vamos usar x heptaminós e y octaminós. Então para cobrir tudo, temos $7x + 8y = 112$. Mas $112 = 2\cdot 7\cdot 8$ é múltiplo de 7 e de 8, logo $7x = 112 - 8y = 8(14 - y)$ é múltiplo de 8 e $8y = 112 - 7x = 7(16 - x)$ é múltiplo de 7. Como 7 e 8 são primos entre si, x é múltiplo de 8 e y é múltiplo de 7. Sendo $x = 8t$ e $y = 7u$, temos $7\cdot 8t + 8\cdot 7u = 112 \Leftrightarrow t + u = 2$. Assim, os valores de (t,u) são (0,2), (1,1) e (2,0), que correspondem a (x,y) sendo (0,14), (8,7) e (16,0).

Caso 1: $(x,y) = (0,14)$: apenas uma maneira de cobrir, já que todas as peças são octaminós.

Caso 2: $(x,y) = (8,7)$: temos no total 8 + 7 = 15 peças que colocaremos no tabuleiro. Lembrando que elas vão ser colocadas uma seguida da outra, sem deixar "buracos" e que elas são de cores distintas, temos apenas que escolher as posições na ordem em que colocaremos os heptaminós. Sendo assim há $\binom{15}{8} = 6435$ preenchimentos nesse caso.

Caso 3: $(x,y) = (16,0)$: análogo ao caso 1, apenas uma maneira.

Logo, no total temos $\binom{15}{8} + 2 = 6437$ maneiras de cobrir completamente o tabuleiro.

PROBLEMA 3

Seja $S = x + y + z + w$. Então o sistema é equivalente a $-x^3 + x = -y^3 + y = -z^3 + z = -w^3 + w = S$. Fixando S, temos que x, y, z e w são soluções da equação de terceiro grau $t^3 - t + S = 0$, que tem no máximo 3 raízes. Logo pelo menos dois dos números x, y, z, w são iguais. Consideremos então os seguintes casos:

• $\boldsymbol{x = y = z = w}$: substituindo no sistema, temos a equação $-x^3 = 3x \Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 = -3$. Logo a única solução nesse caso é (0,0,0,0).

• $\boldsymbol{x = y = z = a}$ **e** $\boldsymbol{w = b \neq a}$. Nesse caso, obtemos o sistema $-a^3 = 2a + b$ e $-b^3 = 3a$. Substituindo $a = -b^3/3$, obtemos $b^9/27 = -2b^3/3 + b$. Se $b = 0$, obtemos $a = b = 0$, o que não é possível. Logo o sistema é equivalente a $a = -b^3/3$ e $b^8 + 18b^2 - 27 = 0$. A função $f(x) = x^8 + 18x^2 - 27$ é par (isto é, $f(-x) = f(x)$) e é crescente para $x > 0$. Assim, como $f(0) < 0$ e $f(2) > 0$, a equação $b^8 + 18b^2 - 27 = 0$ tem duas soluções r e

$-r$, e nesse caso, temos $a = -r^3/3$ e $b = r$ ou $a = r^3/3$ e $b = -r$. Como há 4 anagramas de $aaab$, há $2\cdot 4 = 8$ soluções nesse caso.

• $\boldsymbol{x = y = a}$ **e** $\boldsymbol{z = w = b \neq a}$. Nesse caso, obtemos o sistema $-a^3 = a + 2b$ e $-b^3 = 2a + b$. Somando as duas equações obtemos $-(a^3 + b^3) = 3(a + b) \Leftrightarrow a + b = 0$ ou $a^2 + ab + b = -3$. O segundo caso é impossível, pois $a^2 + ab + b^2 = (a + b/2)^2 + 3b^2/4 \geq 0$. No primeiro caso, temos $-a^3 = a - 2a$ e $-b^3 = -2b + b$, ou seja, $a^3 = a$ e $b^3 = b$. Como a e b são diferentes, temos $\{a, b\} = \{-1, 1\}$. Nesse caso, como há $\frac{4!}{2!2!} = 6$ anagramas de $aabb$, há seis soluções nesse caso.

• $\boldsymbol{x = y = a, z = b}$ **e** $\boldsymbol{w = c, a, b, c}$ **distintos**. Nesse caso, temos $-a^3 = a + b + c$, $-b^3 = 2a + c$ e $-c^3 = 2a + b$. Subtraindo a primeira equação das outras duas, temos $a^3 - b^3 = a - b$ e $a^3 - c^3 = a - c$. Como a, b e c são distintos, temos $a^2 + ab + b^2 = a^2 + ac + c^2 = 1$ (*), de modo que $ab + b^2 = ac + c^2 \Leftrightarrow a(b - c) + (b - c)(b + c) \Leftrightarrow a + b + c = 0$. Logo $-a^3 = 0 \Leftrightarrow a = 0$, e em (*) temos $b^2 = c^2 = 1$, de modo que $\{b, c\} = \{-1, 1\}$. Verifica-se que esses valores de a, b e c satisfazem o sistema. Como há $\frac{4!}{2!1!1!} = 12$ anagramas de $aabc$, nesse caso há 12 soluções.

Portanto o total de soluções reais é $1 + 8 + 6 + 12 = 27$.

PROBLEMA 4

Vamos separar as frações nas maiores potências de 3 que dividem o denominador. Como $3^6 = 729 < 2013 < 2187 = 3^7$, não aparece 3^7 no denominador. Somando frações com denominadores $3^6 = 729$ e $2\cdot 3^6 < 2013$, temos

$$\frac{1}{3^6} + \frac{1}{2\cdot 3^6} = \frac{2+1}{2\cdot 3^6} = \frac{1}{2\cdot 3^5}$$

Assim, não aparece 3^6 no denominador, pois ele é cancelado.

Vejamos agora os denominadores com múltiplos de $3^5 = 243$. Tomemos o cuidado de não tomar frações já tratadas, ou seja, tomemos $243k$ onde k não é múltiplo de 3. Veja ainda que $243\cdot 8 < 2013 < 243\cdot 9$, logo obtemos:

$$\frac{1}{3^5} + \frac{1}{2\cdot 3^5} + \frac{1}{4\cdot 3^5} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^5} + \frac{1}{8\cdot 3^5}$$
$$= \frac{1}{3^5}\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{3^5}\left(\frac{9}{8} + \frac{9}{14} + \frac{9}{20}\right) = \frac{1}{3^3}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{14} + \frac{1}{20}\right)$$

Aqui, juntamos as frações das pontas:

$$\frac{1}{3^5 t} + \frac{1}{3^5(9-t)} = \frac{9-t+t}{3^5 t(9-t)} = \frac{1}{3^3 t(9-t)}\ .$$

Então, a soma das frações com denominador com exatamente cinco fatores 3 têm como maior potência de 3 divisora do denominador no máximo 27. Ou seja:

$$\frac{1}{3^5} + \frac{1}{2\cdot 3^5} + \frac{1}{4\cdot 3^5} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^5} + \frac{1}{8\cdot 3^5} = \frac{A_1}{3^3 B_1}$$, com B_1 não múltiplo de 3.

A_1 pode ser múltiplo de 3, mas isso não irá interferir, como veremos a seguir.

Somando todas as outras frações, temos que a maior potência de 3 que divide algum denominador é 3^4. Logo tal soma é da forma $\frac{A_0}{3^4 B_0}$, em que B_0 não é múltiplo de 3.

Somando tudo, temos a soma total

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{2\cdot 3^5} + \frac{A_1}{3^3 B_1} + \frac{A_0}{3^4 B_0} = \frac{B_1 B_0 + 2\cdot 3(3A_1 B_0 + A_0 B_1)}{2B_1 B_0 3^5}$$

Como B_1 e B_0 não são múltiplos de 3, o numerador acima não é múltiplo de 3, e o 3^5 no denominador não é cancelado.

Concluímos que a maior potência de 3 que divide B é 3^5, ou seja, $n = 5$.

XXXV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e soluções da Terceira Fase

TERCEIRA FASE – NÍVEL 1

PROBLEMA 1

Dizemos que um número inteiro positivo é *enrolado* se satisfaz as duas condições a seguir:

- Tem três ou mais algarismos.
- Um de seus algarismos é igual à soma de todos os demais.

Por exemplo:
2013 é enrolado, pois $3 = 2 + 0 + 1$;
220 é enrolado, pois $2 = 0 + 2$;
789 não é enrolado, pois nenhum de seus algarismos é a soma dos demais;
22 não é enrolado, pois é um número de dois algarismos (observe que 022 é igual a 22, ou seja, não é enrolado).

a) Qual é o maior número enrolado formado por algarismos diferentes de zero?
b) Quantos números enrolados de três algarismos existem?

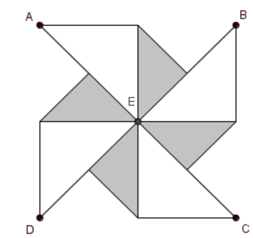
PROBLEMA 2

Sobre uma mesa há três pilhas de moedas, uma com 19, outra com 13 e outra com 6 moedas. Ana, Beatriz e Clara resolvem disputar essas moedas fazendo o seguinte: na ordem alfabética de seus nomes, cada uma delas escolhe uma pilha qualquer e a divide em duas pilhas menores. Quem não puder fazer isto sai do jogo e a última a fazê-lo ganha todas as moedas.

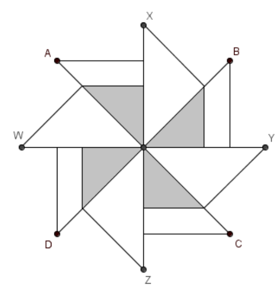
a) Após a primeira jogada de Clara, quantas pilhas haverá sobre a mesa?
b) Quem irá ficar com todas as moedas?

PROBLEMA 3

Paulo possui uma folha de papel *ABCD* quadrada de lado 20 cm. A frente da folha é branca e o verso é cinza. O ponto *E* é marcado no centro da folha. Ele decide fazer um cata-vento com a folha. Para isso, ele recorta o segmento *BE* e dobra a ponta que estava no ponto *B* até o ponto *E*. Ele repete o procedimento para cada um dos outros três vértices do quadrado, completando o cata-vento.



a) Qual a razão entre a área cinza e a área branca na figura acima?
b) Paulo pegou outra folha quadrada *XYZW* igual à folha *ABCD* e montou outro cata-vento. Ele girou o cata-vento *XYZW* de um ângulo de 45º e colocou sobre o cata-vento *ABCD* de modo que os centros das folhas ficassem sobrepostos, montando a figura a seguir.



Qual a área branca da figura formada?

PROBLEMA 4
Considere a sequência 1, 23, 456, 78910, 1112131415, ..., construída com os algarismos que obtemos ao escrever os inteiros a partir do um. O primeiro termo é o primeiro inteiro positivo, o segundo termo tem os algarismos dos dois inteiros seguintes, o terceiro termo tem os algarismos dos três inteiros seguintes, e assim por diante.
a) Qual é o algarismo das unidades do décimo termo desta sequência? Não se esqueça de justificar a sua resposta.
b) Qual é o termo desta sequência em que aparece pela primeira vez, nessa ordem, a sequência de algarismos 2013? Por exemplo, a sequência 121 aparece pela primeira vez no quinto termo, 11<u>**121**</u>31415.

PROBLEMA 5

Desejamos preencher tabuleiros 3 × 3 com 9 inteiros positivos distintos sendo que números a e b que têm um lado em comum devem ser tais que a é divisível por b ou b é divisível por a.

Vejamos uma configuração que satisfaz as condições do problema. Observe que o maior número que aparece no tabuleiro é o 25.

8	2	10
4	20	5
12	1	25

a) Apresente uma maneira de preencher um tabuleiro de modo que o maior número que aparece é o 22.

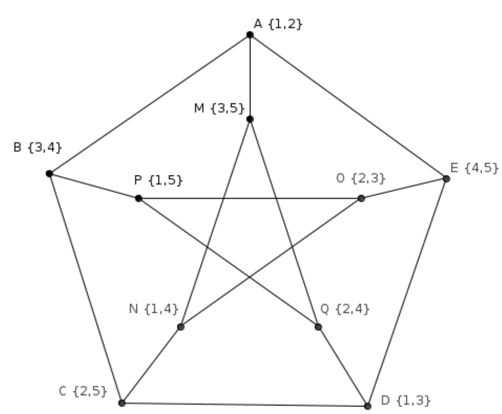
b) Qual é o menor inteiro positivo que pode ser o maior número que aparece no tabuleiro?

TERCEIRA FASE – NÍVEL 2
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Arnaldo desenha um pentágono regular *ABCDE* e, em seguida, desenha uma estrela de 5 pontas *MNOPQ*. Depois disso, ele liga os segmentos *AM*, *BP*, *CN*, *DQ* e *EO*. Na figura formada, dizemos que dois vértices são *vizinhos* se existe um segmento ligando os dois.

Bernaldo percebe que é possível colocar todos os 10 subconjuntos de 2 elementos do conjunto {1, 2, 3, 4, 5} nos 10 vértices da figura formada de tal forma que os subconjuntos colocados em dois vértices vizinhos tem interseção vazia. Uma tal associação é dita *curiosa* e um exemplo é dado abaixo:



a) Dê mais um exemplo de associação curiosa.

b) Determine a quantidade de associações curiosas existentes.

PROBLEMA 2

a) Encontre todos os inteiros positivos n tais que $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = 2013$.

b) Sejam a e b inteiros positivos tais que $\lfloor \sqrt{ab} \rfloor = \lfloor \sqrt{a} \rfloor \cdot \lfloor \sqrt{b} \rfloor$. Prove que pelo menos um dos dois inteiros positivos deve ser quadrado perfeito.

Para um número real x, o número $\lfloor x \rfloor$ é definido como o maior inteiro menor ou igual a x.

PROBLEMA 3

Seja ABC um triângulo. Seja D um ponto na circunferência circunscrita ao triângulo e sejam E e F os pés das perpendiculares de A até DB e DC, respectivamente. Finalmente, seja N o ponto médio de EF. Sendo M o ponto médio do lado BC, prove que as retas NA e NM são perpendiculares.

Observação: Suponha que o ponto N é distinto do ponto M.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Dado um número de dois dígitos chamamos de seu *quadroido* o número formado juntando os quadrados de seus dígitos na mesma ordem do número. Por exemplo, os quadroidos de 19, 72, 65 e 23 são 181, 494, 3625 e 49, respectivamente. Ache todos os números de dois dígitos que dividem seu quadroido.

PROBLEMA 5

Seja ABC um triângulo escaleno e AM a mediana relativa ao lado BC. A circunferência de diâmetro AM intersecta pela segunda vez os lados AB e AC nos pontos P e Q, respectivamente, ambos diferentes de A. Supondo que PQ é paralelo a BC, determine a medida do ângulo $\angle BAC$.

PROBLEMA 6

Considere um inteiro positivo n e dois pontos A e B em um plano. Partindo do ponto A, são traçadas n semirretas e partindo do ponto B, são traçadas n semirretas de modo que todas elas estejam no mesmo semiplano definido pela reta AB e que os ângulos formados pelas $2n$ semirretas com o segmento AB sejam todos agudos. Defina circunferências passando pelos pontos A, B e cada ponto de encontro entre as semirretas. Qual a menor quantidade de circunferências **distintas** que podem ser definidas por essa construção?

TERCEIRA FASE – NÍVEL 3
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Seja Γ um círculo e A um ponto exterior a Γ. As retas tangentes a Γ que passam por A tocam Γ em B e C. Seja M o ponto médio de AB. O segmento MC corta Γ novamente em D e a reta AD corta Γ novamente em E. Sendo $AB = a$ e $BC = b$, calcular CE em função de a e b.

PROBLEMA 2

Arnaldo e Bernaldo fazem a seguinte brincadeira: dado um conjunto finito de inteiros positivos A fixado, que os dois conhecem, Arnaldo escolhe um número a pertencente a A, mas não conta a ninguém qual número escolheu. Em seguida, Bernaldo pode escolher um inteiro positivo b qualquer (b pode pertencer a A ou não). Então Arnaldo fala apenas o número de divisores inteiros positivos do produto ab. Mostre que Bernaldo pode escolher b de modo que consiga descobrir o número a escolhido por Arnaldo.

PROBLEMA 3

Encontre todas as funções injetoras f dos reais não nulos nos reais não nulos tais que

$$f(x+y)\cdot\left(f(x)+f(y)\right)=f(x\cdot y)$$

para todos os x, y reais não nulos com $x+y\neq 0.$

TERCEIRA FASE – NÍVEL 3
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Encontrar o maior valor de n para o qual existe uma sequência $(a_0, a_1, a_2, ..., a_n)$ de algarismos não nulos (ou seja, $a_i\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$) tal que, para todo $k, 1\leq k\leq n,$ o número de k dígitos $(a_{k-1}a_{k-2}...a_0)=a_{k-1}10^{k-1}+a_{k-2}10^{k-2}+...+a_0$ divide o número de k + 1 algarismos $(a_k a_{k-1}a_{k-2}...a_0).$

PROBLEMA 5

Seja x um número irracional entre 0 e 1 e $x=0,a_1a_2a_3...$ sua representação decimal. Para cada $k\geq 1,$ seja $p(k)$ a quantidade de sequências distintas $a_{j+1}a_{j+2}...a_{j+k}$ de k algarismos consecutivos na representação decimal de x. Prove que $p(k)\geq k+1$ para todo k inteiro positivo.

PROBLEMA 6

O incírculo do triângulo *ABC* toca os lados *BC*, *CA* e *AB* nos pontos *D*, *E* e *F* respectivamente. Seja *P* o ponto de interseção das retas *AD* e *BE*. As reflexões de *P* em relação a *EF*, *FD* e *DE* são *X*, *Y* e *Z*, respectivamente. Prove que as retas *AX*, *BY* e *CZ* têm um ponto comum pertencente à reta *IO*, sendo *I* e *O* o incentro e o circuncentro do triângulo *ABC*.

SOLUÇÕES – NÍVEL 1

PROBLEMA 1:
SOLUÇÃO DE PEDRO LUCAS LANARO SPONCHIADO (S. C. DO RIO PARDO – SP)

a) Primeiro observamos que, em um número enrolado que tem essa propriedade, o algarismo que é a soma dos demais é maior que qualquer outro algarismo dele. Como queremos o maior número possível, o algarismo que é a soma deve ser o maior possível, ou seja, o 9. Para maximizar o número ainda mais, ele deve ter o maior número de casa decimais possíveis, sendo 9 dividido em 9 "uns" seguidos. Portanto, como o 9 é o maior número, deve ficar em uma casa de maior valor e o número procurado é o $9\overbrace{111111111}^{9\text{ "}uns\text{"}}$.

b) Temos que, quando há um número enrolado de 3 algarismo, a, b e $c, a = b + c$ e $a \geq b \geq c$ ou $a \geq c \geq b$.

Para calcularmos mais facilmente, analisaremos os diversos valores de a:

$$a = 1: 101, 110$$
$$a = 2: 202, 220, 211, 121, 112$$
$$a = 3: 303, 330, 321, 312, 213, 231, 132, 123$$

Como vemos, se $a = 5$, por exemplo, $a = 0 + 5, a = 1 + 4$ e $a = 2 + 3$. Com isso, podemos ver que, se a, b e c não são nulos, então há 6 diferentes formas de a, b e c se agruparem, se b ou c forem nulos, mas não simultaneamente, então há 2 formas diferentes e se b=c então há 3 formas. Sabendo disso:

$$a = 4: 2 + 6 + 3\ formas = 11$$
$$a = 5: 2 + 6 + 6\ formas = 14$$
$$a = 6: 2 + 6 + 6 + 3\ formas = 17$$
$$a = 7: 2 + 6 + 6 + 6\ formas = 20$$
$$a = 8: 2 + 6 + 6 + 6 + 3\ \ formas = 23$$
$$a = 9: 2 + 6 + 6 + 6 + 6\ formas = 26$$

Portanto, vemos que há no total

$2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 + 26 = \frac{9 \cdot 28}{2}$ (pelo teorema de Gauss) = 126

números enrolados de 3 algarismos.

PROBLEMA 2: SOLUÇÃO DE HENRIQUE JUZIUK BERGER (SANTOS – SP)

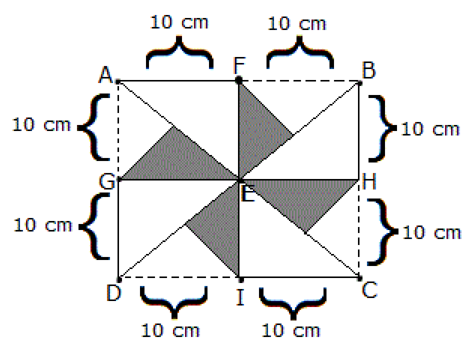
a) A cada jogada, adiciona-se 1 ao número de pilhas sobre a mesa. Logo, após a primeira jogada de Clara, que será a terceira jogada, haverá 6 pilhas sobre a mesa.

b) Sendo n o número de moedas em uma pilha, esta pilha fica dividida em n moedas separadas após n – 1 divisões, independentemente de como as divisões forem feitas. Assim, haverá 19-1+13-1+6-1=18+12+5=35 divisões ou jogadas nessa disputa.

As jogadas cujo número é múltiplo de 3 serão feitas por Clara, então, a jogada nº 33 será feito por ela. Quem fará a última jogada e ficara com todas as moedas, portanto, é Beatriz.

PROBLEMA 3: SOLUÇÃO DE ÁLVARO BERNARDO R. DE ALMEIDA (FORTALEZA – CE)

a)Temos a seguinte figura:



Sabemos que a folha de papel possui lado igual a 20 cm. Logo do ponto E ao F, temos um lado de 10 cm, pois o ponto E fica ao centro da folha, ou seja, fica no meio da figura. Então temos outro ponto que vamos chamar de I, logo $\overline{EI} = 10cm$. Também temos $\overline{GE} = 10cm$ e $\overline{EH} = 10cm$. Temos então que a área do triangulo

$\Delta EIC = \frac{altura \cdot base}{2} = \frac{\overline{EI} \cdot \overline{IC}}{2} = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50\ cm^2.$

$\Delta EDG = \frac{\overline{DG} \cdot \overline{GE}}{2} = \frac{10.10}{2} = 50\ cm^2. \Delta BEH = \frac{\overline{BH} \cdot \overline{EH}}{2} = \frac{10.10}{2} = 50\ cm^2.$

$\Delta AEF = \frac{\overline{FE} \cdot \overline{FA}}{2} = \frac{10.10}{2} = 50\ cm^2.$

Então temos que a área dos quatro triângulos juntos é igual a 200 cm², ou seja, a área sombreada mais a área que falta para completar o quadrado é igual a $400\ cm^2 - 200\ cm^2 = 200 cm^2$. Sabemos também que cada área sombreada é igual, pois suas bases e suas alturas são iguais e como as partes que faltam preencher as figuras são iguais, pois cada parte sombreada esta dobrada ao meio, a área da parte sombreada é igual à metade da área que falta para completar a figura, logo as quatro partes da figura sombreadas são iguais a $\frac{200}{2} = 100\ cm^2$, logo cada parte sombreada é igual a 25 cm².

Então temos que a parte da figura em branco é igual a 200 cm² e a parte sombreada igual a 100 cm². Logo a razão entre as duas partes é igual a $\frac{1}{2}$.

b) Sabemos que cada área sombreada é igual a 25 cm², logo o restante de cada figura em branco é igual a 25 cm², como temos 4 dessas figuras, sua área é igual a 100 cm² + as outras figuras em branco que, as 4 juntas, são iguais a 200 cm². Temos então 300 cm² ao todo.

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DE LUCAS VIANA LOPES FERREIRA (RIO DE JANEIRO – RJ)

a) É possível perceber que

1º 1
1+2=3
2º 23
3+3=6
3º 456
6+4=10
4º 78910
10+5=15
5º 1112131415
6º 161718192021
7º 22232425262728
8º 2930313233343536
9º 373839404142434445
10º 46474849505152535455

E assim por diante.

$\boxed{R: 5}$

b) Primeiramente, é necessário descobrir como o "2013" vai aparecer.

Não pode ser com um número terminado em 2 e o próximo começando com 0, por motivos óbvios.

Também não pode ser com um número terminado em 201 e outro começando em 3 pois já terá passado o 2013.

O 2013 em si é provável que não, mas fica para 2º plano.
A opção que restou foi o número terminar em 20 e o próximo começar com 13, o que é possível, e é o caso de 1320 e 1321.

Agora é preciso descobrir qual é o termo que obriga 1320 e 1321.

Com alguns cálculos, conclui-se que é 51, pois $1+2+3+\ldots+50+51=1326$ e $1+2+3+\ldots+50=1275$. Lembrando que a soma dos termos até n, inclusive, é sempre o ultimo número escrito em n.

$\boxed{R: Termo\ 51}$

PROBLEMA 5: SOLUÇÃO DA BANCA

a) O maior número no tabuleiro a seguir é 22.

22	2	4
1	6	12
9	18	3

b) A tabela abaixo mostra que tal configuração é possível com o maior número igual a 15:

8	2	10
4	1	5
12	3	15

Diremos que x é um vizinho permitido de um número y quando x divide y ou y divide x. Em outras palavras, quando x e y podem compartilhar um lado no tabuleiro.

É imediato que se o número primo p aparece na tabela, então $2p$ aparece na tabela, com um lado em comum com p, e que ambos não podem aparecer na posição central, pois eles não possuem 4 vizinhos permitidos: $2p$ só tem os vizinhos permitidos $1,2,p$ e p só tem 1 e $2p$.

Assim, se p primo (como nas condições acima) aparece no quadrado então ele ocupará um canto e terá 1 e $2p$ dos seus lados. Mas não poderíamos concluir os vizinhos de $2p$ já que "gastamos" o 1 como vizinho do p.

	$2p$	p
		1

O maior número da tabela é pelo menos 9, já que são distintos. Se o maior número da tabela é menor ou igual a 14, os números 5 e 7 não podem aparecer na tabela. Os números 10 e 14 só possuem dois vizinhos permitidos, 1 e 2. Concluímos que apenas um desses dois números pode aparecer no tabuleiro e deverá ser colocado em um dos cantos com vizinhos 1 e 2. Note também que não podemos colocar os primos 11 e 13, pois apenas o 1 poderia figurar em um quadrado vizinho a eles.

Com isso, restaram no máximo $14 - 2 - 1 - 2 = 9$ números para preencher todos os 9 quadrados. Vamos mostrar que não é possível preencher com esses números.

Suponha que é possível e suponha sem perda de generalidade que usaremos o 10 e vamos excluir o 14. O 10 aparece em um canto com vizinhos 1 e 2. Veja que o 9 só possui vizinhos 1 e 3, então temos que colocá-lo ao lado do 1 e preencher o 3 no seu outro vizinho. Agora pense no 8. Ele só pode estar ao lado de 1, 2 e 4. Considerando o preenchimento do 9, temos que colocar o 8 no canto ao lado do 2 e preencher o quadrado seguinte na lateral com 4.

		1
	2	10

	3	9
		1
	2	10

	3	9
4		1
8	2	10

Veja que o 6 não poderá ser colocado no tabuleiro.

O problema pedia até o passo anterior, mas podemos ir além dele. É possível provar que todos os números compostos maiores ou iguais a 15 podem aparecer como máximo de tabuleiro seguindo estas regras. Para isso usaremos os seguintes tabuleiros.

Usando o primeiro tabuleiro temos os números pares maiores ou iguais a 18. No segundo temos os múltiplos de 3 maiores ou iguais a 18. Se fizermos $k = 3$ no segundo conseguimos obter um tabuleiro em que o máximo é 16. Para números na forma kp em que p é maior ou igual a 5 e k é maior ou igual a 7 podemos usar o terceiro tabuleiro. Finalmente, podemos usar o quarto tabuleiro para obter 25.

$2k$	2	4
1	6	12
9	18	3

8	2	6
4	12	3
16	1	$3k$

6	$6p$	$3p$
2	$2p$	p
4	1	kp

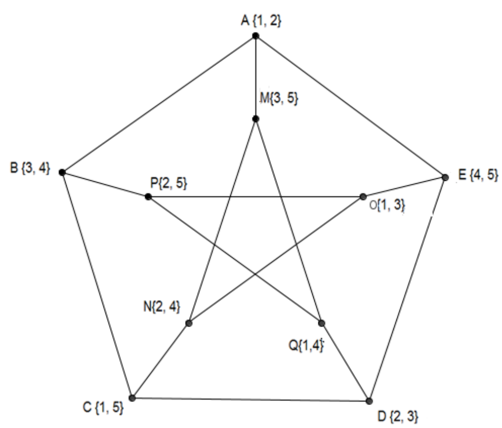
8	2	10
4	20	5
12	1	25

Um número primo p não pode ser o máximo de um tabuleiro, pois só tem um vizinho permitido. Concluímos que os números que podem ser máximo são todos os números compostos maiores ou iguais a 15.

SOLUÇÕES – NÍVEL 2

PROBLEMA 1: VITOR AUGUSTO CARNEIRO PORTO (FORTALEZA – CE)

a)



b) Como existem $\binom{5}{2} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{20}{2} = 10$ subconjuntos de 2 elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, então temos 10 possibilidades para o ponto A, podemos supor sem perda de generalidade que $A = \{1, 2\}$.

Se $A = \{1, 2\}$, então B, M e E são $\{3, 4\}$; $\{3, 5\}$; $\{4, 5\}$, pois esses são os subconjuntos que não contem 1 e 2, então existe 3!=6 possibilidades para B, M, E, também podemos supor sem perda de generalidade que $B = \{3, 4\}$; $M = \{3, 5\}$; $E = \{4, 5\}$.
Se M={3,5}, Q pode ser {1,4}; {2,4} e {1,2}, porém Q não pode ser {1,2}, pois A={1,2}, então existem 2 possibilidades para o Q, então podemos supor sem perda de generalidade que Q={1,4}, pois 1 e 2 só aparecem no A e Q é equivalente a N em relação a A.
Como N é análogo ao Q, então N pode ser {1,4} ou {2,4}, porem Q={1,4}, então N={2,4}.
Como B={3,4} e N={2,4}, então C={1,5}.
Como C={1,5}; Q={1,4} e E={4,5}, então D={2,3}.
Como E={4,5} e N={2,4}, então O={1,3}.
Como só sobraram o ponto P e o subconjunto {2,5}, então P={2,5}.
Como temos 10 possibilidades para o ponto A, 6 para os pontos B,M e E e 2 para o ponto Q, então existem $10 \cdot 2 \cdot 6 = 120$ associações curiosas.

PROBLEMA 2: SOLUÇÃO DE PEDRO HENRIQUE SACRAMENTO DE OLIVEIRA (VINHEDO – SP)

a) $\lfloor\sqrt{N}\rfloor = 2013 \Leftrightarrow 2013 \leq \sqrt{N} < 2014 \Leftrightarrow 2013^2 \leq N < 2014^2$, logo:

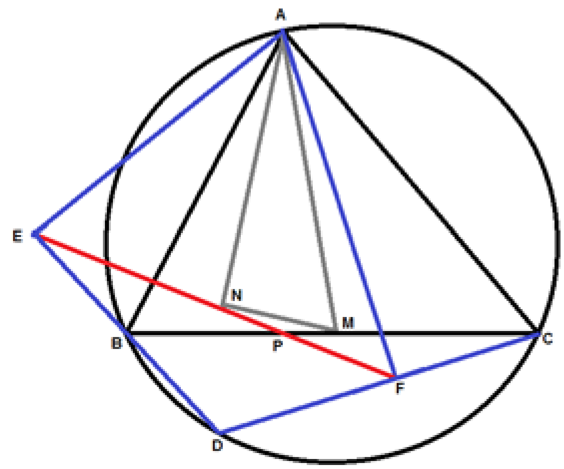
$$V = \{2013^2, 2013^2 + 1, \dots, 2013^2 + 4026\}(2014^2 = 2013^2 + 2 \cdot 2013 + 1)$$

b) Suponhamos $A = N^2 + x(1 \leq x \leq 2N)$e $B = M^2 + y(1 \leq y \leq 2M)$, temos

$$\left\lfloor\sqrt{(N^2 + x)(M^2 + y)}\right\rfloor \geq \left\lfloor\sqrt{(N^2 + 1)(M^2 + 1)}\right\rfloor = \left\lfloor\sqrt{M^2N^2 + M^2 + N^2 + 1}\right\rfloor$$
$\geq \left\lfloor\sqrt{M^2N^2 + 2MN + 1}\right\rfloor$, pois $M^2 + N^2 \geq 2MN$ $(MA \geq MG)$.

Mas veja que $\left\lfloor\sqrt{M^2N^2 + 2MN + 1}\right\rfloor = \left\lfloor\sqrt{(MN + 1)^2}\right\rfloor = \lfloor MN + 1\rfloor = MN + 1 > MN = \left\lfloor\sqrt{N^2 + x}\right\rfloor \cdot \left\lfloor\sqrt{M^2 + y}\right\rfloor$, ou seja, se nem *A* nem *B* forem quadrados perfeitos, $\lfloor\sqrt{AB}\rfloor > \lfloor\sqrt{A}\rfloor\lfloor\sqrt{B}\rfloor$, então se $\lfloor\sqrt{AB}\rfloor = \lfloor\sqrt{A}\rfloor\lfloor\sqrt{B}\rfloor$, ou *A* é quadrado perfeito, ou *B* é quadrado perfeito.

PROBLEMA 3: SOLUÇÃO DE LUAN LIMA FREITAS (RIO DE JANEIRO – RJ)



- Seja $B\widehat{D}C = \theta$;
- Como $DBAC$ é cíclico, $B\hat{A}C = 180° - \theta$;
- Já que $D\hat{E}A + D\hat{F}A = 90° + 90° = 180°$, $DEAF$ é cíclico;
- Daí segue que $E\hat{A}F = 180° - E\widehat{D}F = 180° - \theta$;
- Temos:

Seja P = interseção de EF e BC

$$E\hat{A}F = B\hat{A}C$$
$$E\hat{A}B + B\hat{A}F = B\hat{A}F + F\hat{A}C$$
$$E\hat{A}B = F\hat{A}C$$

- Por AAA, os triângulos ΔAEB e ΔAFC são semelhantes.

De tal semelhança vemos que:

$\frac{AE}{AF} = \frac{EB}{FC} = \frac{AB}{AC}$, em particular interessa mais $\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$, pois

$$\begin{cases} \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AB}{AC} \\ E\hat{A}F = B\hat{A}C \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta AEF$$

Então vemos que:

$A\hat{E}F = A\hat{B}C \Rightarrow AEBP$ é cíclico

Deste fato ocorre que $E\hat{P}B = E\hat{A}B$ e $A\hat{P}E = A\hat{B}E$, de forma que

$$E\hat{P}B + A\hat{P}E = E\hat{A}B + A\hat{B}E$$
$$BPA = 90°$$

Também da semelhança $\Delta ABC \sim \Delta AEF$, temos $A\hat{N}E = A\hat{M}B$, já que N e M são pontos análogos dos triângulos. Então, $ANPM$ é cíclico.

Como $ANPM$ é cíclico, $A\hat{N}M = A\hat{P}M = 90°, c.q.d.$

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DE ANDREY JHEN SHAN CHEN (CAMPINAS – SP)

Usaremos as propriedades básicas de divisibilidade listadas abaixo:

(I) – Limitação. Se $a|b$ então $b = 0$ ou $|a| \leq |b|$. Reciprocamente, se $|a| > |b| > 0$ então $a \nmid b$ ou ainda, se $a|b$ e $|a| > |b|$ então $b = 0$.

(II) – Se $ka|kb$ e $k \neq 0$, então $a|b$.

(III) – Se $a|kb$ e $mdc(a,k) = 1$ então $a|b$.

Podemos dividir o problema em 3 casos. Como x, y são algarismos e $x \neq 0$: (aqui x e y são os algarismos do número).

Caso I. $1 \leq x \leq 3$ e $0 \leq y \leq 3$

Como y^2 tem 1 algarismo; $10x + y|10x^2 + y^2 \Rightarrow 10x + y|10x^2 + y^2 - (10x + y) \cdot x \Rightarrow 10x + y|y^2 - xy = y(y - x)$.

$|10x + y| = 10x + y \geq 10, |y(y - x)| = |y| \cdot |(y - x)| \leq 3 \cdot 3 = 9$.

Assim, $|y(y - x)| < |10x + y|$. Ou vale (I) (isto é, $10x + y \nmid y^2 - xy$) ou x=y, ou y=0. Como soluções temos:

(1,0); (1,1); (2,0); (2,2); (3,0); (3,3) ou os números 10, 11, 20, 22, 30, 33.

Caso II: $4 \leq x \leq 9, 0 \leq y \leq 3$

De novo obtemos $10x + y|y(y - x)$. Mas aqui $x > y$; $(10x + y) \geq 40, |y(y - x)| \leq 3 \cdot 9 = 27$. Como $x \neq y$, temos que ou $y = 0$, ou vale (I).

Com isso, temos os números 40, 50, 60, 70, 80, 90.

Caso III: $4 \leq y \leq 9$

Agora y^2 tem 2 algarismos, e então

$$10x + y|100x^2 + y^2 \Leftrightarrow 10x + y|(10x + y)^2 - (100x^2 + y^2)$$

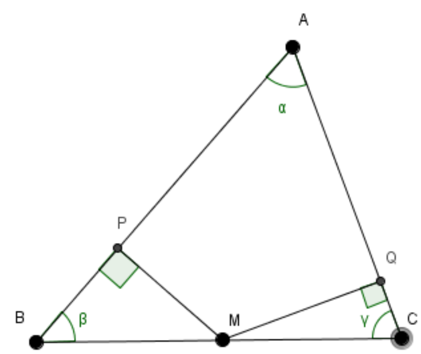
$\Leftrightarrow 10x + y|20xy \Leftrightarrow 10x + y|20xy - (10x + y) \cdot 2y$
$\Leftrightarrow 10x + y|2y^2$. Testando as possibilidades para $2y^2$:

	$2y^2$	Divisibilidade restante:
$y = 4$	32	$10x + 4\|32 \Leftrightarrow x = 0$
$y = 5$	50	$10x + 5\|50 \Leftrightarrow 2x + 1\|10 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$
$y = 6$	72	$10x + 6\|72 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 3$
$y = 7$	98	$10x + 7\|98 \Leftrightarrow 10x + 7\|49 \Leftrightarrow x = 0$
$y = 8$	128	$10x + 8\|128 \Leftrightarrow x = 0$
$y = 9$	162	$10x + 9\|162 \Leftrightarrow x = 0$

Onde as ultimas divisibilidades foram manualmente testadas, tendo em conta $x \geq 0$ e o conjunto de divisores dos números.
São soluções apenas $(x \neq 0)$ 25, 36.

O total de soluções é 10, 11, 20, 22, 30, 33, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 25, 36.

PROBLEMA 5: SOLUÇÃO DE PEDRO HENRIQUE SACRAMENTO DE OLIVEIRA (VINHEDO – SP)



Se AM é diâmetro do circulo, $M\hat{Q}A = M\hat{P}A = 90°$, logo $AQ = AC - \frac{BC}{2}\cos\gamma$, e $AP = AB - \frac{BC}{2}\cos\beta$.

Porém como $PQ//BC, ABC$ é semelhante a APQ, ou seja: $\frac{AP}{AQ} = \frac{AB}{AC} = \frac{AB - \frac{BC}{2}\cos\beta}{AC - \frac{BC}{2}\cos\gamma}$, logo:

$\frac{AB}{AC} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$.

Contudo, pela lei dos senos $\frac{AB}{AC} = \frac{sen\,\gamma}{sen\,\beta}$ e, portanto:

$\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{sen\,\gamma}{sen\,\beta} \Leftrightarrow sen\,\beta\cos\beta = sen\,\gamma\cos\gamma \Leftrightarrow \frac{sen(2\beta)}{2} = \frac{sen(2\gamma)}{2} \Leftrightarrow sen(2\beta) = sen(2\gamma)$,

temos então duas possibilidades:

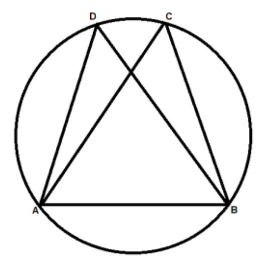
i) $2\beta = 2\gamma$, impossível, pois o triangulo é escaleno, não isósceles.

ii) $2\beta = 180° - 2\gamma \Leftrightarrow 2\beta + 2\gamma = 180° \Leftrightarrow \beta + \gamma = 90°$, ou seja, $\alpha = 90°$.

PROBLEMA 6: SOLUÇÃO DE PEDRO HENRIQUE SACRAMENTO DE OLIVEIRA (VINHEDO – SP)

Considere 2 pontos de encontro, C e D, que estão sobre a mesma circunferência:

Temos que $A\hat{D}B = A\hat{C}D \Leftrightarrow D\hat{A}B + D\hat{B}A = C\hat{B}A + C\hat{A}B$ e que a volta é válida*, logo, sejam $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \cdots > \alpha_N$ e $\beta_1 > \beta_2 > \beta_3 > \cdots > \beta_N$ os ângulos que as semirretas fazem com AB (α_i são as que passam por A e β_i as que passam por B), temos:



$$\alpha_1 + \beta_1 > \alpha_1 + \beta_2 > \alpha_1 + \beta_3 > \cdots > \alpha_1 + \beta_N > \alpha_2 + \beta_N > \cdots > \alpha_N + \beta_N$$

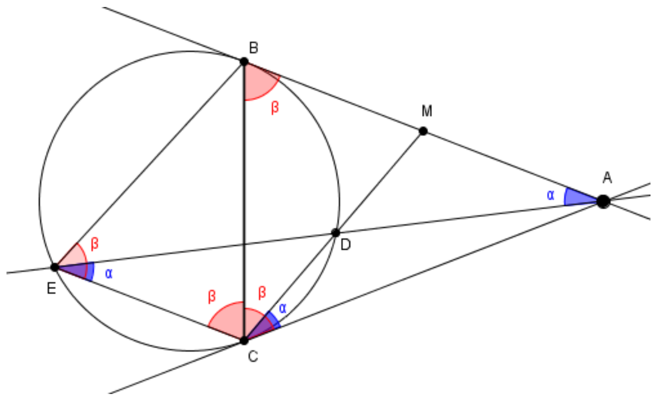
Logo, há no mínimo $2N - 1$ possíveis somas (um caso possível é

$$\alpha_i = \beta_i = \frac{N+1-i}{N}\theta(0^0 < \theta < 90^0),$$

pois $\alpha_i + \beta_j = \alpha_M + \beta_P \Leftrightarrow i + j = M + P$) e cada soma equivale a uma circunferência, ou seja, essa construção define 2N-1 circunferências.

Nota: O fato de os ângulos serem agudos garante que todas as semirretas se encontram ($D\hat{A}B + D\hat{B}A = C\hat{B}A + C\hat{A}B \Leftrightarrow ABCD$ cíclico).

SOLUÇÕES – NÍVEL 3
PROBLEMA 1: SOLUÇÃO DE RODRIGO SANCHES ÂNGELO (SÃO PAULO – SP)



Por potencia de ponto, $MB^2 = MD \cdot MC$. Mas $MB^2 = MA^2$, pois M é ponto médio, portanto $MA^2 = MD \cdot MC \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MA} \Rightarrow \Delta DMA\ e\ \Delta AMC$ são semelhantes (pois tem o ângulo $A\widehat{M}C$ em comum).

Portanto $M\hat{A}D = M\hat{C}A = \alpha$. Mas pela tangência, $D\hat{C}A = D\hat{E}C = \alpha$. Portanto $A\hat{E}C = E\hat{A}B = \alpha \Rightarrow EC//AB$.
Agora, observe que se $B\hat{C}E = \beta$, então $A\hat{B}C = \beta$ (pois AB//CE) e

$A\hat{C}B = A\hat{B}C = \beta$ (pois AB=AC), e $B\hat{E}C = C\hat{B}A = \beta$ (pela tangência). Como $\Delta ECB\ e\ \Delta BCA$ tem dois ângulo β em comum, segue que $\Delta ECB\ e\ \Delta BCA$ são semelhantes $\Rightarrow \frac{EC}{BC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow EC = \frac{BC^2}{AC} = \frac{BC^2}{AB} = \frac{b^2}{a}$.

Portanto concluímos que $EC = \frac{b^2}{a}$.

PROBLEMA 2: SOLUÇÃO DE DAVI COELHO AMORIM (FORTALEZA – CE)

A primeira coisa que Bernaldo deve fazer é dar uma identidade para cada número de *A*. Suponha que existem apenas *n* primos tais que todos os números de *A* podem ser escritos na forma fatorada com os *n* primos.
Sejam $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ os números pertencentes a A ($a_1 < a_2 < \cdots < a_k$, onde k = número de elementos de *A*)

Seja agora $P(a_i) = (b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{in})$, onde $a_i = p_1^{b_{i1}} \cdot p_2^{b_{i2}} \cdot p_3^{b_{i3}} \cdot \ldots \cdot\ p_n^{b_{in}}$, e $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são os n primos. Com isso, $P(a_i) = P(a_j) \Leftrightarrow a_i = a_j$.

Bernaldo agora vai escolher um número $N = P_1^{10^{x_1}-1} \cdot P_2^{10^{x_2}-1} \cdot \ldots \cdot P_n^{10^{x_n}-1}$ $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n = Z)$.
A quantidade de divisores de $N \cdot a_i$ será

$$(10^{x_1} - 1 + b_{i1} + 1)(10^{x_2} - 1 + b_{i2} + 1) \ldots (10^{x_n} - 1 + b_{in} + 1) =$$

$$= (10^{x_1} + b_{i1})(10^{x_2} + b_{i2})(10^{x_3} + b_{i3}) \ldots (10^{x_n} + b_{in}) =$$

$$= 10^z + 10^{z-x_1} \cdot b_{i1} + 10^{z-x_2} \cdot b_{i2} + \cdots + 10^{z-x_n} \cdot b_{in} + \cdots + b_{i1} \cdot b_{i2} \cdot\ \ldots \cdot b_{in}\,.$$

Agora, vamos ordenar $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Seja m um numero tal que 10^m seja bem maior que $max(b_{j1} \cdot b_{j2} \cdot \ldots \cdot b_{jn})$.
Agora vamos fazer $x_2 = x_1 + m, x_3 = x_1 + 2 \cdot m, \ldots, x_n = x_1 + (n-1) \cdot m$, onde x_1 será um número bem maior que $(n-1) \cdot m$, fazendo com que $2x_1 > x_n \Rightarrow z - x_m > z - x_1 - x_2$, pois $x_1 + x_2 > 2x_1 > x_m$.
Com isso, Bernaldo descobre o $P(a_j)$ multiplicando $a_j \cdot N$, pois analisando esse produto temos algo do tipo:

$$100\ldots0\ \underbrace{\underbrace{\ }_{b_{j1}}\ 00\ldots0\ \underbrace{\ }_{b_{j2}}\ 00\ldots0\ \underbrace{\ }_{b_{jn}}}_{\substack{\text{Não haverá problema se} \\ \text{esses númeos tiverem mais} \\ \text{de um digito, afinal a} \\ \text{distancia de um desses números} \\ \text{para outro será várias} \\ \text{casas, que supera o} \\ \text{tamanho do produto} \\ b_{j1} b_{j2} \ldots\ b_{jn}}}\ 00\ldots\ \rightarrow \text{o resto não importa}$$

PROBLEMA 3: SOLUÇÃO ADAPTADA DE CARLOS ALEXANDRE SILVA DOS SANTOS (FORTALEZA - CE)

$f(x+y)\cdot\big(f(x)+f(y)\big)=f(xy) \qquad (1)$

$x=y=1 \Rightarrow f(2)\cdot 2f(1)=f(1)\Rightarrow f(2)=\dfrac{1}{2}$

$x\neq -1\ e\ y=1 \Rightarrow f(x+1)f(x)+f(x+1)f(1)=f(x)\Rightarrow$

$f(x)=\frac{f(x+1)f(1)}{1-f(x+1)}\ ,\forall\, x\neq -1 \qquad (2).$

Pondo $x=-2\Rightarrow f(-2)=\frac{f(-1)f(1)}{1-f(-1)}$. Pondo $x=y=-1\ em\ (1)\Rightarrow$

$f(-2)\cdot 2f(-1)=f(1)\Rightarrow f(-2)=\frac{f(1)}{2f(-1)}$. Logo, $f(-2)=\frac{f(-1)f(1)}{1-f(-1)}=\frac{f(1)}{2f(-1)}\Rightarrow 2f(-1)^2=1-f(-1)\Rightarrow 2f(-1)^2+f(-1)-1=0\Rightarrow f(-1)=\frac{1}{2}\ ou$

$f(-1)=-1$, mas como f é injetora e $f(2)=\frac{1}{2}$., temos $f(-1)=-1$.

Pondo $y=-1\ e\ x\neq 1\ em\ (1)\Rightarrow f(x-1)\big(f(x)+f(-1)\big)=f(-x)\Rightarrow$
$f(x-1)f(x)-f(x-1)=f(-x). \qquad (3)$

$y=1\ e\ x\to x-1$ com $x\neq 1\ em\ (1)\Rightarrow f(x)\cdot\big(f(x-1)+f(1)\big)=f(x-1)$

$$\Rightarrow f(x-1)f(x)+f(1)f(x)=f(x-1) \qquad (4).$$

Como em $(3)\ x\neq 1\ e\ em\ (4)\ \ x\neq 1$, temos

$$\begin{cases} f(x-1)f(x)-f(x-1)=f(-x)\\ f(x-1)f(x)+f(1)f(x)=f(x-1)\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(-x)+f(x-1)=f(x-1)f(x)=f(x-1)-f(1)f(x)\Rightarrow$$

$f(-x)=-f(1)f(x)\forall\, x\neq 1$, logo, para $x=1$, temos $-1=\ f(-1)=-f(1)^2\Rightarrow$
$1=f(1)^2\Rightarrow f(1)=1$, pois $f(-1)=-1$ e f é injetora, e então

$f(x)=-f(-x),\forall x\in\mathbb{R}^*$. Assim, de (2), $f(x)=\frac{f(x+1)}{1-f(x+1)}$,,e logo

$f(x+1)=\frac{f(x)}{1+f(x)},\forall x\neq -1 \qquad (5).$

Suponha que $f(n)=\frac{1}{n}$ para um certo n inteiro positivo. Então

$f(n+1)=\frac{f(n)}{1+f(n)}=\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{n+1}\Rightarrow f(n+1)=\frac{1}{n+1}$, e logo, por indução, como $f(1)=1,\ f(n)=\frac{1}{n}$ para todo inteiro positivo *n*, e portanto

$f(n)=\frac{1}{n},\forall n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ pois $f(x)=-f(x),\forall x\in\mathbb{R}-\{0\}$ (inclusive $x=1,-1$).

Vamos mostrar por indução que para todo *k* inteiro positivo, e todo $x\neq -k$,

$f(x+k)=\frac{f(x)}{1+k.f(x)}$.   (6)

De fato, para *k*=1, isto é (5). Se vale para *k*, temos, por (5),

$$f(x+k+1)=\frac{f(x+k)}{1+f(x+k)}=\left(\frac{f(x)}{1+k.f(x)}\right)\Big/\left(1+\frac{f(x)}{1+k.f(x)}\right)=\frac{f(x)}{1+(k+1).f(x)}.$$

Note que, para *x*=-*k*, também temos

$$f(x+k+1)=f(1)=1=\left(-\frac{1}{k}\right)\Big/\left(1-\frac{k+1}{k}\right)=\frac{f(x)}{1+(k+1)f(x)}.$$

De (1), $f(kx)=f(x+k)\cdot\big(f(x)+f(k)\big)=\left(\frac{f(x)}{1+k.f(x)}\right).\left(f(x)+\frac{1}{k}\right)=\frac{f(x)}{k}$ (7).

Fazendo $x=\frac{p}{k}$, com *p* inteiro, temos $\frac{1}{p}=f(p)=f(kx)=\frac{f(x)}{k}$, donde

$f(x)=\frac{k}{p}=\frac{1}{x}$. Portanto, $f(x)=\frac{1}{x},\forall x\in\mathbb{Q}^*$ (8).

Agora suponha $\exists x>0$ tal que $f(x)<0$. Como $\exists r$ tal que $r^2=x$, fazendo $x=y=r$ em (1), $2f(2r)f(r)=f(r^2)<0$.

Mas, de (7), $f(2r)=\frac{f(r)}{2}$, logo $2f(2r)f(r)=f(r)^2>0$, absurdo!

Assim, não existe $x>0$ tal que $f(x)<0$, donde $f(x)>0,\forall x>0$ (e $f(x)=-f(-x)<0,\forall x<0$).

Agora vamos provar que f é estritamente decrescente, para $x>0$.

Façamos $x=a\ e\ y=-b$ com $a>b>0$ em (1): $f(a-b)\big(f(a)+f(-b)\big)=f(-ab)\Rightarrow f(a-b)\big(f(a)-f(b)\big)=f(-ab)$ como $ab>0\Rightarrow f(-ab)<0$ e $f(a-b)>0\Rightarrow f(a)-f(b)<0\Rightarrow f(a)<f(b)$, donde f é estritamente decrescente em $\mathbb{R}_+^*$.

Agora vamos supor $\exists x>0,\ x\notin\mathbb{Q}$ tal que $f(x)\neq\frac{1}{x}$.

1º Caso $f(x) > \frac{1}{x}$: Pegue $r \in \mathbb{Q}$ com $f(x) > r > \frac{1}{x}$. Como $r > \frac{1}{x},\ x > \frac{1}{r} \Rightarrow$ $f(x) < f\left(\frac{1}{r}\right) = r$, absurdo!

2º Caso $f(x) < \frac{1}{x}$: Pegue $r \in \mathbb{Q}$ com $f(x) < r < \frac{1}{x}$. Como $r < \frac{1}{x},\ x < \frac{1}{r} \Rightarrow$ $f(x) > f\left(\frac{1}{r}\right) = r$, novo absurdo!

Logo $\nexists x \notin \mathbb{Q}, x > 0$ com $f(x) \neq \frac{1}{x}$, e portanto, como $f(x) = -f(-x), \forall x \in \mathbb{R}^*$,

$\boxed{f(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}.}$

E pondo $f(x) = \frac{1}{x}$ em (1), $\frac{1}{x+y}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{xy} = f(xy)$. Logo $f(x) = \frac{1}{x}$ satisfaz o enunciado e é a única.

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DE FRANCO MATHEUS DE ALENCAR SEVERO (RIO DE JANEIRO – RJ)

Note que $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (5, 2, 6, 5, 9)$ satisfaz a condição $(5|25$, $25|625,\ 625 = 5^4|5625 = 5^4(2^3 + 1) e\ 5625 = 5^4 \cdot 9|95625)$.

Provaremos que não podemos ter $n \geq 5$. Suponha que, $(a_0, \dots, a_n)_{n\geq 5}$ satisfaça o enunciado, então $(a_0, \dots, a_5)$ também satisfaz. Suponha que a_0 é par, então $(a_4, \dots, a_0)$ é par e $(a_4, \dots, a_0)\big|(a_5, \dots, a_0) - (a_4, \dots, a_0) = 10^5 \cdot a_5$, como $a_0 \neq 0$ é par, $5 \nmid a_0 \Rightarrow 5 \nmid (a_4, \dots, a_0) \Rightarrow (a_4, \dots, a_0)\big|2^5 \cdot a_5$, mas $(a_4, \dots, a_0) \geq 10^4$, logo $10^4 \leq (a_4, \dots, a_0) \leq 2^5 a_5 \Rightarrow a_5 \geq \frac{5^4}{2} > 10 \rightarrow$ absurdo! Logo a_0 é impar! Portanto $(a_4, \dots, a_0)\big|5^5 a_5$, mas note que $a_5 \leq 9$ e $5^4 \cdot 9 < 10^4 < (a_4, \dots, a_0)$, logo $(a_4, \dots, a_0) = 5^5 \cdot d$, onde $d|a_5 \leq 9$ e d é ímpar! Mas $5^5 \cdot 3 < 10^4 < (a_4, \dots, a_0)$, logo $d \in \{5, 7, 9\}$

- Se $d = 5 \Rightarrow (a_4, \dots, a_0) = 15625$, mas $5625 \nmid 15625$
- Se $d = 7 \Rightarrow (a_4, \dots, a_0) = 21875$, mas $75 \nmid 875$
- Se $d = 9 \Rightarrow (a_4, \dots, a_0) = 28125$, mas $8125 \nmid 28125$

Logo não podemos ter $n \geq 5$, e então o máximo é $n = 4$.

PROBLEMA 5: SOLUÇÃO DE RAFAEL KAZUHIRO MIYAZAKI (SÃO PAULO – SP)

Suponha que exista k tal que $p(k) \leq k$. Tome k mínimo para o qual isso ocorre. Note que neste caso $k \geq 2$, pois se $p(1) \leq 1, p(1) = 1 \Rightarrow x = 0, aaaaa \dots =$ $a \cdot \frac{1}{9} \in \mathbb{Q}$.

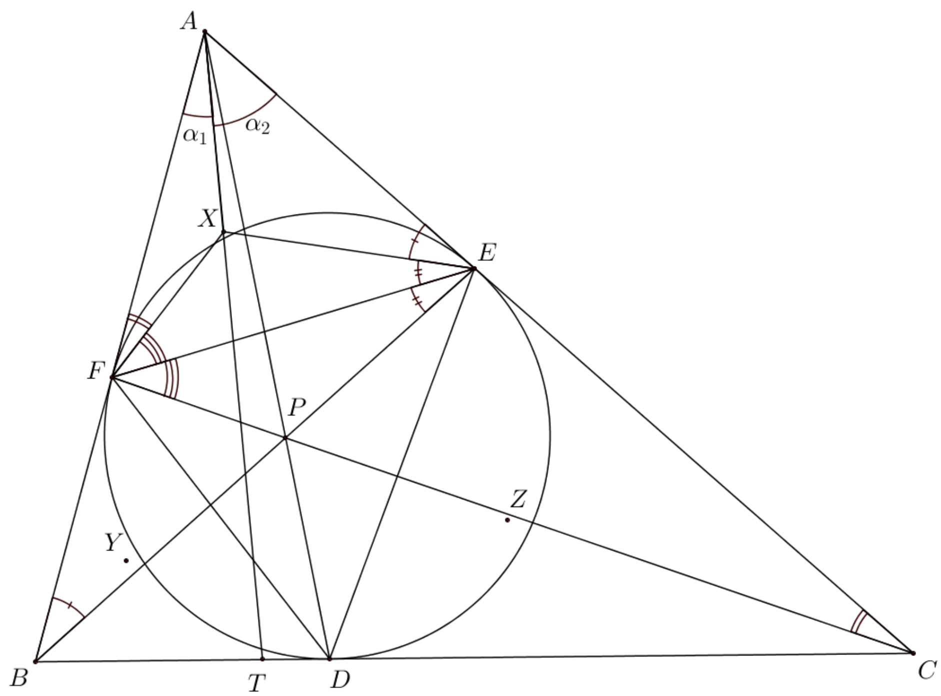
Sabemos que $p(k) \le k, p(k-1) \ge k$. Note que $p(k-1) \le p(k)$, pois para cada sequencia $a_{j+1}a_{j+2} \dots\ a_{j+k-1}$ distinta, cria-se uma sequencia $a_{j+1}a_{j+2} \dots\ a_{j+k}$ (no mínimo) e está é distinta da formada a partir de outra sequencia pois os primeiros $k-1$ termos não coincidem, logo nem todos os termos coincidem. Logo

$$k \ge p(k) \ge p(k-1) \ge k \Rightarrow \text{igualdades:}$$
$$k = p(k) = p(k-1) = k$$

Sejam $A_1, A_2, \dots, A_{p(k-1)} = A_k$ as k sequências de k-1 dígitos consecutivos, procuramos para cada um deles uma aparição em x e tomamos o digito seguinte a essa sequência. Assim, criamos ao menos $B_1, B_2, \dots, B_{p(k-1)} = B_k$, k sequencias de k dígitos distintas, que são todas, uma vez que $p(k) = k$. Daí, dada a sequência $(a_1, a_2, \dots, a_{k-1})$, que são os k-1 primeiros dígitos de x, podemos determinar o k-ésimo dígito dela e dada a sequência $(a_1, \dots, a_k)$ determinamos o k+1-ésimo digito, e assim por diante.
Se definirmos $c_i = (a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+k-2})$, como c_i tem $p(k-1) = k$, finitas possibilidades de existência, e temos infinitos c_i, temos $c_i = c_j$ para algum par (i, j), i<j. Como para cada sequencia a próxima é unicamente determinada,
$c_i = c_j \Rightarrow c_{i+1} = c_{j+1} \Rightarrow c_{i+2} = c_{j+2} \Rightarrow \dots \Rightarrow$
$\Rightarrow c_{i+p} = c_{j+p}$, o que pode ser reescrito para $c_p = c_{p+j-i}, \forall p \ge i$. Em outras palavras
$\underbrace{c_p = c_{p+j-i}}_{\forall p \ge i} \Rightarrow a_p = a_{p+j-i}, \forall p \ge i \Rightarrow x$ é uma dízima periódica $\Rightarrow x$ é racional
(Absurdo!)

.PROBLEMA 6: SOLUÇÃO DA BANCA

Temos a seguinte figura, lembrando que CF também passa pelo ponto P, que é o ponto de Gergonne desse triângulo:



Seja $\alpha = \frac{A}{2}$, então sabemos que $\angle AFE = \angle AEF = 90° - \alpha$. Seja $\angle PFE = \angle XFE = x$, então:

$$\angle XFA = \angle FCA = 90° - \alpha - x$$

Analogamente, se $\angle PEF = \angle XEF = y$, então:

$$\angle XEA = \angle EBA = 90° - \alpha - y$$

Usando Ceva trigonométrico no triângulo AEF e lei dos senos nos triângulos CFE e BFE temos:

$$\frac{sen\ \alpha_1}{sen\ \alpha_2} \cdot \frac{sen(\ 90° - \alpha - y)}{sen\ y} \cdot \frac{sen\ x}{sen\ (90° - \alpha - x)} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{sen\ \alpha_1}{sen\ \alpha_2} \cdot \frac{EF}{BF} \cdot \frac{CE}{EF} = 1 \Rightarrow \frac{sen\ \alpha_1}{sen\ \alpha_2} = \frac{BF}{CE} \Rightarrow \frac{sen\ \alpha_1}{sen\ \alpha_2} = \frac{p-b}{p-c}$$

Usando Ceva Trigonométrico no triângulo ABC já podemos provar que AX, BY e CZ concorrem. Para provar que o ponto está na reto OI usaremos coordenadas baricêntricas.
Prolongue AX até tocar BC no ponto T, teremos com duas leis dos senos que:

$$\frac{BT}{TC}=\frac{c}{b}.\frac{sen\ \alpha_1}{sen\ \alpha_2}=\frac{c.(p-b)}{b.(p-c)}$$

Então em coordenadas baricêntricas teremos:

$$T=(0:b(p-c):c(p-b))$$

Então um ponto $R=(x:y:z)$ está sobre a reta AT se, e somente se,

$$\frac{z}{y}=\frac{c(p-b)}{b(p-c)}$$

Determinando os pontos análogos a T sobre os outros lados, podemos encontrar o ponto de encontro das cevianas AX, BY e CZ como sendo:

$$R=(a(p-b)(p-c):(p-a)b(p-c):(p-a)(p-b)c)$$

Em coordenadas baricêntricas temos as fórmulas do incentro $I=(a:b:c)$ e do circuncentro $O=(sen\ 2A:sen\ 2B:sen\ 2C)$. Para provar que O, I e R são colineares usaremos a área do triângulo OIR:

$$[OIR]=0\Leftrightarrow D=\begin{vmatrix} sen\ 2A & sen\ 2B & sen\ 2C \\ a & b & c \\ a(p-b)(p-c) & (p-a)b(p-c) & (p-a)(p-b)c \end{vmatrix}=0$$

Veja que:

$$(p-b)(p-c)=\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)=\frac{a^2-(b-c)^2}{4}=\frac{a^2-b^2-c^2+2bc}{4}$$
$$\Rightarrow (p-b)(p-c)=\frac{-2bc\cos A+2bc}{4}\Rightarrow a(p-b)(p-c)=\frac{abc(1-cosA)}{2}$$

Temos assim:

$$D=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} sen\ 2A & sen\ 2B & sen\ 2C \\ sen\ A & sen\ B & sen\ C \\ 1-\cos A & 1-\cos B & 1-\cos C \end{vmatrix}=0\,.$$

Agora vamos calcular esse determinante.

$$\begin{vmatrix} sen\ 2A & sen\ 2B & sen\ 2C \\ sen\ A & sen\ B & sen\ C \\ 1-\cos A & 1-\cos B & 1-\cos C \end{vmatrix}=(1-\cos A).(sen\ 2B.sen\ C-sen\ B.sen\ 2C)\ldots$$

$$=2.sen^2\left(\frac{A}{2}\right).2.sen\ B.sen\ C.(\cos B-\cos C)\ldots$$
$$=4.sen^2\left(\frac{A}{2}\right).sen\ B.sen\ C.2.sen\left(\frac{B-C}{2}\right).sen\left(\frac{B+C}{2}\right)\ldots$$
$$=4.sen\ A.sen\ B.sen\ C.sen\left(\frac{A}{2}\right).sen\left(\frac{B-C}{2}\right)\ldots$$
$$=4.sen\ A.sen\ B.sen\ C.cos\left(\frac{B+C}{2}\right).sen\left(\frac{B-C}{2}\right)\ldots$$
$$=2.sen\ A.sen\ B.sen\ C.(sen\ B-sen\ C)\ldots$$
$$=2.sen\ A.sen\ B.sen\ C.(sen\ B-sen\ C+sen\ C-sen\ A+sen\ A-sen\ B)=0.$$

O aluno que quiser estudar mais sobre coordenadas baricêntricas pode ler as notas de aula que o professor Régis Barbosa escreveu no link *http://www.obm.org.br/export/sites/default/semana_olimpica/docs/2014/coordenadas_baricentricas.pdf*

XXXV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e soluções da Primeira Fase – Nível Universitário

PROBLEMA 1

Seja $P(x)$ um polinômio com coeficientes inteiros satisfazendo P(n) = n para todo inteiro n com $1 \leq n \leq 6$ e $|P(0)| \leq 2013$. Determine quantos e quais são os possíveis valores de $P(0)$.

PROBLEMA 2

Encontre o valor mínimo de

$$\sqrt{\tan^8 x - 4\tan^4 x + \tan^2 x - \tan x + 5} + \sqrt{\tan^8 x - 6\tan^4 x + \tan^2 x - 4\tan x + 13}$$

para $x \in (0, \pi/2)$.

PROBLEMA 3

Considere a parábola de equação $y = x^2/4$. Encontre o raio da circunferência que é tangente a esta parábola e ao eixo y no foco $(0,1)$ da parábola.

PROBLEMA 4

Seja

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$$

o círculo de raio 1 e considere a transformação linear

$$T: \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto \left(\frac{5x + 3y}{4}, \frac{3x + 5y}{4}\right)$$

Encontre todos os valores de n natural para os quais $T^n(C)$, a imagem de C após n aplicações de T, contenha pelo menos 2013 pontos (a, b) com coordenadas $a, b \in \mathbb{Z}$.

PROBLEMA 5

Quatro feijões mexicanos estão nos vértices de um quadrado, inicialmente um feijão em cada vértice. A cada segundo, cada feijão pula aleatoriamente para um vértice vizinho, com probabilidade $1/2$ para cada vértice.
Calcule a probabilidade de, após 2013 segundos, haver exatamente um feijão em cada vértice.

PROBLEMA 6

Seja

$$P = \{a^b | a, b, \in \mathbb{Z}, a, b > 1\} = \{4,8,9,16,25,27, ...\}$$

o conjunto das potências perfeitas. Prove que a soma infinita

$$\sum_{m \in P} \frac{1}{m-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \cdots$$

é igual a 1.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1

Faça $Q(x) = P(x) - x$. Então $Q(n) = 0$ para todo inteiro n com $1 \leq n \leq 6$.
Assim, $Q(x)$ (que também só tem coeficientes inteiros) pode ser fatorado como

$$Q(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)R(x)$$

onde $R(x)$ tem coeficientes inteiros.

Portanto, $Q(0) = P(0) = 6!\,R(0) = 720R(0)$ será um múltiplo de 720, então $P(0)$ tem de ser $\pm 1440, \pm 720$ *ou* 0 (*pois* $3 \cdot 720 = 2160 > 2013$).

Enfim, os polinômios da forma

$$P(x) = k(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6) + x$$

Com $k = \pm 2, \pm 1$ ou 0 satisfazem o enunciado e fazem $P(0)$ ser cada um dos cinco valores citados. Assim, a resposta é $\{\pm 1440,\ \pm 720,\ 0\}$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2

Seja $t = \tan x$. Como $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $t \in \mathbb{R}_+^*$. Assim queremos o mínimo, para $t \in \mathbb{R}_+^*$, de

$$f(t) = \sqrt{t^8 - 4t^4 + t^2 - 2\,\mathrm{t} + 5} + \sqrt{t^8 - 6t^4 + t^2 - 4t + 13}$$
$$\Rightarrow f(t) = \sqrt{(t^4 - 2)^2 + (t-1)^2} + \sqrt{(t^4 - 3)^2 + (t-2)^2}$$

Sejam $A = (2,1),\ B = (3,2)\ e\ T = (t^4, t)$. Note que $f(t) = AT + TB \geq AB = \sqrt{2}$, pela desigualdade triangular. A igualdade pode ocorrer se existe T no interior do segmento AB, ou seja, $1 \leq t \leq 2$ e

$$\frac{t-1}{t^4-2} = \frac{2-1}{3-2} \Leftrightarrow t^4 - 2 = t - 1 \Leftrightarrow t^4 - t - 1 = 0.$$

Sendo $P(t) = t^4 - t - 1, P(1) = -1 < 0\ e\ P(2) = 13 > 0$, logo existe um valor de t no intervalo $[1,2]$, de modo que as igualdades $P(t) = 0\ e\ f(t) = AT + TB = AB = \sqrt{2}$ ocorrem.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3

Suponha sem perda de generalidade que o centro da circunferência esteja do lado direito do eixo y. Sejam $r\ e\ C = (r, 1)$ o raio e o centro da circunferência, de modo que sua equação é $(x - r)^2 + (y - 1)^2 = r^2 \Leftrightarrow x^2 - 2rx + (y-1)^2 = 0$. As interseções entre a circunferência e a parábola são as soluções do sistema Como a parábola e a circunferência são tangentes, a equação $x^2 - 2rx + (x^2/4 - 1)^2 = 0$ tem raiz dupla m em x.

$f(x) = x^2 - 2rx + \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2,\ f'(x) = 2x - 2r + 2\left(\frac{x^2}{4} - 1\right) \cdot \frac{2x}{4} = \frac{x^3}{4} + x - 2r.$

Temos

$$f(m) = f'(m) = 0 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} m^2 - 2rm + \left(\frac{m^2}{4} - 1\right)^2 = 0 \\ \frac{m^3}{4} + m - 2r = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} m(m - 2r) + \left(\frac{m^2}{4} - 1\right)^2 = 0 \\ m - 2r = -m^3/4 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow m\left(-\frac{m^3}{4}\right) + \left(\frac{m^2}{4} - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{m^2}{4} - 1\right)^2 - \left(\frac{m^2}{2}\right)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{m^2}{4} - 1 - \frac{m^2}{2}\right)\left(\frac{m^2}{4} - 1 + \frac{m^2}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{3m^2}{4} = 1 \Leftrightarrow m = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Temos, então, $2r = m + \frac{m^3}{4} = \pm\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{8}{4 \cdot 3\sqrt{3}}\right)$. Como $r > 0$, $\quad r = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4

Os autovalores da matriz $\begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$ da transformação linear T na base canônica são 2 e ½, com auto-vetores correspondentes $(1,1)$ e $(-1,1)$ (por exemplo). Assim, aplicar T corresponde a expandir por 2 na direção da bissetriz dos quadrantes ímpares e contrair por 2 na direção da bissetriz dos quadrantes pares.

Logo a imagem do círculo C de raio 1 centrado na origem por T^n é limitada por uma elipse centrada na origem com eixos sobre estas bissetrizes e semieixos de tamanhos $1/2^n$ e 2^n. Assim, temos que $T^n(C)$ contém pelo menos os pontos de coordenadas inteiras (z, z) para $|z| \le 2^n/\sqrt{2}$. Para $n \ge 11$, temos pelo menos $2 \cdot \left\lfloor \frac{2^{11}}{\sqrt{2}} \right\rfloor + 1 = 2897$ tais pontos e portanto todo $n \ge 11$ é solução.

Claramente $\mathrm{n} = 1$ não é solução e para $\mathrm{n} = 2,3, \ldots, 10, \mathrm{T}^{\mathrm{n}}(\mathrm{C})$ está contido na região limitada por $|z| \le 2^{10} cos 45^0 + 1 < 726$ e pelas retas de equações $y = x \pm \sqrt{2}/2$.
Assim, se (x, y) está nesta região e tem coordenadas inteiras, então $x = y$ e logo temos menos de $2 \cdot 726 + 1 < 2013$ tais pontos. Portanto a resposta é $n \ge 11$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5

Pinte os vértices do quadrado alternadamente de branco e preto. A cada segundo cada feijão pula de um quadrado de uma cor para outro de outra cor. Assim podemos considerar independentemente dois pares de feijões: os que começam em vértices brancos e os que começam com vértices pretos. Para cada par, seja $p(n)$ a probabilidade de que depois de n segundos os dois feijões do par estejam em vértices distintos. Assim a resposta do problema é igual a $(p(2013))^2$.

Afirmamos que $p(n) = 1/2$ para $n > 0$. De fato, considere a posição do feijão depois $(n-1)$ segundos. Suponha para fins de argumentação que um pule primeiro e outro depois. Quando o segundo for pular, ele tem dois lugares para onde ir, igualmente prováveis: a casa já ocupada pelo primeiro feijão e uma casa vazia. Assim, a probabilidade de que ele pule para uma casa vazia é igual a $1/2$, como queríamos.

Concluindo: a probabilidade de, após 2013 segundos, haver exatamente um feijão em cada vértice é igual a $1/4$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6

Primeiro, note que

$$\frac{1}{m-1}=\frac{1/m}{1-1/m}=\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\cdots=\sum_{k\geq 1}\frac{1}{m^k}.$$

Deste modo, queremos calcular a soma.

$$S=\sum_{m\in P}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{m^k}.$$

Aos pares (m,k), com $m\in P$ e $k\geq 1$, podemos associar bijetivamente os pares (n,t) com $n,t\geq 2$, de forma que, se (n,t) é associado a (m,k) então $n^t=m^k$. Para isso note que todo elemento de P pode ser escrito de forma única como $m=\tilde{a}^r$, onde $\tilde{a}\geq 2$ não pertence a P e $r\geq 2$. Assim, associamos $(\tilde{a}^k,r)$ a (m,k) para quaisquer $m\in P$ e $k\geq 1$.

Com isso,

$$S=\sum_{n,t\geq 2}\frac{1}{n^t}=\sum_{n\geq 2}\frac{1/n^2}{1-1/n}=\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(n-1)}=\sum_{n\geq 2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1.$$

XXXV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e soluções da Segunda Fase – Nível Universitário

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

A reta tangente no ponto A de uma hipérbole corta suas assíntotas em B e C. A outra tangente à hipérbole traçada pelo ponto médio *M* do segmento *AC* corta a assíntota que passa por B no ponto D. Se *O* é o centro da hipérbole, prove que *OM* é paralela a *AD*.

PROBLEMA 2

Seja $f:\mathbb{Z}\longmapsto\mathbb{Z}$ uma função estritamente crescente. Prove que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2|f(n)|+1}-\frac{1}{2\big(|f(n)|+f(n)-f(n-1)\big)+1}\right)\leq\frac{4}{3}$$

e encontre todas as funções f para as quais vale a igualdade.

PROBLEMA 3

Em cada ponto P do reticulado $\mathbb{Z}^2$, temos um vetor unitário v_P que aponta ou para cima, ou para baixo, ou para a esquerda, ou para a direita. Uma formiga anda de um ponto do reticulado a outro, caminhando uma unidade na direção do vetor v_P associado do ponto de partida *P*; logo após a formiga deixar *P*, o vetor v_P é substituído por sua rotação de 90^0 no sentido anti-horário (mas os outros vetores v_Q, para $Q\neq P$, não mudam nesse momento). A formiga parte de um ponto inicial P_0. Seja P_n sua posição após *n* movimentos.

a) Prove que não é possível que a formiga fique restrita a uma região limitada, isto é, dado $R>0$ existe *n* tal que a distância da origem de $|P_n-P_0|$ é maior do que *R*.

b) É possível que a formiga passe pela origem infinitas vezes? Em outras palavras, existe alguma configuração inicial para a qual, para todo N, existe $n>N$ com $P_n=P_0$?

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Um sapo dá saltos no plano euclidiano. Começa em (0,0), e, para cada salto, se está inicialmente numa posição P escolhe um vetor de comprimento 1 aleatória e uniformemente, e salta para a posição $P+v$. Após 3 saltos, qual é a probabilidade de que o sapo esteja no disco unitário $\{w \in \mathbb{R}^2 | |w| \leq 1\}$?

PROBLEMA 5

Seja $f_0 : [0,1] \to [0,1]$ definida por $f_0(x) = x$.
Defina funções $f_n : [0,1] \to [0,1]$ para todo n natural por

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f_n(4x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_n(4x-3) & \frac{4}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Assim, por exemplo,

$$f_1(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ 2x-1, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

a) Prove que para quaisquer $x, y \in [0,1]$ e para qualquer n vale

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq f_n(|x-y|)\,.$$

b) Encontre o maior número real α para o qual existe $C > 0$ tal que,
para quaisquer $x, y \in [0,1]$ e para qualquer n vale

$$|f_n(x) - f_n(y)| < C \cdot |x-y|^\alpha\,.$$

(Observe que C não pode depender de n.)

PROBLEMA 6

Sejam θ_1=0, θ_2=01 e, para $n \geq 2, \theta_{n+1} = \theta_n\theta_{n-1}$ (isto é, θ_{n+1} é obtida pela concatenação
de θ_n e θ_{n-1}; assim, por exemplo, $\theta_3 = 010$ e $\theta_4 = 01001$).
Considere a sequência infinita θ que começa com θ_n para todo n, ou seja, $\theta = 0100101001001$ ....
a) Seja $\alpha = 0{,}100101001001...\in[0,1]$ o número cuja representação decimal é $0, \theta$. Prove que α é irracional.
b) Prove que, para todo inteiro positivo k, o número de subsequências formadas por k algarismos consecutivos de θ é $k+1$.

SOLUÇÕES DA SEGUNDA FASE

PROBLEMA 1: SOLUÇÃO DA BANCA

Podemos supor sem perda de generalidade (aplicando uma transformação afim conveniente) que a equação da hipérbole é $xy = 1$, $A = (x_0, 1/x_0)$, B é da forma $(0, \tilde{y})$ e C é da forma $(\tilde{x}, 0)$. Como a derivada de $1/x$ é $-1/x^2$, a equação da reta tangente à hipérbole em A é $y - \frac{1}{x_0} = (-\frac{1}{x_0^2})(x - x_0)$, ou seja, $y = -\frac{1}{{x_0}^2} \cdot x + \frac{2}{x_0}$. Calculando a interseção dessa reta com os eixos, obtemos $\tilde{y} = \frac{2}{x_0}$ e $\tilde{x} = 2x_0$. Assim, $M = \frac{A+C}{2} = \left(\frac{3x_0}{2}, \frac{1}{2x_0}\right)$. Digamos que a outra tangente à hipérbole traçada por M tenha como ponto de tangência $(z_0, 1/z_0)$. A equação da tangente será então $y - \frac{1}{z_0} = (-\frac{1}{z_0^2})(x - z_0)$, e, como M pertence a essa reta, $\frac{1}{2x_0} - \frac{1}{z_0} = (-\frac{1}{z_0^2})(\frac{3x_0}{2} - z_0)$, e logo z_0 satisfaz a equação $z_0^2 - 4x_0z_0 + 3x_0^2 = 0$, cujas raízes são x_0 (que dá o ponto A, que corresponde à tangente antiga) e $3x_0$. Assim, temos $z_0 = 3x_0$ e a equação da nova tangente é $y - \frac{1}{3x_0} = (-\frac{1}{9x_0^2})(x - 3x_0)$, donde a sua interseção com o eixo dos y, que é a assíntota que passa por B, é $D = (0, \frac{2}{3x_0})$. Assim, como o centro da hipérbole é $O = (0,0)$, temos $\overrightarrow{OM} = M = \left(\frac{3x_0}{2}, \frac{1}{2x_0}\right)$ e , $\overrightarrow{AD} = D - A = \left(-x_0, -\frac{1}{3x_0}\right) = -\frac{2}{3}\overrightarrow{OM}$, e portanto OM é paralela a AD.

PROBLEMA 2: SOLUÇÃO ADAPTADA DE GABRIEL LUÍS MELLO DALALIO (SÃO JOSÉ DOS CAMPOS – SP)

Seja N um inteiro positivo grande. Dada f como no enunciado, tomamos dois inteiros a, b com $a < b$ tais que $f(a) \leq -N, f(b) \geq N$. Vamos determinar o maior valor possível de uma soma do tipo

$$S_g = \sum_{n=a+1}^{c} \left(\frac{1}{2|g(n)|+1} - \frac{1}{2\big(|g(n)|+g(n)-g(n-1)\big)+1} \right)$$

para todas as funções estritamente crescentes $g\colon [a,c] \cap \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que $c \in \mathbb{Z}\,, c \geq b, g(a) = f(a)$ e $g(c) = f(b)$. Note que toda função g desse tipo pode ser estendida a uma função estritamente crescente $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $g(x) = f(x)$ para $x < a$ e $g(x) = f(x-c+b)$ para $x > c$. Note também que, para todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{2|g(n)|+1} - \frac{1}{2\big(|g(n)|+g(n)-g(n-1)\big)+1} \leq \frac{1}{2|g(n)|+1} - \frac{1}{2(|g(n)|+1)+1} =$$

$\frac{2}{(2|g(n)|+1)(2|g(n)|+3)}$. Assim, temos

$$\sum_{n=c+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2|g(n)|+1} - \frac{1}{2\big(|g(n)|+g(n)-g(n-1)\big)+1} \right) \leq$$

$$\leq \sum_{n=c+1}^{\infty} \frac{2}{(2|g(n)|+1)(2|g(n)|+3)} < \sum_{m=N}^{\infty} \frac{2}{(2m+1)(2m+3)} =$$

$$= \sum_{m=N}^{\infty} \frac{2}{(2m+1)(2m+3)} = \sum_{m=N}^{\infty} \left(\frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2m+3} \right) = \frac{1}{2N+1}$$

e

$$\sum_{n=-\infty}^{a} \left(\frac{1}{2|g(n)|+1} - \frac{1}{2\big(|g(n)|+g(n)-g(n-1)\big)+1} \right) \leq$$

$$\sum_{n=-\infty}^{a} \frac{2}{(2|g(n)|+1)(2|g(n)|+3)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{(2|g(a-m)|+1)(2|g(a-m)|+3)} \leq$$

$$\leq \sum_{m=N}^{\infty} \frac{2}{(2m+1)(2m+3)} = \sum_{m=N}^{\infty} \frac{2}{(2m+1)(2m+3)} = \frac{1}{2N+1}.$$

Se g for uma tal função e existir K $\in [a, c-1] \cap \mathbb{Z}$ tal que $g(K+1) > g(K)+1$, ou seja, $g(K+1) = g(K) + 1 + d$ com $d \in \mathbb{Z}_+^*$, vamos mostrar que se tomarmos a função $h: [a, c+1] \cap \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} g(x) \ \ para \ \ x \leq K \\ g(K) + d \ \ para \ \ x = K+1 \\ g(x-1) \ \ para \ \ x > K+1 \end{cases}$$

então teremos $S_h \geq S_g$.

As somas $S_h \ e \ S_g$ têm poucos termos diferentes; se fizermos a diferença teremos:

$$S_h - S_g = \frac{1}{2|g(K)+d|+1} - \frac{1}{2\big(|g(K)+d| + g(K) + d - g(K)\big)+1}$$
$$- \frac{1}{2(|g(K+1)| + g(K+1) - g(K) - d) + 1} + \frac{1}{2\big(|g(K+1)| + g(K+1) - g(K)\big)+1}$$

$$= \frac{1}{2|g(K)+d|+1} - \frac{1}{2|g(K)+d|+2d+1} - \frac{1}{2|g(K)+d+1|+3}$$
$$+ \frac{1}{2|g(K)+d+1|+2d+3}.$$

Com $y = g(K) + d$, se $y \geq 0$ tem-se:

$$S_h - S_g = \frac{1}{2y+1} - \frac{1}{2y+2d+1} - \frac{1}{2y+5} + \frac{1}{2y+2d+5} =$$
$$= \frac{4}{(2y+1)(2y+5)} - \frac{4}{(2y+2d+1)(2y+2d+5)}.$$

Com $d > 0$, o denominador da segunda expressão é o maior:

$2y + 1 < 2y + 2d + 1$ e $2y + 5 < 2y + 2d + 5$.

Portanto, $S_h - S_g > 0$.

Se $y < 0 \Rightarrow y \leq -1$:

$$S_h - S_g = \frac{1}{-2y+1} - \frac{1}{-2y+2d+1} - \frac{1}{-2y+1} + \frac{1}{-2y+2d+1};$$

$S_h - S_g = 0$.

Então em todos os casos tem-se $S_h - S_g \geq 0$.

Com isso, para obter o valor máximo de S_g, podemos supor que não existe K $\in [a, c-1] \cap \mathbb{Z}$ tal que $g(K+1) \neq g(K)+1$, ou seja, $g(K+1) = g(K)+1$ para todo K $\in [a, c-1] \cap \mathbb{Z}$, donde existe r $\in \mathbb{Z}$ tal que, para todo K $\in [a, c-1] \cap \mathbb{Z}$, $g(K) = K + r$. Temos então

$$\Rightarrow S_g = \sum_{n=-r}^{c} \left(\frac{1}{2g(n)+1} - \frac{1}{2\big(g(n)+g(n)-g(n-1)\big)+1} \right) +$$

$$\sum_{n=a+1}^{-r-1} \left(\frac{1}{-2g(n)+1} - \frac{1}{2\big(-g(n)+g(n)-g(n-1)\big)+1} \right)$$

O primeiro somatório será igual a:

$$\sum_{n=-r}^{c} \left(\frac{1}{2g(n)+1} - \frac{1}{2g(n)+3} \right) = \sum_{m=0}^{c+r} \left(\frac{1}{2\mathrm{n}+1} - \frac{1}{2\mathrm{n}+3} \right)$$

$$< \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\mathrm{n}+1} - \frac{1}{2\mathrm{n}+3} \right) == \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \ldots = 1$$

(Soma telescópica com termo convergindo para 0).

O segundo somatório será igual a:

$$\sum_{n=a+1}^{-r-1} \left(\frac{1}{-2g(n)+1} - \frac{1}{-2g(n-1)+1} \right) = \frac{1}{-2g(-r-1)+1} - \frac{1}{-2g(a)+1}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{1-2g(a)} < \frac{1}{3}.$$

Portanto, S_g é menor que $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. Concluímos que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2|f(n)|+1} - \frac{1}{2\big(|f(n)|+f(n)-f(n-1)\big)+1} \right) \leq \frac{4}{3} + \frac{2}{2N+1}.$$

Como $N > 0$ pode ser tomado arbitrariamente grande, segue que

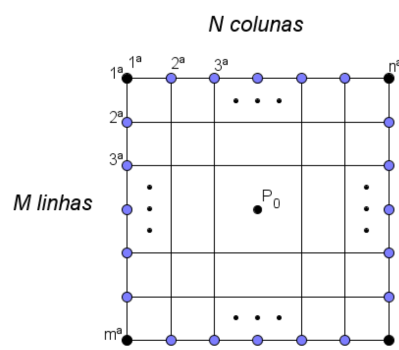
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2|f(n)|+1}-\frac{1}{2\big(|f(n)|+f(n)-f(n-1)\big)+1}\right)\le\frac{4}{3}.$$

Analisando os passos da solução, a soma não é máxima exatamente quando existe K ∈ ℤ tal que $f(K+1)=f(K)+1+d$ com d>0 e também $y=f(K)+d\ge 0$.

Ou seja, como $d\ge 1$, para $f(K+1)\ge 0$ deve-se ter $f(K+1)=f(K)+1$.

Com isso, a igualdade é atingida se, e só se, o conjunto $\{-1,0,1,2,3\ldots\}$ está contido na imagem de f.

PROBLEMA 3: SOLUÇÃO ADAPTADA DA SOLUÇÃO DE RÉGIS PRADO BARBOSA (FORTALEZA – CE)



a) Vamos supor que é possível. Tome um retângulo que contenha a região limitada.

Observe que se passarmos por algum ponto da 1ª linha quatro ou mais vezes, em uma delas teríamos que seguir para cima (↑) rompendo o limite, então podemos passar no máximo 3 vezes. Na 2ª linha se passarmos em algum ponto 4^2 vezes ⇒ 4 dessas foram para cima (↑) ⇒ passarmos 4 vezes em alguém na 1ª linha, o que romperia o limite. Logo, passamos em cada um $\le 4^2-1$ vezes.

De modo análogo, dado que na i-ésima só podemos passar por cada ponto 4^i-1 vezes, então na $(i+1)$-ésima não podemos passar mais que $4\cdot 4^i=4^{i+1}$ vezes, assim passamos no máximo $4^{i+1}-1$ vezes.
Somando no retângulo:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(4^i-1\right)=\sum_{i=1}^{m}n\left(4^i-1\right)<\sum_{i=1}^{m}n(4^m-1)=nm(4^m-1).$$

O número de vezes que passamos em algum ponto seria limitado Absurdo!, pois deveríamos nos mover indefinidamente na região limitada.
Logo, em alguma direção conseguimos ir tão distante de P_0 quanto se queira.

Obs.: É possível provar usando os argumentos acima que há duas possibilidades: ou a posição da formiga tende a infinito ou a formiga passa infinitas vezes por cada casa do reticulado.

b) Sim, é possível e veremos como:

Suponha que inicialmente $v_{(x,y)} = ((-1)^{x+y}, 0)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. Essa configuração faz a formiga passar por $P_0 = (0,0)$ infinitas vezes.

Descreveremos a seguir o caminho que a formiga faz entre duas passagens consecutivas pela origem. Dividiremos esse caminho em etapas sucessivas, que chamaremos de A_k, B_k, C_k e D_k, onde $k \geq 1$ é um inteiro. Em cada etapa a formiga percorrerá vértices em apenas um quadrante. Descreveremos os vértices percorridos na etapa e os vetores do quadrante percorrido na etapa (diferentes dos vetores iniciais $v_{(x,y)} = ((-1)^{x+y}, 0)$) antes e depois da etapa. Ao final de cada etapa, a formiga volta ao (0,0).

Etapa A_k: Primeiro quadrante.
No início da etapa: $v_{(x,y)} = (1,0)$ para $x, y \geq 0, x + y \leq 2k$.
São percorridos os vértices (x, y) com $x, y \geq 0$, $x + y \leq 2k + 1, y \leq 2k$.
Ao final da etapa: $v_{(x,y)} = (1,0)$ para $x, y > 0, x + y \leq 2k + 2$, $v_{(0,y)} = (0,1)$ para $0 \leq y \leq 2k$ e $v_{(x,0)} = (0, -1)$ para $0 < x \leq 2k + 1$.

Etapa B_k: Segundo quadrante.
No início da etapa: $v_{(x,y)} = (0,1)$ para $x \leq 0, y \geq 0, |x| + y \leq 2k$.
São percorridos os vértices (x, y) com $x \leq 0, y \geq 0$,
$|x| + y \leq 2k + 2, y \leq 2k + 1$ distintos de $(-2k - 2, 0)$ e $(-2k - 1, 0)$.
Ao final da etapa: $v_{(x,y)} = (0,1)$ para $x < 0, y > 0, |x| + y \leq 2k + 2$,
$v_{(x,0)} = (-1,0)$ para $-(2k + 1) \leq x \leq 0$ e $v_{(0,y)} = (1,0)$ para $0 < y \leq 2k + 2$.

Etapa C_k: Terceiro quadrante.
No início da etapa: $v_{(x,y)} = (-1,0)$ para $x, y \leq 0, |x| + |y| \leq 2k + 1$.
São percorridos os vértices (x, y) com $x, y \leq 0$, $|x| + |y| \leq 2k + 2, |y| \leq 2k + 1$.
Ao final da etapa: $v_{(x,y)} = (-1,0)$ para $x, y < 0, |x| + |y| \leq 2k + 3$,
$v_{(0,y)} = (0, -1)$ para $-(2k + 1) \leq y \leq 0$ e $v_{(x,0)} = (0,1)$ para $-2k - 2 \leq y < 0$.

Etapa D_k: Quarto quadrante.
No início da etapa: $v_{(x,y)} = (0,-1)$ para $x \geq 0, y \leq 0, x + |y| \leq 2k + 1$.
São percorridos os vértices (x,y) com $x \geq 0, y \leq 0$,
$x + |y| \leq 2k + 3, |y| \leq 2k + 2$ distintos de $(2k + 2, 0)$ e $(2k + 3, 0)$.
Ao final da etapa: $v_{(x,y)} = (0,-1)$ para $x > 0, y < 0, x + |y| \leq 2k + 3$,
$v_{(x,0)} = (1,0)$ para $0 \leq x \leq 2k + 2$ e $v_{(0,y)} = (-1,0)$ para $-2k - 3 \leq y < 0$.

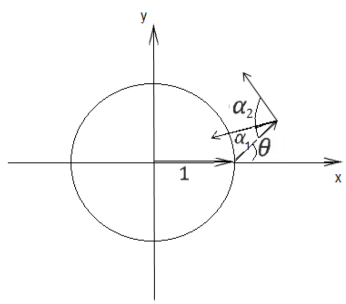
Esses fatos podem ser provados por indução: o caminho da formiga começa com
(etapa A_0) $(0,0) \to (1,0) \to$
(etapa B_0) $(0,0) \to (0,1) \to (-1,1) \to (0,1) \to$
(etapa C_0) $(0,0) \to (-1,0) \to (-2,0) \to (-1,0) \to (-1,-1) \to (0,-1) \to$
$(-1,-1) \to (-1,0) \to$
(etapa D_0) $(0,0) \to (0,-1) \to (0,-2) \to (1,-2) \to (0,-2) \to (0,-1) \to$
$(1,-1) \to (2,-1) \to (1,-1) \to (1,0) \to (1,-1) \to (0,-1) \to (0,0)$
Supondo, por hipótese de indução, que as etapas A_k, B_k, C_k e D_k transcorrem como na descrição acima, vamos considerar a etapa A_{k+1}. No início (logo após a etapa D_k), temos efetivamente $v_{(x,y)} = (1,0)$ para $x, y \geq 0, x + y \leq 2k + 2$. Os dois primeiros movimentos da etapa A_{k+1} levam a formiga para $(2,0)$ (e transformam os vetores $v_{(0,0)}$ e $v_{(1,0)}$ em $(0,1)$). Nesse momento, a situação é análoga à do início da etapa A_k, e portanto serão percorridos os vértices $(2 + x, y)$ com
$x, y \geq 0$, $x + y \leq 2k + 1, y \leq 2k$. Após esses movimentos, $v_{(2+x,y)} = (1,0)$ para $x, y > 0, x + y \leq 2k + 2$, $v_{(2,y)} = (0,1)$ para $0 \leq y \leq 2k$ e $v_{(2+x,0)} = (0,-1)$ para $0 < x \leq 2k + 1$. Após isso, a formiga se move da seguinte forma:

$$(2,0) \to (2,1) \to \cdots \to (2,2k) \to (2,2k+1) \to (1,2k+1) \to (2,2k+1) \to$$
$$(2,2k) \to (1,2k) \to (2,2k) \to (2,2k-1) \to (1,2k-1) \to (2,2k-1) \to$$
$$(2,2k-2) \to (1,2k-2) \to (2,2k-2) \to \cdots (2,0) \to (1,0) \to (1,1) \to$$
$$(1,2) \to \cdots \to (1,2k+1) \to (1,2k+2) \to (0,2k+2) \to (1,2k+2) \to$$
$$(1,2k+1) \to (0,2k+1) \to (1,2k+1) \to (1,2k) \to \cdots \to (1,2) \to (0,2) \to$$
$$(1,2) \to (1,1) \to (0,1) \to (1,1) \to (1,0) \to (0,0).$$

E, após esses movimentos, teremos: $v_{(x,y)} = (1,0)$ para $x, y > 0, x + y \leq 2k + 4$, $v_{(0,y)} = (0,1)$ para $0 \leq y \leq 2k + 2$ e $v_{(x,0)} = (0,-1)$ para $0 < x \leq 2k + 3$.
A análise das etapas B_{k+1}, C_{k+1} e D_{k+1} é análoga.

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DE RÉGIS PRADO BARBOSA (FORTALEZA – CE)

Considere os dois primeiros saltos e defina os eixos de modo que:



$0 \leq \theta \leq \pi$. Veja que isso é possível, pois, após o primeiro salto, marca-se o eixo x e coloca-se o y de acordo com o segundo.

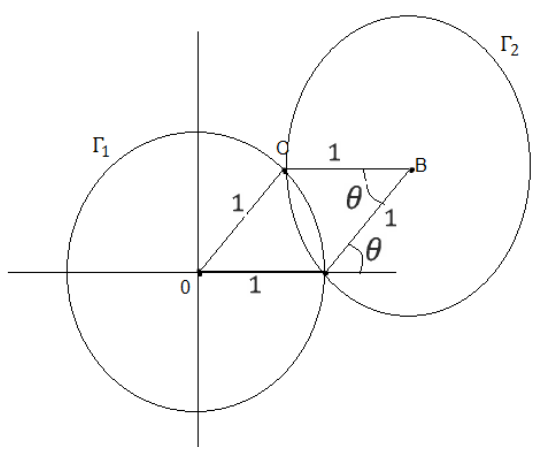
Agora devemos verificar para que valores de α o sapo cai dentro ou na borda do disco.

Note que para $\alpha = \alpha_1$ cai dentro e para $\alpha = \alpha_2$ cai fora, por exemplo. Note que: de B o sapo cairá em um ponto sobre Γ_2.

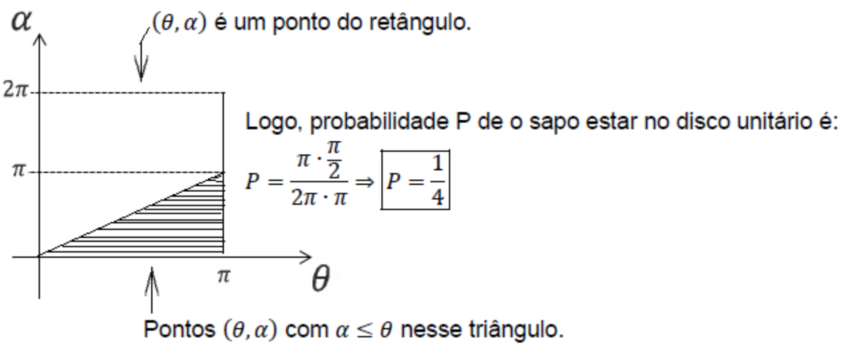
$C = \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \Rightarrow 0ABC$ é um losango. $0A//BC \Rightarrow A\hat{B}C = \theta$

Logo, cai dentro se e somente $\alpha \leq \theta$ $(\theta \neq 0, \pi)$.

Observação: Veja que os casos $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ podem ser excluídos pois ocorrem com probabilidade 0.



Temos então:



PROBLEMA 5: SOLUÇÃO DE VALDIR JOSÉ PEREIRA JÚNIOR (VIÇOSA – MG)

a) Provarei a desigualdade por indução sobre n. Para n = 0, ela é facilmente verificada:

$$|x-y| \le |x-y|.$$

<u>1º caso</u>: $x, y \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$.

$$|f_{n+1}(x) - f_{n+1}(y)| = \left|\frac{1}{2} f_n(4x) - \frac{1}{2} f_n(4y)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}|f_n(4x) - f_n(4y)| \le \frac{1}{2} f_n(4|x-y|) = f_{n+1}(|x-y|).$$

<u>2º caso</u> : $x, y \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]$. Este caso é análogo ao primeiro, pois

$$f_{n+1}\left(x + \frac{3}{4}\right) = f_{n+1}(x) + \frac{1}{2}, \forall x \in \left[0, \frac{1}{4}\right].$$

<u>3º caso</u> : $x, y \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$.

$$0 = |f_{n+1}(x) - f_{n+1}(y)| \le f_{n+1}(|x-y|).$$

Para os casos que faltam precisarei do fato de que, para todo n, f_n é não decrescente. Obviamente f_0 é não decrescente. Se f_n é não decrescente, então $\frac{1}{4}f_n(4x)$ é não decrescente para $0 \le x \le \frac{1}{4}$, e $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}f_n(4x-3)$ é não decrescente para $\frac{3}{4} \le x \le 1$.

Como $\frac{1}{2}f_n(4x) \le \frac{1}{2}, x \in \left[0,\frac{1}{4}\right]$ e $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}f_n(4x-3) \ge \frac{1}{2}, x \in \left[\frac{3}{4},1\right]$, segue que f_{n+1} é não decrescente.

<u>4º caso</u> : $x \in \left[0,\frac{1}{4}\right]$ e $y \in \left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$.

Segue do primeiro caso, pois $f_{n+1}(y) = \frac{1}{2} = f_{n+1}(\frac{1}{4})$ e $|x-y| \ge \left|x-\frac{1}{4}\right|$.

<u>5º caso</u> : $x \in \left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$ e $y \in \left[\frac{3}{4},1\right]$.

Segue do segundo caso, pois $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} = f_{n+1}(\frac{3}{4})$ e $\left|y-\frac{3}{4}\right| \ge |y-x|$.

<u>6º caso</u> : $x \in \left[0,\frac{1}{4}\right]$, $y \in \left[\frac{3}{4},1\right]$.

Suponha inicialmente que $|x-y| \ge \frac{3}{4}$, então

$$|f_{n+1}(x)-f_{n+1}(y)| = \left|\frac{1}{2}f_n(4x)-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}f_n(4y-3)\right| \le$$

$\le \frac{1}{2}+\frac{1}{2}|f_n(4x)-f_n(4y-3)|$, que, por hipótese de indução é menor ou igual a $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}f_n(4y-4x-3) = f_{n+1}(y-x) = f_{n+1}(|x-y|)$.

Suponha agora que $\frac{1}{2} \le |x-y| \le \frac{3}{4}$. Logo $f_{n+1}(|x-y|) = \frac{1}{2}$ e

$y \le x+\frac{3}{4} \Rightarrow 4y-3 \le 4x \Rightarrow f_n(4y-3) \le f_n(4x)$. Assim, temos

$|f_{n+1}(x)-f_{n+1}(y)| = f_{n+1}(y)-f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}f_n(4y-3)-\dfrac{1}{2}f_n(4x) \le \dfrac{1}{2} =$

$=f_{n+1}(|x-y|)$.

Isto conclui, em todos os casos, a prova da desigualdade.

b) Primeiro provaremos por indução que, para todo n,

$f_n(x) = 2^n x$ para $x \in \left[0, \frac{1}{4^n}\right]$. De fato, isto é válido para $n = 0$.

Suponha que seja válido para n. Se $x \in \left[0, \frac{1}{4^{n+1}}\right]$, então $x \in \left[0, \frac{1}{4^n}\right]$ e temos:

$f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{2} f_n(4x) \leq \dfrac{1}{2} 2^n \cdot 4x = 2^{n+1}x.$

Logo se α é tal que $|f_n(x) - f_n(y)| \leq C \cdot |x-y|^\alpha$, $\forall x, y \in [0,1]$ e para qualquer n, então temos para $x = 0$ e $y = \frac{1}{4^n}$: $|f_n(x) - f_n(y)| = 2^n \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{1}{2^n}$.

Logo $\frac{1}{2^n} \leq C \cdot \left(\frac{1}{4^n}\right)^\alpha \Rightarrow C \geq \frac{2^{2n\alpha}}{2^n} = 2^{n(2\alpha-1)}$.

Como esta desigualdade deve valer para todo n, então devemos ter

$2\alpha - 1 \leq 0 \Rightarrow \alpha \leq \dfrac{1}{2}.$

Mostremos por indução que para todo $n \geq 0$ e $x \in [0,1]$, $\frac{f_n(x)}{\sqrt{x}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Para $n = 0$ temos: $\frac{f_0(x)}{\sqrt{x}} \leq \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \leq 1$.

Suponha a afirmação válida para n. Para $n+1$ temos:

<u>1º caso</u>: $x \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \Rightarrow \frac{f_{n+1}(x)}{\sqrt{x}} = \frac{\frac{1}{2} f_n(4x)}{\frac{1}{2}\sqrt{4x}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$.

<u>2º caso</u>: $x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \Rightarrow \frac{f_{n+1}(x)}{\sqrt{x}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{x}} \leq \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$.

<u>3º caso</u>: $x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \Rightarrow \frac{f_{n+1}(x)}{\sqrt{x}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_n(4x-3)}{\sqrt{x}} \leq \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Portanto a afirmação está demonstrada.

Usando a letra a) temos:

$|f_n(x) - f_n(y)| \leq f_n(|x-y|) \leq \frac{2}{\sqrt{3}} |x-y|^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$.

PROBLEMA 6: SOLUÇÃO DA BANCA

a) Seja $\theta_1 = 0, \theta_2 = 01$ e, para $n \geq 2$, $\theta_{n+1} = \theta_n\theta_{n-1}$. Vamos mostrar por indução que, para todo $n \geq 1$, existe uma palavra τ_n tal que $\theta_n\theta_{n+1} = \tau_n\alpha_n$ e $\theta_{n+1}\theta_n = \tau_n\beta_n$, onde $\alpha_n = 10$ e $\beta_n = 01$, se n é par, enquanto, se n é ímpar, $\alpha_n = 01$ e $\beta_n = 10$ (em particular as últimas letras de θ_n e de θ_{n+1} são distintas). De fato, isso vale para $n = 1$ com $\tau_1 = 0$ e para $n = 2$ com $\tau_2 = 010$. Se isso vale para n, temos $\theta_{n+1}\theta_{n+2} = \theta_{n+1}\theta_{n+1}\theta_n = \theta_{n+1}\tau_n\beta_n$, enquanto $\theta_{n+2}\theta_{n+1} = \theta_{n+1}\theta_n\theta_{n+1} = \theta_{n+1}\tau_n\alpha_n$, o que prova nossa afirmação, com $\tau_{n+1} = \theta_{n+1}\tau_n$.

Para mostrar que $\alpha = 0, \theta$ é irracional, basta mostrar que $\theta = \lim_{n\to\infty}\theta_n$ não é (pré-)periódica. Suponha por absurdo que θ fosse periódica a partir de um certo ponto, e seja m o tamanho de seu período. Como o tamanho de θ_n é F_{n+1} (onde F_k é o k-ésimo número de Fibonacci), tomando n inteiro positivo tal que $m|F_{n+1}$, grande o suficiente para que o tamanho da eventual parte não-periódica de θ seja menor que F_{n+2}, temos que θ começa com $\theta_{n+2} = \theta_{n+1}\theta_n$, mas como o tamanho F_{n+1} de θ_n é múltiplo do período m, a F_{n+2}-ésima letra de θ, que é a última letra de θ_{n+1}, deveria coincidir com a $(F_{n+2} + F_{n+1})$-ésima letra de θ, que é a última letra de θ_n, absurdo.

b) Para cada inteiro positivo k, seja $p(k)$ o número de subpalavras de k letras consecutivas de θ. Para provar que, para todo k, $p(k) = k + 1$, basta mostrar que $p(F_{n+1}) \leq F_{n+1} + 1$, para todo $n > 1$. De fato, $p(1) = 2$ e, como θ não é periódica, $p(k+1) > p(k)$ para todo k, pois se, para algum k, $p(k+1) = p(k)$, cada subpalavra de tamanho k só pode ter uma continuação de tamanho $k + 1$, e teríamos uma dinâmica no conjunto finito das subpalavras de tamanho k (que a cada subpalavra associa sua única continuação sem a primeira letra), cujas órbitas são todas pré-periódicas, e logo θ também seria. Assim, $p(k) \geq k + 1$ para todo k e se, para algum k, $p(k) > k + 1$, tomando n tal que $F_{n+1} > k$, teríamos $p(F_{n+1}) - p(k) < F_{n+1} + 1 - (k+1) = F_{n+1} - k$, donde, para algum m com $k \leq m < F_{n+1}$, devemos ter $p(m+1) \leq p(m)$, absurdo.

Para provar que, para todo $n > 1$, $p(F_{n+1}) \leq F_{n+1} + 1$, note que θ pode ser escrito como uma concatenação de palavras pertencentes a $\{\theta_n, \theta_{n+1}\}$, pois (por indução),para todo $r \geq n$, θ_r pode ser escrito como uma concatenação de palavras pertencentes a $\{\theta_{n,}\theta_{n+1}\}$. Assim, qualquer subpalavra de θ de tamanho F_{n+1} (que é o tamanho de θ_n) é uma subpalavra de $\theta_n\theta_{n+1}$ ou de $\theta_{n+1}\theta_n$. Como $\theta_n\theta_{n+1} = \theta_n\theta_n\theta_{n-1}$ é uma subpalavra de $\theta_n\theta_n\theta_{n-1}\theta_{n-2} = \theta_n\theta_n\theta_n$, há no máximo $|\theta_n| = F_{n+1}$ subpalavras de tamanho $|\theta_n| = F_{n+1}$ de $\theta_n\theta_n\theta_n$, e logo de $\theta_n\theta_{n+1}$. Como $\theta_n\theta_{n+1} = \tau_n\alpha_n$ e $\theta_{n+1}\theta_n = \tau_n\beta_n$, $\theta_{n+1}\theta_n$termina com θ_n, e $|\beta_n| = 2$, a única subpalavra de $\theta_{n+1}\theta_n$ de tamanho $|\theta_n| = F_{n+1}$ que pode não ser subpalavra de $\theta_n\theta_{n+1}$ é a subpalavra que termina com a primeira letra de β_n (ou seja, uma posição antes do fim de $\theta_{n+1}\theta_n$). Assim, $p(F_{n+1}) \leq\ F_{n+1} + 1$.

XXXV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Resultado – Nível 1 (6º e 7º Anos do Ensino Fundamental)

NOME	CIDADE - ESTADO	PRÊMIO
Pedro Lucas Lanaro Sponchiado	Santa Cruz do Rio Pardo - SP	Ouro
Lucas Viana Lopes Ferreira	Rio de Janeiro - RJ	Ouro
Luca Silveira Escopelli	Porto Alegre- RS	Ouro
Frederico Messa Schwartzhaupt	Porto Alegre- RS	Ouro
Álvaro Bernardo Rodrigues de Almeida	Fortaleza - CE	Ouro
Lucas de Oliveira Sucupira	Fortaleza - CE	Ouro
Debora Tami Yamato	Sao Paulo- SP	Prata
Davi Xie	Curitiba- PR	Prata
Joao Pedro Quaranta de Almeida	Salvador - BA	Prata
Gustavo Marin Goulart	Rio de Janeiro- RJ	Prata
Felipe Bezerra de Menezes Benício de Souza	Fortaleza - CE	Prata
Bernardo Quintão Oliveira	Ipatinga- MG	Prata
Leandro Léo Rebelo	Rio de Janeiro - RJ	Prata
Carlos Eduardo Sousa de Magalhães Bastos Gomes	Rio de Janeiro- RJ	Prata
Yan Victor Souza Guimarães	Fortaleza - CE	Prata
Frederico Bulhões de Souza Ribeiro	Natal- RN	Prata
Gustavo Farani de Farias	Aracaju- SE	Bronze
Luisa Rolim Miranda	Fortaleza- CE	Bronze
Leonardo de Sousa Rodrigues	Santo- SP	Bronze
Leticia Verri Marquez	Uberlandia- MG	Bronze
Marcelo Tabarelli	Araçatuba - SP	Bronze
Bianca Yumi Ishikawa	Sorocaba - SP	Bronze
Estevão da Silva Neto	Fortaleza - CE	Bronze
Flademir Barbosa Lins Junior	Recife- PE	Bronze
Pedro Afonso Berford Leão Amorim	Brasília- DF	Bronze
João Vitor Guapo Occhiucci	S.J. Rio Pre1o - SP	Bronze
Tiago Firmeza Farias	Fortaleza- CE	Bronze
Gloria Dantas Brito	Fortaleza- CE	Bronze
Julia Ramos Alves	Vitória- ES	Bronze
Maria Eduarda Ticianelli Lopes	Sao Paulo- SP	Bronze
Carlos Henrique T. N. Felix	Valinhos- SP	Menção Honrosa
Daniel Sequerra Gagliardi	Sao Paulo- SP	Menção Honrosa
João Victor Expedito Bastos Cardoso	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Luan Ezio dos Santos Costa	Santa Isabel - SP	Menção Honrosa
Bruno Carvalho Brandao	Santos- SP	Menção Honrosa
Pedro Franca de Figueiredo	Aracaju- SE	Menção Honrosa
Henrique Juziuk Berger	Santos- SP	Menção Honrosa
Ricardo Teles Toledo	Juiz de Fora - MG	Menção Honrosa
Francisco Samuel Matos Morais	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Luiz Guilherme de Jesus Araújo Santos	Aracaju - SE	Menção Honrosa
Renata Martins Oliveira	Timóteo- MG	Menção Honrosa
Vinícius Velasco Assis	Rio de Janeiro- RJ	Menção Honrosa
Gabriel Sousa de Luca	Sao Paulo- SP	Menção Honrosa
Ranniel Luz Oliveira Moreira da Costa	Belo Horizonte- MG	Menção Honrosa
Stephanie Pedrazza Grunwald	Salvador - BA	Menção Honrosa
Daniel Rodrigues Freire Mota	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Bruno Andrade Rocco	Vitória- ES	Menção Honrosa
Leonardo da Cunha Menegon	Santo Andre - SP	Menção Honrosa
Lílian Costa Macedo de Magalhães	Salvador - BA	Menção Honrosa
Marcelo Augusto de Andrade Maia Filho	Cuiabá - MT	Menção Honrosa
Beatriz Abreu Bezerra	Fortaleza - CE	Menção Honrosa

Igor Rigolon La-Cava Veiga	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Vilmar Ribeiro Machado Júnior	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Bruno Gabriel Motta Rodrigues	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Eduardo Venlilari Sodré	Brasília - DF	Menção Honrosa
Catulo Axel Teixeira Vasconcelos Alves	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
João Vitor Rodrigues Cortines Laxe	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Bárbara Marques Freitas	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Caroline Biason Gerage	Piracicaba - SP	Menção Honrosa
Daniel Salles Leite	Brasília - DF	Menção Honrosa
Rubens Robles de Souza Ortega	Curitiba – PR	Menção Honrosa
Eduardo Lima Gonçalves da Fonseca	Belo Horizonte – MG	Menção Honrosa
Gustavo Mota Rabello	Belo Horizonte – MG	Menção Honrosa
Alan Gabriel Santos Schiffner	Porto Alegre – RS	Menção Honrosa
Marcelo hippólyto de Sandes Peixoto	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Àlvaro Lucena e Ortiz	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Ana Beatriz Ramos Milhome	Teresina – PI	Menção Honrosa
André Vinicius Vasconcelos	Sobral – CE	Menção Honrosa
Luis Henrique Costa	Curitiba – PR	Menção Honrosa
Gabriel Fernandes Pirkel	Curitiba – PR	Menção Honrosa
Caio César Barros Matos	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Melany Naiade Bottega Mariussi	Curitiba – PR	Menção Honrosa
Gabriel Marques Domingues	Salvador – BA	Menção Honrosa
Giovana Pioto Fontes	Cuiabá – MT	Menção Honrosa
Ricardo Yudi Takahashi	Maringá – PR	Menção Honrosa
Vitor Lima Murad Sydrijo Ferreira	Brasília – DF	Menção Honrosa
Vitória Dantas Brito	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Guilherme Pioto Fontes	Cuiabá – MT	Menção Honrosa
Solano Monteiro Paes	Belo Horizonte – MG	Menção Honrosa
Bernardo Peruzzo Trevizan	Canoas – RS	Menção Honrosa
Caio Victor Queiroga Barreto	Sousa – PB	Menção Honrosa
João Vitor Baptista Moreira	Viçosa – MG	Menção Honrosa

Nível 2 (8º e 9º Anos do Ensino Fundamental)

NOME	CIDADE - ESTADO	PRÊMIO
Pedro Henrique Sacramento de Oliveira	Vinhedo - SP	Ouro
Guilherme Goulart Kowalczuk	Porto Alegre - RS	Ouro
Bryan Diniz Borck	Porto Alegre - RS	Ouro
Andre Yuji Hisatsuga	São Paulo - SP	Ouro
Andrey Jhen Shan Chen	Campinas - SP	Ouro
João Guilherme Madeira Araújo	Fortaleza - CE	Ouro
Daniel Quintão de Moraes	Rio de Janeiro - RJ	Prata
Vinícius Trindade de Melo	Flores de Campos - MG	Prata
Matheus Leite Queiroz Nunes	Recife - PE	Prata
Diego Teixeira Nogueira Fidalgo	Salvador - BA	Prata
Vítor Augusto Carneiro Porto	Fortaleza - CE	Prata
Rogério Aristida Guimaraes Júnior	Teresina - PI	Prata
Italo Rennan Lima Silva	Fortaleza - CE	Prata
Loic Dominguez	Fortaleza - CE	Prata
Luan Lima Freitas	Rio de Janeiro - RJ	Prata
Carlos Roberto Bastos Lacerda	Rio de Janeiro - RJ	Bronze
Ana Carolina Accioly Monteiro	Fortaleza - CE	Bronze
Bruno Kenzo Ozaki	São Paulo - SP	Bronze
Bruno Brasil Meinhart	Fortaleza - CE	Bronze
Gabriel Dante Cawamura Seppelfelt	S.Caetano do Sul - SP	Bronze

Rodrigo Vieira Casanova Monteiro	Rio de Janeiro - RJ	Bronze
Gabriel Leite Queiroz Nunes	Recife - PE	Bronze
Mateus Siqueira Thimóteo	Mogi das Cruzes - SP	Bronze
Lucas Diniz Gonçalves Villas Bôas	Salvador - BA	Bronze
Plínio Melo Guimarães Valério	Belo Horizonte - MG	Bronze
Angelo Donizeti Lorençoni Junior	São Carlos - SP	Bronze
Gabriel José Pereira Corzo	Piraúba - MG	Bronze
Laura Mello D'Urso Vianna	Rio de Janeiro - RJ	Bronze
Alícia Fortes Machado	Teresina - PI	Bronze
Diene Xie	Curitiba - PR	Bronze
Bruno Uchôa Cirne	Natal - RN	Menção Honrosa
Julia Perdigão Saltiel	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Diogo Correia Netto	Sorocaba - SP	Menção Honrosa
Victor Alves Benevides	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Victor Massatoshi Kawakami Tsuda	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Tarcisio Soares Teixeira Neto	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Bruno Teixeira Gomes	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Mark Helman	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Maria Júlia Costa Medeiros	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Renan Felipe Bergamaschi de Morais	Bariri - SP	Menção Honrosa
Miriam Harumi Koga	Guarulhos - SP	Menção Honrosa
Felipe Reyel Feitosa de Sousa	Teresina - PI	Menção Honrosa
Gabriel Santos Nicolau	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Laís de Lima Xavier Gomes	Recife - PE	Menção Honrosa
Rodrigo Gilles Guidi	Marechal Floriano - ES	Menção Honrosa
Luísa de Andrade Lima Marinho	Recife - PE	Menção Honrosa
Lucas Soares Rodrigues	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Guilherme Nascimento de Oliveira	Vila Velha - ES	Menção Honrosa
Gabriel Arthur Teixeira Rodrigues	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Bruno Martins Bezerra Farias	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Henrique Gontijo Chiari	Belo Horizonte - MG	Menção Honrosa
Gabriel Tabbal Mallet	Porta Alegre - RS	Menção Honrosa
Otávio Henrique Ribas Guimarães	Belo Horizonte - MG	Menção Honrosa
Gabriel de Oliveira Machado	Cataguases - MG	Menção Honrosa
Bernardo Gabriele Collaço	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
William Zaniboni Silva	Jales - SP	Menção Honrosa
Ricardo Frenchel	Jacaré - SP	Menção Honrosa
Marcelo Meireles Carrara	Juiz de Fora - MG	Menção Honrosa
Guilherme da Costa Cruz	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Vítor Keidi Figueiredo Komeno	Brasília - DF	Menção Honrosa
Brendon Diniz Borck	Porto Alegre - RS	Menção Honrosa
Adrian Alexander Ticona Delgado	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Júlia Prates de Sá Carvalho	S.J. dos Campos - SP	Menção Honrosa
Gabriel Moura Braúna	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Marcelo Henrique Vasconcelos de Aragão Filho	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Maysa Miho Ohashi	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Renan Peres Martins	S.J. Rio Preto - SP	Menção Honrosa
João Vitor Vaz Oliveira	Recife - PE	Menção Honrosa
Amanda Barbosa Schirmbeck	Brasilia - DF	Menção Honrosa
Jonathan Raniere Pereira de Oliveira	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Diego Ferreira Caldas	Belo Horizonte - MG	Menção Honrosa

Nível 3 (Ensino Médio)

NOME	CIDADE - ESTADO	PRÊMIO
Rodrigo Sanches Ângelo	São Paulo - SP	Ouro
Franco Matheus de Alencar Severo	Rio de Janeiro - RJ	Ouro
Rafael Kazuhiro Miyazaki	São Paulo - SP	Ouro
Victor Oliveira Reis	Recife - PE	Ouro
Murilo Corato Zanarella	Amparo - SP	Ouro
Daniel Lima Braga	Eusébio - CE	Prata
Alessandro A. P. de Oliveira Pacanowski	Rio de Janeiro - RJ	Prata
Alexandre Perozim de Faveri	Neves Paulista - SP	Prata
Tadeu Pires de Matos Belfort Neto	Fortaleza - CE	Prata
Rafael Rodrigues Rocha de Melo	Fortaleza - CE	Prata
Carlos Alexandre Silva dos Santos	Fortaleza - CE	Prata
Henrique Vieira Gonçalves Vaz	São Paulo - SP	Prata
Gabriel Fazoli Domingos	Urupés - SP	Prata
Ana Karoline Borges Carneiro	Fortaleza - CE	Prata
João César Campos Vargas	Passa Tempo - MG	Prata
Davi Coelho Amorim	Fortaleza - CE	Prata
Lincoln de Queiroz Vieira	Fortaleza - CE	Bronze
João Pedro Gonçalves Ramos	Rio de Janeiro - RJ	Bronze
Matheus Carioca Sampaio	Fortaleza - CE	Bronze
Rafael Filipe dos Santos	Rio de Janeiro - RJ	Bronze
Pedro Victor Falci de Rezende	Juiz de Fora - MG	Bronze
Caio Cesar Saldanha Maia Orejuela Kinelski	Fortaleza - CE	Bronze
Lucas Mioranci	S.J. do Rio Preto - SP	Bronze
Samuel Brasil de Albuquerque	Fortaleza - CE	Bronze
Daniel Santana Rocha	Rio de Janeiro - RJ	Bronze
Gabriel Toneatti Vercelli	Osasco - SP	Bronze
Raphael Mendes de Oliveira	Rio de Janeiro - RJ	Bronze
João Lucas Fernandes dos Santos	Recife - PE	Bronze
Vinícius Canto Costa	Rio de Janeiro - RJ	Bronze
Pedro Morais de Arruda Siaudzionis	Fortaleza - CE	Bronze
Mateus Bezrutchka	Taboão da Serra - SP	Menção Honrosa
Ricardo Kazu Nakanishi	Brasília - DF	Menção Honrosa
Luis Fernando Machado Poletti Valle	Guarulhos - SP	Menção Honrosa
Luíze Mello D'Urso Vianna	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Igor Albuquerque Araujo	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Breno Soares da Costa Vieira	J. dos Guararapes - PE	Menção Honrosa
Vitor Dias Gomes Barrios Marin	Presidente Prudente - SP	Menção Honrosa
Arthur Ferreira do Nascimento	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Lucas Pereira Gaivão de Barros	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Alex Alvarez Neto	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Luiz Henrique Aguiar de Lima Alves	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Guilherme de Oliveira Rodrigues	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Lucca Morais de Arruda Siaudzionis	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
João Pedro Sedeu Godoi	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Roger Leite Lucena	Imperatriz - MA	Menção Honrosa
Narelli de Paiva Narciso	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Pedro Henrique da Silva Dias	Poroa Alegre - RS	Menção Honrosa
Helena Veronique Rios	São Carlos - SP	Menção Honrosa
Pedro Henrique Alencar Costa	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Marina Pessoa Mota	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Gabriel Queiroz Moura	Teresina - PI	Menção Honrosa
Michel Rozenberg Zelazny	São Paulo - SP	Menção Honrosa

Bruno Eidi Nishimoto	Jales - SP	Menção Honrosa
Natália Ferreira Godot Souza	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Ana Paula Lopes Schuch	Porto Alegre - RS	Menção Honrosa
Gabriel José Moreira da Costa Silva	Maceió - AL	Menção Honrosa
Erik Gabriel Araújo de Medeiros	Salvador - BA	Menção Honrosa
José Lucas de Alencar Saraiva	Recife - PE	Menção Honrosa
Hudson William Braga Vieira	Contagem - MG	Menção Honrosa
Christian Júnior de Oliveira	Martins Campos - MG	Menção Honrosa
Mariana Teatini Ribeiro	Belo Horizonte - MG	Menção Honrosa

Nível Universitário

NOME	CIDADE - ESTADO	PRÊMIO
Henrique Gasparini Fiuza do Nascimento	Brasilia - DF	Ouro
Rafael Tupynambá Dutra	Belo Horizonte - MG	Ouro
Marcelo Tadeu de Sá Oliveira Sales	São Paulo - SP	Ouro
Régis Prado Barbosa	Fortaleza - CE	Ouro
Davi Lopes Alves de Medeiros	Fortaleza - CE	Ouro
Gabriel Luís Mello Dalalio	S.J.dos Campos - SP	Prata
Fernando Fonseca Andrade Oliveira	Belo Horizonte - MG	Prata
Matheus Secco Torres da Silva	Rio de Janeiro - RJ	Prata
André Macieira Braga Costa	Belo Horizonte - MG	Prata
Cassio Henrique Vieira Morais	Belo Horizonte - MG	Prata
Rafael Endlich Pimentel	Vitória - ES	Prata
Valdir José Pereira Júnior	Viçosa - MG	Prata
Daniel Dos Santos Bossle	Porto Alegre - RS	Bronze
Darcy Gabriel Augusto de Camargo Cunha	Campinas - SP	Bronze
Glauber de Lima Guarinello	São Paulo - SP	Bronze
Ivan Guilhon Mitoso Rocha	Fortaleza - CE	Bronze
Bruno de Nadai Sarnaglia	Vila Velha - ES	Bronze
Thiago Silva Pinheiro	Pinheiros - SP	Bronze
Daniel Carletti	Rio de Janeiro - RJ	Bronze
Thiago Ribeiro Ramos	Varginha - MG	Bronze
Raphael Aureliano Conceição da Silva	Rio de Janeiro - RJ	Bronze
Thomás Jung Spier	Estância Velha - RS	Bronze
Lucas Colucci Cavalcante de Souza	São Paulo - SP	Bronze
Lucas da Silva Reis	Belo Horizonte - MG	Menção Honroza
Guilherme Horta Alvares da Silva	Belo Horizonte - MG	Menção Honroza
Rafael Pereira de Paula Lucas Simon	Recife - PE	Menção Honroza
José Olegário de Oliveira Neto	Fortaleza - CE	Menção Honroza
Letícia Dias Mattos	Contagem - MG	Menção Honroza
Bruno Silva Mucciaccia	Vitória - ES	Menção Honroza
Michel Faleiros Martins	Campinas - SP	Menção Honroza
Bruna Halila Morrone	Joinville - SC	Menção Honroza
Matheus Leal Assunção	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honroza
João Miranda Carnevale	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honroza
Felipe Alexandre Lima de Abreu	S.J.dos Campos - SP	Menção Honroza
Victor Vilas Boas Chaves	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honroza
Esdras Muniz Mota	Caucaia - CE	Menção Honroza
Davi de Castro Silva	Goiânia - GO	Menção Honroza
Daniel Ariano Sortica	São Paulo - SP	Menção Honroza
Fernando Lima Saraiva Filho	Eusébio - CE	Menção Honroza
Thiago Poeiras Silva	Belo Horizonte - MG	Menção Honroza
Iuri Rezende Souza	Mineiros - GO	Menção Honroza
Thomas Rincon Reis	Belo Horizonte - MG	Menção Honroza

Luiz Fernando Bossa	Florianópolis - SC	Menção Honroza
Renato Dias Costa	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honroza
Rodrigo Rolim Mendes de Alencar	Fortaleza - CE	Menção Honroza
Marcelo Luiz Gonçalves	Franca - SP	Menção Honroza
Lucas Medeiros Sobrinho de Sousa	Salvador - BA	Menção Honroza
Leandro Lyra Braga Dognini	Barbacena - PA	Menção Honroza
Charles Barbosa de Macedo Brito	Natal - RN	Menção Honroza
Maria Clara Mendes Silva	Pirajuba - MG	Menção Honroza
Felipe Gomes Pegoraro	Curitiba - PR	Menção Honroza
Pedro Kenzo de Alencar Ohi	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honroza

COORDENADORES REGIONAIS

Alberto Hassen Raad	(UFJF)	Juiz de Fora – MG
Américo López Gálvez	(USP)	Ribeirão Preto – SP
Antonio Carlos Nogueira	(UFU)	Uberlândia – MG
Benedito Tadeu Vasconcelos Freire	(UFRN)	Natal – RN
Bruno Holanda	(CAEN – UFC)	Fortaleza – CE
Carmen Vieira Mathias	(UNIFRA)	Santa María – RS
Claus Haetinger	(UNIVATES)	Lajeado – RS
Cláudio de Lima Vidal	(UNESP)	S.J. do Rio Preto – SP
Denice Fontana Nisxota Menegais	(UNIPAMPA)	Bagé – RS
Disney Douglas Lima de Oliveira	(UFAM)	Manaus – AM
Edson Roberto Abe	(Colégio Objetivo de Campinas)	Campinas – SP
Edney Aparecido Santulo Jr.	(UEM)	Maringá – PR
Fábio Brochero Martínez	(UFMG)	Belo Horizonte – MG
Florêncio Ferreira Guimarães Filho	(UFES)	Vitória – ES
Francinildo Nobre Ferreira	(UFSJ)	São João del Rei – MG
Genildo Alves Marinho	(Centro Educacional Leonardo Da Vinci)	Taguatingua – DF
Herivelto Martins	(USP – São Carlos)	São Carlos – SP
Gilson Tumelero	(UTFPR)	Pato Branco – PR
Ivanilde Fernandes Saad	(UC. Dom Bosco)	Campo Grande – MS
João Benício de Melo Neto	(UFPI)	Teresina – PI
João Francisco Melo Libonati	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Diogo Diniz	(UFPB)	Campina Grande – PB
José Luiz Rosas Pinho	(UFSC)	Florianópolis – SC
José Vieira Alves	(UFPB)	Campina Grande – PB
José William Costa	(Instituto Pueri Domus)	Santo André – SP
Krerley Oliveira	(UFAL)	Maceió – AL
Licio Hernandes Bezerra	(UFSC)	Florianópolis – SC
Luciano G. Monteiro de Castro	(Sistema Elite de Ensino)	Rio de Janeiro – RJ
Luzinalva Miranda de Amorim	(UFBA)	Salvador – BA
Marcelo Dias	(Grupo Educacional Etapa)	São Paulo – SP
Marcelo Antonio dos Santos	FACOS	Osório – RS
Marcelo Rufino de Oliveira	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Newman Simões	(Cursinho CLQ Objetivo)	Piracicaba – SP
Nivaldo Costa Muniz	(UFMA)	São Luis – MA
Osnel Broche Cristo	(UFLA)	Lavras – MG
Uberlândio Batista Severo	(UFPB)	João Pessoa – PB
Raul Cintra de Negreiros Ribeiro	(Colégio Anglo)	Atibaia – SP
Reginaldo de Lima Pereira	(Escola Técnica Federal de Roraima)	Boa Vista – RR
Reinaldo Gen Ichiro Arakaki	(UNIFESP)	SJ dos Campos – SP
Ricardo Amorim	(Centro Educacional Logos)	Nova Iguaçu – RJ
Ronaldo Alves Garcia	(UFGO)	Goiânia – GO
Rogério da Silva Ignácio	(Col. Aplic. da UFPE)	Recife – PE
Rosangela Ramon	(UNOCHAPECÓ)	Chapecó – SC
Seme Gebara Neto	(UFMG)	Belo Horizonte – MG
Tadeu Ferreira Gomes	(UEBA)	Juazeiro – BA
Tomás Menéndez Rodrigues	(U. Federal de Rondônia)	Porto Velho – RO
Valdenberg Araújo da Silva	(U. Federal de Sergipe)	São Cristóvão – SE
Wagner Pereira Lopes	(CEFET – GO)	Jataí – GO
Wanderson Breder	(CEFET – RJ)	Nova Friburgo – RJ
William Serafim dos Reis	(UFT – TO)	Arraias – TO