CONTEÚDO

AOS LEITORES

É com grande alegria que comemoramos em 2008 os 10 anos da Revista EUREKA! e transmitimos aos leitores a nossa satisfação pela acolhida recebida neste período. Durante estes 10 anos de existência temos procurado atender ao leitor mais exigente, apresentando uma publicação específica que além de fornecer material atualizado e de alto nível acadêmico, tem tornado o estudo da matemática olímpica muito mais interessante e acessível a professores e jovens olímpicos de todo o Brasil.

Neste número especial da revista apresentamos quatro artigos, cujos autores são todos ex-olímpicos de grande destaque, além de um bom número de novos problemas propostos por nossos leitores, que estão cada vez mais inspirados. Agradecemos também a valiosa ajuda dos alunos que trabalharam na revisão deste número da Eureka!: Álvaro Lopes Pedroso, Ana Luísa de Almeida Losnak, Custódio Moreira Brasileiro Silva, Elder Massahiro Yoshida, Guilherme Phillippe Figueiredo Hanon Guy Lima Rossi, Henrique Pondé de Oliveira Pinto, Illan Feiman Halpern, Marco Antonio Lopes Pedroso, Rafael Horimoto de Freitas, Renan Henrique Finder, Talita Alessandra da Silva, Thiago Saksanian Hallak e Thiago da Silva Pinheiro, e particularmente ao Prof. Carlos Yuzo Shine, que coordenou a revisão e que foi responsável pela seção "Como é que faz" deste número.

Continuaremos contando com o entusiasmo e a colaboração dos nossos leitores para que a EUREKA! continue sendo um instrumento útil à formação matemática e à preparação olímpica do nosso público. Esperamos que gostem deste número. Divirtam-se!

Os editores

XVIII OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL

Enunciados e Resultado Brasileiro

A XVIII Olimpíada de Matemática do Cone Sul foi realizada na cidade de Atlântida, Uruguai no mês de junho de 2007. A equipe brasileira foi liderada pelos professores Yuri Gomes Lima e Samuel Barbosa Feitosa, ambos da cidade de Fortaleza – CE.

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	Renan Henrique Finder	Medalha de Ouro
BRA2	Marcelo Tadeu de Sá Oliveira Sales	Medalha de Prata
BRA3	Grazielly Muniz da Cunha	Medalha de Prata
BRA4	Thiago Ribeiro Ramos	Medalha de Prata

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Achar todos os pares de inteiros (x, y) que satisfazem

$$x^3y + x + y = xy + 2xy^2.$$

SOLUÇÃO DE MARCELO TADEU DE SÁ OLIVEIRA SALES (SALVADOR – BA)

De $x^3y + x + y = xy + 2xy^2$ temos:

$x^3y + x - xy - 2xy^2 = -y \Rightarrow x(x^2y + 1 - y - 2y^2) = -y \Rightarrow x \mid y$

$xy + 2xy^2 - y - x^3y = x \Rightarrow y(x + 2xy - 1 - x^3) = x \Rightarrow y \mid x$

Então $x \mid y$ e $y \mid x$ com exceção de $x = 0$ ou $y = 0$. Nesses dois casos temos que ambos têm que ser 0. Assim $(x, y) = (0, 0)$ é a nossa primeira solução. Se $x \mid y$ então $|x| \le |y|$ (eu já desconsiderei $x = 0$ e $y = 0$) e se $y \mid x$ então $|y| \le |x|$, daí $|x| = |y|$. Assim temos dois casos:

Primeiro caso: $x = y$

Substituindo temos $x^4 + 2x = x^2 + 2x^3$. Como $x \ne 0$ e $y \ne 0$ então podemos simplificar. Assim, $x^3 + 2 = x + 2x^2$ e daí $x \mid 2$, então $x \in \{-2, -1, 1, 2\}$. Desses valores, o único que não admite solução é $x = -2$ então para esse caso $(x, y) = (-1, -1); (1, 1); (2, 2).$

Segundo caso: $x = -y$.
Substituindo temos $-x^4 = -x^2 + 2x^3$.

Como $x \neq 0$ temos $-x^4 = -x^2 + 2x^3 \Leftrightarrow -x^2 = -1 + 2x$ e daí $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{8}}{2}$ que não é inteiro, então não há solução para esse caso.
Assim as soluções são $(x, y) = (-1, -1); (0, 0); (1, 1)$ e (2, 2).

PROBLEMA 2
Considere 100 inteiros positivos tais que sua soma é igual ao seu produto. Determinar a quantidade mínima de números 1 que podem existir entre os 100 inteiros.

SOLUÇÃO DE RENAN HENRIQUE FINDER (JOINVILLE – SC)
Seja K o número de 1´s que aparecem. Sejam $a_1, a_2 ... a_{100}$ os números, com $a_1 = a_2 = ... = a_K = 1$.

$a_1 + a_2 + ... + a_{100} = a_1 a_2 ... a_{100}$

$K + a_{K+1} + ... + a_{100} = a_{K+1} a_{K+2} ... a_{100}$

Vamos minimizar $a_{K+1} a_{K+2} ... a_{100} - a_{K+1} - a_{K+2} - ... - a_{100}$. Para isso, suponha $a_j \geq 2$.

Note que

$a_{K+1} ... a_j ... a_{100} - a_{K+1} - ... - a_j - ... - a_{100} \geq 2a_K ... a_{j-1} a_{j+1} ... a_{100} - 2 - a_{K+1} - ...$

$-a_{j-1} - a_{j+1} - ... - a_{100} \Leftrightarrow a_{K+1} ... a_j ... a_{100} - a_j \geq 2a_{K+1} ... a_{j-1} a_{j+1} ... a_{100} - 2 \Leftrightarrow$

$a_{K+1} ... a_{j-1} a_{j+1} ... a_{100} (a_j - 2) \geq a_j - 2,$ o que ocorre de fato. Então, a diferença é mínima quando $a_{K+1} = a_{K+2} = ... = a_{100} = 2$. Logo,

$K = a_{K+1} a_{K+2} ... a_{100} - a_{K+1} - ... - a_{100} \geq 2^{100-K} - 2 \cdot (100 - K) \Rightarrow 0 \geq 2^{100-K} - 200 + K \Rightarrow$
$2^{100-K} \leq 200 - K$. Se $K \leq 93$ $200 - K \leq 107$ e $2^{100-K} \geq 2^7 = 128$, o que obriga $K \geq 94$. Note que há um exemplo para K = 95:

$a_1 = a_2 = ... = a_{45} = 1$

$a_{96} = a_{95} = 2$

$a_{98} = a_{99} = a_{100} = 3$

A soma é $195 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 95 + 4 + 9 = 108$ e o produto é $2^2 \cdot 3^3 = 108$. Resta o caso K = 94, isto é, o caso $a + b + c + d + e + f + 94 = abcdef$. Supondo $a, b \geq 3$, minimizemos $abcdef - a - b - c - d - e - f$. Temos

$abcdef - a - b - c - d - e - f \geq 3bcdef - 3 - b - c - d - e - f \Leftrightarrow (a-3)bcdef \geq a-3,$
o que ocorre. Além disso,
$abcdef - a - b - c - d - e - f \geq 2abcde - a - b - c - d - e - 2 \Leftrightarrow abcde(f-2) \geq f-2,$
o que ocorre, pois $f \neq 1$, logo $f \geq 2$.

Concluímos que a expressão é mínima se $a = 3$ e $f = 2$. Analogamente, ela é mínima quando $b = 3$ e $c = d = e = 2$. Então,

$abcdef - a - b - c - d - e - f \geq 3^2 2^4 - 4 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 144 - 14 = 130 > 94.$

Então, é impossível $abcdef - a - b - c - d - e - f = 94$ se duas das variáveis forem ≥ 3. Já se só uma for ≥ 3 (digamos que a, teremos $b = c = d = e = f = 2$, logo
$2^5 a - 10 - a = 94 \Rightarrow 31a = 104$, absurdo, pois $31 \nmid 104$. Se todas as variáveis forem iguais a 2, obtemos também $31a = 104 \Rightarrow 31 \cdot 2 = 104$, absurdo. Então $K = 95$ é o máximo que podemos obter.

PROBLEMA 3

Seja ABC um triângulo com todos os seus ângulos agudos, de alturas AD, BE e CF (com D em BC, E em AC e F em AB). Seja M o ponto médio do segmento BC. A circunferência circunscrita ao triângulo AEF corta a reta AM em A e X. A reta AM corta a reta CF em Y. Seja Z o ponto de encontro entre as retas AD e BX. Demonstrar que as retas YZ e BC são paralelas.

SOLUÇÃO DA BANCA

Observemos que $AFHE$ é inscritível, pois $\angle AEH = \angle AFH = 90°$.
Daí que $\angle AXH = 90°$.
Seja A' um ponto sobre a semireta AM tal que $AM = MA'$. O quadrilátero $ABA'C$ é um paralelogramo, onde

$$\begin{aligned} \angle A'BH &= \angle A'BC + \angle CBH \\ &= \angle ACB + (90° - \angle ACB) \\ &= 90° \\ &= \angle A'XH, \end{aligned}$$

Ou seja que o quadrilátero $BHXA'$ é inscritível. Alem disso $BHCA'$ também é inscritível já que

$$\angle BHC + \angle BA'C = (180° - \angle BAC) + \angle BAC = 180°.$$

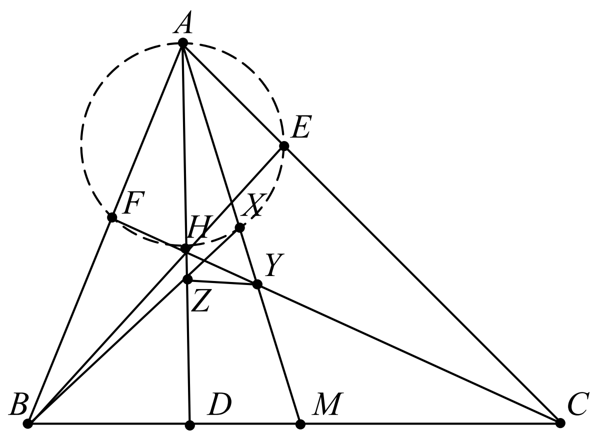
Desta forma os pontos B, H, X, C são concíclicos, onde

$$\angle XBM = \angle XBC = \angle XA'C = \angle BAM \quad (1)$$

Seja $T = AB \cap XH$. Notemos que H também é o ortocentro do triângulo ATY, uma vez que $TY \perp AY$ e $YF \perp AT$. Daí que $AH \perp TY$, então $TY \,//\, BC$.
Se provamos que $Z \in TY$, o problema estará terminado. Seja então $Z' = AD \cap TY$. Vamos mostrar que $Z = Z'$. Agora, $\angle HZ'Y = \angle HXY = 90°$ então $HXYZ'$ é inscritível, e portanto,

$$\angle XZ'Y = \angle XHY = \angle FAX - \angle BAM \quad (2)$$

Das relações (1) e (2) segue-se que $\angle XZ'Y = \angle XBM$, ou seja, que os pontos B, Z' e X são colineares. Porém então $Z' \in AD \cap BX = Z$ e assim $Z = Z'$, como queríamos.



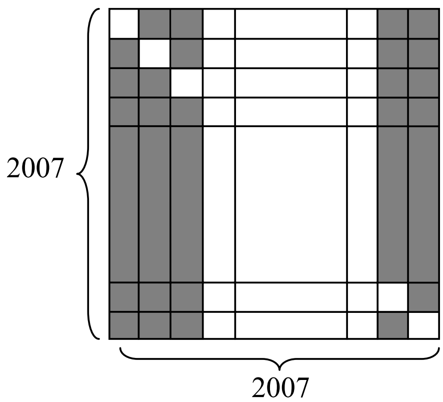
PROBLEMA 4

Considere um tabuleiro 2007×2007. São pintadas algumas casas do tabuleiro.
Dizemos que o tabuleiro é *charrua* se nenhuma linha está totalmente pintada e nenhuma coluna está totalmente pintada.

a) Qual é o número máximo k de casas pintadas que um tabuleiro charrua pode ter?
b) Para tal número k, calcular o número de tabuleiros charruas distintos que existem.

SOLUÇÃO DE GRAZIELLY MUNIZ DA CUNHA (FORTALEZA – CE)

a) Note que todas as colunas têm que ter no máximo 2006 casas pintadas. Como são 2007 colunas então o número de casas pintadas é no máximo $2007 \times 2006,$ número que é atingido pintando todas as casas, exceto uma diagonal, como na figura abaixo



b) como para *k* no máximo iremos pintar 2006 casas em cada coluna, então temos que escolher qual casa ficará sem ser pintada. E note que não podemos ter duas casas sem serem pintadas em uma mesma linha, pois se não terá uma linha que ficará toda preenchida. Logo para a primeira coluna poderemos escolher qualquer uma das 2007 casas para não ser pintada, na segunda coluna podemos escolher qualquer uma de 2006 casas, pois não podemos escolher uma casa que esteja na mesma linha qua a que foi escolhida na primeira coluna, na terceira coluna temos 2005 escolhas, na quarta 2004 escolhas e assim sucessivamente, logo são $2007 \times 2006 \times 2005 ... = 2007!$ maneiras de escolher, logo são 2007! tabuleiros charruas distintos, com o número *k*.

PROBLEMA 5

Seja *ABCDE* um pentágono convexo que satisfaz as seguintes condições:

- Existe uma circunferência Γ tangente a cada um de seus lados.
- As medidas de todos os seus lados são números inteiros.
- Ao menos um dos lados do pentágono mede 1.
- O lado *AB* mede 2.

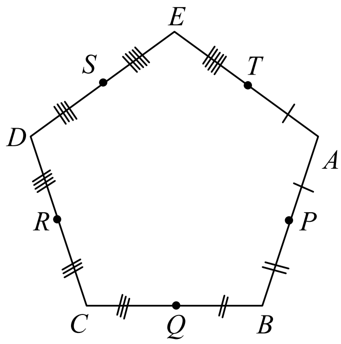
Seja *P* o ponto de tangência de Γ com o lado *AB*.

a) Determinar as medidas dos segmentos *AP* e *BP*.

b) Dar um exemplo de um pentágono que satisfaz as condições estabelecidas.

SOLUÇÃO DE RENAN HENRIQUE FINDER (JOINVILLE – SC)

a) Sejam Q, R, S e T os pontos de tangência de Γ em BC, CD, DE e EA, respectivamente, como a seguir:



Seja $AP = x$. Temos:
$AB = 2 \Rightarrow BP = 2 - x$
$QB = BP \Rightarrow QB = 2 - x$
$QC = BC - QB = BC - 2 + x$
$CR = QC \Rightarrow CR = BC - 2 + x$
$DR = CD - CR = CD - BC + 2 - x$
$DS = DR \Rightarrow DS = CD - BC + 2 - x$
$ES = DE - DS = DE - CD + BC - 2 + x$
$ET = ES \Rightarrow ET = DE - CD + BC - 2 + x$
$AE = AT + TE = x + DE - CD + BC - 2 + x \Rightarrow 2x = AE - DE + CD - BC + 2 \in \mathbb{Z}_+^*$

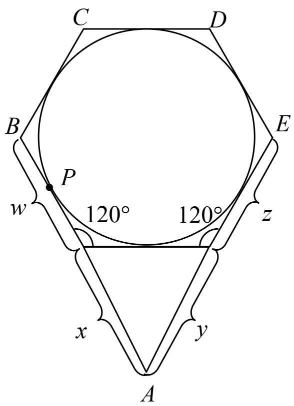
Como $x < AB = 2 \Rightarrow 2x < 4$, pode-se ter $2x = 3, 2x = 2$ ou $2x = 1$. O item *b*) mostra uma configuração para $x = \frac{3}{2}$ e o caso $x = \frac{1}{2}$ é obviamente análogo (troque A por B e C por E). Resta ver o que acontece se $x = 1$.

Temos $AT = 1 \Rightarrow AE > 1$. Então $AE \geq 2$, porque $AE \in \mathbb{Z}$. Como $ET = AE - 1$, vale que $ET \in \mathbb{Z}$ e $ET \geq 1$.

Assim, $SE \geq 1$, pois $SE = TE$. Desse modo, $DE > SE \Rightarrow DE \geq 2$. Como $DS = DE - SE$ tem-se $DS \geq 1$, mas então $DR \geq 1 \Rightarrow DC > 1$. Logo $DC \geq 2$, uma vez que $DC \in \mathbb{Z}$. Mas então $CR \geq 1$, já que $CR = DC - DR = DC - DS \in \mathbb{Z}$. E também $CQ \geq 1$ e $CQ \in \mathbb{Z}$, já que $RC = QC$. Deste modo, $BC > CQ \Rightarrow BC > 1$. E $AB > AP = 1$. Então todos os lados são maiores que 1: absurdo.

Obs. No desenho do item *b*), de fato $AP = \frac{3}{2}$, pois $AP = x + \frac{w}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ (o ponto *P* bissecta o segmento de medida *w* pois esse segmento é o lado de um hexágono regular). Por outro lado, na verdade já provamos que só podíamos ter $AP = \frac{3}{2}$ ou $AP = \frac{1}{2}$. Isso mostra que $AP = \frac{3}{2}$ e $BP = \frac{1}{2}$ é uma possibilidade (e que, analogamente, $BP = \frac{3}{2}$ e $AP = \frac{1}{2}$ também é).

b) Tome um hexágono regular de lado 1, seu incírculo Γ, dois de seus lados não opostos e não adjacentes e os prolongue. Seja *A* a intersecção obtida. O pentágono *ABCDE* é o fecho convexo da união dos pontos do hexágono e do ponto *A*, como a seguir:



Note que o triângulo de lados *x* e *y*, com vértice em *A*, tem dois ângulos de $180° - 120° = 60°$, logo é eqüilátero, e de lado 1 (seu terceiro lado é lado do hexágono L)! Como *w* e *z* são lados do hexágono, $w = x = y = z = 1$. Então:

- $ABCDE$ é circunscrível
- $BC = CD = DE = 1$
- $AB = EA = w + x = y + z = 1 + 1 = 2$

Todos os lados são inteiros, como queríamos.

PROBLEMA 6

Demonstrar que, para cada inteiro positivo *n*, existe um inteiro positivo *k* tal que a representação decimal de cada um dos números *k*, 2*k*,..., *nk* contém todos os dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

SOLUÇÃO DE MARCELO TADEU DE SÁ OLIVEIRA SALES (SALVADOR – BA)

Lema: Para todo $n,$ existe $k \in \mathbb{Z}_+^*$ tal que nk contém todos os dígitos 0, 1, 2, ..., 9, onde $n \in \mathbb{Z}_+^*$.

Demonstração: Ao fatorarmos n temos que n é da forma $2^a \cdot 5^b \cdot q$ onde q é o produto dos outros fatores primos de n. Seja c = máx (a, b).

Vou mostrar que para $n = 10^c \cdot q$ o lema é válido. Temos que $2^a \cdot 5^b \cdot q$ é divisor de $10^c \cdot q,$ e por Bézout existe um x tal que $10^c \cdot qx \equiv 10^c (\text{mod} \cdot 10^{c+1})$, pois $mdc(q,10) = 1$

Assim, se multiplicarmos $10^c \cdot qx$ por 2, 3, ..., 9 ele dará restos $2 \cdot 10^c, ..., 9 \cdot 10^c$, ou seja, aparecerem os dígitos que nós quisermos na base decimal. Considere $10^c(qx + 2 \cdot 10^p qx + 3qx \cdot 10^{2p} + ... + 9qx \cdot 10^{8p})$ onde x é o número tal que $10^c \cdot qx \equiv 10^c (\text{mod} \cdot 10^{c+1})$ e p é um inteiro tal que $10^p > 9 \cdot 10^c \cdot qx$.

Então $k = 10(x + 2 \cdot 10^p \cdot x + 3 \cdot 10^{2p} \cdot x + ... + 9 \cdot 10^{8p} \cdot x)$ satisfaz as nossas condições pois ao multiplicarmos k por $10^c \cdot q$ temos o seguinte:

Em $10^c \cdot q \cdot x$ vai aparecer um dígito 1 porque $10^c \cdot q \cdot x \equiv 10^c (\text{mod} 10^{c+1})$. Em $10^{c+p} \cdot q \cdot 2x$ vai aparecer um dígito 2.

Em $10^{c+8p} \cdot q \cdot 9x$ vai aparecer um dígito 9 e eu multipliquei tudo por 10 para aparecer o 0. Assim k é o que queríamos.

Agora vou terminar o problema por indução

Casos iniciais $\rightarrow n = 1$ e $k = 1234567890$

$n = 2$ e $k = 1234567890617283945$ ou 6172839450

Passo indutivo $\rightarrow$ suponha que até n é verdadeira então existe um k tal que k, $2k$, $3k,...,nk$ têm todos os dígitos 0,1,...,9. Observe que se multiplicarmos k por 10^ℓ para $\ell \in \mathbb{Z}_*^+$ continua sendo verdade para $k, 2k,$ caso, nk.

Pelo lema, temos que existe um r tal que $(n + 1)r$ tem todos os dígitos 0,1,...,9. Assim, fazendo $s = 10^\ell k + r$, onde ℓ é um inteiro tal que $10^\ell > (n+1)r,$ esse s satisfaz as condições do enunciado para 1 até $(n + 1)$ pois de 1 até n teremos que $s, 2s, ..., ns$ terão todos os dígitos porque $10^\ell k, ..., 10^\ell nk$ têm (e porque ℓ é grande o suficiente para que $nr < 10^\ell$).

E para $n + 1$ temos que $(n+1)r < 10^\ell$ terá todos os dígitos. Assim s satisfaz as condições. Portanto para todo n inteiro positivo existe tal inteiro k.

XIX OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL

Enunciados e Resultado Brasileiro

A XIX Olimpíada de Matemática do Cone Sul foi realizada na cidade de Temuco, Chile no mês de maio de 2008. A equipe brasileira foi liderada pelos professores Cícero Thiago Magalhães e Bruno Holanda, ambos da cidade de Fortaleza – CE.

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	**Gustavo Lisbôa Empinotti**	**Medalha de Bronze**
BRA2	**Marcelo Tadeu de Sá Oliveira Sales**	**Medalha de Prata**
BRA3	**Matheus Araújo Marins**	**Medalha de Bronze**
BRA4	**Matheus Secco Torres da Silva**	**Medalha de Prata**

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Defina $I(n)$ como o resultado de inverter os números de um algarismo. Por exemplo, $I(123) = 321,$ etc. Calcule todos os inteiros $1 \le n \le 10000$ tais que $I(n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$

PROBLEMA 2

Seja ABC um triângulo, P um ponto em seu interior e X, Y e Z pontos em BC, AC e AB respectivamente tais que $\angle PZB = \angle PXC = \angle PYA.$ Considere os pontos U, W e V sobre BC, AC e AB (ou seus prolongamentos, se necessário) tais que $PV = 2PY$; $PU = 2PX$ e $PW = 2PZ$. Sabendo que a área de XYZ é 1, calcule a área de UVW.

PROBLEMA 3

Dois amigos A e B devem resolver a seguinte adivinha: cada um deles recebe um número do conjunto $\{1, 2, ..., 250\}$ mas não vê o número que o outro recebeu. O objetivo é que cada amigo descubra o número do outro. O procedimento que devem seguir é anunciar, por turnos, números inteiros positivos não necessariamente distintos: primeiro A diz um número, em seguida B diz um número, depois novamente A, etc., de modo que a soma de todos os números anunciados seja 20. Demonstrar que existe uma estratégia de modo que, através de um acordo prévio A e B possam atingir o objetivo, sem importar quais números cada um receba no começo da adivinha.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Qual é o maior número de casas que se pode colorir num tabuleiro 7×7 de maneira que todo subtabuleiro 2×2 tenha no máximo 2 casas coloridas?

PROBLEMA 5

Seja ABC um triângulo isósceles de base AB. Uma semicircunferência C com centro no segmento AB e tangente aos lados iguais AC e BC. Considera-se uma reta tangente a C que corta os segmentos AC e BC em D e E, respectivamente.
Suponha que as retas perpendiculares a AC e BC, traçadas respectivamente por D e E, se cortam em P interior ao triângulo ABC. Seja Q o pé da perpendicular à reta AB que passa por P. Demonstrar que $\frac{PQ}{CP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AB}{AC}$.

PROBLEMA 6

Dizemos que um número é capicua se ao inverter a ordem de seus algarismos obtivermos o mesmo número. Achar todos os números que tem pelo menos um múltiplo não-nulo que seja capicua.

JOGOS E FEIJOADA NO SÃO PAULO´S

Emanuel A. S. Carneiro

♦ Nível Iniciante

Bem próximo ao Robert Lee Moore hall, sede do Departamento de Matemática da Universidade do Texas em Austin, fica o celebrado restaurante brasileiro São Paulo´s. Comida muito boa (definitivamente a melhor feijoada da cidade), além do velho e bom guaraná Antártica são apenas alguns dos fatores que nos levam (a comunidade brasileira aqui em Austin) a almoçar regularmente no São Paulo´s.

Certo dia eu estava a almoçar com dois professores do departamento e algo me fez lembrar dos meus tempos de olimpíada de Matemática. Fernando Rodriguez-Villegas, argentino, professor na área de teoria dos números e Tamás Hausel, húngaro, que trabalha nas áreas de geometria algébrica e topologia. Enquanto saboreávamos as nossas feijoadas (eu e o Tamás, o Fernando no bobó de camarão), conversávamos sobre jogos matemáticos. Dr. Rodriguez-Villegas, um matemático extraordinário e super simpático, que além de fazer pesquisa do mais alto nível em teoria dos números é bastante interessado em jogos e puzzles matemáticos, nos explicava tópicos do curso que estava a ensinar nesse semestre (Math, Puzzles and Computers) além de outras idéias de jogos que ele próprio havia inventado.

Entre as torres de Hanói, Nim, Resta um, e coisas do tipo escritas em guardanapos do São Paulo´s, Tamás lembrou-se de algo e me perguntou:

– Emanuel, você conhece o jogo do "15 out of 3" (15 de 3)?
Respondi que não. Ele então me deu a formulação do jogo:

– (O jogo 15 out of 3) os números de 1 a 9 estão sobre a mesa. Dois jogadores alternadamente escolhem números para si (sem repetição) e ganha quem primeiro completar 15 somando três de seus números.
(sugiro agora que os leitores joguem um pouquinho antes de prosseguir e "desvendar" o mistério).
Pensei comigo mesmo: "Hummm... isso não me parece estranho...". Eu disse:
– Bem, minha intuição me leva a crer que o primeiro jogador está em melhor situação para negociar do que o segundo, pois vai receber mais números ao final...

Tomás foi adiante e disse:

– Sim, você está correto. Vamos jogar! Você começa, escolha o seu primeiro número.

– Está bem. Eu escolho o 5.
Nesse momento ele parou e me olhou curioso. – “Por que você escolheu o 5?” perguntou. Eu disse:

– Não sei exatamente o que é, mas algo me faz lembrar um quadrado mágico, e como o 5 sempre está no meio, achei que tinha mais chances de ganhar...

– Sua intuição mais uma vez está correta. Muito bem. Naturalmente, você deve saber qua a menos de rotações e reflexões a configuração do quadrado mágico é única. Por que a gente não desenha um quadrado mágico 3 × 3 aqui e tenta jogar olhando para ele?

Após um minuto tentando lembrar como se faz um quadrado mágico, desenhamos no guardanapo:

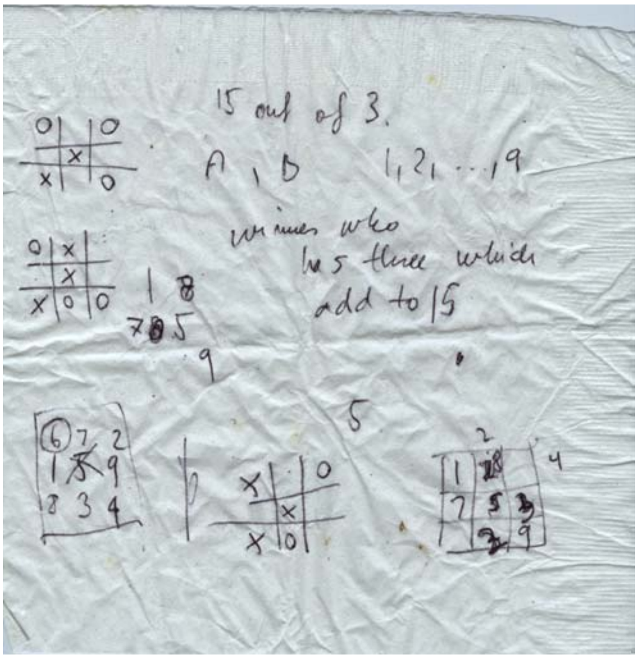
6	7	2
1	5	9
8	3	4

Quando vi os números na mesa matei a charada. Um quadrado mágico de 3 × 3 como visto acima é uma disposição dos números 1, 2, 3, ..., 9, sem repetição, de modo que cada linha, coluna ou diagonal some a mesma quantidade. Nesse caso a soma comum será 15 e o que vemos acima são todas as maneiras possíveis de se escrever 15 como soma de 3 números:

$$15 = 9 + 1 + 5 = 9 + 2 + 4 = 8 + 1 + 6 = 8 + 2 + 5 =$$
$$= 8 + 3 + 4 = 7 + 2 + 6 = 7 + 3 + 5 = 6 + 5 + 4.$$

Se pensarmos então que o primeiro jogador marca X sobre os números do quadrado mágico e o segundo marca O, o objetivo do jogo passa a ser completar uma linha, coluna ou diagonal com seus símbolos. O jogo 15 out of 3 que ele me propôs nada mais é do que uma formulação equivalente, belíssima e engenhosa, do milenar jogo da velha (em inglês “tic-tac-toe”). Fiquei pasmo, havia ganho o meu dia. Por alguns momentos não consegui parar de pensar na beleza e no poder da matemática, presente até nos mínimos detalhes da nossa vida. Senti-me orgulhoso de poder ser um pesquisador que tenta compreender essa ciência e pequenos fatos como esse me fazem, a cada dia, ter mais consciência de que ela é muito maior do que nós.

Observamos: A história acima se passou no dia 02 de maio de 2007. Fiquei com o guardanapo como recordação. O jogo 15 out of 3 é um belo exemplo para se mostrar como uma pessoa que sabe matemática realmente pode levar vantagem sobre uma pessoa menos interessada pelo assunto. Todos sabemos que o jogo da velha não admite estratégia vencedora, mas mesmo assim o professor Tamás Hausel jogava o 15 out of 3 com seus alunos e ganhava na maioria das vezes. Naturalmente, ele sempre tinha seu quadrado mágico para consultas. Até que um dia ele esqueceu-se do quadrado mágico em casa e foi derrotado por uma aluna.



Guardanapo da discussão no São Paulo´s

No verso do guardanapo acima, há outras discussões também belíssimas sobre as torres de Hanói e versões relacionadas (de formas mais engenhosas do que a analogia acima) inventadas pelo Dr. Rodríguez-Villegas. Ele ainda está buscando a melhor formulação para seu jogo para poder patenteá-lo e disponibilizá-lo ao público em geral. Isso então vai ficar para uma outra história.

PROBLEMA 1: Prove que em um quadrado mágico 3×3, como foi descrito acima:

(a) a soma comum deve ser 15.

(b) o número do centro deve ser 5.

PROBLEMA 2: Usando o problema anterior, prove que só existe um quadrado mágico 3×3 (a menos de rotações e reflexões). Verifique também que não há estratégia vencedora para o jogo da velha, em outras palavras, se os dois jogadores jogam certo, sempre dá empate.

REFERÊNCIAS:

[1] Para ver outras discussões sobre jogos e invariantes, há outras listas em minha página pessoal: http://www.math.utexas.edu/users/ecarneiro na seção math olympiads.

[2] Para mais informações sobre os trabalhos e o curso (Math, Puzzles and Computers) do Dr. Rodriguez-Villegas sua página pessoal é www.math.utexas.edu/users/villegas/S07. Um dos jogos que ele criou está descrito no paper: Rodriguez Villegas, F.; Sadun, L.: Voloch, J.F. Blet: a mathematical puzzle. Amer. Math. Monthly 109 (2002), no. 8, 729-740.

[3] URL: página pessoal do Dr. Hausel é http://www.math.utexas.edu/users/hausel

SUBSTITUIÇÕES ENVOLVENDO NÚMEROS COMPLEXOS

Diego Veloso Uchôa

♦ Nível Avançado

É bastante útil em problemas de olimpíada onde temos igualdades ou queremos encontrar um valor de um somatório fazermos substituições por números complexos aliada a outras ferramentas. Para alguns problemas que possuam equações com funções seno e co-seno é importante saber a fórmula de Euler que escreve um número complexo na forma polar o que simplifica quando fazemos multiplicações ou somatórios.

Um número complexo pode se escrever na sua forma trigonométrica $\rho(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$ ou na sua forma polar $\rho \cdot e^{i\theta}$ de onde temos que $\cos\theta + i\text{sen}\theta = e^{i\theta}$ (Fórmula de Euler).

Segundo essa equação podemos fazer $\theta = \alpha$ ou $\theta = -\alpha$, de onde temos:

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\text{sen}\alpha \quad \text{(I)}$$

$$e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\text{sen}\alpha \quad \text{(II)}$$

Somando I com II, temos:

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

Subtraindo I de II, temos:

$$\text{sen}\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

Segundo a fórmula de Euler podemos verificar imediatamente a fórmula de De Moivre:

Para todo n natural temos que $\left(\cos\alpha + i\text{sen}\alpha\right)^n = \cos(n\alpha) + i\text{sen}(n\alpha)$.

No seguinte problema da OIMU, quais idéias imediatas poderíamos ter sem conhecer a fórmula de Euler?

PROBLEMA 1: (OIMU – 2001)

Calcule:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\ldots\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{n}\right)\right]$$

SOLUÇÃO: Seja $P_n = \left[\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)...\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{n}\right)\right]$, observe de imediato que se $n = 2k$ então $P_{2k} = 0$ pois $\cos\left(\frac{k}{2k}\pi\right) = 0$. Portanto considere $n = 2k+1$ então

$$P_{2k+1} = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2k+1}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{2k+1}\right)...\cos\left(\frac{2k\pi}{2k+1}\right)\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2k+1}\right)\right]$$

Observe que $\cos\left(\frac{i}{2k+1}\pi\right) = -\cos\left(\frac{2k+1-i}{2k+1}\pi\right) \Rightarrow$

$$P_{2k+1} = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2k+1}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{2k+1}\right)...\cos\left(\frac{k\pi}{2k+1}\right)\right]^2 \cdot (-1)^{k+1},$$

Considere

$$\tilde{P}_{2k+1} = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2k+1}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{2k+1}\right)...\cos\left(\frac{(k-1)\pi}{2k+1}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{2k+1}\right)\right]$$

Fazendo $w = e^{\frac{\pi}{2k+1}i}$ então $\cos\left(\frac{j}{2k+1}\pi\right) = \frac{w^j + w^{-j}}{2} = \frac{w^{2j}+1}{2w^j}$ portanto $\tilde{P}_{2k+1} = \left[\left(\frac{w^2+1}{2w}\right)\left(\frac{w^4+1}{2w^2}\right)...\left(\frac{w^{2k}+1}{2w^k}\right)\right]$. Faça então a seguinte multiplicação no numerador e no denominador

$$\tilde{P}_{2k+1} = \left(\frac{w^2+1}{2w}\right)\left(\frac{w^4+1}{2w^2}\right)...\left(\frac{w^{2k}+1}{2w^k}\right)\left(\frac{(w+1)(w^3+1)...(w^{2k-1}+1)}{(w+1)(w^3+1)...(w^{2k-1}+1)}\right),$$

agrupando no numerador os termos tais que

$(w^{2j}+1)(w^{2k+1-2j}+1) = (w^{2k+1} + w^{2k+1-2j} + w^{2j} + 1) = w^{2j} + w^{2k+1-2j}$, já que $w^{2k+1} = -1$, com j variando de 1 até *k*. Agrupando agora os termos do denominador podemos ver que

$\tilde{P}_{2k+1} = \dfrac{1}{2^k} \dfrac{(w^2 + w^{2k-1})(w^4 + w^{2k-3})...(w^{2k} + w)}{(w^{2k} + w)(w^2 + w^{2k-1})...(w^{k+1} + w^k)}$, e usando que $w^{2k+1} = -1$ podemos simplificar a expressão para

$\tilde{P}_{2k+1} = \dfrac{1}{2^k} \dfrac{(w^2 - w^{-2})(w^4 - w^{-4})...(w^{2k} - w^{-2k})}{(-w^{-1} + w)(w^2 - w^{-2})...(-w^{-k} + w^k)}$. Agora, olhando para o numerador, podemos escolher os termos $(w^{2j} - w^{-2j})$ tais que $2j > k$ que são m termos (para algum m) e substituí-los por $(-1)(w^{2k+1+2j} - w^{-(2k+1-2j)})$ de forma que o numerador e o denominador serão iguais a menos de um sinal (e do fator 2^k), i.e,

$$\tilde{P}_{2k+1} = \frac{1}{2^k} \frac{(-w^{-1} + w)(w^2 - w^{-2})...(-w^{-k} + w^k)}{(-w^{-1} + w)(w^2 - w^{-2})...(-w^{-k} + w^k)}(-1)^m \Rightarrow \tilde{P}_{2k+1} = (-1)^m \frac{1}{2^k}$$

Portanto temos que $P_{2k+1} = (-1)^{k+1}\left(\tilde{P}_{2k+1}\right)^2 = (-1)^{k+1}\dfrac{1}{2^{2k}} = (-1)^{k+1}\dfrac{1}{4^k}$, e então como $P_n = 0$ para todo n par,

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P_n = \sum_{k=0}^{\infty} P_{2k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} -\left(-\frac{1}{4}\right)^k = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + ...$ (soma de P.G infinita), e assim $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P_n = \frac{-1}{1+\frac{1}{4}} = -\frac{4}{5}.$

Observação: Esse problema pede para demonstrarmos um resultado relacionado aos polinômios de Chebyshev do segundo tipo.

PROBLEMA 2: (OBM – U 2001)

Seja $f(x) = e^{-x} \cdot senx$. Calcule $f^{(2001)}(0)$. (Denotamos por $f^{(n)}(x)$ a derivada de ordem n no ponto x; assim, $f^{(2)}(x) = f''(x)$).

SOLUÇÃO: $f(x) = e^{-x} \cdot senx = e^{-x} \cdot \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \dfrac{e^{(i-1)x}}{2i} - \dfrac{e^{-(i+1)x}}{2i} \Rightarrow$ após n derivações teremos

$f^{(n)}(x)=\frac{1}{2i}\left[(i-1)^n\cdot e^{x(i-1)}-(-1-i)^n\cdot e^{-(i+1)x}\right]$; para n = 2001 e x = 0, temos que $f^{(2001)}(0)=\frac{1}{2i}\left[(i-1)^{2001}-(-1-i)^{2001}\right]$ sendo que $(i-1)^4=(-(i+1))^4=-4$.

Assim

$f^{(2001)}(0)=\frac{1}{2i}\left[\left((i-1)^4\right)^{500}\cdot(i-1)-\left((-(i+1))^4\right)^{500}\cdot(-1-i)\right]=\frac{4^{500}}{2i}(2i)=2^{1000}$. Outro caminho possível para a solução desse problema seria: após 4 derivações de f perceber um ciclo e assim calcular $f^{(2001)}(0)$, método esse mais trabalhoso do que o apresentado.

PROBLEMA 3: (IMO – 1963)

Prove que $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)=\frac{1}{2}$

SOLUÇÃO: Fazendo $w=e^{i\frac{\pi}{7}}$ o problema se torna equivalente a demonstrar que:

$$\frac{w+w^{-1}}{2}-\frac{w^2+w^{-2}}{2}+\frac{w^3+w^{-3}}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{w^2+1}{w}-\frac{w^4+1}{w^2}+\frac{w^6+1}{w^3}=1\Leftrightarrow$$

$$(w^4+w^2)-(w^5+w)+(w^6+1)=w^3\Leftrightarrow w^6-w^5+w^4-w^3+w^2-w+1=0$$

.

Veja que isso é a soma dos termos de uma P.G cujo primeiro termo é 1 e a razão é $-w$.

Somando a P.G:

$$S_{PG}=\frac{(-w)^7-1}{-w-1}=\frac{1-1}{-w-1}=0.\ \text{Lembre que } w=e^{i\frac{\pi}{7}}\Rightarrow w^7=-1$$

e portanto a igualdade é realmente verdadeira.

O seguinte resultado (muito conhecido) tem por objetivo mostrar a importância dos números complexos em problemas de alto grau de dificuldade e que aparentemente não têm nenhuma conexão com números complexos.

PROBLEMA 4: Prove que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

SOLUÇÃO: Sabemos que para $0<x<\frac{\pi}{2}$ a desigualdade $senx<x<\tan x$ é verdadeira. De onde segue que $\cot^2 x<\frac{1}{x^2}<1+\cot^2 x$. Agora fazendo $x=\frac{k\pi}{2m+1}$ com $k=1,2,...,m$ e somando de $k=1$ até $k=m$ nós obtemos

$$\text{(i)}\ \sum_{k=1}^{m}\cot^2\frac{k\pi}{2m+1}\le\frac{(2m+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}\le m+\sum_{k=1}^{m}\cot^2\frac{k\pi}{2m+1}$$

Observe que essa inequação está próxima da desejada, a idéia agora é tentar mostrar que quando $m\to\infty$ o termo central fica "imprensado" entre dois limites que convergem para um mesmo valor.

Para isso vamos usar um truque que usa números complexos. Pela lei de De Moivre e usando binômio de Newton temos :

$$\cos(nt)+isen(nt)=(\cos t+sent)^n=sen^n t(\cot(t)+i)^n=sen^n t\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot i^k\cdot\cot^{n-k}(t)$$

Fazendo $n=2m+1$ e igualando as partes imaginárias, temos:

$$\frac{sen((2m+1)t)}{sen^{2m+1}t}=\binom{2m+1}{1}(\cot^2 t)^m-\binom{2m+1}{3}(\cot^2 t)^{m-1}+...+(-1)^m\ .\ (*)$$

Agora podemos tratar essa igualdade por meio de um polinômio

$$P_m(x)=\binom{2m+1}{1}x^m-\binom{2m+1}{3}x^{m-1}+...+(-1)^m$$

Substituindo $t=\frac{k\pi}{2m+1}$ em (*) para $1\le k\le m$ nos dá $P_m(\cot^2\frac{k\pi}{2m+1})=0$, pois $\text{sen}\left((2m+1)\frac{k\pi}{2m+1}\right)=0$ e $\text{sen}\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\ne 0.$ Então,

$x_k = \cot^2 \dfrac{k\pi}{2m+1}, k = 1,\ldots,m$ são as "m" raízes de P_m cuja soma é

$$\sum_{k=1}^{m} \cot^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}} = \frac{m(2m-1)}{3} \text{ (ii)}$$

De (i) e (ii) segue

$$\frac{m(2m-1)}{3} \leq \frac{(2m+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} \leq m + \frac{m(2m-1)}{3}$$

Multiplicando essas desigualdades por $\dfrac{\pi^2}{(2m+1)^2}$ e fazendo $m \to \infty$ chegamos ao resultado desejado.

Exercícios para treinamento:

PROBLEMA 5: (IME 1990/1991)

Prove que $\dfrac{1}{2} + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \ldots + \cos(n\theta) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{(2n+1)\theta}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$

PROBLEMA 6: (IME-2000/2001) Dois números complexos são ortogonais se suas representações gráficas forem perpendiculares entre si. Prove que dois números complexos Z_1 e Z_2 são ortogonais se e somente se:

$Z_1 \cdot \overline{Z}_2 + \overline{Z}_1 \cdot Z_2 = 0$

PROBLEMA 7: Prove que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right)$

PROBLEMA 8: Prove a identidade trigonométrica:

$$\cos^n(\theta) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cos\big((n-2k)\theta\big).$$

PROBLEMA 9: (IME – 2005/2006)

Sejam as somas S_0 e S_1 definidas por

$$S_0 = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \ldots + C_n^{3[n/3]}$$
$$S_1 = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + C_n^{10} + \ldots + C_n^{3[(n-1)/3]+1}$$

Calcule os valores de S_0 e S_1 em função de *n*, sabendo que [*r*] representa o maior inteiro menor ou igual ao número *r*.

PROBLEMA 10: (Putnam 1970)
Prove que a série de potências de $e^{ax} \cdot \cos(bx)$ (com a e b positivos) ou não tem nenhum coeficiente zero ou possui infinitos zeros.

PROBLEMA 11: Ache uma fórmula geral para:
$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

PROBLEMA 12: (OBM – Nível U 2004)

Calcule o valor de $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(3k+1)(3k+2)(3k+3)}.$

PROBLEMA 13: (IMO 1974) Prove que o número $\displaystyle\sum_{K=1}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}\cdot 2^{3k}$ não é divisível por 5 para qualquer inteiro $n \geq 0$.

PROBLEMA 14: Calcule o valor de $\displaystyle\sum_{k\equiv 2(\text{mod}\,3)}\binom{n}{k}.$

PROBLEMA 15: (IMC 99) Atiramos um dado (com faces de número 1, 2,..., 6) *n* vezes. Qual é a probabilidades de que a soma dos valores obtidos seja múltiplo de 5? Admita que as faces sejam igualmente prováveis.
Dica: Use a função
$$f(x) = \left(\frac{x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6}{6}\right)^n.$$

PROBLEMA 16: Mostre que dados *n* pontos no círculo unitário sempre existe um outro ponto no círculo unitário tal que o produto de suas distâncias aos n pontos dados é maior ou igual a 2.

PROBLEMA 17: (OBM – Nível U 2007)

Dados números reais $a_1, a_2, ..., a_n$ não todos nulos, encontre o (menor) período da função

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx).$$

PROBLEMA 18: (Miklós Schweitzer-1956)
Ache o mínimo de $máx\ \{|1+z|, |1+z^2|\}$ se z percorre todos os números complexos.

PROBLEMA 19: (IMO – 1995)
Seja p um primo ímpar. Ache o número de subconjuntos A de $\{1,2,...,2p\}$ tais que

a) A tem exatamente p elementos
b) A soma de todos elementos de A é divisível por p

Dica: Use o polinômio $f(x,y) = (1+xy)(1+x^2y)...(1+x^{2p}y)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. Lozansky. C. Rousseau, *Wining Solutions*, Springer Velrlag, New York, 1996.

[2] *Contests in Higher Mathematics, Hungary 1949–1961: in memoriam Miklós Schweitzer,* eds.: G. Szász, L. Gehér, I. Kovács and L. Pintér, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968.

[3] URL: http://www.ime.eb.br (Site do Instituto Militar de Engenharia)

[**4**] **URL :** http://www.obm.org.br (Site da Olimpíada Brasileira de Matemática)

INTEGRAIS DISCRETAS

Eduardo Poço

♦ Nível Avançado

Integral discreta: dizemos que $F(n)$ é integral discreta de $f(n)$ se e somente se:

$F(n+1) - F(n) = f(n)$, para n inteiro (a princípio).

Da mesma forma, dizemos que $f(n)$ é a derivada discreta de $F(n)$.

Notação: $\sum^{n} f(n) = F(n)$

Utilidade: conhecida a integral discreta $F(n)$ da função $f(n)$, temos condições de fazer o somatório:

$$\sum_{k=a}^{b} f(k) = F(b+1) - F(a)\text{, } a \text{ e } b \text{ inteiros}$$

A integral discreta transforma uma soma em soma telescópica.
Sabendo de algumas propriedades, é possível trabalhar dinamicamente com integrais discretas para obter fórmulas novas a partir de outras conhecidas. Aqui, não queremos provar que uma função dada é integral discreta de outra, pois essa verificação é simples. Queremos obter ferramentas que nos possibilitem ACHAR integrais discretas de forma rápida, para no final poder calcular o valor de um somatório que tenha surgido de algum problema. Em alguns casos, é suficiente saber a "cara" da integral discreta (ou seja, se é um polinômio, exponencial etc).

Algumas integrais discretas (o exercício de verificação é simples):

$$\sum^{n} c = cn \qquad \sum^{n} n.n! = n!$$

$$\sum^{n} q^n = \frac{q^n}{q-1} \qquad \sum^{n} \log_a n = \log_a (n-1)!$$

$$\sum^{n} \operatorname{sen} kn = \frac{-\cos\left(kn - \frac{k}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{k}{2}\right)} \qquad \sum^{n} \cos kn = \frac{\operatorname{sen}\left(kn - \frac{k}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{k}{2}\right)}$$

$$\sum^{n} \operatorname{sen}^2 n = \frac{n}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2n-1)}{4\operatorname{sen} 1}$$

$$\sum^{n} \cos^2 n = \frac{n}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2n-1)}{4\operatorname{sen} 1}$$

$$\sum^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$$

$$\sum^{n} \binom{n+k}{n} = \binom{n+k}{n-1}$$

Propriedades

1) Assim como integrais contínuas (as primitivas), existem várias integrais discretas para uma dada função, e todas elas diferem por uma constante.

Exemplo: 2^n e $2^n + 1$ são integrais discretas de $f(n) = 2^n$. Verifique pela definição!

2) Integração discreta é uma transformação linear:

$\sum^{n}[a.f(n) + b.g(n)] = a\sum^{n} f(n) + b\sum^{n} g(n)$, para constantes *a* e *b*.

A igualdade nos fornece uma integral discreta para a função do lado esquerdo, lembre-se que podemos somar constantes do lado direito e continuar com uma integral discreta.

3) Integral discreta do produto (por partes): sendo $\sum^{n} f(n) = F(n)$ e

$\sum^{n} g(n) = G(n)$, então:

$$\sum^{n} F(n)g(n) = F(n)G(n) - \sum^{n} f(n)G(n+1)$$

Exemplo: Calcule $\sum^{n} n \operatorname{sen} n$ e $\sum^{n} n^2 \operatorname{sen} n$, comparando com o cálculo de $\int x \operatorname{sen} x dx$ e $\int x^2 \operatorname{sen} x dx$

4) Sendo $f(x,n)$ uma função das variáveis *x* e *n*, derivável na variável *x*, então:

$$\sum^{n} \frac{\partial}{\partial x} f(x,n) = \frac{\partial}{\partial x} \sum^{n} f(x,n)$$

Podemos usar a própria variável *n*, se a função tiver derivada nessa variável:

$$\sum^{n} \frac{d}{dn} f(n) = \frac{d}{dn} \sum^{n} f(n)$$

Exemplo: Calcule $\sum^{n} nx^n$, com *x* uma constante em relação a *n*.

5) Seguindo um caminho análogo, temos que:

$$\sum^{n} \left(\int f(x,n) dx \right) = \int \left(\sum^{n} f(x,n) \right) dx + Cn$$

Para alguma constante *C*. Essa constante é encontrada através de valores iniciais conhecidos das funções.

Exemplo: Prove que $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2 + \int_{-1}^{0} \frac{x^n}{x-1} dx$

Aplicação: Soma de potências consecutivas.

Seja a seguinte função:

$$S_m(n) = \sum_{k=1}^{n} k^m = 1^m + 2^m + \ldots + n^m$$

Há uma fórmula recursiva em que podemos calcular $S_m(n)$ a partir de valores anteriores (tente prová-la como exercício):

$$(m+1)S_m(n) = (n+1)^{m+1} - 1 - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+1}{k} S_k(n)$$

O problema dessa fórmula é a praticidade: precisamos de todas as funções anteriores, e ainda assim faremos um trabalho algébrico grande. Com integrais discretas, conseguimos obter $S_m(n)$ a partir de $S_{m-1}(n)$ apenas com um trabalho aritmético.

Inicialmente, se queremos $S_m(n)$, queremos sua integral discreta $\sum^{n} n^m$. Usando a propriedade que nos permite trocar a integral discreta com a contínua (escolhendo a própria variável *n* como variável de integração contínua):

$$\sum^{n}\left(\int n^{m-1} dn\right) = \int\left(\sum^{n} n^{m-1}\right)dn + Cn$$

A integral contínua pode ser realizada sem problemas:

$$\sum^{n} \frac{n^m}{m} = \int\left(\sum^{n} n^{m-1}\right)dn + Cn$$

Renomeando a constante a ser encontrada:

$$\sum^{n} n^m = m\int\left(\sum^{n} n^{m-1}\right)dn + Cn$$

Essa constante pode ser encontrada pela diferença entre integrais discretas quando $n = 0$, fornecendo o oposto da soma dos outros coeficientes já obtidos pela integração contínua. Resumindo:

Se $\sum^{n} n^{m-1} = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \ldots + a_2 n^2 + a_1 n$, então:

$$\sum^{n} n^m = b_{m+1} n^{m+1} + b_m n^m + \ldots + b_2 n^2 + b_1 n$$

Com $b_k = \frac{m}{k} a_{k-1}$, para $k = 1, 2, \ldots, m+1$, e $b_0 = -\sum_{k=1}^{m+1} b_k$.

Alguns valores:

$$\sum^{n} 1 = n$$

$$\sum^{n} n = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$$

$$\sum^{n} n^2 = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$\sum^{n} n^3 = \frac{n^4}{4} - \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$$

$$\sum^{n} n^4 = \frac{n^5}{5} - \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

Aplicação: Soma de potências multiplicadas por progressão geométrica

Agora procuraremos $\sum^{n} n^m x^n$, com *x* uma constante em relação a *n*. Observe:

$$\frac{d}{dn} \sum^{n} n^m x^n = \sum^{n} \left(m n^{m-1} x^n + n^m x^n \ln x \right) = m \sum^{n} n^{m-1} x^n + \ln x \sum^{n} n^m x^n$$

Das formas iniciais de $\sum^{n} n^m x^n$, encontramos uma função da forma:

$$\sum^{n} n^{m-1} x^n = x^n \left(a_{m-1} n^{m-1} + a_{m-2} n^{m-2} + \ldots + a_2 n^2 + a_1 n \right)$$

com as constantes a_k sendo funções de *x*, mas não dependendo de *n*. É natural procurar uma integral discreta com a seguinte forma:

$$\sum^{n} n^m x^n = x^n \left(b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \ldots + b_2 n^2 + b_1 n \right)$$

Essa forma pode ser encontrada, e os coeficientes satisfazem $b_k = \frac{m}{k} a_{k-1}$,

$i = 1, 2, \ldots, m$ e $b_0 = \frac{x}{1-x} \sum_{k=1}^{m} b_k$.

Alguns valores:

$$\sum^{n} n x^n = \frac{(n-1)x^{n+1} - nx^n}{(x-1)^2} = \frac{x^n}{(x-1)^2}\left[(x-1)n - x\right], \ x \neq 1$$

$$\sum^{n} n 2^n = 2^n (n-2)$$

$$\sum^{n} n^2 2^n = 2^n \left(n^2 - 4n + 6\right)$$

$$\sum^{n} n^3 2^n = 2^n \left(n^3 - 6n^2 + 18n - 26\right)$$

$$\sum^{n} n^4 2^n = 2^n \left(n^4 - 8n^3 + 36n^2 - 104n + 150\right)$$

Problemas

1- Calcule as seguintes integrais discretas:

a) $\sum^{n} n^2 \binom{n}{3}$

b) $\sum^{n} 3^n \binom{n}{2}$

c) $\sum^{n} \frac{1}{(n+2)n!}$

d) $\sum^{n} \binom{n}{2}^2$

e) $\sum^{n} \frac{2^n (n-1)}{(n+1)!}$

f) $\sum^{n} \frac{1}{n^2 + n}$

g) $\sum^{n} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

h) $\sum^{n} \frac{1}{\cos n \cos(n+1)}$

2- Calcule: $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\operatorname{sen}^2 k}{n}$

3- Calcule $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^4.2^k}{\sum_{k=1}^{n}k^3.2^n}$

4- Calcule $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^m-\frac{n^{m+1}}{m+1}}{n^m}$, com *m* inteiro positivo.

5- Prove que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\left(n^2+n\right)^2}h_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, sendo $h_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

6- Ache a derivada (contínua) da função gama $\Gamma(n)$ para *n* inteiro positivo, sabendo que $\Gamma'(1)=-\gamma$, a constante de Euler (um valor conhecido) e $\Gamma(1)=1$. A função gama satisfaz $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, para todo *x* real, assim $\Gamma(n)=(n-1)!$ para *n* inteiro positivo.

7- (OBM2002) O diâmetro de um conjunto $S\subset R$ é definido como sendo $D(S)=\max(S)-\min(S)$. O conjunto vazio, por definição, tem diâmetro igual a zero. Calcule a soma dos diâmetros de todos os subconjuntos de $A=\{1,2,3,...,n\}$, em função de *n*.

REFERÊNCIAS:

[1] Uma referência sobre somatórios e algumas considerações históricas sobre o raciocínio humano e implementação de algoritmos em computadores: "A = B", Marko Petkovsek, Herbert S. Wilf, Doron Zeilberger.

PRODUTOS NOTÁVEIS
Uma lista de problemas
Onofre Campos

♦ Nível Iniciante

1. Se x é um número real tal que tal que $x+\dfrac{1}{x}=5$, determine o valor de $x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

Solução: Elevando ambos os membros da equação $x+\dfrac{1}{x}=5$ ao quadrado, obtemos:

$$x^2+2x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=25,$$

e daí, $x^2+\dfrac{1}{x^2}=23$.

2. Fatore a expressão $E=x^3-5x^2-x+5$.

Solução: Temos

$$\begin{aligned} E&=x^3-5x^2-x+5\\ &=x^2(x-5)-(x-5)\\ &=(x-5)(x^2-1)\\ &=(x-5)(x-1)(x+1). \end{aligned}$$

3. Simplifique a expressão

$$A=\frac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2}{(y-z)(y-x)}+\frac{z^2}{(z-x)(z-y)}.$$

Solução: Note que podemos escrever a expressão acima da seguinte forma:

$$A=\frac{x^2}{(x-y)(x-z)}-\frac{y^2}{(x-y)(y-z)}+\frac{z^2}{(x-z)(y-z)}.$$

Assim, reduzindo a expressão ao mesmo denominador comum vem:

$$A=\frac{x^2(y-z)-y^2(x-z)+z^2(x-y)}{(x-y)(y-z)(x-z)}.$$

Por outro lado, desenvolvendo o denominador, obtemos:

$(x-y)(y-z)(x-z)=(xy-xz-y^2+yz)(x-z)$

$=x^2y-xyz-x^2z+xz^2-xy^2+y^2z+xyz-yz^2=x^2(y-z)-y^2(x-z)+z^2(x-y).$

Portanto:

$$A = \frac{x^2(y-z) - y^2(x-z) + z^2(x-y)}{x^2(y-z) - y^2(x-z) + z^2(x-y)} = 1.$$

4. Se $x + y + z = 0,$ mostre que $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz.$

Solução: Observe que

$0 = (x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y)(y + z)(x + z).$

Como $x + y = -z, y + z = -x$ e $x + z = -y,$ então:

$x^3 + y^3 + z^3 + 3(-y)(-x)(-y) = 0 \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz.$

5. Calcule o valor da expressão

$$S = \left(\frac{(2004)^3 - (1003)^3 - (1001)^3}{2004 \cdot 1003 \cdot 1001} \right).$$

Solução: Vamos tomar $x = 1003$ e $y = 1001$. Dessa forma, a expressão S se reduz a:

$$S = \frac{(x + y)^3 - x^3 - y^3}{xy(x + y)}.$$

Mas, como sabemos, $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$

Dessa forma, obtemos:

$$S = \frac{3x^2y + 3xy^2}{xy(x + y)} = \frac{3xy(x + y)}{xy(x + y)} = 3.$$

6. Sabendo que x, y e z são reais satisfazendo $xyz = 1$, calcule o valor da expressão:

$$A = \frac{1}{1 + x + xy} + \frac{1}{1 + y + yz} + \frac{1}{1 + z + xz}.$$

Solução: Como $xyz = 1$, então $x \neq 0,\ y \neq 0$ e $z \neq 0.$

Assim,

$$A = \frac{z}{z(1 + x + xy)} + \frac{x}{x(1 + y + yz)} + \frac{1}{1 + z + xz}$$

$$= \frac{z}{z + xz + xyz} + \frac{x}{x + xy + xyz} + \frac{1}{1 + z + xz}$$

$$= \frac{z}{1+z+xz} + \frac{x}{1+x+xy} + \frac{1}{1+z+xz} = \frac{z}{1+z+xz} + \frac{xz}{1+z+xz} + \frac{1}{1+z+xz}$$

$$= \frac{1+z+xz}{1+z+xz} = 1.$$

7. Se $ab = 1$ e $a^2 + b^2 = 3,$ determine $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2.$

Solução: Temos:

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2 = \frac{a^4 + 2a^2b^2 + b^4}{a^2b^2} = \frac{(a^2+b^2)^2}{(ab)^2} = 9.$$

8. Prove que se $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ e $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0,$ então $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

Solução: Elevando a equação $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ ao quadrado, obtemos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\left(\frac{x}{a}\frac{y}{b} + \frac{y}{b}\frac{z}{c} + \frac{x}{a}\frac{z}{c}\right) = 1,$$

ou seja,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\left(\frac{xyc + xzb + yza}{abc}\right) = 1.$$

Por outro lado, da equação $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0,$ temos $xyc + xzb + yza = 0.$ Logo,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

9. Se a, b e c são três números distintos e satisfazem as equações:

$$\begin{cases} a^3 + pa + q = 0 \\ b^3 + pb + q = 0 \\ c^3 + pc + q = 0, \end{cases}$$

calcule $a + b + c$.

Solução: Multiplicando a segunda equação por – 1 e somando com a primeira, obtemos:

$$a^3 - b^3 + p(a-b) = 0,$$

ou ainda,

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)+p(a-b)=0,$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2+p)=0.$$

Como $a-b\neq 0,$ pois os números são distintos, obtemos:

$$a^2+ab+b^2+p=0.\quad (*)$$

Analogamente, multiplicando a terceira equação por – 1 e somando com a primeira equação, obtemos:

$$a^2+ac+c^2+p=0.\quad (**)$$

Agora, multiplicando (**) por –1 e somando com (*), obtemos:

$$ab-ac+b^2-c^2=0,$$
$$a(b-c)+(b-c)(b+c)=0,$$
$$(b-c)(a+b+c)=0.$$

Daí, como $b-c\neq 0,$ segue que $a+b+c=0$.

10. Sejam a, b e c números reais distintos e não nulos. Se $a+b+c=0$, mostre que

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=9.$$

Solução: Façamos $x=\dfrac{a-b}{c},\ y=\dfrac{b-c}{a}$ e $z=\dfrac{c-a}{b}.$

Assim, devemos provar que

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=9,$$

ou seja,

$$\frac{x+y+z}{x}+\frac{x+y+z}{y}+\frac{x+y+z}{z}=9,$$

ou ainda,

$$1+\frac{y+z}{x}+1+\frac{x+z}{y}+1+\frac{x+y}{z}=9\Rightarrow\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}=6.$$

Mas,

$$\frac{x+y}{z}=\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}\right)\left(\frac{b}{c-a}\right)=\frac{a^2-ab+bc-c^2}{ac}\cdot\frac{b}{c-a}$$
$$=\frac{(a^2-c^2)-b(a-c)}{ac}\cdot\frac{b}{c-a}=\frac{(a-c)(a+c)-b(a-c)}{ac}\cdot\frac{b}{c-a}$$

$$=\frac{(a-c)(a+c-b)}{ac}\cdot\frac{b}{c-a}=-\frac{(-b-b)b}{ac}=\frac{2b^2}{ac}.$$

Analogamente, concluímos que $\frac{y+z}{x}=\frac{2c^2}{ab}$ e $\frac{x+z}{y}=\frac{2a^2}{bc}$. Logo, pelo exercício 4, segue que

$$\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}=\frac{2a^2}{bc}+\frac{2b^2}{ac}+\frac{2c^2}{ab}=2\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\right)=2\cdot\left(\frac{3abc}{abc}\right)=6,$$

como queríamos provar.

Exercícios Propostos

1. Fatore a expressão $S=x^4+x^2+1$.
2. Determine a expressão que deve ser multiplicada por $x\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{x}$ para obtermos $2x(x^2+4)$.
3. Calcule o valor da expressão

$$S=\left(\frac{(x+1)^2(x^2-x+1)^2}{(x^3-1)^2}\right)^2\cdot\left(\frac{(x+1)^2(x^2+x+1)^2}{(x^3+1)^2}\right)^2.$$

4. Se $x^2+y^2=3xy$, calcule $\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{x}\right)$.
5. Simplifique
$\left(x^2+y^2+z^2+xy+yz+xz\right)^2-\left(x+y+z\right)^2\left(x^2+y^2+z^2\right)$.
6. Fatore as seguintes expressões:
(a) x^3+5x^2+3x-9;
(b) $(x-y)z^3-(x-z)y^3+(y-z)x^3$;
(c) $(x^2+x+3)(x^2+x+4)-12$;
(d) x^4+4y^4;
(e) $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$;
(f) $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$;
(g) $(a+2b-3c)^3+(b+2c-3a)^3+(c+2a-3b)^3$.

7. Simplifique as expressões:
(a) $\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{1-x^4}-\frac{1}{1-x^8}$;

(b) $\dfrac{1}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{1}{(y-x)(y-z)}+\dfrac{1}{(z-x)(z-y)}$;

(c) $\dfrac{(x^2-y^2)^3+(y^2-z^2)^3+(z^2-x^2)^3}{(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3}$.

8. Prove que se $\dfrac{x}{y-z}+\dfrac{y}{z-x}+\dfrac{z}{x-y}=0$, então

$$\frac{x}{(y-z)^2}+\frac{y}{(z-x)^2}+\frac{z}{(x-y)^2}=0.$$

9. Para que os valores de $a \in \mathbb{N}$ a expressão a^4+4 é um número primo?

10. Prove que se $a + b + c = 0$ então

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

11. Mostre que $(a+b)^7-a^7-b^7=7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2$.

12. Prove que se $a + b + c = 0$, então

$$\frac{a^7+b^7+c^7}{7}=\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

13. Se a, b e c são reais não nulos que satisfazem $a + b + c = 0$, calcule

$$\frac{(a^3+b^3+c^3)^2(a^4+b^4+c^4)}{(a^5+b^5+c^5)^2}.$$

14. Prove que se x, y e z são racionais distintos então a expressão

$$\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}+\frac{1}{(x-y)^2}$$

é um quadrado perfeito.

15. Fatore $8(x+y+z)^3-(x+y)^3-(y+z)^3-(x+z)^3$.

OLIMPÍADAS AO REDOR DO MUNDO

Apresentamos, como sempre, questões que não são encontradas facilmente na Internet. Divirtam-se e enviem as suas soluções.

Continuamos à disposição na OBM para aqueles que estiverem interessados na solução de algum problema particular. Para tanto, basta contactar a OBM, através de carta ou e-mail.

Bruno Holanda
Carlos Augusto David Ribeiro

Primeiramente vamos aos problemas propostos deste número

224.(Balcânica Junior - 2007) Seja a um real positivo tal que $a^3 = 6(a+1).$ Prove que a equação $x^2 + ax + a^2 - 6 = 0$ não possui solução real.

225.(Bulgária - 2007) Ache todos os inteiros positivos x, y tais que o número $(x^2 + y)(y^2 + x)$ é a quinta potência de um primo.

226.(Inglaterra - 2007) Seja ABC um triângulo acutângulo com $AB > AC$ e $\angle BAC = 60°.$ Seja O o circuncentro e H o ortocentro. A reta OH encontra AB em P e AC em Q. Prove que $PO = HQ$.

227.(Austria - 2007) Sejam $0 < x_0, x_1, ..., x_{669} < 1$ reais distintos. Mostre que existem $i, j \in \{0,1,...,669\}$ para os quais

$$0 < x_i x_j (x_j - x_i) < \frac{1}{2007}.$$

228.(Bulgária - 2008) Para cada inteiro positivo n, seja $\tau(n)$ a quantidade de divisores de n maiores que 2008. Defina $a_n = 0$ se $\tau(n)$ é par e $a_n = 1$ caso contrário. O número $\alpha = 0, a_1 a_2 ... a_n ...$ é racional?

229.(Bielorrússia - 2001) No losango $ABCD$, $\angle A = 60°.$
Os pontos F, H, e G estão sobre os segmentos AD, DC e AC de modo que $DFGH$ é um paralelogramo. Prove que FBH é um triângulo eqüilátero.

230.(Rússia - 2007) Sejam a, b, c números reais. Prove que pelo menos uma das três equações

$$x^2+(a-b)x+(b-c)=0,$$
$$x^2+(b-c)x+(c-a)=0,$$
$$x^2+(c-a)x+(a-b)=0,$$

possui solução real.

231.(Bulgária - 2007) No triângulo ΔABC, com $\angle ACB=60°$, sejam AA_1 e BB_1 $(A_1\in BC, B_1\in AC)$ as bissetrizes de $\angle BAC$ e $\angle ABC$. A reta A_1B_1 encontra o circuncírculo do triângulo ΔABC nos pontos A_2 e B_2.

(a) Sejam O e I o circuncentro e o incentro do ΔABC, respectivamente, prove que OI é paralelo a A_1B_1.

(b) Se R é o ponto médio do arco AB, não contendo o ponto C, P e Q são os pontos médios de A_1B_1 e A_2B_2, respectivamente, prove que $RP = RQ$.

232.(Romênia - 2007) Encontre todos os conjuntos A de pelo menos dois inteiros positivos, tais que para quaisquer dois elementos distintos $x, y\in A$ tenhamos $\dfrac{x+y}{mdc(x,y)}\in A.$ Aqui $mdc(x, y)$ denota o máximo divisor comum de x e y.

233.(Romênia - 2007) Determine todas as progressões aritméticas infinitas de inteiros positivos, com a seguinte propriedade: existe $N\in\mathbb{N}$, tal que para qualquer primo p, $p > N$, o p-ésimo termo da seqüência também é primo.

234.(Bulgária - 2007) O incírculo do triângulo acutângulo ΔABC toca os lados AB, BC e CA nos pontos P, Q e R respectivamente. O ortocentro H do triângulo ΔABC está sobre o segmento QR.

(a) Prove que $PH\perp QR$.

(b) Sejam I e O o incentro e o circuncentro do ΔABC, respectivamente, e N o ponto comum entre o lado AB e ex-incírculo relativo a este lado. Prove que os pontos I, O e N são colineares.

235.(Olimpíada Checa e Eslovaca – 2007) Se x, y, z são números reais no intervalo $(-1, 1)$ satisfazendo $xy + yz + zx = 1$, mostre que:

$$6\sqrt[3]{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}\le 1+(x+y+z)^2.$$

236.(Romênia – 2007) Um conjunto de pontos no plano é *livre* se não existe triângulo eqüilátero cujos vértices estão entre os pontos do conjunto. Mostre que qualquer conjunto de n pontos no plano contém um subconjunto *livre* com pelo menos $\sqrt{n}$ pontos.

SOLUÇÃO DE PROBLEMAS PROPOSTOS NOS NÚMEROS ANTERIORES:

211. (Baltic Way – 2004) Uma seqüência a_1, a_2, ... de números reais não-negativos satisfaz, para $n = 1, 2, ...$, as seguintes condições:

(a) $a_n + a_{2n} \geq 3n$.
(b) $a_{n+1} + n \leq 2\sqrt{a_n(n+1)}$.

(i) Prove que $a_n \geq n$ para todo $n = 1, 2, ...$
(ii) Dê exemplo de uma tal seqüência.

SOLUÇÃO DE ESTILLAC LINS MACIEL BORGES FILHO (BELÉM – PA)
(i) Utilizando a desigualdade das médias, temos:

$$a_{n+1} + n \leq 2\sqrt{a_n(n+1)} \leq 2\frac{a_n + n + 1}{2} \Rightarrow a_{n+1} + n \leq a_n + n + 1 \Rightarrow a_{n+1} \leq a_n + 1$$

Supondo válido que $a_{n+k} \leq a_n + k$, temos que:

$$a_{n+k+1} \leq a_{n+k} + 1 \leq a_n + k + 1$$

E como a desigualdade vale para $k = 1$, fica provado por indução que $a_{n+k} \leq a_n + k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Em particular, para $k = n$, temos:

$$a_{2n} \leq a_n + n \Rightarrow a_n + a_{2n} \leq 2a_n + n$$

Finalmente, como $a_n + a_{2n} \geq 3n$, temos:

$$3n \leq a_n + a_{2n} \leq 2a_n + n \Rightarrow 2a_n \geq 2n \Rightarrow a_n \geq n$$

(ii) Uma seqüência que satisfaz as condições é $a_n = n + 1$. De fato, temos:

(1) $a_n + a_{2n} = n + 1 + 2n + 1 = 3n + 2 \geq 3n$

(2) $a_{n+1} + n = 2n + 2 = 2(n+1) = 2\sqrt{(n+1)(n+1)} = 2\sqrt{a_n(n+1)} \leq 2\sqrt{a_n(n+1)}$

212. (Baltic Way – 2004) Seja P um polinômio com coeficientes não-negativos. Prove que se $P(1/x)P(x) \geq 1$ para $x = 1$, então tal desigualdade se verifica para todo real positivo x.

SOLUÇÃO DE GELLY WHESLEY (FORTALEZA – CE)

Para $x > 0$ temos $P(x) > 0.$

Da condição dada, temos $(P(1))^2 \geq 1$.

Agora, denote $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$.

Então:

$$P(x)P\left(\frac{1}{x}\right) = \left(a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n\right) \cdot \left(a_0\left(\frac{1}{x}\right)^n + a_1\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} + ... + a_n\right)$$

$\geq$ (Por Cauchy-Schwarz)

$$\left(\sqrt{\frac{a_0}{x_n}} \cdot \sqrt{a_0x^n} + \sqrt{\frac{a_1}{x_{n-1}}} \cdot \sqrt{a_1x^{n-1}} + ... + \sqrt{a_n} \cdot \sqrt{a_n}\right)^2 =$$

$$(a_0 + a_1 + ... + a_n)^2 = (P(1))^2 \geq 1.$$

213. (Baltic Way – 2004) Ache todos os conjuntos *X*, consistindo de ao menos dois inteiros positivos, tais que para todos *m*, *n* ∈ *X*, com *n* > *m*, exista um elemento *k* de *X* tal que $n = mk^2$.

SOLUÇÃO DE ESTILLAC LINS MACIEL BORGES FILHO (BELÉM – PA)

Suponha que o número $1 \in X$. Logo, seja $p \in X, \text{com } p > 1$, temos que deve existir $k \in X$, tal que $p = k^2$, isto é, p é quadrado perfeito. Obviamente, $k > 1$ e com raciocínio análogo, concluímos que k também deve ser quadrado perfeito e sua raiz quadrada deve pertencer a X. Ou seja, estendendo o raciocínio, todas as potências de p da forma $p^{1/2n}$, com $n \in \mathbb{N}$ também devem pertencer a X, o que é impossível, dado que $p^{1/2n} \notin \mathbb{N}$ para algum valor de n. Logo, $1 \notin X$.

Vamos então tentar montar o conjunto X. Para tal, vamos supor, inicialmente que X possua somente dois elementos p_1 e p_2, com $p_2 > p_1 > 1$. Desta forma, temos que deve existir $k \in X$, tal que $p_2 = p_1k^2$. Obviamente, $k < p_2$ e, portanto, a única alternativa é $k = p_1$ e, portanto, $p_2 = p_1^{\;3}$. De fato, todo conjunto $X = \{n, n^3\}$, com $n \in N$ e $n > 1$, satisfaz as condições do problema e somente tais conjuntos de dois elementos satisfazem, conforme verificado.

Vamos então supor que o conjunto X tenha mais do que dois elementos, isto é, $X = \{p_1, p_2, p_3, p_4, ..., p_r\}$, com $p_1, ..., p_r \in N$. Suponha, sem perda de generalidade, que $p_r > p_{r-1} > ... > p_3 > p_2 > p_1 > 1$. Com um raciocínio análogo ao parágrafo anterior, concluímos que $p_2 = p_1^{\ 3}$. Seguindo o raciocínio, temos que:

(1) $p_3 = p_1 k_1^{\ 2}$

(2) $p_3 = p_1^{\ 3} k_2^{\ 2}$

onde $k_1, k_2 \in X$.

Obviamente, temos que $k_1 < p_3$, $k_2 < p_3$ e $k_1 \neq k_2$. Portanto, como p_3 é o terceiro menor elemento do conjunto, só restam as possibilidades $\begin{cases} k_1 = p_1 \\ k_2 = p_1^{\ 3} \end{cases}$ ou $\begin{cases} k_1 = p_1^{\ 3} \\ k_2 = p_1 \end{cases}$. Porém, no primeiro caso, temos que $p_3 = p_1^{\ 3} = p_2$: absurdo! Já no segundo caso, temos que:

(1) $p_3 = p_1 (p_1^{\ 3})^2 = p_1^{\ 7}$

(2) $p_3 = p_1^{\ 3} p_1^{\ 2} = p_1^{\ 5}$

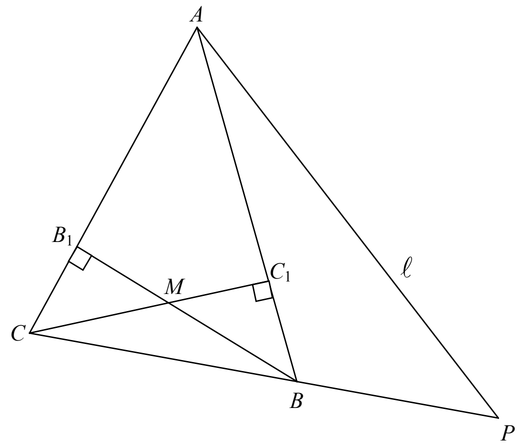
Portanto, temos que $p_1^{\ 5} = p_1^{\ 7} \Rightarrow p_1 = 0$ ou $p_1 = 1$. Absurdo!

Logo, não é possível que o conjunto X possua mais de 2 elementos. E assim, todos os conjuntos que satisfazem o enunciado são:

$X = \{n, n^3\}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$.

223. (Bielorússia – 2005) Seja H o ponto de interseção das alturas BB_1 e CC_1 do triângulo acutângulo ABC. Seja ℓ uma reta passando por A, tal que $\ell \perp AC$. Prove que as retas BC, B_1C_1 e ℓ possuem um ponto em comum se e somente se H for o ponto médio de BB_1.

SOLUÇÃO DE DAVI LOPES ALVES DE MEDEIROS (FORTALEZA – CE)



Seja P o ponto de interseção de BC e ℓ. É suficiente mostrarmos que B_1, C_1, P são colineares $\Leftrightarrow BM = MB_1$.

i) C, M, C_1 colineares $\Rightarrow$ por Menelaus no $\Delta BAB_1 : \dfrac{CB_1}{AC} \cdot \dfrac{AC_1}{C_1B} \cdot \dfrac{BM}{MB_1} = 1,$ (I)

ii) $BB_1 \perp AC$ e $\ell \perp AC \Rightarrow \ell \,//\, BB_1$ e daí $\Delta ACP \sim \Delta BCB_1$, donde $\dfrac{PB}{BC} = \dfrac{AB_1}{CB_1}$ (II) e $\dfrac{PC}{AC} = \dfrac{CB}{CB_1}$ (III)

iii) P, B_1 e C_1 são colineares $\Leftrightarrow \dfrac{PC}{PB} \cdot \dfrac{AB_1}{CB_1} \cdot \dfrac{C_1B}{AC_1} = 1$ (IV)

Multiplicando (I) e (IV) membro a membro, temos que P, B_1 e C_1 são colineares

$$\Leftrightarrow \frac{CB_1}{AC} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BM}{MB_1} \cdot \frac{PC}{PB} \cdot \frac{AB_1}{CB_1} \cdot \frac{C_1B}{AC_1} = 1 \Leftrightarrow \frac{BM}{MB_1}\left(\frac{PC}{AC} \cdot \frac{AB_1}{PB}\right) = 1 \quad \text{(V)}$$

Mas de (II) : $\dfrac{AB_1}{PB} = \dfrac{CB_1}{BC}$ e multiplicando este resultado por (III)

$$\boxed{\frac{PC}{AC} \cdot \frac{AB_1}{PB} = \frac{CB}{CB_1} \cdot \frac{CB_1}{CB} = 1} \quad (*)$$

Substituindo (*) em (V), temos que P, B_1, C_1 são colineares $\Leftrightarrow \frac{BM}{MB_1} = 1 \Leftrightarrow BM = MB_1$. c.q.d.

224. (Bielorússia – 2005) Ache todas as funções $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfazendo

$$f(m - n + f(n)) = f(m) + f(n),$$

para todos $m, n \in \mathbb{N}$.

SOLUÇÃO DE ESTILLAC LINS MACIEL BORGES FILHO (BELÉM – PA)

Primeiramente, seja $k \in \mathbb{N}$. Fazendo $m = n = k$, temos:

$f(k - k + f(k)) = f(k) + f(k) \Rightarrow f(f(k)) = 2f(k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$

Em seguida, façamos $m = 0$ e $n = f(k)$, temos:

$f(-f(k) + f(f(k))) = f(0) + f(f(k)) \Rightarrow f(-f(k) + 2f(k)) = f(0) + 2f(k)$

$\Rightarrow f(f(k)) = f(0) + 2f(k) \Rightarrow f(0) = 0$

Agora, seja $x \in \mathbb{N}$, tal que $x = f(1)$. Tomando $m = k + 1$ e $n = 1$, temos:

$f(k + x) = x + f(k + 1)$, $\forall k \in \mathbb{N}$

Seja $t \in \mathbb{N}$, com $t \geq 1$. Substituindo sucessivamente na equação anterior k por $(t - j)x + (j - 1)$, com $1 \leq j \leq t$, temos:

$$\begin{aligned}
&f(tx) = x + f((t-1)x + 1)\\
&f((t-1)x + 1) = x + f((t-2)x + 2)\\
&f((t-2)x + 2) = x + f((t-3)x + 3)\\
&\vdots\\
&f((t - j + 1)x + j - 1) = x + f((t - j)x + j)\\
&\vdots\\
&f(2x + t - 2) = x + f(x + t - 1)\\
&f(x + t - 1) = x + f(t)
\end{aligned}$$

Somando as equações anteriores, temos:

$$f(tx) = tx + f(t),\ \forall t \in \mathbb{N}$$

Com este resultado em mãos, vamos provar, por indução, que $f(k) = kx$, $\forall k \in \mathbb{N}$. De fato, temos:

(1) Se $k = 0$, temos $f(k) = f(0) = 0 = kx$

(2) Se $k = 1$, temos $f(k) = f(1) = x = kx$

(3) Se $f(t) = tx$, para $t \in \mathbb{N}$, temos:

$$f(t-1+x) = x + f(t) = x + tx = (t+1)x \Rightarrow f(f(t-i+x)) = f((t+i)x) = (t+1)x + f(t+1)$$
$$\Rightarrow 2f(t-1+x) = (t+1)x + f(t+1)$$
$$\Rightarrow (t+1)x + f(t+1) = 2(t+1)x \Rightarrow f(t+1) = (t+1)x$$

Portanto, nos resta descobrir quais os valores possíveis para $x = f(1)$. Para isso, vamos utilizar o último resultado encontrado na relação inicial proposta no problema, para $n \neq 0$:

$$f(m-n+f(n)) = (m-n+nx)x = mx - nx + nx^2$$
$$f(m) + f(n) = mx + nx$$

$$\Rightarrow mx - nx + nx^2 = mx + nx \Rightarrow nx^2 = 2nx \Rightarrow x^2 = 2x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 2 \end{cases}$$

Logo, as funções possíveis são: $f(y) = 0$ e $f(y) = 2y$. É fácil ver que ambas satisfazem as condições e, portanto, são todas as funções procuradas.

227. (Bulgária – 2005) Ivo escreve todos os inteiros de 1 a 100 (inclusive) em cartas e dá algumas delas para Iana. Sabe-se que para quaisquer duas destas cartas, uma de Ivo e outra de Iana, a soma dos números não está com Ivo e o produto não está com Iana. Determine o número de cartas de Iana sabendo que a carta 13 está com Ivo.

SOLUÇÃO DE ESTILLAC LINS MACIEL BORGES FILHO (BELÉM – PA)

Primeiramente, notamos que a carta de número 1 deve estar com Iana. De fato, se a carta 1 estivesse com Ivo, para qualquer carta y de Iana, o produto dos números também estaria com Iana, contradizendo a hipótese. Isso implica que ou a carta 1 pertence a Iana ou Iana não possui cartas, o que não é verdade por hipótese. Sendo assim, Iana possui a carta 1 e, dada qualquer carta x de Ivo, temos que Iana deverá possuir a carta $x+1$.

Continuando o raciocínio, temos que Iana também deverá possui as cartas $2x+1$, $3x+1$, ..., $kx+1$, com $kx+1 \le 100$ e $k \in \mathbb{N}$.

Além disso, Iana também deve possuir a carta $x-1$, pois caso contrário, Iana deveria possui a carta $x-1+1 = x$, o que não é verdade. E logo, Iana também deve possuir as cartas $2x-1$, ..., $kx-1$, com $kx-1 \le 100$ e $k \in \mathbb{N}$.

Assim, sabendo que Ivo possui a carta de número 13, já sabemos que Iana possui as cartas:

$$1, 12, 14, 25, 27, 38, 40, 51, 53, 64, 66, 77, 79, 90, 92$$

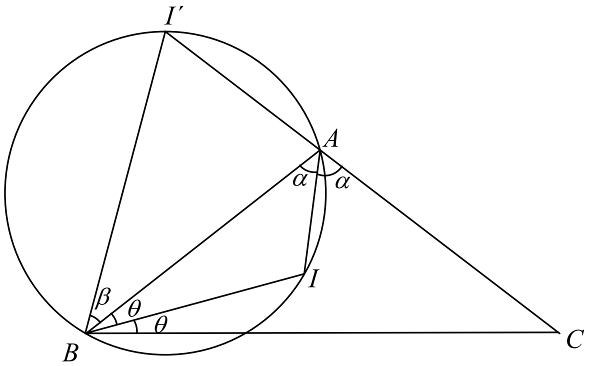
Notemos agora que a carta número 2 deve pertencer à Iana. De fato, se a carta pertencesse a Ivo, teríamos pelo raciocínio anterior que Iana deveria possuir todas as cartas ímpares, o que não é possível, já que Ivo possui a carta número 13.
Como a carta 2 pertence a Iana e a carta 13 pertence a Ivo, temos que a carta 26 deve pertencer a Ivo e, conseqüentemente, a carta 52 também. Portanto, até o momento, temos:
Ivo: $13, 26, 52$
Iana: $1, 2, 12, 14, 25, 27, 38, 40, 51, 53, 64, 66, 77, 79, 90, 92$
Novamente, temos que a carta 3 deve pertencer a Iana, pois caso pertencesse a Ivo, a carta $6 = 3\times 2$ também pertenceria a Ivo, assim como a carta $12 = 6\times 2$, o que não é verdade. Analogamente, a carta 4 também pertence a Iana, pois se pertencesse a Ivo, também pertenceria a Ivo a carta $12 = 4\times 3$. Isso implica que as cartas 39 e 78 pertencem a Ivo. Portanto, até o momento:
Ivo: $13, 26, 39, 52, 78$
Iana: $1, 2, 3, 4, 12, 14, 25, 27, 38, 40, 51, 53, 64, 66, 77, 79, 90, 92$
Se Ivo possuísse o número 5, também deveria possuir o número $10 = 5\times 2$ e assim, deveria possuir o número $40 = 10\times 4$, o que não é verdade. Logo Iana possui o número 5.
Já os números 6 e 7 também não podem estar com Ivo, pois neste caso, os números $12 = 6\times 2$ e $14 = 7\times 2$ não poderiam estar com Iana, o que não acontece. Logo, Iana também possui os números 6 e 7.
Assim, até o momento:
Ivo: $13, 26, 39, 52, 78$
Iana: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 12, 14, 25, 27, 38, 40, 51, 53, 64, 66, 77, 79, 90, 92$
Analogamente, temos que se $8, 9, 10 \text{ e } 11$ pertencessem a Ivo, $40 = 8\times 5$, $27 = 9\times 3$, $40 = 10\times 4$ e $77 = 11\times 7$ também deveriam pertencer a Ivo, o que não é verdade. Logo, $8, 9, 10 \text{ e } 11$ também pertencem a Iana.
Neste momento, temos que:
Ivo: $13, 26, 39, 52, 78$
Iana: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 25, 27, 38, 40, 51, 53, 64, 66, 77, 79, 90, 92$
Agora notamos que Ivo possui todos os múltiplos de 13 menores que 100. Todos os demais números menores que 100 devem então ter a forma $13k + t$, com $k, t \in \mathbb{N}$ e $0 < t < 13$. Como Iana possui todos os números $t \in \mathbb{N}$ com $0 < t < 13$, temos que todos os número menores que 100 que não são múltiplos de 13 devem pertencer a Iana, pois $13k$ pertence a Ivo e a soma não pode pertencer a Ivo.

Logo, Ivo possui apenas 7 números e Iana possui os 93 restantes.

230. (Eslovênia – 2005) Denote por I o incentro do triângulo ABC. Sabe-se que $AC + AI = BC$. Encontre a razão entre as medidas do ângulos $\angle BAC$ e $\angle CBA$.

SOLUÇÃO DE RAFAEL ALVES DA PONTE (FORTALEZA – CE)

Denote por I o incentro do triângulo ABC. Sabe-se que $AC + AI = BC$. Encontre a razão entre as medidas dos ângulos $\angle BAC$ e $\angle CBA$.



Construa $\overline{AI'}$ em $\overleftrightarrow{AC}$ de modo que $AI = AI'$, conforme a figura acima.
Sejam $\angle BAI' = \angle IAC = \alpha$ e $\angle IBA = \angle IBC = \theta$. Note que $\Delta BI'C$ é isósceles, e sendo $\angle I'BA = \beta$, $\angle BI'A$ mede $\beta + 2\theta$ e, pelo teorema do ângulo externo, $\angle BAC = 2\beta + 2\theta$, donde vem $\alpha = \beta + \theta$ [*]. Veja que $\angle I'AI = 180° - \alpha$, e visto que $\angle I'BI = \alpha$ (por [*]), $I'BIA$ é inscritível. Como as cordas $\overline{AI}$ e $\overline{AI'}$ são congruentes, $\beta = \theta$, daí

$$\alpha = 2\theta \Leftrightarrow 2\alpha = 2 \cdot 2\theta \Leftrightarrow \angle BAC = 2\angle CBA \Leftrightarrow \frac{\angle BAC}{\angle CBA} = 2$$

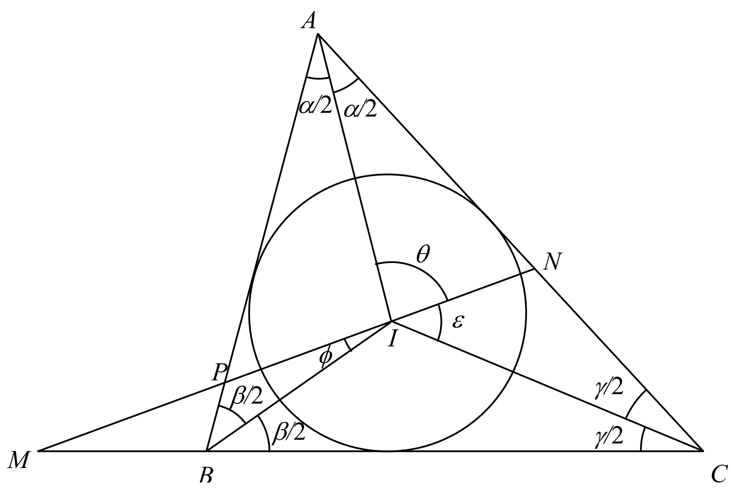
COMO É QUE FAZ?

PROBLEMA PROPOSTO POR WILSON CARLOS DA SILVA RAMOS (BELÉM – PA)

Dado um triângulo ABC com incentro I, considere uma reta variável l passando por I que intersecta o lado AB em P, o lado AC em N e a reta suporte do lado BC em M. Prove que o valor de $\frac{AB}{PA \cdot PB} + \frac{AC}{NA \cdot NC} - \frac{BC}{MB \cdot MC}$ independe da escolha de l.

SOLUÇÃO:

Suponha, sem perda de generalidade, que B está entre M e C.



Primeiro, note que $\frac{AB}{PA \cdot PB} = \frac{PA + PB}{PA \cdot PB} = \frac{1}{PA} + \frac{1}{PB}$,

$\frac{AC}{NA \cdot NC} = \frac{NA + NC}{NA \cdot NC} = \frac{1}{NA} + \frac{1}{NC}$ e $\frac{BC}{MB \cdot MC} = \frac{MC - MB}{MB \cdot MC} = \frac{1}{MB} - \frac{1}{MC}$, de modo que queremos provar que

$$\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} + \frac{1}{NA} + \frac{1}{NC} - \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}$$

não depende da reta l.

Isso é um trabalho para a lei dos senos! De fato, nos triângulos AIP e AIN, e lembrando que, sendo r o inraio de ABC, $AI = \frac{r}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}$,

$$\frac{AP}{\operatorname{sen}\theta}=\frac{AI}{\operatorname{sen}\left(\theta+\frac{\alpha}{2}\right)}\Leftrightarrow\frac{1}{PA}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\left(\theta+\frac{\alpha}{2}\right)}{r\operatorname{sen}\theta}\quad\text{e}$$

$$\frac{NA}{\operatorname{sen}\theta}=\frac{AI}{\operatorname{sen}\left(\theta-\frac{\alpha}{2}\right)}\Leftrightarrow\frac{1}{NA}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\left(\theta-\frac{\alpha}{2}\right)}{r\operatorname{sen}\theta}$$

Somando $\frac{1}{PA}$ e $\frac{1}{NA}$, obtemos

$$\frac{1}{PA}+\frac{1}{NA}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{sen}\left(\theta+\frac{\alpha}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\theta-\frac{\alpha}{2}\right)\right)}{r\operatorname{sen}\theta}$$

Utilizando a fórmula de Prostaférese $\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y=2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$,

$$\frac{1}{PA}+\frac{1}{NA}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\left(2\operatorname{sen}\left(\frac{\left(\theta+\frac{\alpha}{2}\right)+\left(\theta-\frac{\alpha}{2}\right)}{2}\right)\cos\left(\frac{\left(\theta+\frac{\alpha}{2}\right)-\left(\theta-\frac{\alpha}{2}\right)}{2}\right)\right)}{r\operatorname{sen}\theta}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\left(2\operatorname{sen}\theta\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{r\operatorname{sen}\theta}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{r}$$

Sorte grande! Esse valor não depende da escolha de l, já que r e α só dependem do triângulo *ABC*. Podemos concluir, analogamente, que

$$\frac{1}{NC}+\frac{1}{MC}=\frac{\operatorname{sen}\gamma}{r}$$

também não depende de l.

Já o caso de $\frac{1}{PB}-\frac{1}{MB}$, como era de se esperar, é um pouquinho diferente, mas só um pouquinho: pela lei dos senos nos triângulos *MIB* e *PIB*,

$$\frac{MB}{\operatorname{sen}\phi}=\frac{BI}{\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}-\phi\right)}\Leftrightarrow\frac{1}{MB}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}-\phi\right)}{r\operatorname{sen}\phi}\quad\text{e}$$

$$\frac{PB}{\operatorname{sen}\phi}=\frac{BI}{\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}+\phi\right)}\Leftrightarrow\frac{1}{PB}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}+\phi\right)}{r\operatorname{sen}\phi}$$

Note a mudança de sinal de $\theta-\frac{\alpha}{2}$ para $\frac{\beta}{2}-\phi$: "destrocando" o sinal, obtemos $-\frac{1}{MB}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\operatorname{sen}\left(\phi-\frac{\beta}{2}\right)}{r\operatorname{sen}\phi}$ e aí podemos trabalhar como nos demais casos, obtendo

$$-\frac{1}{MB}+\frac{1}{PB}=\frac{\operatorname{sen}\beta}{r}$$

A soma pedida é, então, igual a $\frac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\gamma}{r}$, que não depende de l.

SOLUÇÕES DE PROBLEMAS PROPOSTOS

Publicamos aqui algumas das respostas enviadas por nossos leitores.

110) Um conjunto finito de inteiros positivos é chamado de *Conjunto DS* se cada elemento divide a soma dos elementos do conjunto.
Prove que todo conjunto finito de inteiros positivos é subconjunto de algum conjunto *DS*.

SOLUÇÃO DE ZOROASTRO AZAMBUJA NETO (RIO DE JANEIRO – RJ)

Basta provar que, para todo n inteiro positivo, existe um conjunto *DS* que contém $\{1,2,...,n\}$. Para $n \le 3$, isso segue do fato de $\{1,2,3\}$ ser um conjunto *DS*.
Vamos mostrar, por indução em n, que, para todo $n \ge 3$, existe um conjunto *DS*, $X_n = \{a_1, a_2, ..., a_{k(n)}\}$, com $a_j = j$ para $1 \le j \le n$. Note que a soma dos seus elementos $S_n = \sum_{j=1}^{k(n)} a_j$ é par (pois $a_2 = 2 \in X_n \Rightarrow 2 \mid S_n$).

Dado $n \ge 3$ e um conjunto X_n como acima, podemos tomar

$$X_{n+1} = \left\{1, 2, 3, ..., n, n+1, \frac{(n+1)(n+2)}{2} a_2, \frac{(n+1)(n+2)}{2} a_3, ..., \frac{(n+1)(n+2)}{2} a_{k(n)}\right\}$$

A soma de seus elementos é

$$S_{n+1} = 1+2+...+n+(n+1)+\frac{(n+1)(n+2)}{2}\sum_{j=2}^{k(n)} a_j = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2}(S_n - a_1) =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \cdot S_n, \text{ pois } a_1 = 1.$$

Como S_n é par, S_{n+1} é múltiplo de $n + 1$. Como S_n é múltiplo de a_j para todo j, $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \cdot S_n$ é múltiplo de $\frac{(n+1)(n+2)}{2} \cdot a_j$ para todo j, e logo X_{n+1} é um conjunto *DS*.

111) Prove que existem infinitos múltiplos de 7 na seqüência (a_n) abaixo:
$a_1 = 1999,\ a_n = a_{n-1} + p(n), \forall n \ge 2$, onde $p(n)$ é o menor primo que divide n.

SOLUÇÃO DE JOSÉ DE ALMEIDA PANTERA (RIO DE JANEIRO – RJ)

Seja N um número da forma $510510r = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot r,$ onde r é um inteiro positivo. Temos então $p(N+2)=2,\ p(N+3)=3,\ p(N+4)=2,$ $p(N+5)=5,\ p(N+6)=2,\ p(N+7)=7,\ p(N+8)=2,\ p(N+9)=3,$ $p(N+10)=2,\ p(N+11)=11,\ p(N+12)=2,\ p(N+13)=13,$ $p(N+14)=2,\ p(N+15)=3,\ p(N+16)=2,$ e $p(N+17)=17.$ Assim, $a_{N+2}\equiv a_{N+1}+2(\text{mod } 7), a_{N+3}\equiv a_{N+1}+5(\text{mod } 7),\ a_{N+4}\equiv a_{N+1}(\text{mod } 7),$ $a_{N+5}\equiv a_{N+1}+5(\text{mod } 7),\ a_{N+6}\equiv a_{N+1}(\text{mod } 7),\ a_{N+7}\equiv a_{N+1}(\text{mod } 7),$ $a_{N+8}\equiv a_{N+1}+2(\text{mod } 7),\ a_{N+9}\equiv a_{N+1}+5(\text{mod } 7),\ a_{N+10}\equiv a_{N+1}(\text{mod } 7),$ $a_{N+11}\equiv a_{N+1}+4(\text{mod } 7),\ a_{N+12}\equiv a_{N+1}+6(\text{mod } 7),\ a_{N+13}\equiv a_{N+1}+5(\text{mod } 7),$ $a_{N+14}\equiv a_{N+1}(\text{mod } 7),\ a_{N+15}\equiv a_{N+1}+3(\text{mod } 7),\ a_{N+16}\equiv a_{N+1}+5(\text{mod } 7)$ e $a_{N+17}\equiv a_{N+1}+1(\text{mod } 7),$ e portanto sempre há um múltiplo de 7 em $\{a_{N+1},a_{N+2},a_{N+3},a_{N+11},a_{N+12},a_{N+15},a_{N+17}\}$, pois $a_{N+1},\ a_{N+2},\ a_{N+3},\ a_{N+11},\ a_{N+12},$ $a_{N+15},\ a_{N+17}$ percorrem todas as classes de congruência módulo 7.

112) Determine todos os inteiros positivos n tais que existe uma matriz $n \times n$ com todas as entradas pertencentes a $\{-1, 0, 1\}$ tal que os $2n$ números obtidos como somas dos elementos de suas linhas e de suas colunas são todos distintos.

SOLUÇÃO DE ASDRÚBAL PAFÚNCIO SANTOS (BOTUCATU – SP)

Vamos mostrar que existe uma matriz como no enunciado se e somente se n é par. Se n é par, digamos $n = 2k$, podemos construir uma matriz $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le 2k}$ com $a_{ij}=1$ se $1\le i,j\le k, a_{ij}=-1$ se $k+1\le i,j\le 2k, a_{ij}=1$ se $i\le k$ e $j\ge k+i,\ a_{ij}=0$ se $i\le k$ e $k+1\le j<k+i, a_{ij}=-1$ se $i\ge k+1, j\le k$ e $j+k>i,$ e $a_{ij}=0$ se $i\ge k+1$ e $j+k\le i.$ É fácil ver que os $2n$ números obtidos como somas dos elementos das linhas e das colunas de A é $\{n,n-1,n-2,\dots,1,0,-1,\dots,-(n-2),-(n-1)\}$.

Suponha agora que exista uma matriz $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ como no enunciado, com $a_{ij}\in\{-1,0,1\},\forall i,j\le n.$ Claramente permutar linhas ou colunas não altera as propriedades do enunciado. Como há $2n+1$ elementos em $\{-n,-(n-1),\dots,-1,0,1,\dots,n-1,n\}$, um desses elementos, digamos c, não é valor da soma dos elementos de nenhuma linha ou coluna de A. Podemos supor (trocando o sinal de todos os elementos de A, se necessário) que esse elemento c

que falta é menor ou igual a 0. Podemos supor (permutando linhas e colunas, se necessário) que os valores 1, 2,..., $n-1$, n são obtidos como somas dos elementos das primeiras k linhas e das primeiras $n-k$ colunas de A, para certo $k \leq n$. Sejam $x = \sum_{\substack{1\leq i\leq k \\ 1\leq j\leq n-k}} a_{ij}$, $y = \sum_{\substack{1\leq i\leq k \\ n-k<j\leq n}} a_{ij}$, $z = \sum_{\substack{k<i\leq n \\ 1\leq j\leq n-k}} a_{ij}$ e $w = \sum_{\substack{k<i\leq n \\ n-k<j\leq n}} a_{ij}$. Temos então $\frac{n(n+1)}{2} = 1+2+\ldots+n = (x+y)+(x+z) = 2x+y+z$, e $-\frac{n(n+1)}{2} - c =$ $= (z+w)+(y+w) = 2w+y+z.$ Portanto, $2x-2w = n(n+1)+c \geq n^2$, pois $c \geq -n$, e, como claramente temos $x \leq k(n-k)$ e $w \geq -k(n-k), 4k(n-k) \geq$ $\geq 2x-2w \geq n^2 \Rightarrow 0 \geq n^2-4kn+4k^2 = (n-2k)^2$, donde $n-2k=0$, e portanto n é par. Note que, nesse caso, o elemento c que falta deve ser necessariamente igual a $-n$ (ou n, se for positivo).

114) Sabendo que $sen\ x + sen\ y + sen\ z + sen\ w = 0$ e $\cos x + \cos\ y + \cos\ z + \cos\ w = 0,$ mostre que $sen^{2003} x + sen^{2003} y + sen^{2003} z + sen^{2003} w = 0.$

SOLUÇÃO BASEADA NAS SOLUÇÕES ENVIADAS POR SAMUEL LILÓ ABDALLA E DOUGLAS RIBEIRO SILVA

De $\cos x + \cos y + \cos z + \cos w = 0$ e $\text{sen}\ x + \text{sen}\ y + \text{sen}\ z + \text{sen}\ w = 0,$ obtemos

$e^{ix}+e^{iy}+e^{iz}+e^{iw} = (\cos x + i\text{sen}x)+(\cos y + i\text{sen}y)+(\cos z + i\text{sen}z)+(\cos w + i\text{sen}w) = 0.$

Vamos supor sem perda de generalidade $0 \leq x \leq y \leq z \leq w < 2\pi$. Temos $y - x \leq \pi$ e $w - z \leq \pi$, senão os quatro números complexos e^{ix}, e^{iy}, e^{iz} e e^{iw} pertenceriam a um mesmo semicírculo do círculo unitário, e sua soma não poderia ser 0. Temos $e^{ix}+e^{iy} = (\cos x + \cos y) + i(\text{sen}x + \text{sen}y) =$

$$= 2\cos\left(\frac{y-x}{2}\right)\left(sen\left(\frac{x+y}{2}\right) + i\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) = 2\cos\left(\frac{y-x}{2}\right)e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}.$$

Analogamente, $e^{iz}+e^{iw} = 2\cos\left(\frac{w-z}{2}\right)e^{i\left(\frac{w+z}{2}\right)}.$

Como $e^{ix}+e^{iy} = -\left(e^{iz}+e^{iw}\right)$, obtemos

$2\cos\left(\frac{y-x}{2}\right)e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)} = -2\cos\left(\frac{w-z}{2}\right)e^{i\left(\frac{w+z}{2}\right)}$. Temos ainda $0 \le \frac{y-x}{2} \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le \frac{w-z}{2} \le \frac{\pi}{2}$, donde $\cos\left(\frac{y-x}{2}\right) \ge 0$ e $\cos\left(\frac{w-z}{2}\right) \ge 0$. Temos agora dois casos:

i) $\cos\left(\frac{y-x}{2}\right) = 0$. Nesse caso, devemos ter também $\cos\left(\frac{w-z}{2}\right) = 0$, e, portanto $y-x = w-z = \pi$, $\text{sen}y = -\text{sen}x$ e $\text{sen}w = -\text{sen}z$, donde segue imediatamente o resultado.

ii) $\cos\left(\frac{y-x}{2}\right) > 0$. Nesse caso, devemos ter $\cos\left(\frac{w-z}{2}\right) = \cos\left(\frac{y-x}{2}\right) > 0$ e $e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)} = -e^{\left(\frac{w+z}{2}\right)}$, donde $\frac{w+z}{2} = \frac{x+y}{2} + \pi$ e $\frac{w-z}{2} = \frac{y-x}{2}$. Somando, obtemos $w = y + \pi$ e, substraindo, obtemos $z = x + \pi$. Assim, $senw = -seny$ e $senz = -senx$, donde segue o resultado, como antes.

116) Seja ABC um triângulo e sejam *X, Y* e *Z* as reflexões de *A*, *B* e *C* em relação às retas *BC*, *CA* e *AB*, respectivamente. Prove que *x, y* e *z* são colineares se e somente se $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = -3/8$.

SOLUÇÃO ENVIADA POR DOUGLAS RIBEIRO SILVA COM CONTRIBUIÇÕES DE CARLOS EDDY ESAGUY NEHAB E MARCIO COHEN

Construam o triângulo *ABC* e as reflexões *X, Y* e *Z* de seus vértices A, B e C.

Se, dados *U*, *V*, *W* no plano, (*UVW*) denota a área (orientada) do triângulo *UVW,* temos *S*(*XYZ*) = [*S*(*ABC*) + *S*(*CBX*) + *S*(*ACY*) + *S*(*BAZ*)] – *S*(*AZY*) – *S*(*BXZ*) – *S*(*CYX*). (*) Ver nota abaixo.

Temos *S*(*ABC*) = *S*(*CBX*) = *S*(*ACY*) = *S*(*BAZ*), por construção.

As áreas de *AZY, BXZ* e *CYX* podem ser somadas ou subtraídas, dependendo de os ângulos $Y\hat{A}Z = 3A$, $Z\hat{B}X = 3B$ e $X\hat{C}Y = 3C$ (onde *A, B* e *C* denotam os ângulos internos do triângulo *ABC*) serem maiores ou menores que 180 graus. Valerá a igualdade se usarmos as expressões *S*(*AZY*) = *bc* · sen(3*A*)/2, *S*(*BXZ*) = *ac* · sen(3*B*)/3 e *S*(*CYX*) = *ab* · sen(3*C*)/2.

Então a relação passa a ser *S*(*XYZ*) = 4*S*(*ABC*) – *bc* · sen(3*A*)/2 – *ac* · sen(3*B*)/3 – *ab* · sen(3*C*)/2.

Agora substituímos $\text{sen}(3\theta) = -4\cdot(\text{sen}(\theta))^3 + 3\cdot\text{sen}(\theta)$ para $\theta = A, B, C$ e substituímos também $bc/2$ $ac/2$ e $ab/2$ respectivamente por $S(ABC)/\text{sen}A$, $S(ABC)/\text{sen}B$ e $S(ABC)/\text{sen}C$, devido à fórmula de área em função dos lados e do ângulo para o triângulo original.

Fazendo as devidas substituições acima, simplificamos os senos e basta trocar $(\text{sen}(\theta))^2$ por $1-(\cos(\theta))^2$ para $\theta = A, B, C$ para chegar em $S(XYZ) = S(ABC)\cdot[7-4((\cos A)^2+(\cos B)^2+(\cos C)^2)]$.

Para que os três pontos estejam alinhados, a área do triângulo XYZ deve ser igual a zero, donde $7-4((\cos A)^2+(\cos B)^2+(\cos C)^2)=0$

Façamos $z = (\cos A)^2+(\cos B)^2+(\cos C)^2$ Dai, como $\cos 2x = 2(\cos x)^2 - 1$ temos $z = (1+\cos 2A)/2 + (1+\cos 2B)/2 + (\cos C)^2 = 1 + (\cos(2A) + \cos(2B))/2 + (\cos C)^2$.

Mas $\cos(2A)+\cos(2B) = 2\cos(A+B)\cos(A-B) = -2\cos C\cos(A-B)$.

Substituindo em z:

$z = 1-\cos C\,[\cos(A-B)-\cos C] = 1-\cos C\,[\cos(A-B)+\cos(A+B)]$. Daí temos:

$z = 1-\cos C.\,[2\cos A.\cos B] = 1-2\cos A.\cos B.\cos C.$

Substituindo este z na expressão anterior, chegamos na desejada expressão do enunciado:

$0 = 7-4((\cos A)^2+(\cos B)^2+(\cos C)^2) = 7-4(1-2\cos A.\cos B.\cos C) = 3+8\cos A.\cos B.\cos C.$

Logo, chegamos na esperada relação $\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C = -3/8$.

Nota: A igualdade(*) pode ser mostrada por meio de algumas figuras, considerando alguns casos, mas daremos a seguir uma prova algébrica dela. A área (orientada) de um triângulo UVW no plano $\mathbb{R}^2$ é igual à metade do determinante $\det(V-U, W-U)$ da matriz cujas linhas coincidem com os vetores $V-U$ e $W-U$. Se identificarmos cada vetor $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ com $(x,y,0)\in\mathbb{R}^3$, o produto vetorial $(V-U)\times(W-U)$ é igual ao vetor $(0,0,\det(V-U, W-U)) = (0,0,2S(UVW))$.

Basta provar então que $(Y-X)\times(Z-X) = (B-A)\times(C-A) + (B-C)\times(X-C) + (C-A)\times(Y-A) + (A-B)\times(Z-B) - (Z-A)\times(Y-A) - (X-B)\times(Z-B) - (Y-C)\times(X-C)$, mas o lado direito é igual a

$(B-A)\times(C-A) + (B-Y)\times(X-C) + \times(C-Z)\times(Y-A) + (A-X)\times(Z-B)$, que, desenvolvendo (e usando a desigualdade $U\times V = -V\times U$, para quaisquer U, V), é igual a $B\times C - B\times A - A\times C + B\times X - B\times C - Y\times X + Y\times C + C\times Y - C\times A - Z\times Y + Z\times A + A\times Z - A\times B - X\times Z + X\times B = -Y\times X - Z\times Y - X\times Z = Y\times Z - Y\times X - X\times Z = (Y-X)\times(Z-X)$.

117) Sejam r e s duas retas reversas (i.e., não contidas num mesmo plano) e A, B, C, D, $\widetilde{A},\widetilde{B},\widetilde{C},\widetilde{D}$ pontos tais que $A,B,\widetilde{A},\widetilde{B}\in r, C,D,\widetilde{C},\widetilde{D}\in s$, $AB=\widetilde{A}\widetilde{B}$ e $CD=\widetilde{C}\widetilde{D}$. Prove que os tetraedros $ABCD$ e $\widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{C}\widetilde{D}$ têm o mesmo volume.

SOLUÇÃO DE DOUGLAS RIBEIRO SILVA (RECIFE - PE)

Note que o que o problema pede é equivalente demonstrar que o volume do tetraedro só depende da medida de duas arestas reversas e da distância entre as retas-suporte dessas duas arestas. Na figura que segue, as arestas reversas são AB e CD. A distância entre as retas suporte é EF.

O volume do tetraedro será calculado a partir da área da base ABC e a altura relativa a D

V = (Área (ABC) · HD)/3

Note que a área de ABC pode ser definida como $AB \cdot EC/2$, pois como EC está no mesmo plano de EF e EF é perpendicular a AB, EC também é (Teorema das 3 perpendiculares).

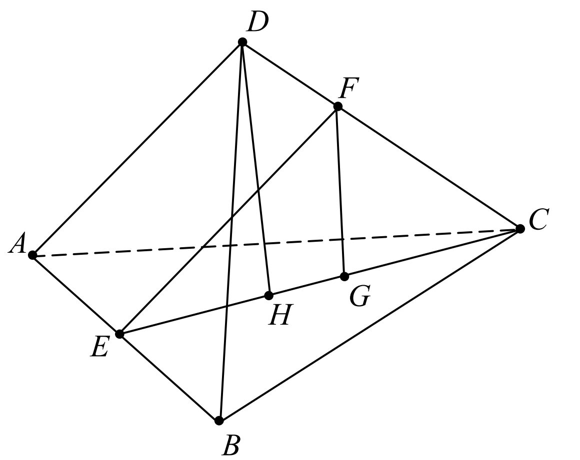
$V = ((AB \cdot EC/2) \cdot HD)/3$

Conservando a área do triangulo retangulo EFC temos: $EF \cdot FC/2 = EC \cdot FG/2$. Logo
$FG = EF \cdot FC/EC$
Pela semelhança dos triangulos FGC e DHC tiramos o valor de HD:

$HD/CD = FG/FC$ Logo $HD = FG \cdot CD/FC = (EF \cdot FC/EC) \cdot (CD/FC)$

Logo $HD = EF \cdot CD/EC$

Finalizando, temos que $V = (AB \cdot EC/2) \cdot (EF \cdot CD/EC)/3$
Logo $V = AB \cdot CD \cdot EF/6$
Assim, provamos que o volume de um tetraedro não depende da posição dos segmentos AB e CD nas suas retas-suporte, mas sim, unicamente dos tamanhos dos segmentos e da distância entre as retas-suporte dos mesmos.



118) Considere a seqüência $(a_n)_{n\geq 1}$ dada por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = \dfrac{2+9a_n}{3+9a_n}, \forall n \geq 1$.

Prove que (a_n) converge e calcule o seu limite.

SOLUÇÃO DE ESTILLAC LINS MACIEL BORGES FILHO (BELÉM – PA)

Primeiramente, iremos provar que $a_n > \dfrac{1+\sqrt{3}}{3}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, utilizando indução. De fato:

(1) $a_1 = 1 > \dfrac{1+\sqrt{3}}{3}$

(2) Supondo $a_n > \dfrac{1+\sqrt{3}}{3}$, temos $1+3a_n > 2+\sqrt{3}$. Portanto:

$$a_{n+1} = \frac{2+9a_n}{3+9a_n} = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+3a_n}\right) > 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{3}$$

Em seguida, provaremos que, se $a_n > \dfrac{1+\sqrt{3}}{3}$, temos que $a_{n+1} < a_n$. De fato:

$$a_n > \frac{1+\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 3a_n - 1 > \sqrt{3} \Rightarrow (3a_n - 1)^2 > 3$$

Portanto,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2+9a_n}{3+9a_n} - a_n = \frac{3-(3a_n-1)^2}{3+9a_n} < 0$$

Logo, (a_n) é uma seqüência estritamente decrescente limitada inferiormente por $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$, o que garante sua convergência. Vamos mostrar agora que $\lim a_n = \frac{1+\sqrt{3}}{3}$. Seja $x = \lim a_n = \lim a_{n+1}$. Temos então $x = \lim a_{n+1} = \lim \frac{2+9a_n}{3+9a_n} = \frac{2+9x}{3+9x}$, donde $9x^2 - 6x - 2 = 0$. Como $x \ge 0$, devemos ter $x = \frac{3+\sqrt{27}}{9} = \frac{1+\sqrt{3}}{3}$.

Obs: a solução acima é bastante artificial. Ela é construída já se sabendo de antemão qual o provável limite da seqüência. Este provável limite é obtido facilmente fazendo $a_{n+1} = a_n = x$ e resolvendo a equação $x = \frac{2+9x}{3+9x} \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{3}}{3}$, pois $x \ge 0$.

Continuamos aguardando as soluções dos problemas a seguir:

113) $a_1, a_2, a_3, \ldots$ formam uma seqüência de inteiros positivos menores que 2007 tais que $\frac{a_m + a_n}{a_{m+n}}$ é inteiro, para quaisquer inteiros positivos *m*, *n*.
Prove que a seqüência (a_n) é periódica a partir de um certo ponto.

115) Suponha que *ABC* é um triângulo com lados inteiros *a*, *b* e *c* com $B\widehat{C}A = 60°$ e $mdc(a,b) = mdc(a,c) = mdc(b,c) = 1$. Prove que $c \equiv 1 \pmod 6$.

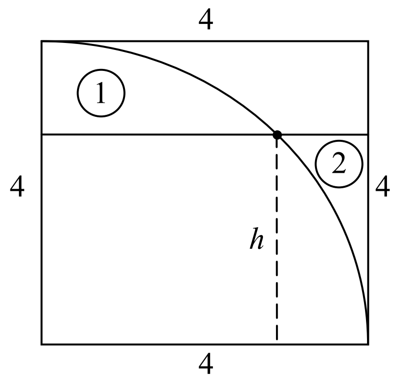
PROBLEMAS PROPOSTOS

Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e sugestões de novos problemas para próximos números.

119. Mostre que não existem inteiros positivos a e b tais que tais que $(36a+b)(36b+a)$ seja uma potência de 2.

120. Sejam a, b, c números reais e soma S_n definida como $S_n = a^n + b^n + c^n$, para qualquer n inteiro não negativo, Sabe-se que $S_1 = 2$, $S_2 = 6$ e $S_3 = 14$, mostre que $\left|S_n^2 - S_{n-1} \cdot S_{n+1}\right| = 8$ para todo inteiro $n > 1$.

121. Na figura abaixo o lado do quadrado vale 4, obter o valor da altura h para que a área da região 1 seja igual a área da região 2.



122. Dado um triângulo ABC tal que $\overline{AB} = \overline{AC} = a + b$ e $\overline{BC} = a$, traça-se uma ceviana partindo de B determinando em $\overline{AC}$ um ponto D tal que $\overline{DA} = a$ e $\overline{DC} = b$. Sabendo que $A\hat{B}D = 10°$, determine os ângulos internos desse triângulo.

123. Determine todas as funções $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ tais que $2f(m^2+n^2)^3 = f(m)^2 f(n) + f(m) f(n)^2$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}^*$ distintos.

Obs. $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$ é o conjunto dos inteiros positivos.

124. Considere a seqüência $(a_n)_{n\geq 1}$ definida por $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$ e $a_n = \frac{a_{n-1}a_{n-3} + a_{n-2}^2}{a_{n-4}}, \forall n \geq 5.$

Prove que a_n é um inteiro positivo, para todo inteiro positivo n.

125. Considere dois naturais $m \geq 2$ e $n \geq 2$, e as seqüências $(a_0, a_1, a_2, ..., a_{mn}), a_i \in \{0,1\}$.

As seqüências de tipo m satisfazem as condições:

- $a_k a_{k+m} = 0$, para todo k;
- Se $a_k a_{k+1} = 1$ então m divide k

As seqüências de tipo n são definidas analogamente. Prove que existem tantas seqüências do tipo m quanto do tipo n.

126. As circunferências $\Gamma_i, 0 \leq i \leq 5,$ são tangentes a uma circunferência Γ nos pontos A_i. Além disso, Γ_i é tangente a Γ_{i+1} para $0 \leq i \leq 5$ e Γ_5 é tangente a Γ_0.

Prove que A_0A_3, A_1A_4, A_2A_5 são concorrentes.

127. Determine todos os inteiros positivos k tais que existem inteiros positivos x, y, z com $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz} = k.$

128. Barango Joe era um sapo de mútiplos talentos que habitava a Terra das Chances Diminutas, localizada no alto de uma montanha.

Após sua maioridade, Barango Joe decidiu tentar a vida no Reino das Grandes Oportunidades, localizado no cume da montanha vizinha.

Para isso, ele atravessaria a extensa ponte de madeira por cima do Desfiladeiro da Morte. Entretanto, a ponte era guardada pela Esfinge Vegas, exímia jogadora que sempre desafiava os viajantes para algum jogo. O viajante vitorioso tinha a passagem franqueada; e o perdedor era lançado ao abismo.

Assim chegando à cabeceira da ponte, Barango Joe foi desafiado a uma partida de "Pachang" jogo que lembra o "Black Jack" ou "Vinte e um", mas é jogado por 2 oponentes da seguinte maneira:

Os jogadores, designados por "banca" e "apostador", utilizam um dado gerador de números aleatórios reais uniformemente distribuídos no intervalo [0,1]

Inicialmente, a banca sorteia um número X. Se não estiver satisfeita com o número obtido, pode descartá-lo e então sortear um novo número. Este procedimento pode ser executado 2 vezes, Isto é, pode haver até 3 sorteios na definição do número X da banca.

Então, o apostador sorteia quantos números forem necessários até que a soma de seus números ultrapasse o número X da banca. Neste momento, se esta soma for inferior a 1, o apostador ganha; caso contrário, perde.

Ou seja, para ganhar, o apostador precisa "chegar mais próximo" de 1 que a banca, sem no entanto "estourar o limite" de 1.

Após explicar as regras do Pachang, a Esfinge Vegas deu uma opção ao sapo:
- Você prefere ser a banca ou o apostador?
O que o Barango Joe deveria responder?

Obs. Utilize lápis, papel, e uma calculadora científica simples.

129. Um coelho está numa rua infinita dividida em quadrados numerados pelos inteiros, e começa no quadrado 0. Se num dado momento ele está no quadrado k, ele escolhe, com probabilidade $\frac{1}{2}$, pular para o quadrado $k + 2$ ou, também com probabilidade $\frac{1}{2}$, pular para o quadrado $k - 1$. Ele continua esse processo indefinidamante. Dado $m \in \mathbb{Z}$, determine a probabilidade de, em algum momento, o coelho pisar no quadrado m.

Problema 119 proposto por Adriano Carneiro, problemas 120 e 121 proposto por Samuel Liló Abdalla, de Sorocaba – SP, problema 122 proposto por Renan Lima Novais, do Rio de Janeiro – RJ, problema 123 proposto por Wilson Carlos da Silva Ramos, de Belém – PA, problemas 124, 125, 126 e 127 propostos por Anderson Torres, de São Paulo – SP, problema 128 proposto por Rogério Ponce da Silva, do Rio de Janeiro – RJ, problema 129 proposto por Nicolau Corção Saldanha e Zoroastro Azambuja Neto, do Rio de Janeiro – RJ.

Agradecemos também o envio das soluções e a colaboração de:

Gelly Whesley	**Fortaleza – CE**
Evandro A. dos Santos	**Campinas – SP**
Davi Lopes Alves de Medeiros	**Fortaleza – CE**
Rafael Alves da Ponte	**Fortaleza – CE**
André Felipe M da Silva	**Rio de Janeiro – RJ**
Carlos Alberto da Silva Victor	**Nilópolis – RJ**

AGENDA OLÍMPICA

XXX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

NÍVEIS 1, 2 e 3
Primeira Fase – Sábado, 14 de junho de 2008
Segunda Fase – Sábado, 13 de setembro de 2008
Terceira Fase – Sábado, 25 de outubro de 2007 (níveis 1, 2 e 3)
Domingo, 26 de outubro de 2008 (níveis 2 e 3 - segundo dia de prova).

NÍVEL UNIVERSITÁRIO
Primeira Fase – Sábado, 13 de setembro de 2008
Segunda Fase – Sábado, 25 e Domingo, 26 de outubro de 2008

♦

XIV OLIMPÍADA DE MAIO
10 de maio de 2008

♦

XIX OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL
Temuco – Chile
18 a 23 de junho de 2008

♦

XLIX OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA
10 a 22 de julho de 2008
Madri – Espanha

♦

XIV OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
25 a 31 de julho de 2008
Blagoevgrad, Bulgária

♦

XXIII OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA
18 a 28 de setembro de 2008
Salvador, Bahia – Brasil

♦

XI OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA

COORDENADORES REGIONAIS