CONTEÚDO

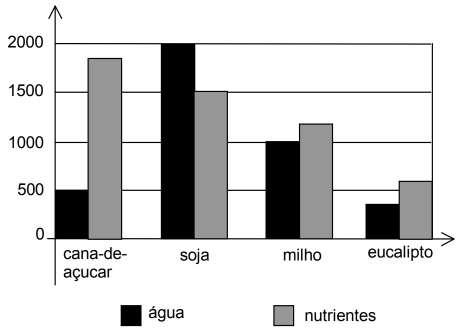
XXVIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e soluções da Primeira Fase

PROBLEMAS – NÍVEL 1

1. Em um tanque há 4000 bolinhas de pingue-pongue. Um menino começou a retirar as bolinhas, uma por uma, com velocidade constante, quando eram 10h. Após 6 horas, havia no tanque 3520 bolinhas. Se o menino continuasse no mesmo ritmo, quando o tanque ficaria com 2000 bolinhas?
A) às 11h do dia seguinte
B) às 23h do mesmo dia
C) às 4h do dia seguinte
D) às 7h do dia seguinte
E) às 9h do dia seguinte

2. O gráfico a seguir apresenta informações sobre o impacto causado por 4 tipos de monocultura ao solo. Para cada tipo de monocultura, o gráfico mostra a quantidade de água, em litros, e a de nutrientes (nitrogênio, fósforo e potássio), em quilogramas, consumidos por hectare para a produção de 1kg de grãos de soja ou 1kg de milho ou 1kg de açúcar ou 1kg de madeira de eucalipto. Sobre essas monoculturas, pode-se afirmar que:



A) O eucalipto precisa de cerca de 1/3 da massa de nutrientes necessários de que a cana-de-açúcar precisa para se desenvolver.
B) O eucalipto é a que mais seca e empobrece o solo, causando desequilíbrio ambiental.
C) A soja é cultura que mais precisa de nutrientes.
D) O milho precisa do dobro do volume de água de que precisa a soja.
E) A cana-de-açúcar é a que necessita do ambiente mais úmido para crescer.

3. Um time de futebol ganhou 8 jogos mais do que perdeu e empatou 3 jogos menos do que ganhou, em 31 partidas jogadas. Quantas partidas o time venceu?
A) 11 **B)** 14 **C)** 15 **D)** 17 **E)** 23

4. Efetuando as operações indicadas na expressão

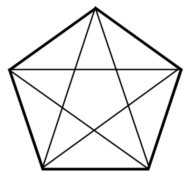
$$\left(\frac{2^{2007}+2^{2005}}{2^{2006}+2^{2004}}\right)\times 2006$$

obtemos um número de quatro algarismos. Qual é a soma dos algarismos desse número?
A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

5. Quantos números de três algarismos ímpares distintos são divisíveis por 3?
A) 18 **B)** 24 **C)** 28 **D)** 36 **E)** 48

6. Uma empresa de telefonia celular oferece planos mensais de 60 minutos a um custo mensal de R$ 52,00, ou seja, você pode falar durante 60 minutos no seu telefone celular e paga por isso exatamente R$ 52,00. Para o excedente, é cobrada uma tarifa de R$ 1,20 cada minuto. A mesma tarifa por minuto excedente é cobrada no plano de 100 minutos, oferecido a um custo mensal de R$ 87,00. Um usuário optou pelo plano de 60 minutos e no primeiro mês ele falou durante 140 minutos. Se ele tivesse optado pelo plano de 100 minutos, quantos reais ele teria economizado?
A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

7. Quantos triângulos isósceles têm como vértices os vértices do pentágono regular desenhado ao lado?
A) 5 **B)** 10 **C)** 15 **D)** 20
E) 25



8. Dos números a seguir, qual é o único que pode ser escrito como produto de quatro naturais consecutivos?
A) 712 **B)** 548 **C)** 1026 **D)** 1456 **E)** 1680

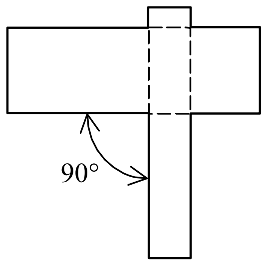
9. Ao redor de um grande lago existe uma ciclovia de 45 quilômetros de comprimento, na qual sempre se retorna ao ponto de partida se for percorrida num único sentido. Dois amigos partem de um mesmo ponto com velocidades constantes de 20 km por hora e 25 km por hora, respectivamente, em sentidos opostos. Quando se encontram pela primeira vez, o que estava correndo a 20 km por hora aumenta para 25 km por hora e o que estava a 25 km por hora diminui para 20 km por hora. Quanto tempo o amigo que chegar primeiro ao ponto de partida deverá esperar pelo outro?

A) nada **B)** 10 min **C)** 12 min **D)** 15 min **E)** 18 min

10. Num relógio digital, as horas são exibidas por meio de quatro algarismos. Por exemplo, ao mostrar 00:00 sabemos que é meia-noite e ao mostrar 23:59 sabemos que falta um minuto para meia-noite. Quantas vezes por dia os quatro algarismos mostrados são todos pares?

A) 60 **B)** 90 **C)** 105 **D)** 180 **E)** 240

11. São dadas duas tiras retangulares de papel com 20 cm de comprimento, uma com 5 cm de largura e outra com 11 cm de largura. Uma delas foi colada sobre a outra, perpendicularmente, de modo a formar a figura ilustrada ao lado. Qual é o perímetro dessa figura, em centímetros?

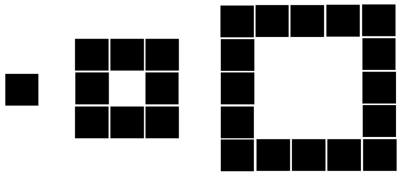


A) 50 **B)** 60 **C)** 80 **D)** 1
E) 120

12. Seis amigos planejam viajar e decidem fazê-lo em duplas, cada uma utilizando um meio de transporte diferente, dentre os seguintes: avião, trem e carro. Alexandre acompanha Bento. André viaja de avião. Carlos não acompanha Dário nem faz uso do avião. Tomás não anda de trem. Qual das afirmações a seguir é correta?

A) Bento vai de carro e Carlos vai de avião.
B) Dário vai de trem e André vai de carro.
C) Tomás vai de trem e Bento vai de avião.
D) Alexandre vai de trem e Tomás vai de carro.
E) André vai de trem e Alexandre vai de carro.

13. Usando pastilhas de cerâmica preta na forma de quadradinhos foi composta uma decoração numa parede, mostrada parcialmente abaixo:



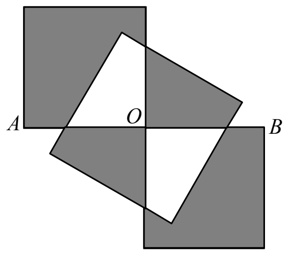
Quantas pastilhas foram empregadas em toda a decoração considerando-se que na última peça montada foram utilizadas 40 pastilhas?
A) 60 **B)** 68 **C)** 81 **D)** 100 **E)** 121

14. Sara foi escrevendo nas casas de um tabuleiro 95 por 95 os múltiplos positivos de 4, em ordem crescente, conforme a figura a seguir.

4	8	12	16	20	…	376	380
760	756	752	748	744	…	388	384
764	→	→	→	→	…	→	→
←	←	←	←	←	…	←	←
⋮							
							U

O número que Sara escreveu onde se encontra a letra U é:
A) 35192 **B)** 35196 **C)** 36100 **D)** 36104 **E)** 36108

15. O desenho à direita representa dois quadrados menores congruentes de lado 20 e um quadrado maior. O vértice O é o único ponto comum aos dois quadrados menores e é o centro do quadrado maior. Os vértices A, O e B estão alinhados e a área da região do quadrado maior não pintada é igual a 36% da área de toda a região pintada. Qual é a área do quadrado maior?

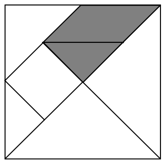


A) 420 **B)** 496 **C)** 576 **D)** 640
E) 900

16. Um certo número inteiro positivo, quando dividido por 15 dá resto 7. Qual é a soma dos restos das divisões desse número por 3 e por 5?
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

17. No fim de 1994, Neto tinha a metade da idade de sua avó. A soma dos anos de nascimento dos dois é 3844. Quantos anos Neto completa em 2006?
A) 55 **B)** 56 **C)** 60 **D)** 62 **E)** 108

18. A figura a seguir representa um Tangram, quebra-cabeças chinês formado por 5 triângulos, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Sabendo que a área do Tangram a seguir é 64 cm^2, qual é a área, em cm^2, da região sombreada?



A) 7,6 **B)** 8 **C)** 10,6 **D)** 12 **E)** 21,3

19. As permutações da palavra BRASIL foram listadas em ordem alfabética, como se fossem palavras de seis letras em um dicionário. A 361ª palavra nessa lista é:
A) BRISAL **B)** SIRBAL **C)** RASBIL **D)** SABRIL **E)** LABIRS

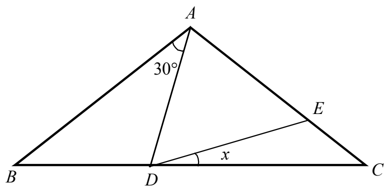
20. No planeta POT o número de horas por dia é igual a número de dias por semana, que é igual ao número de semanas por mês, que é igual ao número de meses por ano. Sabendo que em POT há 4096 horas por ano, quantas semanas há num mês?
A) 8 **B)** 12 **C)** 64 **D)** 128 **E)** 256

PROBLEMAS – NÍVEL 2

1. Veja o problema No. 4 do nível 1.
2. Veja o problema No. 11 do nível 1.

3. Se um número de dois dígitos é 5 vezes a soma de seus dígitos, então o número formado pela troca dos dígitos é a soma dos dígitos multiplicada por:
A) 3 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 4 **E)** 7

4. Veja o problema No. 9 do nível 1.
5. Na figura, $AB = AC$, $AE = AD$ e o ângulo BAD mede 30^o. Então o ângulo x mede:

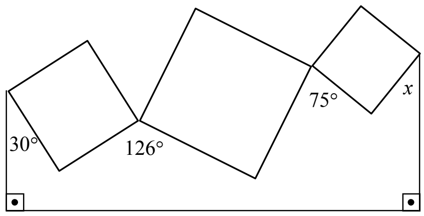


A) 10^o **B)** 20^o **C)** 15^o **D)** 30^o **E)** 5^o

6. A soma de três números naturais consecutivos é igual ao produto desses três números. A soma dos quadrados desses números é:
A) 14 **B)** 15 **C)** 18 **D)** 24 **E)** 36

7. Veja o problema No. 17 do nível 1.

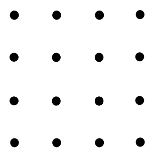
8. Três quadrados são colados pelos seus vértices entre si e a dois bastões verticais, como mostra a figura.



A medida do ângulo x é:
A) 39º **B)** 41º **C)** 43º **D)** 44º **E)** 46º

9. Sejam a, b e c inteiros e positivos. Entre as opções abaixo, a expressão que **não** pode representar o número 24 é:
A) ab^3 **B)** a^2b^3 **C)** a^cb^c **D)** ab^2c^3 **E)** $a^bb^cc^a$

10. O número de quadrados que podem ser construídos com vértices nos pontos da figura abaixo é:



A) 18 **B)** 14 **C)** 9 **D)** 20 **E)** 10

11. Veja o problema No. 12 do nível 1.

13. O máximo divisor comum de todos os termos da seqüência $a_n = n^3 - n$, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$ é:
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

14. Samuel possui três irmãos a mais do que irmãs. O número de irmãos de Samila, irmã de Samuel, é igual ao dobro do número de suas irmãs. O número de filhos (homens e mulheres) que possui o pai de Samuel e Samila é:
A) 10 **B)** 13 **C)** 16 **D)** 17 **E)** 20

15. Veja o problema No. 18 do nível 1.

16. João escreveu todos os números com menos de 4 dígitos usando apenas os algarismos 1 e 2 numa folha de papel e depois somou todos eles. O valor obtido foi:
A) 2314 **B)** 3000 **C)** 1401 **D)** 2316 **E)** 1716

17. Sejam a, b e c números reais positivos cuja soma é 1. Se a, b e c são as medidas dos lados de um triângulo, podemos concluir que

A) $0 < |a-b| < \frac{1}{2}$ e $0 < |b-c| < \frac{1}{2}$ e $0 < |c-a| < \frac{1}{2}$

B) $a < \frac{1}{2}$ e $b < \frac{1}{2}$ e $c < \frac{1}{2}$

C) $a+b < \frac{1}{2}$ e $b+c < \frac{1}{2}$ e $c+a < \frac{1}{2}$

D) $a \le \frac{1}{3}$ e $b \le \frac{1}{3}$ e $c \le \frac{1}{3}$

E) $a \ge \frac{1}{3}$ e $b \ge \frac{1}{3}$ e $c \ge \frac{1}{3}$

18. O número de soluções inteiras e positivas do sistema abaixo é:

$$\begin{cases} a+b=c^2 \\ a+b+c=30 \end{cases}$$

A) 45 **B)** 23 **C)** 24 **D)** 25 **E)** 72

19. Um número com dois dígitos distintos e não nulos é chamado de bonito se o dígito das dezenas é maior do que o dígito das unidades. A quantidade de números bonitos é:
A) 72 **B)** 36 **C)** 35 **D)** 64 **E)** 56

20. O professor Piraldo aplicou uma prova para seus cinco alunos e, após corrigi-las, digitou as notas em uma planilha eletrônica que calcula automaticamente a média das notas à medida que elas são digitadas. Piraldo notou que após digitar cada nota a média calculada pela planilha era um número inteiro. Se as notas dos cinco estudantes são, em ordem crescente, 71, 76, 80, 82 e 91, a última nota que Piraldo digitou foi:

A) 71 **B)** 76 **C)** 80 **D)** 82 **E)** 91

21. Simplificando a expressão:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\,.\,\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\,.\,\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\,.\,\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

obtemos:

A) $\sqrt{2}$ **B)** $\sqrt{3}$ **C)** 1 **D)** $2+\sqrt{2}$ **E)** $2+\sqrt{3}$

22. Ludmilson percebeu que para numerar as páginas de um livro, consecutivamente, a partir da página 2, foram usados 2006 algarismos. O número de páginas do livro de Ludmilson é:

A)701 **B)** 702 **C)** 703 **D)** 704 **E)** 705

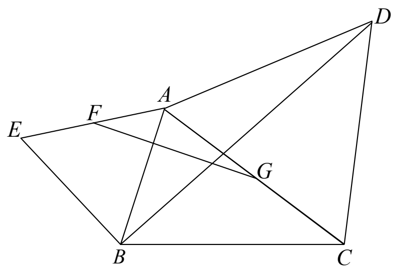
23. Sejam x, y, z números reais não nulos tais que $x+y+z=0$. O valor de

$\left(x^2y^2z^2\right)\left(\dfrac{1}{x^3y^3}+\dfrac{1}{x^3z^3}+\dfrac{1}{y^3z^3}\right)$ é:

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

24. Veja o problema No. 10 do nível 1.

25. Na figura a seguir, *ABC* é um triângulo qualquer e *ACD* e *AEB* são triângulos eqüiláteros. Se *F* e *G* são os pontos médios de *EA* e *AC*, respectivamente, a razão $\dfrac{BD}{FG}$ é:



A) $\dfrac{1}{2}$ **B)** 1

C) $\dfrac{3}{2}$ **D)** 2

E) Depende das medidas dos lados de *ABC*.

PROBLEMAS – NÍVEL 3

1. Veja o problema No. 17 do nível 1.

2. Quantos resultados diferentes podemos obter somando pares de números distintos do conjunto $\{1,2,\ldots,2006\}$?

A) 2006 **B)** 2007 **C)** 4009 **D)** 4011 **E)** 4012

3. Uma colônia de amebas tem inicialmente uma ameba amarela e uma ameba vermelha. Todo dia, uma única ameba se divide em duas amebas idênticas. Cada ameba na colônia tem a mesma probabilidade de se dividir, não importando sua idade ou cor. Qual é a probabilidade de que, após 2006 dias, a colônia tenha exatamente uma ameba amarela?

A) $\frac{1}{2^{2006}}$ **B)** $\frac{1}{2006}$ **C)** $\frac{1}{2007}$ **D)** $\frac{1}{2006\cdot 2007}$ **E)** $\frac{2006}{2007}$

4. Veja o problema No. 8 do nível 2.

5. Os dois números reais a e b são não nulos e satisfazem $ab = a - b$. Assinale a alternativa que exibe um dos possíveis valores de $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-ab$.

A) -2 **B)** $-\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{1}{3}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** 2

6. De quantas maneiras podemos colocar, em cada espaço abaixo, um entre os algarismos 4, 5, 6, 7, 8, 9, de modo que todos os seis algarismos apareçam e formem, em cada membro, números de dois algarismos que satisfazem a dupla desigualdade?

$$\_\,\_ > \_\,\_ > \_\,\_$$

A) 100 **B)** 120 **C)** 240 **D)** 480 **E)** 720

7. Que expressão não pode representar o número 24 para valores inteiros positivos convenientes de a, b e c?

A) ab^3 **B)** a^2b^3 **C)** a^cb^c **D)** ab^2c^3 **E)** $a^bb^cc^a$

8. Qual dos valores abaixo de x é tal que $2x^2+2x+19$ não é um número primo?

A) 50 **B)** 37 **C)** 9 **D)** 5 **E)** 1

9. Veja o problema No. 17 do nível 2.

10. Uma seqüência tem 9 números reais, sendo o primeiro 20 e o último 6. Cada termo da seqüência, a partir do terceiro, é a média aritmética de todos os anteriores. Qual é o segundo termo da seqüência?

A) –8 **B)** 0 **C)** 4 **D)** 14 **E)** 2006

11. Quantos ternos de números reais *x*, *y*, *z* satisfazem o sistema abaixo?

$$\left|\begin{array}{l} x(x+y+z)=2005 \\ y(x+y+z)=2006 \\ z(x+y+z)=2007 \end{array}\right.$$

A) Nenhum **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 2006

12. Arnaldo tem vários quadrados azuis 1×1, vários quadrados amarelos 2×2 e vários quadrados verdes 3×3 e quer montar um quadrado maior no qual apareçam as três cores. Qual é a menor quantidade de quadrados que ele poderá utilizar ao todo?

A) 3 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

13. Sejam *x* e *y* números racionais. Sabendo que $\dfrac{x-5\sqrt{2006}}{4-y\sqrt{2006}}$ também é um número racional, quanto vale o produto *xy*?

A) 20

B) Pode ser igual a 20, mas também pode assumir outros valores.

C) 1

D) 6

E) Não se pode determinar.

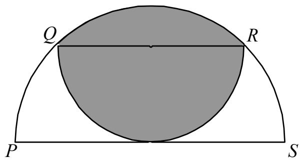
14. Veja o problema No. 20 do nível 2.

15. Veja o problema No. 25 do nível 2.

16. O inteiro positivo *x* é múltiplo de 2006 e $\sqrt{x}$ está entre 2005 e 2007. Qual é o número de possíveis valores de *x*?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

17. Na figura temos dois semicírculos de diâmetros *PS*, de medida 4, e *QR*, paralelo a *PS*. Além disso, o semicírculo menor é tangente a *PS* em *O*. Qual é a área destacada?



A) $2\pi - 2$
B) 3π
C) π
D) 4
E) $2\pi - 4$

18. Iniciando com o par (2048, 1024), podemos aplicar quantas vezes quisermos a operação que transforma o par (a, b) no par $\left(\frac{3a+b}{4}, \frac{a+3b}{4}\right)$, então, dentre os seguintes pares:

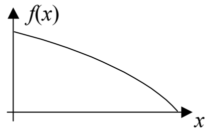
1) (1664, 1408)
2) (1540, 1532)
3) (1792, 1282)
4) (1537, 1535)
5) (1546, 1526)

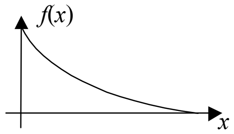
A) Todos podem ser obtidos.
B) Apenas o par 4 não pode ser obtido.
C) Apenas o par 3 não pode ser obtido.
D) Existem exatamente dois pares que não podem ser obtidos.
E) Existem mais de dois pares que não podem ser obtidos.

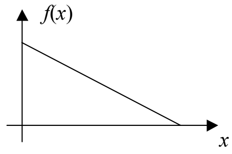
19. Num tabuleiro retangular de 13 linhas e 17 colunas colocamos números em cada casinha da seguinte maneira: primeiro, numeramos as casinhas da primeira linha, da esquerda para a direita, com os números 1, 2, 3, …, 17, nessa ordem; depois numeramos a segunda linha, também da esquerda para a direita, com os números de 18 a 34, e assim por diante. Após preenchermos todo o tabuleiro, colocamos em cada casinha um segundo número, numerando as casinhas da primeira coluna, de cima para baixo, com os números 1, 2, 3, …, 13, nessa ordem, depois numeramos a segunda coluna, também de cima da baixo, com os números de 14 a 26, e assim por diante. Deste modo, cada casinha tem dois números. Quantas casinhas têm dois números iguais?

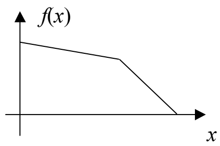
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

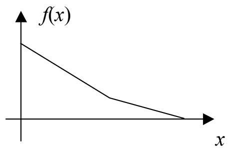
20. Altino está encostado num muro bem alto, durante a noite. A rua onde Altino está é iluminada por uma lâmpada no topo de um poste de 4 metros de altura, a 10 metros de distância do muro. Altino, um rapaz de 2 metros de altura, anda em direção ao muro. Seja $f(x)$ a altura, em metros, da sombra de Altino produzida pela lâmpada no muro quando Altino está a uma distância de x metros do muro. Qual alternativa representa melhor o gráfico de $f(x)$?

A)


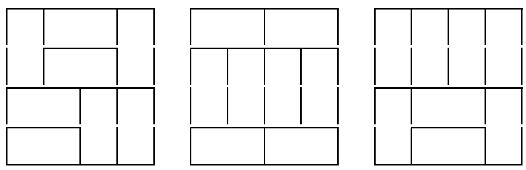
B)


C)


D)


E)


21. O piso de um quarto tem forma de um quadrado de lado 4 m. De quantas maneiras podemos cobrir totalmente o quarto com oito tapetes iguais de dimensões 1 m e 2 m? Mostramos abaixo três maneiras de fazê-lo:



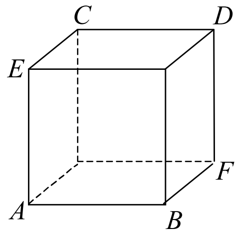
A) 27 **B)** 30 **C)** 34 **D)** 36 **E)** 52

22. Dois pontos A e B de um plano α estão a 8 unidades de distância. Quantas retas do plano α estão a 2 unidades de A e 3 unidades de B?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

23. Considere os 2161 produtos $0\cdot 2160$, $1\cdot 2159$, $2\cdot 2158$, ..., $2160\cdot 0$. Quantos deles são múltiplos de 2160?
A) 2 **B)** 3 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 2161

24. Qual é o menor valor que a expressão
$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(y-x)^2+4}+\sqrt{(z-y)^2+1}+\sqrt{(10-z)^2+9}$ pode assumir, sendo x, y e z reais?
A) 7 **B)** 13 **C)** $4+\sqrt{109}$ **D)** $3+\sqrt{2}+\sqrt{90}$ **E)** $\sqrt{149}$

25. Um cubo de aresta 1 é cortado em quatro regiões por dois planos: um deles contém as arestas AB e CD e o outro contém as arestas AE e DF. Qual é o volume da(s) maior(es) das quatro regiões?



A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$

D) $\frac{3}{8}$ **E)** $\frac{1}{2}$

GABARITO

NÍVEL 1 (5ª. e 6ª. Séries)

1) A	6) D	11) C	16) B
2) A	7) B	12) D	17) C
3) B	8) E	13) E	18) D
4) D	9) A	14) C	19) E
5) B	10) C	15) C	20) A

NÍVEL 2 (7ª. e 8ª. Séries)

1) D	6) A	11) D	16) C	21) C
2) C	7) C	12) C	17) B	22) E
3) C	8) A	13) E	18) C	23) D
4) A	9) B	14) C	19) B	24) C
5) C	10) D	15) D	20) C	25) D

NÍVEL 3 (Ensino Médio)

1) C	6) B	11) C	16) D	21) D
2) C	7) B	12) D	17) A	22) D
3) C	8) B	13) A	18) D	23) D
4) A	9) B	14) C	19) D	24) E
5) E	10) A	15) D	20) A	25) B

XXVIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e Soluções da Segunda Fase

PROBLEMAS – Nível 1 PARTE A
(Cada problema vale 5 pontos)

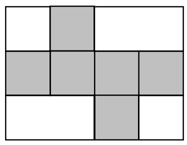
01. Qual é a soma dos algarismos do número $\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{2^2}+\frac{2^4}{2^3}+\cdots+\frac{2^{2005}}{2^{2004}}+\frac{2^{2006}}{2^{2005}}$?

02. A massa de gordura de uma certa pessoa corresponde a 20% de sua massa total. Essa pessoa, pesando 100 kg, fez um regime e perdeu 40% de sua gordura, mantendo os demais índices. Quantos quilogramas ela pesava ao final do regime?

03. Quantos os números de dois algarismos têm a soma desses algarismos igual a um quadrado perfeito? Lembre-se que, por exemplo, 09 é um número de um algarismo.

04. Os números de 1 a 99 são escritos lado a lado: 123456789101112...9899. Então aplicamos a seguinte operação: apagamos os algarismos que aparecem nas posições pares, obtendo 13579012...89. Repetindo essa operação mais 4 vezes, quantos algarismos irão sobrar?

05. Com a parte destacada da folha retangular ao lado, pode-se montar um cubo. Se a área da folha é $300cm^2$, qual é o volume desse cubo, em cm^3?



06. Na tabela a seguir, escreva os números de 1 a 9 em cada coluna, de modo que a soma dos números escritos nas 9 linhas seja a mesma, igual a Y. Seja X a soma dos números de cada coluna. Calcule X + Y.

			Y
			Y
			Y
			Y
			Y
			Y
			Y
			Y
			Y
X	X	X	

PROBLEMAS – Nível 1 PARTE B

(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1

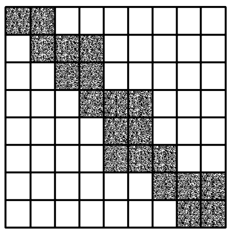
Jade escreveu todos os números de 3 algarismos em cartões amarelos, um por cartão e escreveu todos os números de 4 algarismos em cartões azuis, um por cartão. Os cartões são todos do mesmo tamanho.

a) Ao todo, quantos cartões foram utilizados? Lembre-se que, por exemplo, 037 é um número de dois algarismos, bem como 0853 é um número de três algarismos.

b) Todos os cartões são então colocados numa mesma urna e embaralhados. Depois Jade retira os cartões, um a um, sem olhar o que está pegando. Quantos cartões Jade deverá retirar para ter certeza de que há dois cartões azuis entre os retirados?

PROBLEMA 2

No quadriculado a seguir, cada quadradinho tem 1 cm^2 de área.



a) Qual é a área e o perímetro da figura formada pelos quadradinhos pintados de cinza?

b) Pintando outros quadradinhos, podemos aumentar a área dessa figura, sem mudar o seu perímetro. Qual é o valor máximo da área que podemos obter dessa maneira?

PROBLEMA 3

Esmeralda inventou uma brincadeira. Digitou alguns algarismos na primeira linha de uma folha. Depois, na segunda linha, fez a descrição dos algarismos digitados da seguinte maneira: ela apresentou as quantidades de cada um dos que apareceram, em ordem crescente de algarismo. Por exemplo, após digitar 21035662112, ela digitou 1**0**3**1**3**2**1**3**1**5**2**6**, pois em 21035662112 existe um algarismo 0, três algarismos 1, três algarismos 2, um algarismo 3, um algarismo 5 e dois algarismos 6.

a) Ela começou uma nova folha com 1. Fez, então, sua descrição, ou seja, digitou 11 na segunda linha. Depois, descreveu 11, ou seja, digitou 21 na terceira linha, e assim continuou. O que ela digitou na 10^a linha da folha?

b) Esmeralda gostou tanto de fazer isso que decidiu preencher várias folhas com essa brincadeira, começando com 01 na primeira linha da primeira folha. Quais são os dois primeiros algarismos da esquerda do que ela digitou na 2006ª linha?

PROBLEMAS – Nível 2 PARTE A
(Cada problema vale 4 pontos)

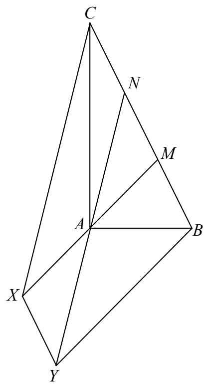
01. Esmeralda posicionou todos os números naturais de 1 a 2006 no seguinte arranjo em forma de pirâmide:

				21				
			20	13	22			
		19	12	7	14	23		
	18	11	6	3	8	15	24	
17	10	5	2	1	4	9	16	25

Em qual andar se encontrará o número 2006? (Por exemplo: o número 1 está no primeiro andar, o 6 no segundo andar e o 23 no terceiro).

02. A soma dos quadrados de três inteiros consecutivos é igual a 302. Qual é a soma desses números?

03. Seja ABC um triângulo retângulo em A. Considere M e N pontos sobre a hipotenusa BC tais que $CN = NM = MB$. Os pontos X e Y são tais que $XA = AM$ e $YA = AN$. Determine a área do quadrilátero $XYBC$, sabendo que o triângulo ABC tem área 12 cm^2.



04. Um tabuleiro de xadrez 8 × 8 será decomposto em retângulos que satisfazem simultaneamente as seguintes propriedades:

(i) cada retângulo possui um número inteiro de casas;

(ii) os diversos retângulos possuem números de casas distintos entre si;

(iii) cada retângulo possui a mesma quantidade de casas brancas e pretas.

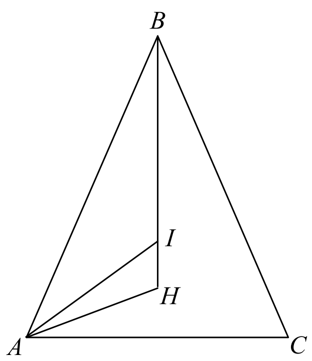
Qual é o maior número de retângulos que pode ter a decomposição do tabuleiro?

05. A partir de uma terna ordenada (a, b, c), obtemos uma seqüência de ternas através de sucessivas transformações do tipo:
$(a, b, c) \to (a^2 \cdot b, a - b + c, b - c)$.
Por exemplo, a partir da terna (1, 2, 3), obtemos a seguinte seqüência:
$(1, 2, 3) \to (2, 2, -1) \to (8, -1, 3) \to (-64, 12, -4)$ ...
Se começarmos com (1, 1, 1) como a primeira terna ordenada de uma seqüência, qual será a soma dos três termos da terna que ocupará a 2006ª posição nesta seqüência?

PROBLEMAS – Nível 2 PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1
Na Rua do Gengibre, existem n casas numeradas de 1 a n ($n \in \mathbb{N}$). As casas de numeração par ficam todas de um mesmo lado da rua, com as casas de numeração ímpar do lado oposto. O prefeito Ludmilson Amottarim resolveu derrubar alguma(s) casa(s) a fim de que as somas dos números das casas fossem iguais dos dois lados da rua. Para atingir o seu objetivo, qual é o número mínimo de casas que o prefeito deve derrubar se:
a) a rua tem n = 15 casas?
b) a rua tem n = 16 casas?
c) a rua tem n = 2006 casas?

PROBLEMA 2 No triângulo ABC isósceles abaixo, I é o encontro das bissetrizes e H é o encontro das alturas. Sabe-se que $\angle HAI = \angle HBC = \alpha$. Determine o ângulo α.



PROBLEMA 3

Sejam a e b números reais distintos tais que $a^2 = 6b + 5ab$ e $b^2 = 6a + 5ab$.

a) Determine o valor de $a + b$.

b) Determine o valor de ab.

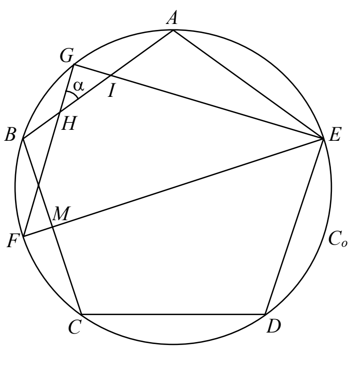
PROBLEMA 4

Todos os inteiros de 1 a 2006 são escritos num quadro. Então, cada um destes números é substituído pela soma de seus algarismos. Estas substituições são realizadas repetidas vezes até que tenhamos 2006 números com 1 algarismo cada. Dos números que restaram no quadro, qual aparece mais vezes: o 1 ou o 2?

PROBLEMAS – Nível 3 PARTE A
(Cada problema vale 4 pontos)

01. O par ordenado (83; 89) é chamado de *par centenário* porque 83 + 8 + 9 = 89 + 8 + 3 = 100, isto é, a soma de cada número com os dígitos do outro número é 100. Quantos são os pares centenários?

02. Na figura a seguir, o pentágono regular $ABCDE$ e o triângulo EFG estão inscritos na circunferência C_o, e M é ponto médio de BC. Para qual valor de α, em graus, os triângulos EFG e HIG são semelhantes?



03. Esmeralda e Jade correm em sentidos opostos em uma pista circular, começando em pontos diametralmente opostos. O primeiro cruzamento entre elas ocorre depois de Esmeralda ter percorrido 200 metros. O segundo cruzamento ocorre após Jade ter percorrido 350 metros entre o primeiro e o segundo ponto de encontro. As velocidades das moças são constantes. Qual é o tamanho da pista, em metros?

04. Qual a maior quantidade de lados que pode ter uma secção determinada por um plano em um octaedro regular?

05. Ao jogarmos uma certa quantidade de dados cúbicos com faces numeradas de 1 a 6, a probabilidade de obtermos soma dos pontos 2006 é igual à probabilidade de obtermos soma dos pontos *S*. Qual é o menor valor possível de *S*?

PROBLEMAS – Nível 3 PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1
Seja n inteiro positivo. De quantas maneiras podemos distribuir $n + 1$ brinquedos distintos para n crianças de modo que toda criança receba pelo menos um brinquedo?

PROBLEMA 2
Encontre todos os pares de inteiros positivos $(a; b)$ tais que $(a + 1)(b + 1)$ é múltiplo de $ab + 1$.

PROBLEMA 3
No triângulo ABC tem-se $AB = 4$, $AC = 3$ e o ângulo $B\hat{A}C$ mede 60^o. Seja D o ponto de intersecção entre a reta perpendicular a AB passando por B e a reta perpendicular a AC passando por C. Determine a distância entre os ortocentros dos triângulos ABC e BCD.

PROBLEMA 4
A seqüência F_n é definida por $F_1 = F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para $n \geq 3$. Encontre todos os pares de inteiros positivos (m, n) tais que $F_m \cdot F_n = mn$.

Soluções Nível 1 – Segunda Fase – Parte A

Problema	01	02	03	04	05	06
Resposta	5	92	17	6	125	60

01. $\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{2^2}+\frac{2^4}{2^3}+\cdots+\frac{2^{2005}}{2^{2004}}+\frac{2^{2006}}{2^{2005}}=\underbrace{2+2+2+\cdots+2+2}_{\text{2005 parcelas iguais}}=2005\cdot 2=4010$.

A soma dos algarismos desse número é $4+0+1+0=5$.

02. Como 20% da massa total dessa pessoa correspondem à massa de gordura, ela tem $20\% \cdot 100 = 20\,\text{kg}$ de gordura. Ela perdeu 40% da sua gordura, ou seja, perdeu $40\% \cdot 20 = 8\,\text{kg}$ de gordura, e como manteve os demais índices, ela pesava ao final do regime $100 - 8 = 92$ kg.

03. A soma dos algarismos dos números de dois algarismos varia de 1 a 18. Dessas somas, as que são quadrados perfeitos são 1, 4, 9 e 16. Temos então

- Soma 1: número 10
- Soma 4: números 13, 22, 31 e 40
- Soma 9: números 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81 e 90
- Soma 16: números 79, 88 e 97

Portanto, nas condições propostas, há 17 números.

04. A quantidade inicial de algarismos é $9 + 2 \times 90 = 189$, dos quais 94 aparecem nas posições pares e 95 nas posições ímpares. Apagados os algarismos que aparecem nas posições pares, sobram 95 algarismos; desses, 47 estão nas posições pares e 48 nas posições ímpares. Repetindo a operação, restam 48 algarismos, sendo 24 algarismos em posições pares e 24 em posições ímpares. Na terceira aplicação da operação restam 12 algarismos e, na quarta, sobram 6 algarismos.

05. Como a área da folha é 300cm^2, cada quadrado destacado tem área $\frac{300}{12} = 25\,\text{cm}^2$ e, portanto, lado medindo 5cm. Logo o volume desse cubo é $5^3 = 125\ \text{cm}^3$.

06. A soma dos 27 números escritos na tabela é igual a 3 vezes X e a 9 vezes o Y. Como X é a soma dos números de cada coluna, temos $X = 1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = 45$. Portanto $3 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 9) = 9 \cdot Y \Leftrightarrow 3 \cdot 45 = 9 \cdot Y \Leftrightarrow Y = 15$
Logo $X + Y = 45 + 15 = 60$. O desenho ao lado mostra uma forma de escrever os números na tabela.

1	5	9	Y
2	6	7	Y
3	4	8	Y
4	9	2	Y
5	7	3	Y
6	8	1	Y
7	2	6	Y
8	3	4	Y
9	1	5	Y
X	X	X	

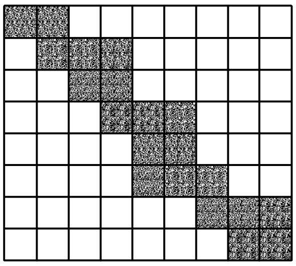
Soluções Nível 1 – Segunda Fase – Parte B

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

a) Há $999 - 100 + 1 = 900$ números de três algarismos, escritos em cartões amarelos, e $9999 - 1000 + 1 = 9000$ números de quatro algarismos, escritos em cartões azuis. Ao todo, foram utilizados $900 + 9000 = 9900$ cartões.
b) Como existe a possibilidade de serem retirados todos os cartões amarelos antes de aparecer algum azul, para Jade ter certeza de que há dois cartões azuis entre os

retirados ela deverá retirar $900 + 2 = 902$ cartões.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:
Como cada quadradinho tem 1 cm^2 de área, o lado de cada um mede 1 cm.



a) Há 20 quadradinhos pintados de cinza. Logo a área da figura formada é $20 \cdot 1\text{ cm}^2 = 20\text{ cm}^2$ e como há 8 segmentos verticais à esquerda e 8 à direita além de 9 segmentos horizontais pela parte de cima e 9 pela debaixo, o perímetro, que é a soma das medidas de todos os lados, é $2 \cdot 8 + 2 \cdot 9 = 16 + 18 = 34\text{ cm}$.
b) O quadriculado inteiro é um retângulo de lados 8 cm e 9 cm, e portanto de perímetro $2 \cdot 8 + 2 \cdot 9 = 16 + 18 = 34\text{ cm}$. Deste modo, o valor máximo da área que podemos obter é quando a figura for igual a todo o quadriculado e, assim, a área será $8 \cdot 9 = 72\text{ cm}^2$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:
a) Ela escreveu em cada uma das 9 primeiras linhas, na seguinte ordem, 1, 11, 21, 1112, 3112, 211213, 312213, 212223 e 114213. Logo na 10ª. linha ela escreveu 31121314.
b) Esmeralda escreveu em cada uma das primeiras linhas, na seguinte ordem, 01, 1011, 1031, 102113, 10311213, 10411223, 1031221314, 1041222314, 1031321324, 1031223314, 1031223314,..., e percebeu que, a partir da 10ª. linha, o número 1031223314 começa a repetir.

Portanto os dois primeiros algarismos da esquerda do número que ela digitou na 2006ª. linha serão 1e 0.

Soluções Nível 2 – Segunda Fase – Parte A

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**
Resposta	20	30 ou – 30 ou $\pm$ 30	32	07	00

01. Os números da coluna do meio podem ser dados por: 1 + 2 + 4 + 6 + 8 +...+ $2n = n^2 + n + 1$. Dessa forma o número do topo é: $44^2 + 44 + 1 = 1981$. Como 1981 está no 45° andar, e 2006 –1981 = 25, 2006 deve estar no 20° andar.

02. Podemos representar os três inteiros consecutivos por $n-1,\ n$ e $n+1$.
Temos

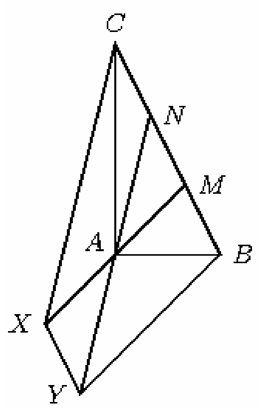
$$(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = 302 \Leftrightarrow n^2 - 2n + 1 + n^2 + n^2 + 2n + 1 = 302 \Leftrightarrow 3n^2 + 2 = 302$$

$$\Leftrightarrow 3n^2 = 300 \Leftrightarrow n^2 = 100 \Leftrightarrow n = -10 \text{ ou } n = 10$$

Portanto, os três inteiros consecutivos são $-11, -10$ e -9 ou $9, 10$ e 11.
Se admitirmos que estamos falando de inteiros positivos, a resposta é $9 + 10 + 11 = 30$.
Rigorosamente falando a resposta deveria ser: se os inteiros são positivos, então a sua soma é 30 e se os inteiros são negativos, então sua soma é –30.

Pontuação: 4 pontos para 30 ou para – 30 ou para ± 30.

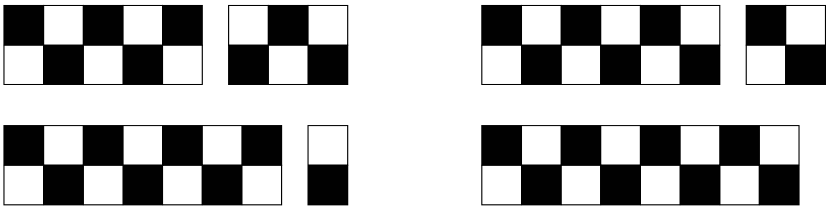
03.



Observe que os triângulos *AXY* e *ANM* são congruentes, e <*YXA* = <*AMN*. Assim, *XY* || *MN* e como *XY* = *MN* = *MC* = *NB*, segue que os quadriláteros *XYCM* e *XYNB* são paralelogramos, como *A* é ponto médio de *XM* e *NY* temos que [*AYC*] = [*BAX*] = (2/3).12 = 8. Logo, [*XYCB*] = (8/3).12 = 32.

04. Cada retângulo da decomposição possui um número par de casas, pois possui a mesma quantidade de casas brancas e pretas. Veja que a maior quantidade de números pares distintos tais que a soma não supera 64 é 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 +

14 = 56, pois 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 = 72, ou seja, a soma de 8 números pares distintos é sempre maior que 64. Portanto, a decomposição pode ter no máximo 7 retângulos. Abaixo uma decomposição com 7 retângulos.



05. Fazendo as primeiras transformações, obtemos a seguinte seqüência:
$(1, 1, 1) \rightarrow (1, 1, 0) \rightarrow (1, 0, 1) \rightarrow (0, 2, -1) \rightarrow (0, -3, 3) \rightarrow (0, 6, -6) \rightarrow \ldots$
Primeiramente, vemos que a partir da quarta terna, o primeiro vai ser sempre igual a 0 (zero). Então, a partir desta terna, as transformações são do tipo: $(0, b, c) \rightarrow (0, -b + c, b - c)$. Logo, a partir da quarta terna ordenada da seqüência, a soma dos termos de todas as ternas será igual a $0 - b + c + b - c = 0$.
Logo, a soma dos três termos da terna que ocupará a 2006ª posição nesta seqüência é igual a 0 (zero).

Soluções Nível 2 – Segunda Fase – Parte B

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:
Vamos usar a notação:
S_par = soma de todas as casas de numeração par;
S_ímpar = soma de todas as casas de numeração ímpar.

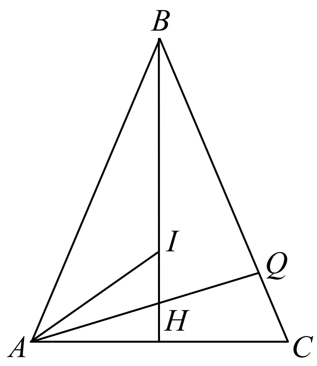
a) Para este caso, temos: *S_par* = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 = 56 e *S_ímpar* = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64. Como a diferença entre as somas é par e *S_ímpar* > *S_par*, há a necessidade de retirar pelo menos duas casas do lado ímpar como, por exemplo, as casas de numeração 7 e 1. Aí, teremos *S_par* = *S_ímpar* = 56. Assim, o prefeito deve derrubar pelo menos 2 casas.

b) Para este caso, temos: *S_par* = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 +16 = 72 e *S_ímpar* = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 +15 = 64. Como a diferença entre as somas é par e *S_par* > *S_ímpar*, pode-se retirar apenas uma casa do lado par: a casa de numeração 8.
Aí, teremos *S_par* = *S_ímpar* = 64. Assim, o prefeito deve derrubar 1 casa.

c) Para este caso, temos: *S_par* = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + ... + 2006 e *S_ímpar* = 1 + 3 + 5 + ... + 2005. Assim, temos *S_par* – *S_ímpar* = (2 – 1) + (4 – 3) + ... + (2006

– 2005) = 1003. Como 1003 é ímpar, uma única casa não é suficiente, mas retirar as casas de numeração 1006 e 3 basta para que *S_par* = *S_ímpar*. Assim, o número mínimo de casas que o prefeito deve derrubar é 2 casas.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:



Como o triângulo é isósceles concluímos que, $\angle CBM = \angle ABM$ e $\angle ACB = 90^{o} - \alpha$, com isso, $\angle CAQ = \alpha$, pois AQ é uma altura. Como AI é bissetriz, então $\angle CAI = \angle IAB = 2\alpha$. Finalmente no $\Delta\ AMB$: $\alpha + \alpha + 2\alpha + \alpha = 90^{o} \Rightarrow \alpha = 18^{o}$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

a) Subtraindo as duas equações dadas temos $a^2 - b^2 = 6(b - a)$ ou seja $(a - b)(a + b + 6) = 0$. Como $a \neq b$, temos $a + b = -6$.

b) Da parte a), elevando ao quadrado, $a^2 + b^2 + 2ab = 36$. Mas, somando as equações dadas, temos $a^2 + b^2 = 6(a + b) + 10ab = -36 + 10ab$. Portanto, $-36 + 2ab + 10ab = 36$ o que dá $ab = 6$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:

Quando trocamos um inteiro positivo pela soma de seus algarismos, não alteramos o resto da divisão por 9. Isto é explicado pela decomposição do inteiro na forma:

$abcd = 1000a + 100b + 10c + d = 999a + 99b + 9c + a + b + c + d$

Daí, temos que:

$abcd - (a + b + c + d) = 999a + 99b + 9c = 9(111a + 11b + c)$

Logo, $abcd$ e $a + b + c + d$ deixam o mesmo resto na divisão por 9.

Como todos os números que restaram no quadro estão entre 0 e 9, inclusive, todos os números 1 restantes no quadro são originados a partir de números que deixam resto 1 na divisão por 9 (1, 10, 19, 28, 37, ..., 1999). Da mesma forma, todos os números 2 restantes no quadro são originados a partir de números que deixam resto 2 na divisão por 9 (2, 11, 20, 29, 38, ..., 2000). Comparando, vemos que cada um dos números 1 e 2 aparece 223 vezes no quadro. Portanto, ambos os números 1 e 2 aparecem o mesmo número de vezes.

Soluções Nível 3 – Segunda Fase – Parte A

Problema	01	02	03	04	05
Resposta	9	36	750	6	339

01. Sejam *a*, *b*, *c* e *d* algarismos tais que o par (*ab*, *cd*) é centenário. Então,

$$(10a+b)+(c+d)=(10c+d)+(a+b)=100$$

como $b+c+d \le 27$, $10a \ge 73$, e assim $a \ge 8$ e, de modo análogo, $c \ge 8$. Ainda mais,

$$(10a+b)+(c+d)=(10c+d)+(a+b) \Leftrightarrow 9a=9c \Leftrightarrow a=c.$$

Temos então 2 casos:

I) $a=c=8 \Rightarrow 80+b+8+d=100 \Leftrightarrow b+d=12$, sendo esta uma condição necessária e suficiente para o par em questão ser centenário. Obtemos assim os 7 seguintes pares:

(83;89), (84;88), (85;87), (86;86), (87;85), (88;84) e (89;83).

II) $a=c=9 \Rightarrow 90+b+9+d=100 \Leftrightarrow b+d=1$, obtendo outros 2 pares centenários:

(90;91) e (91;90).

Há, assim, 9 pares centenários.

02. Seja *J* a interseção dos segmentos *BC* e *FG*. Como *M* é ponto médio do segmento *BC*, oposto ao vértice *E*, conclui-se que *EF* é diâmetro, e $\angle FGE = \angle BMF = 90°$. Sendo *ABCDE* um pentágono regular, $\angle ABC = 108°$.

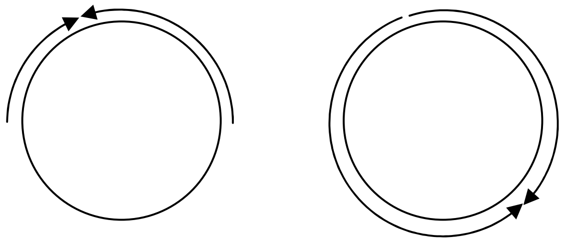
No ΔGHI : $\angle GHI = \alpha \Rightarrow \angle GIH = 90° - \alpha$.

No ΔBJH : $\angle BHJ = \alpha \Rightarrow \angle BJH = 72° - \alpha$.

No ΔFJM : $\angle FJM = 72° - \alpha \Rightarrow \angle JFM = 18° + \alpha$.

Para que os triângulos *EFG* e *HIG* sejam semelhantes, como $\alpha \ne 18° + \alpha$, a única possibilidade é termos $90° - \alpha = 18° + \alpha \Leftrightarrow \alpha = 36°$.

03. No momento do primeiro cruzamento, Esmeralda e Jade percorreram a distância total igual à metade da extensão da pista. Entre o primeiro e o segundo cruzamento, as moças percorreram uma distância total igual à extensão da pista. Portanto Esmeralda correu o dobro da distância que correu até o primeiro cruzamento, ou seja, $2 \cdot 200 = 400$ metros e, deste modo, a extensão da pista é 400 + 350 = 750 metros.



Até o primeiro encontro — Entre o primeiro e o segundo encontro

04. Considere os três planos que passam pelo centro do octaedro e contêm 4 das 12 arestas do octaedro, formando três quadrados. A secção corta no máximo dois lados de cada quadrado. Portanto corta no máximo 6 arestas do octaedro. Assim, a maior quantidade de lados que uma secção pode determinar no octaedro regular é 6. Um exemplo de secção hexagonal é um plano paralelo a duas faces opostas.

05. Seja $n > 1$ a quantidade de dados. Podemos representar um lançamento dos n dados com a n-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, sendo a_i o resultado do dado i. Como a_i é um inteiro entre 1 e 6, existe uma bijeção entre os pares $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $(7 - a_1, 7 - a_2, \ldots, 7 - a_n)$, de modo que a probabilidade de obter soma $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ é a mesma de obter soma $(7 - a_1) + (7 - a_2) + \ldots + (7 - a_n) = 7n - S$. Além disso, para $n + 1 \le S \le 7n/2$, a probabilidade de obter soma $S - 1$ é menor do que a probabilidade de obter soma S. Portanto as somas distintas S e T têm a mesma probabilidade de ocorrer se, e somente se, $T = 7n - S$. Em particular, a única soma com a mesma probabilidade de ocorrer que a soma 2006 é $7n - 2006$.

Como $2006 = 334 \cdot 6 + 2$, precisamos jogar, no mínimo, 335 dados, ou seja, $n \ge 335$. Pelo fato acima, o valor procurado é $7 \cdot 335 - 2006 = 339$.

Soluções Nível 3 – Segunda Fase – Parte B

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

Uma solução:

Observe que teremos 1 criança com 2 brinquedos, enquanto cada uma das $n - 1$ crianças restantes terá apenas 1 brinquedo. Assim, temos n possibilidades para a escolha da felizarda criança, e $\binom{n+1}{2}$ possibilidades para escolher os 2 brinquedos desta criança. Restando n – 1 brinquedos e n – 1 crianças, temos $(n - 1)!$ modos de distribuir estes brinquedos entre estas crianças. Assim, temos um total de $n\binom{n+1}{2}(n-1)! = \binom{n+1}{2}n!$ modos de distribuir os n + 1 brinquedos entre as n crianças.

Outra solução:

Observe que teremos 1 criança com 2 brinquedos, enquanto cada uma das n – 1 crianças restantes terá apenas 1 brinquedo. Temos n escolhas para a criança que terá dois brinquedos. Escolhida tal criança, o número de maneiras de distribuir os n + 1 brinquedos é igual ao número de anagramas da palavra $A_1A_1A_2A_3\ldots A_n$, que é $\frac{(n+1)!}{2!} = \frac{(n+1)!}{2}$. Assim, o total de maneiras de distribuir os n + 1 brinquedos entre as n crianças é $n \cdot \frac{(n+1)!}{2}$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:

Uma solução:

$ab+1 \mid (a+1)(b+1) \Rightarrow ab+1 \mid ab+a+b+1 \Rightarrow ab+1 \mid (ab+a+b+1)-(ab+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow ab+1 \mid a+b \Rightarrow ab+1 \le a+b \Rightarrow a(b-1) \le b-1$. Desta última desigualdade, observamos que, se $b > 1$, então $a \le 1 \Rightarrow a = 1$, ou seja, um dentre os inteiros a e b vale 1. Suponha, então, sem perda de generalidade, que a = 1. Substituindo, obtemos $a = 1 \Rightarrow b+1 \mid 2(b+1)$, o que é válido para todo inteiro positivo b. As soluções são, então, $(1, b)$ e $(a, 1)$.

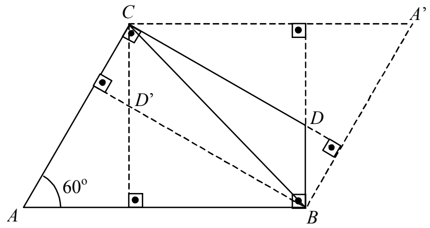
Outra solução:

Como $(a + 1)(b + 1)$ é múltiplo de ab + 1, existe um inteiro positivo k tal que $(a+1)(b+1) = k(ab+1) \Leftrightarrow a(kb-b-1) = b-k+1$. Se $kb - b - 1 = 0$, então $k = 1 + \frac{1}{b}$, que é inteiro se, e somente se, b = 1. Se $kb-b-1 \ne 0$ então $a = \frac{b-k+1}{kb-b-1} \ge 1 \Rightarrow b-k+1 \ge kb-b-1 \Leftrightarrow k \le 2$. Se k = 1, obtemos $a = -(b + 1) < 0$. Logo k = 2 e a = 1. Verifica-se que $(1, b)$ e $(a, 1)$ são realmente as soluções.

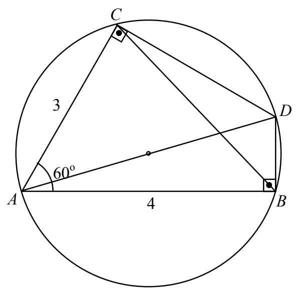
SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

Uma solução:

Sejam *A*' o ortocentro do triângulo *BCD* e *D*' o ortocentro do triângulo *ABC*.



Como as retas *CD*' e *BD* são ambas perpendiculares a *AB*, são paralelas. Analogamente, as retas *BD*' e *CD* são paralelas. Logo o quadrilátero *BDCD*' é um paralelogramo e, portanto, os triângulos *BCD* e *BD*'*C* são congruentes.
Da mesma maneira, as retas *AB* e *CA*' são paralelas, pois são perpendiculares a *BD*. Analogamente, as retas *AC* e *BA*' são paralelas. Logo o quadrilátero *CABA*' é um paralelogramo e, assim, os triângulos *ABC* e *A*'*CB* são congruentes.
Conseqüentemente, os quadriláteros *ABDC* e *A*'*CD*'*B* são congruentes, de modo que a distância entre os ortocentros *A*'*D*' é igual a *AD*.
Devemos, então, calcular *AD*. Como os ângulos $A\hat{B}D$ e $A\hat{C}D$ são ambos retos, somam 180º e, portanto, o quadrilátero *ABCD* é inscritível, sendo *AD* diâmetro de seu circuncírculo.



Pela lei dos co-senos,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ \Leftrightarrow BC^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow BC = \sqrt{13}$$

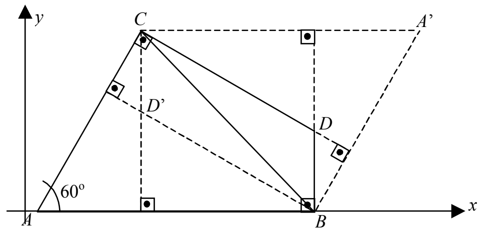
Enfim, pela lei dos senos,

$$AD = 2R = \frac{BC}{\operatorname{sen} 60^\circ} = \frac{\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{39}}{3}$$

e, portanto, a distância entre os ortocentros é $\frac{2\sqrt{39}}{3}$.

Outra solução:

Sejam *A'* o ortocentro do triângulo *BCD* e *D'* o ortocentro do triângulo *ABC*.



Sejam $A = (0;0)$ e $B = (4;0)$. Sendo $AC = 3$ e $m(B\hat{A}C) = 60^{\circ}$, podemos supor que $C = (3\cos 60^{\circ}; 3\operatorname{sen} 60^{\circ}) = \left(\frac{3}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$. Como a reta *CD'* é perpendicular ao eixo *x*, admite equação $x = \frac{3}{2}$. Além disso, sendo a reta *BD'* perpendicular à reta *AC*, de coeficiente angular $\operatorname{tg} 60^{\circ} = \sqrt{3}$, seu coeficiente angular é $\frac{-1}{\sqrt{3}}$. Logo, sendo $D' = \left(\frac{3}{2}; a\right)$, $\frac{a-0}{\frac{3}{2}-4} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow a = \frac{5\sqrt{3}}{6}$.

Calculemos agora *A'*. Como *A'* pertence à perpendicular a *BD* por *C*, então $A' = \left(b; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$. A reta *CD* é perpendicular a *AC* e, portanto, tem coeficiente angular $\frac{-1}{\sqrt{3}}$. Enfim, sendo *A'B* perpendicular a *CD*, tem coeficiente angular $\frac{-1}{\frac{-1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$. Deste modo, $\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}-0}{b-4} = \sqrt{3} \Leftrightarrow b = \frac{11}{2}$.

Logo a distância entre os ortocentros *A'* e *D'* é

$$\sqrt{\left(\frac{11}{2}-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{2\sqrt{39}}{3}.$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:

Os primeiros valores da seqüência são:

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21, F_9 = 34$$

Nota-se que, para $n > 7$, $F_n > 2n$. De fato, indutivamente, se $F_n > 2n$ e $F_{n+1} > 2(n + 1)$ então $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n > 2(n + 1) + 2n > 2(n + 2)$.

Portanto $F_n > 2n > \frac{3n}{2} > \frac{4n}{3} > n$ para $n > 7$, de modo que para resolver as equações $F_n = n$, $F_n = \frac{3n}{2}$, $F_n = \frac{4n}{3}$, basta testar os valores de n menores ou iguais a 7.

Se $n > 5$, de $F_m \cdot F_n = mn$ devemos ter $F_m < m$, donde $m < 5$. Logo pelo menos um dos números m e n deve ser no máximo 5. Suponha, sem perda de generalidade, $n \le 5$. Observando os possíveis valores de n:

- $n = 1 \Rightarrow F_m = m$, cujas soluções são $m = 1$ e $m = 5$.
- $n = 2 \Rightarrow F_m = 2m$, que não possui solução.
- $n = 3 \Rightarrow 2F_m = 3m$, que não possui solução.
- $n = 4 \Rightarrow 3F_m = 4m$, que possui a única solução $m = 6$.
- $n = 5 \Rightarrow F_m = m$, cujas soluções são $m = 1$ e $m = 5$.

Os pares (m, n) que satisfazem a relação pedida são:

$$(1, 1), (1, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 5) \text{ e } (6, 4).$$

XXVIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Problemas e Soluções da Terceira Fase

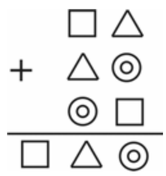
PROBLEMAS – NÍVEL 1

PROBLEMA 1
Considere as seguintes seqüências:

S_1: 12345678, 81234567, 78123456, ..., na qual o último algarismo do termo anterior (algarismo das unidades) torna-se o primeiro algarismo à esquerda do próximo termo.

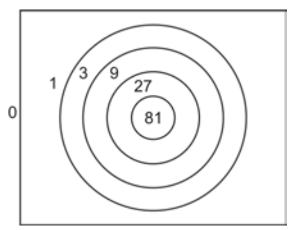
S_2: 1234567898765, 5612345678987, 7856123456789, ..., na qual o algarismo das unidades torna-se o primeiro algarismo à esquerda do próximo termo, e o das dezenas torna-se o segundo algarismo à esquerda.
a) Apresente o quinto termo da seqüência S_1 e o quarto termo da seqüência S_2.
b) A seqüência S_1 tem 2006 termos. Qual é o seu último termo?
c) A seqüência S_2 termina quando o primeiro termo se repete. Quantos termos tem essa seqüência?

PROBLEMA 2
Na adição abaixo, cada símbolo representa um único algarismo e símbolos diferentes representam algarismos diferentes.



Determine o valor de cada símbolo, ou seja, descubra tais valores e mostre que não existem outras possibilidades.

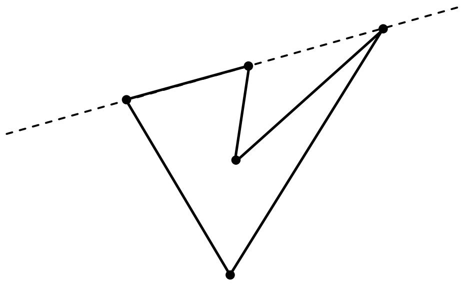
PROBLEMA 3
Um atirador lança flechas no alvo representado ao lado. Os números indicam a pontuação obtida em cada região atingida pela flecha (se a flecha acertar exatamente uma linha, a pontuação é a menor das duas regiões). Note que a região fora do retângulo não rende pontos.



a) Se numa competição, cada participante atira 2 flechas, quantas pontuações diferentes podem ser obtidas?
b) Numa outra competição, cada participante atirou 3 flechas. Curiosamente, não houve empates e todas as pontuações possíveis foram atingidas. Quantos participantes havia nesta competição?

PROBLEMA 4

Dentre os polígonos de 5 lados, o maior número possível de vértices alinhados, isto é, pertencentes a uma única reta, é três, como mostrado a seguir.



Qual é a maior quantidade de vértices alinhados que um polígono de 12 lados pode ter?

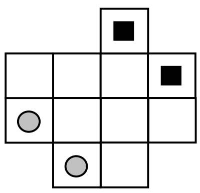
Atenção: além de desenhar um polígono de 12 lados com o número máximo de vértices alinhados, lembre-se de mostrar que não existe um outro polígono de 12 lados com mais vértices alinhados do que este.

PROBLEMA 5

A partir do tabuleiro mostrado nas figuras abaixo e quatro peças, duas circulares cinzas e duas quadradas pretas, Esmeraldinho inventou o seguinte jogo:

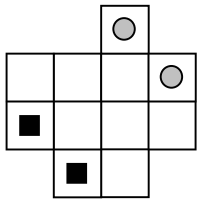
- Inicialmente, as peças são colocadas no tabuleiro como mostra a figura 1.

Figura 1

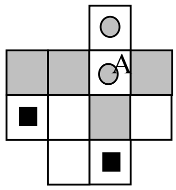


- A meta do jogo é, após um certo número de movimentos, trocar as peças de posição, chegando na situação mostrada na figura 2.

Figura 2



- Cada movimento consiste em mover uma das quatro peças uma ou mais casas acima, abaixo, à esquerda ou à direita; todavia, tal peça não pode "pular" nenhuma peça que, eventualmente, esteja no caminho, ou ocupar uma casa onde já existe uma peça. Por exemplo, a peça marcada com **A** só pode se mover para alguma das casas destacadas em cinza.



- Os movimentos dos círculos e dos quadrados são alternados. O jogo começa com um movimento de um dos quadrados.

Determine a menor quantidade total de movimentos necessários para terminar o jogo. Mostre, passo-a-passo, através de desenhos, como movimentar as peças com esta quantidade de movimentos e prove que não é possível terminar o jogo com menos movimentos.

PROBLEMAS – NÍVEL 2

PROBLEMA 1

Escrevemos, em fila, os números 1, 2, 3, …, n. A cada passo, tomamos os dois últimos números da fila anterior, escrevemos primeiramente o último, depois o penúltimo e, enfim, os outros
$n - 2$, na ordem em que aparecem. Por exemplo, para $n = 12$ obtemos

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \rightarrow 12, 11, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$
$$\rightarrow 10, 9, 12, 11, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \rightarrow ...$$

Qual a menor quantidade de passos necessários para escrevermos novamente os números 1, 2, 3, …, n, nessa ordem, quando

(a) $n = 2006$?

(b) $n = 2005$?

PROBLEMA 2
Veja o problema No. 4 do Nível 1

PROBLEMA 3
Encontre todos os pares ordenados $(x; y)$ de inteiros tais que $x^3 - y^3 = 3(x^2 - y^2)$.

PROBLEMA 4
Quantos subconjuntos $\{a, b, c\}$ de três elementos distintos de $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ são tais que b é a média aritmética de a e c $(a < b < c)$?

PROBLEMA 5
Seja ABC um triângulo acutângulo e H o seu ortocentro. Sejam M, N e R os pontos médios de AB, BC e AH, respectivamente. Determine a medida do ângulo $M\hat{N}R$ se o ângulo $A\hat{B}C$ mede 70^o.

PROBLEMA 6
Em um torneio de tênis de mesa (no qual nenhum jogo termina empatado), cada um dos n participantes jogou uma única vez contra cada um dos outros. Sabe-se que, para todo $k > 2$, não existem k jogadores $J_1, J_2, \ldots, J_k$ tais que J_1 ganhou de J_2, J_2 ganhou de J_3, J_3 ganhou de J_4, …, J_{k-1} ganhou de J_k, J_k ganhou de J_1.

Prove que existe um jogador que ganhou de todos os outros e existe um jogador que perdeu de todos os outros.

PROBLEMAS – NÍVEL 3

PROBLEMA 1
Seja ABC um triângulo, P o pé da bissetriz interna relativa ao lado AC e I seu incentro. Se $AP + AB = CB$, prove que API é um triângulo isósceles.

PROBLEMA 2
Seja n um inteiro, $n \geq 3$. Definimos $f(n)$ como a maior quantidade possível de triângulos isósceles cujos vértices pertencem a algum conjunto de n pontos do plano sem três pontos colineares. Prove que existem constantes positivas a e b tais que $an^2 < f(n) < bn^2$, para todo n inteiro, $n \geq 3$.

PROBLEMA 3
Determine todas as funções $f : R \to R$ tais que

$$f\big(xf(y) + f(x)\big) = 2f(x) + xy$$

para todos x, y reais.

PROBLEMA 4
Um número inteiro positivo é *arrojado* quando tem 8 divisores positivos cuja soma é 3240. Por exemplo, o número 2006 é arrojado porque seus 8 divisores positivos, 1, 2, 17, 34, 59, 118, 1003 e 2006, somam 3240. Encontre o menor número inteiro positivo arrojado.

PROBLEMA 5
Seja P um polígono convexo de 2006 lados. As 1003 diagonais ligando vértices opostos e os 1003 segmentos que ligam os pontos médios dos lados opostos são concorrentes, ou seja, todos os 2006 segmentos possuem um ponto em comum. Prove que os lados opostos de P são paralelos e congruentes.

PROBLEMA 6
O professor Piraldo participa de jogos de futebol em que saem muitos gols e tem uma maneira peculiar de julgar um jogo. Um jogo com placar de m gols a n gols, $m \geq n$, é dito *equilibrado* quando $m \leq f(n)$, sendo $f(n)$ definido por $f(0) = 0$ e, para $n \geq 1$, $f(n) = 2n - f(r) + r$, onde r é o maior inteiro tal que $r < n$ e $f(r) \leq n$.

Sendo $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, prove que um jogo com placar de m gols a n, $m \geq n$, está equilibrado se $m \leq \phi n$ e não está equilibrado se $m \geq \phi n + 1$.

SOLUÇÕES – NÍVEL 1

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1: BRUNO SILVA MUCCIACCIA (VITÓRIA – ES)
S_1: 12345678, 81234567, 78123456, 67812345, 56781234

a) 5º termo da seqüência S_1: 56781234
4º termo da seqüência S_2: 9878561234567

S_2: 1234567898765, 5612345678987, 7856123456789, 9878561234567.

b) O último termo da seqüência S_1 é: 45678123
Pois quando se aumenta de 8 em 8, a seqüência se repete, então o 2001º número é igual ao 1º. E o 2006º número é igual ao 6º.

c) Essa seqüência tem 43 termos, pois se percebe que quando as posições aumentam de 7 em 7, os números ímpares permanecem no lugar e os pares andam 2 casas para a direita, só quando o número par estiver na penúltima posição que ele anda três casas; assim, como há 13 algarismos andando 5 vezes duas casas, os algarismos pares andam 10 casas para a direita, mas, no final da seqüência, andam três casas, então andando 6 × 7 vezes, eu repito a sequência. Como começa no No.1, na seqüência há 6 × 7 + 1 termos igual a 43. (Pois a seqüência acaba quando o número se repete).

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2: SOLUÇÃO DA BANCA

$$\begin{array}{rccc} & & \square & \triangle \\ + & & \triangle & \circledcirc \\ & & \circledcirc & \square \\ \hline & \square & \triangle & \circledcirc \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rccc} & & a & b \\ & & b & c \\ + & & c & a \\ \hline & a & b & c \end{array}$$

Como $abc < 3 \times 99 = 297 \Rightarrow a = 0$, $a = 1$ ou $a = 2$.

Como $a + b + c \equiv c \pmod{10} \Rightarrow a + b \equiv 0 \pmod{10} \Rightarrow b + 1 \equiv 0 \pmod{10}$ ou $b + 2 \equiv 0 \pmod{10}$, temos $b = 8$ ou $b = 9$ (não podemos ter $a = b = 0$).

Como $a + b + c + 1 = 10\,a + b$, temos $c + 1 = 9a$.

Se $a = 1$, então $c = 8$

Se $a = 2$, $c = 17$ (não é possível!).

Logo, a única solução é $a = 1$, $b = 9$ e $c = 8$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3: COLABORAÇÃO DE RÉGIS P. BARBOSA (FORTALEZA – CE)

a) Vejamos se é possível obter uma mesma pontuação de dois jeitos diferentes: $(a,\ b)$ e $(c,\ d)$, com $a \ge b, c \ge d$ e $a + b = c + d$. Se tivermos $a = c$, $a + b = a + d \Rightarrow b = d$, e logo $(a,b) \Rightarrow (c,d)$. Agora suponhamos sem perda de generalidade $a > c$. Teremos $a \le a + b = c + d \le 2c$, mas, se olharmos as pontuações nas regiões, podemos observar que a menor pontuação possível maior que c é $3c$ ou $3c + 1$. No caso $c = 0$, $1 \le a \le 2c = 0$. Absurdo! E se $c > 0$, $3c \le a \le 2c \Rightarrow c \le 0$, absurdo!

Assim só tem um jeito para cada pontuação possível $(a,\ b)$ com $a \ge b$, dada a soma $S = a + b$. Agora vamos contá-las.

Se $a = b$, pode ser: $(0,0);(1,1);(3,3);(9,9);(27,27);(81,81)$. Se $a > b$, basta escolhermos um par de pontuações distintas pois a ordem está definida. Temos 6 possibilidades para o primeiro número e 5 para o segundo (que não pode ser igual ao primeiro) e dividimos por 2 já que os pares são contados duas vezes (aparecem

tanto {0, 1} quanto {1, 0}), obtendo: $\frac{6\cdot 5}{2}=15$ possibilidades. Assim são 6 + 15 = 21 pontuações possíveis.
b) Usaremos um raciocínio parecido com o do item (a). Veja quando a mesma pontuação pode ser obtida de dois modos: (a,b,c) e (d,e,f), com $a\geq b\geq c,\ d\geq e\geq f$ e $a+b+c=d+e+f$

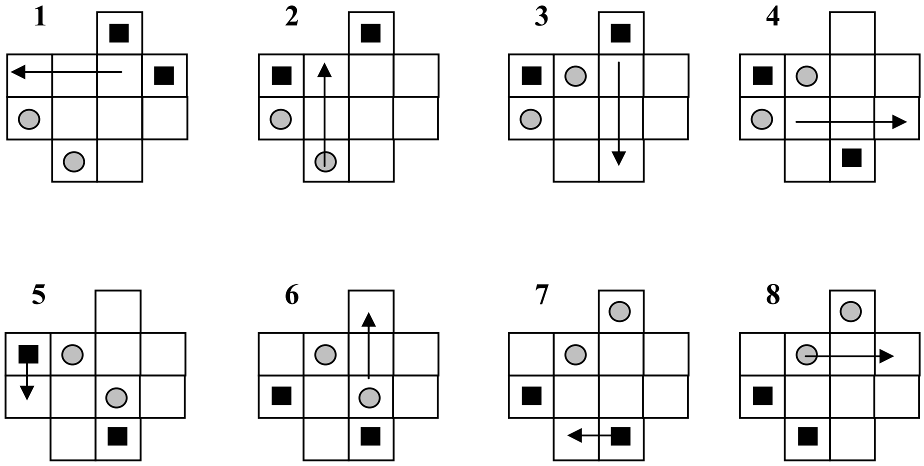
Se $a = d$ recai no item (a): (b ; c); (e, f) com $b\geq c,\ e\geq f$ e $b+c=e+f$ já vimos que nesse caso $b = e$ e $c = f$.
Assim suponhamos $a > d$. Temos: $a\leq a+b+c=d+e+f\leq 3d$.
Se $d=0,1\leq a\leq 0$. Absurdo!
Assim tomemos $d > 0$. Se $a > d$ já vimos que $a\geq 3d$; como $a\leq a+b+c=d+e+f\leq 3d\leq a$ ocorrerão todas as igualdades: $b = c = 0$ e $e = f = d$, e concluímos que as únicas pontuações obtidas de dois modos são: $(3x,0,0)$ e (x,x,x) com $x > 0$ e $3x\leq 81\Rightarrow x\leq 27$ já que a é uma pontuação de uma flecha. Temos agora três casos:
(i) $a>b>c$: Temos que tomar 3 números distintos, seguindo o raciocínio do item (a), teremos: $6\cdot 5\cdot 4$ mas dessa vez cada trio aparecerá 6 vezes: $\{x,y,z\};\{x,z,y\};\{y,x,z\};\{y,z,x\};\{z,x,y\};\{z,y,x\}$ que são tudo a mesma coisa, assim temos $\frac{\cancel{6}\cdot 5\cdot 4}{\cancel{6}}=20$ possibilidades.

(ii) $a>b=c$ ou $a=b>c$: Basta contar os pares e multiplicar por dois pois o par (a, b) gera (a, a, b) e (a, b, b). Já vimos no item (a) que são 15 pares, assim temos aqui 30 possibilidades.
(iii) $a = b = c$: Como deduzimos as somas obtidas por (x, x, x) com $0<x\leq 27$, que já foram contadas então devemos contar apenas: $x=0$ e $x=81$, isto é, somente mais 2 possíveis somas.
Assim, como o número de participantes é igual ao número de somas possíveis distintas, são: 20 + 30 + 2 = 52 participantes.

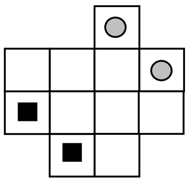
SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4
Ver solução do problema 2 do nível 2.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5: LEONARDO BURATO FOUREAUX (LINHARES - ES)

Com 8 movimentos.



Resultado final



Não existe outra maneira de mover as peças com menos movimentos, pois o mínimo de cada peça para chegar ao lugar da outra é de 2 movimentos e sendo 4 peças, são no mínimo $4 \cdot 2 = 8$ movimentos.

SOLUÇÕES – NÍVEL 2

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1: THIAGO S. WARWAR TEIXEIRA (RIO DE JANEIRO – RJ)

a) $n = 2006$

Com n sendo par, a cada $\frac{n}{2}$ passos, partindo do início, nota-se que todos os números ímpares trocarão de posição com o número par a sua frente, depois todos os pares trocarão de posição com o número ímpar que estiver a sua frente, e assim sucessivamente.

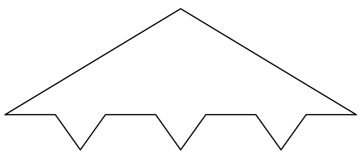
Logo, com $n = 2006$, teremos, após 1003 passos:

2, 1, 4, 3, 6, 5..., 2004, 2003, 2006, 2005

E, depois de mais 1003 passos, teremos:
1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., 2003, 2004, 2005, 2006 (ordem inicial)
Ou seja, para n = 2006, a menor quantidade de passos necessários para reescrever: 1, 2, 3,..., 2005, 2006, é de 2006 passos.

b) $n = 2005$
Para resolver esta questão, recorreremos a exemplos menores:
1, 2, 3 $\to$ 3, 2, 1 $\to$ 1, 2, 3 $\to$ 2 passos
1, 2, 3, 4, 5 $\to$ 5, 4, 1, 2, 3 $\to$ 3, 2, 5, 4, 1 $\to$ 1, 4, 3, 2, 5 $\to$ 5, 2, 1, 4, 3 $\to$ 3, 4, 5, 2, 1 $\to$ 1, 2, 3, 4, 5 $\to$ 6 passos
Com base nos exemplos, percebe-se que os números ímpares: 1, 3, 5... estarão sempre nas posições ímpares: 1ª., 3ª., 5ª., ..., não necessariamente nesta ordem, conseqüentemente, os pares estarão nas posições pares.
Nota-se também que para os x números ímpares reestabelecerem sua ordem original, deverão ser feitos x passos, e para os $(x - 1)$ números pares, serão tomados $(x - 1)$ passos.
Logo para achar o número mínimo de passos necessários, devemos calcular o mínimo múltiplo comum entre x e $(x - 1)$, que independente do valor de x, será sempre $x \cdot (x-1)$.
Então, para calcular o valor mínimo de passos para n= 2005, devemos multiplicar 1003 (quantidade de ímpares) por 1002 (quantidade de pares), o que resulta em 1005006.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2: ILLAN FEIMAN HALPERN (ITATIAIA – RJ)
A maior quantidade de vértices alinhados que um polígono de 12 lados pode ter é 8. Um exemplo de polígono assim é:



Mostrarei agora que não existe polígono de 12 lados com 9 vértices colineares.
Em um polígono 3 vértices consecutivos não podem ser colineares, escolhendo 9 pontos em 12, pelo menos haverá um trio de pontos consecutivos. Demostração:
Nomeie os vértices em ordem de V_1 a V_{12}, sendo que V_1 é consecutivo de V_{12} e V_2; V_2 é consecutivo de V_1 e V_3 e assim por diante. Sejam:
$G_1 = \{V_1; V_2; V_3\}$

$G_2 = \{V_4; V_5; V_6\}$
$G_3 = \{V_7; V_8; V_9\}$
$G_4 = \{V_{10}; V_{11}; V_{12}\}$

Pelo princípio da casa dos pombos, escolhendo-se 9 vértices, haverá pelo menos um conjunto com 3 vértices escolhidos.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3: COLABORAÇÃO DE RÉGIS P. BARBOSA (FORTALEZA – CE)

Temos: $x^3 - y^3 = 3(x^2 - y^2) \Rightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2) = 3(x-y)(x+y).$

$x - y = 0 \Rightarrow x^3 - y^3 = 0$ e $3(x^2 - y^2) = 0.$ Temos assim as soluções $(x, y) = (a, a), \forall a \in \mathbb{Z}.$

Agora suponhamos $x - y \neq 0;$ assim podemos cortar logo:

$x^2 + xy + y^2 = 3x + 3y \Rightarrow x^2 + (y-3)x + (y^2 - 3y) = 0,$ e logo

$\Delta = (y-3)^2 - 4(y^2 - 3y) \Rightarrow \Delta = y^2 - 6y + 9 - 4y^2 + 12y = -3y^2 + 6y + 9 =$
$= -3(y+1)(y-3)$

Note que $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \Delta \geq 0 \Rightarrow -3(y+1)(y-3) \geq 0 \Rightarrow (y+1)(y-3) \leq 0.$

Analisando a inequação, se $y < -1 \Rightarrow (y+1) < 0,\ (y-3) < 0 \Rightarrow (y+1)(y-3) > 0$ e $y > 3 \Rightarrow (y-3) > 0$ e $(y+1) > 0 \Rightarrow (y+1)(y-3) > 0.$

Assim os y´s que buscamos satisfazem: $-1 \leq y \leq 3, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = -1, 0, 1, 2, 3.$

Vamos verificar para cada um os possíveis valores de x.

(I) $y = -1 \Rightarrow \Delta = 0$ e a equação é: $x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0,$ donde $x = 2 \Rightarrow (x, y) = (2, -1).$

(II) $y = 0 \Rightarrow \Delta = 9$ e a equação é: $x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0$, donde $x = 0$ ou $x = 3 \Rightarrow (x, y) = (0,0), (3,0).$

(III) $y = 1 \Rightarrow \Delta = 12$ e a equação é:

$x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2 \pm \sqrt{12}}{2} \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}.$ Assim, para $y = 1$, não existe $x \in \mathbb{Z}$ que satisfaz a equação do segundo grau.

(IV) $y = 2 \Rightarrow \Delta = 9$ e a equação é:

$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x = 2$ ou $x = -1 \Rightarrow (x, y) = (2, 2), (-1, 2).$

(V) $y = 3 \Rightarrow \Delta = 0$ e a equação é: $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 3).$

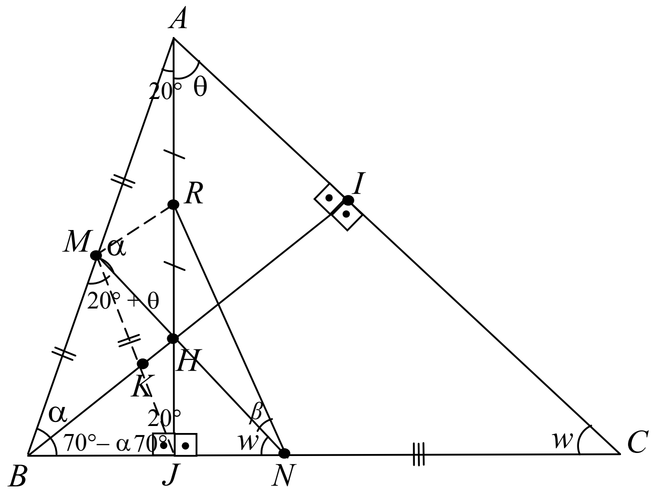
Assim os pares ordenados são: $(x, y) = (2, -1), (-1, 2), (3, 0), (0, 3)$ e (a, a), $\forall a \in \mathbb{Z}$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4: RAFAEL HORIMOTO DE FREITAS (SÃO PAULO – SP)

A soma de A e C deve ser par pois a média entre A e C , $\dfrac{A+C}{2}$, resulta em um inteiro B, para isso A e C devem ser números pares ao mesmo tempo ou devem ser números ímpares ao mesmo tempo.
No começo podemos escolher 100 A´s diferentes; para cada A ímpar, restam 49 ímpares, e, se A for par, restam 49 pares para escolher no lugar de C, e por último só há um número B para escolher pois só há uma média aritmética entre A e C.
Em metade dos casos ocorrerá $A > C$, pois para cada casa em que $A < C$ podemos trocar os valores de A e C, metade dos casos são inválidos.

No final temos $\dfrac{100 \cdot 49 \cdot 1}{2} = 2450$ subconjuntos.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5: RAFAEL GRIBEL DE PAULA NEVES (RIO DE JANEIRO – RJ)



$\overline{MR}$ é base média do $\Delta ABH \rightarrow A\widehat{M}R \cong A\widehat{B}H$

$\overline{MJ}$ é mediana relativa a $\overline{AB}$ (e AJB é retângulo) $\rightarrow B\widehat{A}J \cong A\widehat{J}M$

$\overline{MN}$ é base média do $\Delta ABC \rightarrow B\widehat{M}N \cong B\widehat{A}C$

Seja K a interseção de $\overline{BH}$ e $\overline{MN}$. No ΔBKM , $\alpha + 20° + \theta = 90° \rightarrow N\widehat{M}R = 90°$

Os triângulos *JNR* e *MNR* são retângulos e dividem a mesma base $\overline{NR} \rightarrow$ o quadrilátero *MJNR* é inscritível $\rightarrow M\hat{J}R \cong M\hat{N}R$, donde $M\hat{N}R = 20°$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6 PARTE A: RENAN HENRIQUE FINDER (JOINVILLE – SC)

Inicialmente, vamos provar o teorema para $n = 3$. Chamemos de vitorioso o jogador que venceu os demais. Usemos a notação (X♦Y) para (X venceu Y).

Sejam A, B e C os três jogadores. Suponhamos (sem perda de generalidade) (A♦B). Se (B♦C), então, como não podemos ter (C♦A), (teríamos $J_1 = A$, $J_2 = B$ e $J_3 = C$ violando o enunciado), temos A vitorioso. Senão, temos que (C♦B), ou seja, o vencedor de A contra C é vitorioso.

Suponhamos agora que o enunciado valha para n jogadores. Em um torneio com os jogadores $A_1, A_2, A_3 \dots$ e A_{n+1}, haverá um "subtorneio" entre os jogadores $A_1, A_2, A_3, \dots$ e A_n. Suponhamos sem perda de generalidade que seja A_1 é o vitorioso do subtorneio. Se $A_1 ♦ A_{n+1}$, A_1 é o vitorioso do torneio.

Se $A_{n+1} ♦ A_1$, podemos analisar ternas de jogadores em "subtorneios" para chegarmos a uma conclusão.

Terna	Conclusão
A_1, A_2, A_{n+1}	$(A_{n+1} ♦ A_1 \wedge A_1 ♦ A_2) \Rightarrow A_{n+1} ♦ A_2$
A_1, A_3, A_{n+1}	$(A_{n+1} ♦ A_1 \wedge A_1 ♦ A_3) \Rightarrow A_{n+1} ♦ A_3$
$\vdots$	$\vdots$
A_1, A_n, A_{n+1}	$(A_{n+1} ♦ A_1 \wedge A_1 ♦ A_n) \Rightarrow A_{n+1} ♦ A_n$

Concluímos que A_{n+1} é vitorioso. De qualquer modo, há um vitorioso. Assim, indutivamente, confirma-se o enunciado. Analogamente, conclui-se que há um jogador que tenha perdido todas as partidas.

Obs. O teorema provado é mais geral. Poderia ser enunciado como "se um jogador A vencer B e B vencer C, é impossível C vencer A. Então, há um jogador que vença todos os demais". Ele se torna até intuitivo se o enunciarmos assim: "quando um jogador vence outro, que vence um terceiro, o primeiro vencerá o terceiro".

PARTE B: EDSON RYOKEI ONAGA (SÃO PAULO – SP)

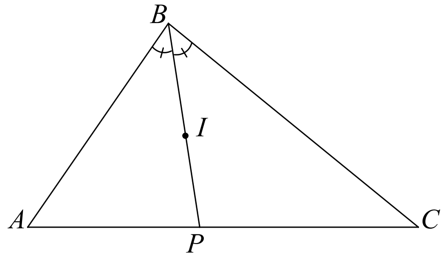
Para indicar o vencedor de uma disputa, vamos utilizar uma seta: $J_x \rightarrow J_y$ (Isso significa que J_x perdeu para J_y). A seta aponta para o vencedor.

Vamos supor que nenhum jogador perdeu todas as partidas. Assim, J_1 ganhou, pelo menos 1 partida.
O esquema dele será assim:
$J_1 \leftarrow J_2$
Como J_2 também não perdeu todas, o esquema ficará assim:
$J_1 \leftarrow J_2 \leftarrow J_3 \leftarrow ...$
Observe que nenhum jogador pode aparecer 2 vezes nessa seqüência.
Vejamos o porquê:
Supondo que J_2 apareça de novo no esquema:
$J_1 \leftarrow J_2 \leftarrow J_3 \leftarrow J_4 \leftarrow J_2$
Observe que ocorre a seguinte situação:
J_2 ganhou de J_3, J_3 ganhou de J_4 e J_4 ganhou de J_2.
Como o enunciado da questão não permite essa situação, não podemos repetir nenhum jogador na seqüência.
Como *n* não é infinito, essa seqüência é finita.
O único modo de terminar o esquema é se algum jogador não perder nenhuma partida, pois, após um invicto, não poderemos colocar nenhum outro jogador.
Logo, há um jogador que ganhou de todos os outros.
Da mesma forma que a seqüência tem um fim à direita, ela deve ter um fim à esquerda.
Pelas mesmas condições citadas acima, o último à esquerda do esquema será o jogador que perder de todos os outros.
Há um jogador que perdeu de todos os outros.

SOLUÇÕES – NÍVEL 3

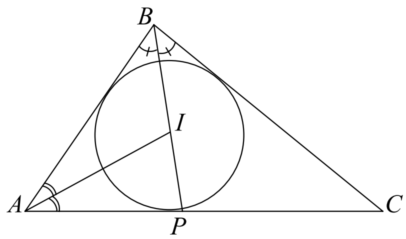
SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1: RENAN LIMA NOVAIS (RIO DE JANEIRO - RJ)

I) Desenhando a figura da questão, temos:



II) Por ser o ponto *I* incentro, sabemos que este ponto eqüidista dos três lados do ΔABC, podendo-se inscrever um círculo no ΔABC. Além disso, por ser o ponto I o incentro do triângulo ΔABC, temos que $\overline{AI}$ é bissetriz do ângulo $B\widehat{A}C$.

III) Observemos agora as *alterações* da figura:



IV) Aplicando o teorema das bissetrizes internas no triângulo ΔABP, de bissetriz $\overline{AI}$, temos:

$$\frac{\overline{BI}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{PI}}{\overline{AP}} \Rightarrow \frac{\overline{AP}}{\overline{PI}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BI}} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BI}} = \frac{\overline{AP} + \overline{AB}}{\overline{PI} + \overline{BI}}$$

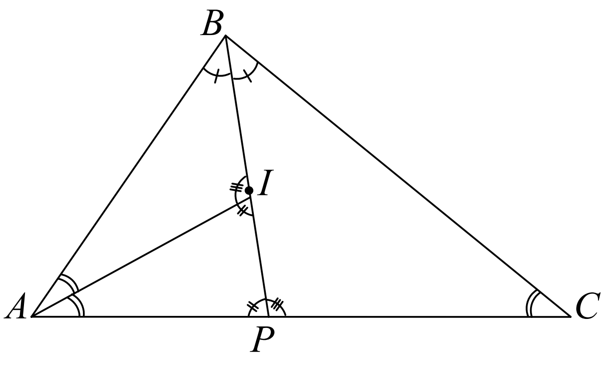
Mas como é dito no enunciado da questão que $\overline{AP} + \overline{AB} = \overline{BC}$, logo temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BI}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{PB}} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BI}}{\overline{PB}}$$

V) Assim, podemos notar que os triângulos ABI e CBP são semelhantes pelo caso LAL de semelhança (pois $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BI}}{\overline{PB}}$ e $A\widehat{B}P \equiv P\widehat{B}C$).

Logo $B\widehat{C}P \equiv B\widehat{A}I$.

VI) Observemos agora a figura novamente *alterada*:



VII) Como $B\hat{I}A \equiv B\hat{P}C$, $A\hat{I}P$ é suplemento de $B\hat{I}A$ e, conseqüentemente, suplemento de $B\hat{P}C$ e $B\hat{P}A$ é suplemento de $B\hat{P}C$, logo $A\hat{I}P \equiv B\hat{P}A$. Assim, o triângulo AIP é isósceles.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2: LÚCIO ASSAOKA HOSSAKA (CURITIBA – PR)

Primero vamos provar que existe b. Podemos escolher dois pontos de $\frac{n(n-1)}{2}$ formas, e traçar um segmento entre eles. Suponha agora que sobre cada um deles haja dois triângulos isósceles com base no segmento em questão. Mais de dois triângulos com base no mesmo segmento implicaria em 3 vértices colineares, contidos na mediatriz do segmento. (Observe que a intenção não é a de obter um número exato, e sim uma cota razoável). Assim, certamente $f(n) \le \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = n(n-1) = n^2 - n$, donde se ve que $b = 1$ é suficiente, ou seja, existe.

No caso de a, vamos dividir em dois casos: n par e n ímpar.

***n* ímpar:** Se arranjarmos os n pontos como vértices de um polígono regular de n vértices, podemos criar um valor mínimo que sabemos que não é necessariamente $f(n)$, mas que é menor ou igual a ele. Veremos que esse valor é $\frac{(n-1)}{2} \cdot n \cdot \frac{1}{3}$.

Veja por que: para cada vértice há $\frac{n-1}{2}$ pares de outros vértices equidistantes, que formarão a base de um triângulo isósceles. São n vértices, e multiplicamos por $\frac{1}{3}$ para evitar a possível contagem de triângulos mais de uma vez (como no caso do eneágono regular, por ex.).

Resolvendo $\frac{n^2 - n}{6} > an^2$, queremos que a seja tal que a inequação seja verdadeira para $n \ge 3$. Isso equivale a $\frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right) > a$. Como $n \ge 3, \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \ge \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$, e logo qualquer $a < \frac{1}{9}$ serve. Ou seja a existe para n ímpar, pelo menos.

***n* par:** análogo ao caso anterior, com a diferença de que colocamos um ponto no centro do polígono regular, que agora tem $n-1$ vértices. O número de possíveis triângulos isósceles é de $\frac{(n-1)(n-2)}{6}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}>an^2$ (a última parcela corresponde aos que tem vértice no ponto central). Isso equivale a $\frac{2}{3}(n-1)(n-2)>an^2 \Leftrightarrow \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)>a.$

Como $n\ge 4, \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ge \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, e logo qualquer $a<\frac{1}{4}$ serve.

Existe a constante nesse caso também, finalizando a demonstração.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3: RAFAEL MENDES DE OLIVEIRA (RIO DE JANEIRO – RJ)

Fazendo $x = 1$ na equação original, temos que:

$f(f(y)+f(1))=2f(1)+y \therefore f$ é sobrejetora, pois repare que, fazendo $y = a - 2f(1)$, temos que $f(f(a-2f(1))+f(1))=a, \forall a\in\mathbb{R}$.

Como f é sobrejetora, $\exists \alpha\in\mathbb{R}$ tal que $f(\alpha)=0$.

Se $\alpha=0$, temos que, fazendo $y = 0$ na equação original, obteremos $f(f(x))=2f(x)$. Como f é sobrejetora, para todo $a\in\mathbb{R}\ \exists\, x_a$ tal que $f(x_a)=a$. De $f(f(x))=2f(x)$, obtemos:

$$f(f(x_a))=2f(x_a)\Rightarrow f(a)=2a, \forall a\in\mathbb{R}.$$

Testando $f(x)=2x$ na equação original, vemos que esta função obviamente não é solução. Logo, podemos concluir que $\alpha\ne 0$.

Como $\alpha\ne 0$, fazendo $x=\alpha$ na equação original, obtemos:

$f(\alpha f(y))=\alpha y$. Logo, concluímos que f também é injetora, pois $f(x)=f(y)\Rightarrow f(\alpha f(x))=f(\alpha f(y))\Rightarrow \alpha y=\alpha x$ e como $\alpha\ne 0,\ \alpha y=\alpha x\Rightarrow x=y$ (logo f é injetora).

Fazendo $x=\alpha$ na equação original, obtemos:

$f(\alpha f(y))=\alpha y$. Fazendo $y = 0$ em $f\left(xf\left(y\right)\right)=\alpha y$, temos que:

$f(\alpha f(0))=0$. Como $f(\alpha)=0$, temos que $\alpha=\alpha f(0)$, pois f é injetora. Logo, como $\alpha\ne 0$, temos que $f(0)=1$.

Fazendo $x = y = 0$ na equação original, obtemos:

$f(1) = 2$. Fazendo $x = y = -1$ na equação original, temos que $f(-1) = 0$.

Fazendo $x = -1$ na equação original, temos que:

$f(-f(y))=-y.$ Fazendo $y = 0$ na equação original temos: $f(x+f(x))=2f(x).$

Fazendo $x:=-f(u)$ e $y:=-f(v)$ na equação original, temos que: $f(f(u)v-u)=-2u+f(u)f(v).$ Fazendo $u = 1$ nesta última, temos que: $f(2y-1)=2f(y)-2$ (*).

Fazendo $x = 1$ na equação original, temos que $f(f(y)+2) = y+4.$

De (*) temos: $f(2y-1)+2 = 2f(y).$ Aplicando f dos dois lados desta última igualdade, temos que $f(f(2y-1)+2) = f(2f(y)).$

Como $f(f(x)+2) = x+4$, temos que, fazendo $x = 2y - 1$ nesta última, temos: $f(f(2y-1)+2)=2y+3.$

Fazendo $y = 0$ na equação original, temos $f(f(x)+x)=2f(x)$ (**).

Logo, fazendo $x = y$ nesta última e aplicando f dos dois lados, temos que $f(f(f(y)+y)) = f(2f(y)).$

Fazendo $y = -1$ na equação original, temos que $f(f(x))=2f(x)-x$ $\therefore$ fazendo $x = f(y)+y$ nesta última, temos:

$f(f(f(y)+y))=2f(f(y)+y)-(f(y)+y).$ Como, por (**),

$f(y+f(y))=2f(y),$ temos que a última igualdade fica:

$f(f(f(y)+y))=4f(y)-f(y)-y=3f(y)-y.$

Como $2y+3 = f(f(2y-1)+2) = f(2f(y)) = f(f(f(y)+y))=3f(y)-y,$

Temos que $3f(y)-y = 2y+3 \Rightarrow f(y) = y+1,\ \forall y \in \mathbb{R}.$

Testando na equação original, vemos que os dois lados ficam $xy + 2x + 2$ $\therefore$ temos que $f(x) = x + 1$ é a única função que satisfaz o problema.

Resposta: $f(x) = x + 1.$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4: BRENO VIEIRA DE AGUIAR (FORTALEZA – CE)
(interpretando que um número arrojado deve ter exatamente 8 divisores)

i) A quantidade de divisores positivos de um número, é calculada pelo produto de cada expoente dos seus fatores primos mais um. Daí, como o número tem exatamente 8 divisores, ele pode ser das formas: Seja N inteiro positivo arrojado que procuramos:

I) $N=p^7;$ p primo

II) $N = p\cdot q^3; p,q$ primos distintos

III) $N = p\cdot q\cdot t; p,q,t$ primos distintos

ii) Analisemos cada caso:

I) Se $N = p^7$, então:

$D_{(N)} = 1, p, p^2, p^3, p^4, p^5, p^6, p^7 \Rightarrow 1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 + p^6 + p^7 = 3240.$

Note que: $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 + p^6 + p^7 = \dfrac{p^8 - 1}{p - 1}$ e que para $p \geq 3 \Rightarrow \dfrac{p^8 - 1}{p - 1} \geq 3280$, já que $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 + p^6 + p^7$ é crescente. Daí, $p \geq 3$ não serve. Para $p = 2$, temos:

$1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 + p^6 + p^7 = 255 \Rightarrow p = 2$ não serve!

Logo $N = p^7$ não serve.

II)

$N = p \cdot q^3 \Rightarrow D(n) = 1, p, q, pq, q^2, p \cdot q^2, q^3, p \cdot q^3 \Rightarrow 1 + p + q + p \cdot q + q^2 + pq^2 +$
$+q^3 + pq^3 = 3240 \Rightarrow (p+1)(1 + q + q^2 + q^3) = 3240.$ Perceba que estamos atrás do menor inteiro arrojado > 0 e já temos que 2006 é um inteiro arrojado. Daí, $N \leq 2006$.

$\Rightarrow p \cdot q^3 \leq 2006 \overset{p \geq 2}{\Rightarrow} q^3 \leq 1003 \Rightarrow q \leq \sqrt[3]{1003} < 11 \Rightarrow q = 2$ ou 3 ou 5 ou 7.

Para
$q = 2 \Rightarrow (p+1) \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3) = 3240 \Rightarrow (p+1) \cdot 15 = 3240 \Rightarrow p + 1 = 816 \Rightarrow p = 215 \Rightarrow$
não serve.

Para
$q = 3 \Rightarrow (p+1) \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3) = 3240 \Rightarrow (p+1) \cdot 40 = 3240 \Rightarrow p + 1 = 81 \Rightarrow p = 80 \Rightarrow$
não serve.

Para $q = 5 \Rightarrow (p+1) \cdot (1 + 5 + 5^2 + 5^3) = 3240 \Rightarrow (p+1) \cdot 156 = 3240 \Rightarrow p \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$
não serve.

Para $q = 7 \Rightarrow (p+1) \cdot (1 + 7 + 7^2 + 7^3) = 3240 \Rightarrow (p+1) \cdot 400 = 3240 \Rightarrow p \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$
não serve.

Logo Para $N = p \cdot q^3$ não serve.

III)

$N = p \cdot q \cdot t \Rightarrow D(N) = 1, p, q, t, pq, qt, tp, pqt \Rightarrow 1 + p + q + t + pq + qt + tp + pqt = 3240 \Rightarrow$
$\Rightarrow (p+1)(q+1)(t+1) = 3240.$ Então temos que achar três números posteriores a três

primos, tal que o produto desses números é 3240. Então esses primos são divisores positivos de 3240 menos um. Então vamos ver quais são os $D(3240)–1$ que são primos:

		1
3240	2	2
1620	2	4
810	2	8
405	3	3,6,12,24
135	3	9,18,36,72
45	3	27,54,108,216
15	3	81,162,324,648
5	5	5,10,20,40,15,30,60,120, 45, 90, 180, 360, 135, 270, 540, 1080, 405, 810, 1620, 3240.
1		

$D(3240)-1 = 0,1,2,3,4,5,7,8,9,11,14,17,19,23,26,29,35,39,44,53,59,71,80,89,107,$ $119,134,161,179,215,269,...$ Note que no mínimo $(p + 1)(q + 1)$ é 12 (quando $p = 2$ e $q = 3$), então no máximo $t + 1$ é 270 $\Rightarrow t$máx = 269.

Os primos possíveis são: 2, 3, 5, 7, 11, 17, 19, 23, 29, 53, 59, 71, 89, 107, 179, 269.

Para $t = 269 \Rightarrow (p + 1)(q + 1) = 12 \Rightarrow p = 2$ e $q = 3 \Rightarrow N = 1614$

Para $t = 179 \Rightarrow (p + 1)(q + 1) = 18 \Rightarrow p = 2$ e $q = 5 \Rightarrow N = 1790$

Para $t = 107 \Rightarrow (p + 1)(q + 1) = 30 \Rightarrow \nexists$ p, q primos

Para $t = 89 \Rightarrow (p + 1)(q + 1) = 36 \Rightarrow p = 2$ e $q = 11 \Rightarrow N = 1958$

Para $t = 71 \Rightarrow (p + 1)(q + 1) = 45 \Rightarrow \nexists$ p, q primos

Para $t = 59 \Rightarrow (p + 1)(q + 1) = 54 \Rightarrow p = 2$ e $q = 17 \Rightarrow N = 2006$

Para $t = 53 \Rightarrow (p + 1)(q + 1) = 60 \Rightarrow p = 2$ e $q = 19 \Rightarrow N = 2014$

Para $t = 29 \Rightarrow (p + 1)(q + 1) = 108 \Rightarrow p = 5$ e $q = 17 \Rightarrow N = 2465$

Para $t = 23 \Rightarrow (p + 1)(q + 1) = 135 \Rightarrow \nexists$ p, q primos

Para t = 19,17, 11, 7, 5, 3 ou 2 é análogo aos anteriores.

Daí, o menor N é 1614.

iii) Então o menor inteiro positivo arrojado é 1614.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4: PEDRO PAULO GONDIM CARDOSO (SALVADOR – BA)
(Interpretação que um número arrojado pode ter mais que 8 divisores)

Inicialmente observa-se que 1260 é um número arrojado, pois 1260 + 630 + 420 + 315 + 252 + 210 + 90 + 63 = 3240. Agora deve-se provar que não há nenhum número arrojado menor que 1260.

Um número arrojado tem como divisores a, b, c, d, e, f, g, h tais que $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}+\frac{1}{g}+\frac{1}{h}\right)K = 3240,$ onde K é o valor do número arrojado. Se existir um número arrojado menor que 1260, devem existir naturais não nulas a, b, c, d, e, f, g, h tais que

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}+\frac{1}{g}+\frac{1}{h} > \frac{3240}{1260} = \frac{18}{7} = 2{,}571428.$$

Se existir um número arrojado menor que K, ele não poderia ser ímpar, senão os menores valores para a, b, c, d, e, f, g, h seriam 1, 3, 5, 7, 11, 13, 15 e 17 e $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15} < 2{,}3 < \frac{3240}{1260}$. Se existisse um número arrojado menor que K, ele teria que ser múltiplo de 3, senão as menores valores para a, b, c, d, e, f, g, h seriam 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11 e $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11} < 2{,}5 < \frac{3240}{1260}$. Então, se existisse um número arrojado menor que 1260, ele teria que ser múltiplo de 6.

O menor valor possível para K corresponde aos menores valores possíveis para a, b, c, d, e, f, g, h, que são 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Então:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}+\frac{1}{g}+\frac{1}{h}\right)K = 3240 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)K = 3240 \Rightarrow \frac{2283}{840}K = 3240 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = \frac{3240\cdot 840}{2283} \Rightarrow K \cong 1191{,}1.$$

Se houver um número arrojado menor que 1260, ele deve ser maior que 1191, 1 e múltiplo de 6. Então as únicas possibilidades para K são 1194, 1200, 1206, 1212, 1218, 1224, 1230, 1236, 1242, 1248 e 1254;

- Se K = 1194.

A soma dos oito maiores (e únicos) divisores de 1194 é 1194 + 597 + 398 + 199 + 6 + 3 + 2 + 1 = 2400 < 3240. Portanto 1194 não é arrojado.

- Se K = 1200.

A soma dos oito maiores divisores de 1200 é 1200 + 600 + 400 + 300 + 240 + 200 + 150 + 120 = 3210 < 3240. Portanto 1200 não é arrojado.

- Se K = 1206.

A soma dos oito maiores divisores de 1206 é 1206 + 603 + 402 + 201 + 134 + 67 + 18 + 9 = 2640 < 3240. Portanto 1206 não é arrojado.

- Se K = 1212.

A soma dos oito maiores divisores de 1212 é 1212 + 606 + 404 + 303 + 202 + 101 + 12 + 6 = 2846 < 3240. Portanto 1212 não é arrojado.

- Se K = 1218.

A soma dos oito maiores divisores de 1218 é 1218 + 609 +406 + 203 + 174 + 87 + 58 + 42 = 2797 < 3240. Portanto 1218 não é arrojado.

- Se $K = 1224$.

A soma dos oito maiores divisores de 1224 é 1224 + 612 + 408 + 306 + 204 + 153 + 136 + 102 = 3145 < 3240. Portanto 1224 não é arrojado.

- Se $K = 1230$.

A soma dos oito maiores divisores de 1230 é 1230 + 615 + 410 + 246 + 205 + 123 + 82 + 41 = 2952 < 3240. Portanto 1230 não é arrojado.

- Se $K = 1236$.

A soma dos oito maiores divisores de 1236 é 1236 + 618 + 412 + 309 + 206 + 103 + 12 + 6 = 2902 < 3240. Portanto 1236 não é arrojado.

- Se $K = 1242$.

A soma dos oito maiores divisores de 1242 é 1242 + 621 + 414 + 207 + 138 + 69 + 54 + 46 = 2791 < 3240. Portanto 1242 não é arrojado.

- Se $K = 1248$.

A soma dos oito maiores divisores de 1248 é 1248 + 624 + 416 + 312 + 208 + 156 + 104 + 96 = 3164 < 3240. Portanto 1248 não é arrojado.

- Se $K = 1254$.

A soma dos oito maiores divisores de 1254 é 1254 + 627 + 418 + 209 + 114 + 66 + 57 + 38 = 2783 < 3240. Portanto 1254 não é arrojado.

Como a soma dos oito maiores divisores é menor que 3240, em todas as possibilidades, é evidente que a soma de quaisquer outros oito divisores também será menor que 3240.

Portanto não há nenhum inteiro positivo menor que 1260 que seja arrojado. Logo o menor número inteiro positivo arrojado é 1260.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5: LEANDRO FARIAS MAIA (FORTALEZA – CE)

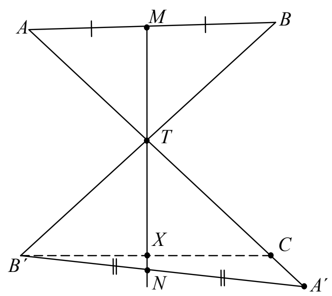
Vamos dividir em duas partes:

Parte 1:

Os lados opostos de de P são paralelos.

Seja AB um lado de P e $A'B'$ seu lado oposto.

Suponha que AB não seja paralelo a $B'A'$. Por B', trace uma paralela ao lado AB, até trocar AA' em C. Sendo M e N pontos médios dos lados AB e $A'B'$, respectivamente, temos:



$$AB \,//\, B'C \Rightarrow \frac{B'X}{BM} = \frac{XT}{TM} = \frac{XC}{AM} \Rightarrow B'X = XC$$

Mas veja que: $\begin{cases} B'X = XC \\ B'N = NA' \end{cases} \Rightarrow NX \,//\, CA'$, absurdo $(NX \cap CA' = T)$.

Portanto, devemos ter: $AB \,//\, A'B'$.

Parte 2:

$AB = A'B'$.

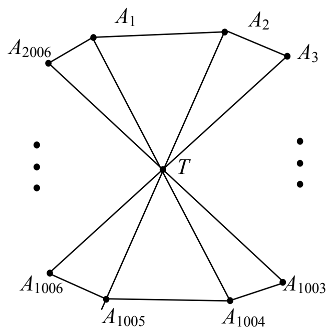
Numerando os vértices, temos que:

A_{1003+i} é oposto de $A_i, 1 \le i \le 1003$

Temos:

$A_1A_2 \,//\, A_{1004}A_{1005}, A_2A_3 \,//\, A_{1005}A_{1006}, \ldots, A_{1003}A_{1004} \,//$

$// \, A_{2006}A_1$.



Logo:

$$\frac{A_1T}{TA_{1004}} = \frac{A_2T}{TA_{1005}} = \frac{A_3T}{TA_{1006}} = \ldots = \frac{A_{1003}T}{TA_{2006}} = \frac{A_{1004}T}{TA_1} \Rightarrow \frac{A_1T}{TA_{1004}} = \frac{A_{1004}T}{TA_1} \Rightarrow A_1T = TA_{1004}.$$

Portanto teremos:

$$1 = \frac{A_1T}{TA_{1004}} = \frac{A_2T}{TA_{1005}} = \frac{A_3T}{TA_{1006}} = \ldots = \frac{A_{1003}T}{TA_{2005}}$$

Mas: $\dfrac{A_iT}{TA_{1003+i}} = \dfrac{A_iA_{i+1}}{A_{1003+i}A_{1004+i}} = 1 \Rightarrow A_iA_{i+1} = A_{1003+i}A_{1004+i}$, o que acaba, pois A_iA_{i+1} e A_{1004+i} são lados opostos.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6: JOSÉ MARCOS ANDRADE FERRARO (SÃO PAULO - SP)

Vamos listar os primeiros termos para estabelecer uma base de indução.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
f(*n*)	0	2	3	5	7	8	10	11	13	15	16	18

Lema: $n = f(r)$ ou $n = f(r) + 1$.

Prova: é equivalente a $f(r+1) = (f(r) + 1$ ou $f(r) + 2)$.

Suponha que isto aconteça para $r < n - 1$.

Então $f(n) = 2n - f(r') + r'$, $f(n-1) = 2n - 2 - f(r) + r \Rightarrow$

$f(n) - f(n-1) = 2 - f(r') + r' + f(r) - r$.

Temos $r' = r$ ou $r' = r+1$, $n = f(r)$ ou $n = f(r)+1$ e $(f(r') = f(r)+1$ ou $f(r')+2)$. Se $r' = r, f(n) - f(n-1) = 2.$
Se $r' = r+1$, $f(n) - f(n-1) = 3 + f(r) - f(r') = (2$ ou $1)$, o que termina a prova do Lema.
Vamos agora provar por indução que $k\phi - 1 < f(k) < k\phi + 1,$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Suponha que isso vale para $0 \le k \le n-1$.

Se $n = f(r), r\phi - 1 < n < r\phi + 1 \Rightarrow \dfrac{n+1}{\phi} > r > \dfrac{n-1}{\phi}$

$$f(n) = 2n - f(r) + r = 2n - n + r = n + r$$

$$n + \frac{n+1}{\phi} \ge n + r \ge n + \frac{n-1}{\phi} \Rightarrow$$

$$n\phi + \frac{1}{\phi} > f(n) \ge n\phi - \frac{1}{\phi} \Rightarrow \text{ como } 1 > \frac{1}{\phi}, n\phi + 1 > f(n) > n\phi - 1.$$

Se $n = f(r)+1, r\phi - 1 < n-1 < r\phi + 1 \Rightarrow \dfrac{n}{\phi} > r > \dfrac{n-2}{\phi}$

$$f(n) = 2n - n + 1 + r \Rightarrow f(n) = n + 1 + r$$

$$n + 1 + \frac{n}{\phi} > n + 1 + r > n + 1 + \frac{n-2}{\phi} \Rightarrow$$

$$n\phi + 1 > f(n) \ge n\phi + \frac{\phi - 2}{\phi} > n\phi - 1, \text{ cqd.}$$

Assim, $\phi n + 1 > f(n) > \phi n - 1, \forall n \ge 0.$
Como $f(n) \in \mathbb{N}$, $f(n) > \phi n - 1$ e $\phi n - 1 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q},$ temos $f(n) \ge \lfloor \phi n - 1 \rfloor + 1 = \lfloor \phi n \rfloor.$
Se $m \le \phi n, m < \phi n$ pois $m \in \mathbb{N}$ e $\phi n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Assim $m \le \lfloor \phi n \rfloor$ daí $f(n) \ge \lfloor \phi n \rfloor \ge m.$ Logo se $m \le \phi n, f(n) \ge m,$ e portanto o jogo é equilibrado.
Por outro lado, se $m > \phi n + 1 > f(n),$ o jogo é desequilibrado, cqd.

XXVIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Problemas e Soluções da Primeira Fase – Nível Universitário

PROBLEMA 1

Calcule $\int_{-1}^{1} \frac{e^x - 1 - x}{(e^x - 1)\cdot x}\,dx$

PROBLEMA 2

Seja *N* um inteiro positivo. Calcule, em função de *N*, o volume do sólido definido por:

$$\begin{cases} x, y, z \in [0, +\infty) \\ \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor z \rfloor \le N \end{cases}$$

PROBLEMA 3

Dada $f:\mathbb{R} \to [0, +\infty)$ duas vezes diferenciável com $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $1 + f(x) = \frac{1}{f''(x)}$, $\forall x \in [0,1]$, mostre que $f(1) < \frac{3}{2}$.

PROBLEMA 4

Dada uma hipérbole e uma reta não paralela às assíntotas, determine o lugar geométrico dos pontos médios das cordas da hipérbole paralelas à reta dada.

Obs: Uma *corda* de uma hipérbole é um segmento cujos extremos pertencem à hipérbole.

PROBLEMA 5

As funções $y_1(t) = (1+t^2)\cdot e^{t^2}$, $y_2(t) = (t+t^2)\cdot e^{t^2}$ e $y_3(t) = (-1-t+t^2)\cdot e^{t^2}$ são soluções da equação diferencial $y''(t) + a(t)\cdot y'(t) + b(t)\cdot y(t) = c(t)$, onde $a(t), b(t), c(t)$ são funções duas vezes diferenciáveis.

Determine uma função duas vezes diferenciável $y(t)$ tal que

$y''(t) + a(t)\cdot y'(t) + b(t)\cdot y(t) = c(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

PROBLEMA 6

Escolha três pontos x_1, x_2, x_3 aleatoriamente, independentemente e com distribuição uniforme no intervalo [0, 1]. Determine, em função do número positivo *m*, a probabilidade de que

$$\min\{|x_1 - x_2|, |x_1 - x_3|, |x_2 - x_3|\} > m.$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

Seja $f(x)=\dfrac{e^x-1-x}{(e^x-1)\cdot x}$. Temos $f(-x)=\dfrac{e^{-x}-1+x}{(e^{-x}-1)\cdot(-x)}=\dfrac{xe^x-e^x+1}{(e^x-1)\cdot x}$, logo

$f(x)+f(-x)=\dfrac{xe^x-x}{(e^x-1)\cdot x}=1$.

Assim, $\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_0^1 (f(x)+f(-x))dx=\int_0^1 1dx=1$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:

O sólido é a união dos cubos unitários $[i, i+1) \times [j, j+1) \times [k, k+1)$ para i, j, k inteiros não negativos, $i+j+k \le N$. Como cada cubinho tem volume 1, o volume do sólido é igual ao número de triplas (i, j, k) como acima.

O número de triplas (e portanto o volume) é igual a $\dbinom{N+3}{3}=(N+1)(N+2)(N+3)/6$.

Isto pode ser demonstrado de várias formas. Por exemplo, podemos pensar que temos uma fileira de $N+3$ quadrados e vamos escolher 3 posições e botar um marcador em cada uma delas: i será o número de quadrados antes do primeiro marcador, j o número de quadrados entre o primeiro e o segundo marcadores e k o número de quadrados entre o segundo e o terceiro marcadores. Claramente, a cada configuração corresponde uma tripla e vice-versa.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

Como $f(x) \ge 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $0<\dfrac{1}{1+f(x)}=f''(x)$, logo f' é crescente em $[0,1]$, o que implica que $f'(x) > 1$ para $x > 0$, ou seja f também é crescente em $[0,1]$.

Assim, para $x > 0$, temos $0<\dfrac{1}{1+f(x)}=f''(x)=\dfrac{1}{1+f(x)}<1$, logo

$$\int_0^x 0dt<\int_0^x f''(t)dt<\int_0^x 1dt \quad \Leftrightarrow \quad 0<f'(x)-f'(0)<x \Leftrightarrow \quad 1<f'(x)<x+1 \Rightarrow$$

$\int_0^x 1dt<\int_0^x f'(t)dt<\int_0^x (t+1)dt \Leftrightarrow x<f(x)<\dfrac{x^2}{2}+x$. Em particular, $f(1)<\dfrac{3}{2}$.

PRIMEIRA SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:

Seja r a reta dada, não paralela às assíntotas. Considere o plano euclidiano como subconjunto do plano projetivo, da maneira usual. Seja P o ponto de r sobre a reta do infinito. O feixe de retas paralelas a r corresponde ao feixe de retas do plano projetivo que passam por P. Para cada uma das retas do feixe, que corta a hipérbole em dois pontos A e B, o ponto médio M do segmento AB corresponde ao conjugado harmônico de P em relação a A e B. Logo M pertence à reta polar de P em relação à hipérbole. Seja p essa reta polar. Como o pólo da reta do infinito é o centro O da hipérbole, concluímos que p passa por O. Há, portanto, dois casos a considerar:

1) Se existe uma tangente à hipérbole paralela à reta r, com ponto de tangência T (e portanto existirá uma outra tangente paralela a r no ponto T', simétrico de T em relação a O), o lugar geométrico é a reta OT menos o segmento $\overline{TT'}$.
2) Caso contrário, o lugar geométrico é uma reta completa passando por O, que pode ser obtida traçando-se uma corda arbitrária paralela a r (neste caso toda reta paralela corta a hipérbole em dois pontos distintos, um em cada ramo da hipérbole) e unindo seu ponto médio a O.

SEGUNDA SOLUÇÃO:

Após uma mudança de coordenadas afins, podemos considerar que a hipérbole tem equação

$xy = 1$. Sendo m o coeficiente angular da reta r, queremos determinar o lugar geométrico dos pontos médios das intersecções das retas de equações $y = mx + t$ ($t \in R$) com a hipérbole. Sejam (x_1, y_1) e (x_2, y_2) esses pontos de intersecção. Então x_1 e x_2 são as raízes da equação

$x(mx + t) = 1 \Leftrightarrow mx^2 + tx - 1 = 0$ (1). Logo a abscissa do ponto médio é igual a $-\dfrac{t}{2m}$, e sua ordenada vale $\dfrac{y_1 + y_2}{2} = \dfrac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}{2} = \dfrac{x_1 + x_2}{2x_1x_2} = \dfrac{-\frac{t}{2m}}{-\frac{2}{m}} = \dfrac{t}{4}$. Logo o ponto médio pertence à reta de equação $y = -\dfrac{m}{2}x$. Reciprocamente, um ponto dessa reta pertence ao lugar geométrico desde que a equação (1) tenha duas raízes reais, ou seja, quando $t^2 + 4m > 0$. Assim, se $m > 0$, o lugar geométrico é toda a reta de equação $y = -\dfrac{m}{2}x$. Quando $m < 0$, desta reta devem ser retirados os pontos para os quais $-2\sqrt{-m} \le t \le 2\sqrt{-m}$, ou seja, para os quais $\dfrac{\sqrt{-m}}{m} \le x \le \dfrac{\sqrt{-m}}{m}$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5:

Podemos tomar y_1 como solução particular e $y_2 - y_1$ e $y_3 - y_1$ como soluções linearmente independentes da equação homogênea associada $y''(t) + a(t)\cdot y'(t) + b(t)\cdot y(t) = 0$. Assim a solução geral da equação é

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$, $c_1 + c_2 + c_3 = 1$ ou, equivalentemente,

$y(t) = (c_4 + c_5\, t + t^2)\cdot\, e^{t^2}$.

Temos $y(0) = c_4$ e $y'(0) = c_5$, donde as condições do enunciado nos dão $y = t^2 \cdot e^{t^2}$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6:

Seja X=[0, 1]^3. Temos $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6$, onde

$A_1 = \{(x,y,z) \in X \mid x \le y \le z\}$, $A_2 = \{(x,y,z) \in X \mid x \le z \le y\}$,

$A_3 = \{(x,y,z) \in X \mid y \le x \le z\}$, $A_4 = \{(x,y,z) \in X \mid y \le z \le x\}$,

$A_5 = \{(x,y,z) \in X \mid z \le x \le y\}$ e $A_6 = \{(x,y,z) \in X \mid z \le y \le x\}$.

Os conjuntos $A_k, 1 \le k \le 6$ têm todos volume 1/6.

Seja agora $Y = \{(x_1,x_2,x_3) \in X \mid \min\{|x_1 - x_2|, |x_1 - x_3|, |x_2 - x_3|\} > m\}$.

Temos

$Y = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_6$, onde $B_k = Y \cap A_k, 1 \le k \le 6$.

Todos os conjuntos $B_k, 1 \le k \le 6$, têm o mesmo volume. Vamos então calcular o volume do conjunto B_1. Como X tem volume 1, a probabilidade desejada será $6 \cdot vol(B_1)$.

Temos $B_1 = \{(x,y,z) \in X \mid y > x + m, z > y + m\}$. Claramente, se $m \ge 1/2$, B_1 é vazio, e portanto a probabilidade desejada é 0 para todo $m \ge 1/2$.

Suponha agora $0 \le m \le 1/2$. Considere a translação $f : B_1 \to X$ dada por $f(x,y,z) = (x, y - m, z - 2m)$.

Temos $f(B_1) = \{(x,y,z) \in [0,1-2m]^3 \mid x < y < z\}$, e portanto $f(B_1)$ tem o mesmo volume de $\{(x,y,z) \in [0,1-2m]^3 \mid x \le y \le z\} = g(A_1)$, onde g é a homotetia dada por $g(p) = (1-2m)p$. Assim, temos $vol(B_1) = vol(f(B_1)) = vol(g(A_1)) = (1-2m)^3 \cdot vol(A_1) = (1-2m)^3/6$, e logo, para $0 \le m \le 1/2$, a probabilidade desejada é igual a $6 \cdot vol(B_1) = (1-2m)^3$.

XXVIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e Soluções da Segunda Fase – Nível Universitário

PROBLEMA 1:

Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função integrável e crescente. Prove que

$$\int_0^1 xf(x)dx \geq \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx$$

PROBLEMA 2:

Prove que, para todo inteiro $n \geq 2$, o número de matrizes quadradas 2×2 com entradas inteiras e pertencentes ao conjunto {0, 1, 2, …, n – 1} que têm determinante da forma kn + 1 para algum k inteiro é dado por $n^3 \cdot \prod_{\substack{p \text{ primo} \\ p|n}} (1-\frac{1}{p^2})$.

PROBLEMA 3:

Uma mesa de bilhar tem o formato de elipse e não tem caçapas. Quando uma bola bate em um ponto P na borda da mesa, ela segue uma direção simétrica em relação à reta normal à elipse em P. Prove que se uma bola parte de um ponto A da elipse e, após bater na mesa nos pontos B e C, retorna a A, então ela baterá novamente em B.

PROBLEMA 4:

Seja p um polinômio irredutível em $\mathbb{Q}[x]$ de coeficientes racionais e grau maior do que 1. Prove que se p admite duas raízes r e s cujo produto é 1 então o grau de p é par.

PROBLEMA 5:

Seja $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ uma função crescente e bijetora. Prove que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}$ converge se, e somente se, a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ converge, sendo f^{-1} a função inversa de f.

PROBLEMA 6:

Considere as matrizes

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix} \text{ e } B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

Prove que, para $n > 1$, não existem inteiros $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ e $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n$ com $a_2, a_3, \ldots, a_n$ e $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ não nulos tais que

$$A^{a_1} \cdot B^{b_1} \cdot A^{a_2} \cdot B^{b_2} \cdot \ldots \cdot A^{a_n} \cdot B^{b_n} = I,$$

onde I é a matriz identidade de ordem 2.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1: LEVI MÁXIMO VIANA (FORTALEZA – CE)

Chame $F(x) = \int_0^x tf(t)dt$ e $G(x) = \int_0^x f(t)dt, x \in [0,1]$. Veja então que $F'(x) = xf(x) = xG'(x)$, mas como $f(x) = G'(x)$ é crescente, temos $f(x) \geq f(x^2)$, já que $0 \leq x \leq 1$, logo $F'(x) \geq xG'(x^2) = \dfrac{G(x^2)'}{2}$. Integrando de 0 a 1 temos:

$$\int_0^1 F'(x)dx \geq \int_0^1 \frac{G(x^2)'}{2}dx \Rightarrow F(1) - F(0) \geq \frac{G(1^2) - G(0^2)}{2} \Rightarrow F(1) \geq \frac{G(1)}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 xf(x)dx \geq \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx$$. cqd.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2: MURILO VASCONCELOS ANDRADE (MACEIÓ – AL)

Primeiramente provaremos que o enunciado vale para n primo:

Seja n primo e $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ uma matriz cujo determinante é da forma $k \cdot n + 1$, temos então que $a \cdot d - b \cdot c \equiv 1 \pmod{n}$.

Seja $h(i)$ o número de pares ordenados de inteiros no conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ cujo produto é igual a $i \pmod{n}$. Desta maneira, temos que o número de matrizes satisfazendo as condições do enunciado é:

$$\sum_{i=0}^{n-1} h(i) \cdot h(i+1)$$

(Onde cada $h(i)$ representa o número de escolhas possíveis para b e c, tais que $bc \equiv i \pmod{n}$ e $h(i+1)$ representa o número de escolhas para a e d, tais que $ad \equiv i + 1 \pmod{n}$).

Naturalmente $h(0) = 2n - 1$ (os possíveis pares são (0,0), (0, 1), ...,(0, n –1),

(1, 0), (2, 0),..., (n – 1, 0).

Alem disso, $h(i)=\varphi(n),$ para $1\le i\le n-1$ (aqui φ representa a função φ de Euler, que associa a cada inteiro positivo no número de inteiros menores que n e que são primos com n. No caso de n primo, $\varphi(n)=n-1).$ Vamos provar isto:

Seja k primo com n. Vamos provar que existe k' tal que $k\cdot k'\equiv i(\operatorname{mod} n)$: a seqüência $\left(k^r \operatorname{mod} n\right)$ assume um número finito de valores (entre 0 e n –1). Existem então dois números iguais na seqüência digamos $k^{n_1}=k^{n_2}$ com $n_2>n_1)$. Assim, $k\cdot\left(ik^{n_2-n_1-1}\right)=i$ e portanto $h(i)\ge\varphi(n).$ Como $(2n-1)+\varphi(n)\cdot(n-1)=n^2,$ segue que não podemos ter $h(i)>\varphi(n)$ para algum i. Assim, $\sum_{r=0}^{n-1}h(i)\cdot h(i+1)=(2n-1)(n-1)+\sum_{i=1}^{n-2}(n-1)\cdot(n-1)+(n-1)(2n-1)=$

$$=(n-1)\left[(n-1)(n-2)+4n-2\right]=n(n-1)(n+1)=n^3\prod_{\substack{p\text{ primo}\\ p\mid n}}\left(1\text{-}\frac{1}{p^2}\right)$$

O resultado então fica provado para n primo.

Vamos agora mostrar por indução que o resultado vale para $n=p^k$ potência de primo. Para $k=1$ já foi provado. Suponha que $k\ge 2$ e que vale para p^{k-1}.

Seja $n=p^k$ e $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p^{k-1}\cdot n_1+a' & p^{k-1}\cdot n_2+b'\\ p^{k-1}\cdot n_3+c' & p^{k-1}\cdot n_4+d'\end{pmatrix}$, com $ad-bc\equiv 1(\operatorname{mod} p^k).$

$\Rightarrow a'd'-b'c'\equiv 1(\operatorname{mod} p^{k-1}).$

Assim, como $p^{2k-2}\equiv 0(\operatorname{mod} p^k),$

$$ad-bc\equiv p^{k-1}(n_1\cdot d'+n_4\cdot a'-b'\cdot n_3-n_2\cdot c')+a'd'-b'c\equiv p^{k-1}(n_1d'+n_4a'-b'n_3-n_2c')+$$
$$+\ell\cdot p^{k-1}+1\equiv 1(\operatorname{mod} p^k)\Rightarrow n_1d'+n_4a'-b'n_3-n_2c'+\ell\equiv 0(\operatorname{mod} p)$$

(aqui ℓ é tal que $\ell \cdot p^{k-1}+1=a'd'-b'c'$).

Como $a'\cdot d'-b'\cdot c\equiv 1(\text{mod}\, p^{k-1})$ existem (por hipótese de indução), $p^{3(k-1)}\left(1-\dfrac{1}{p^2}\right)$ maneiras de escolhermos a',d',b' e c'. Fixando-se estes valores (e portanto ℓ também) temos que um deles é primo com $n=p^k$, pois, caso não fosse assim, $a'd'-b'c'\not\equiv 1(\text{mod}\, p)$, absurdo! Seja $(a, n) = 1$, por exemplo. Existem então p valores possíveis (módulo p) para cada um dos n_1,n_2,n_3 e para cada combinação destes, apenas um valor para n_4 tal que $n_1d'+n_4a'-b'n_3-n_2c'+\ell\equiv 0(\text{mod}\, p)$.

Existem então ao todo $p^{3(k-1)}\cdot\left(1-\dfrac{1}{p^2}\right)\cdot p\cdot p\cdot p=p^{3k}\left(1-\dfrac{1}{p^2}\right)$ maneiras de escolhermos a, b, c, d. Isto termina nossa prova por indução.

Para $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_k^{a_k}$ é fácil ver que $ad-bc\equiv 1(\text{mod}\, n)\Leftrightarrow ad-bc\equiv 1(\text{mod}\, p_i^{a_i})$, $\forall i\in\{1,2,...,k\}$ e portanto o número de matrizes que satisfazem as condições do enunciado é igual a $\prod_{i=j}^{k}p_i^{3a_i}\left(1-\dfrac{1}{p_i^2}\right)=n^3\cdot\prod_{\substack{p \text{ primo}\\ p|n}}\left(1-\dfrac{1}{p^2}\right)$, cqd.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3: EDUARDO POÇO (SÃO PAULO – SP)

$\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ têm o mesmo ângulo com a normal em B $\Leftrightarrow$ têm o mesmo ângulo com a tangente à elipse em B $\Leftrightarrow$

$\dfrac{B-A}{|B-A|}\times V_T=V_T\times\dfrac{C-B}{|C-B|}\Leftrightarrow\left[\dfrac{B-A}{|B-A|}+\dfrac{C-B}{|C-B|}\right]\times V_T=0$, sendo V_T o vetor tangente à elipse em B.

Parametrizando a elipse: $P(t)=(k\cos t,\text{sen}\, t)$, $0\le t\le 2\pi$, sem perda de generalidade. Vetor tangente no ponto $P(t)$: $V(t)=\dfrac{d}{dt}P(t)=(-k\,\text{sen}\, t,\cos t)$.

Sejam $P(a)=A$, $P(b)=B$, $P(c)=C$. As hipóteses sobre refletir de *AB* para *BC* e sobre refletir de *BC* para *CA* se tornam:

$$\left[\frac{B-A}{|B-A|}+\frac{C-B}{|C-B|}\right]\times V(b)=0 \qquad \left[\frac{C-B}{|C-B|}+\frac{A-C}{|A-C|}\right]\times V(c)=0$$

Temos que provar o seguinte, que *CA* reflete em *AB*:

$$\left[\frac{A-C}{|A-C|}+\frac{B-A}{|B-A|}\right]\times V(a)=0$$

Distribuindo o produto vetorial (vamos denotar como um escalar, pois todos os vetores em jogo estão no mesmo plano e os produtos vetoriais terão a mesma direção):

$$P(x)\times V(y)=(k\cos x,\operatorname{sen}x)\times(-k\operatorname{sen}y,\cos y)=k\cos(x-y)$$

Após dividir por *k*, as hipóteses se tornam:

$$\frac{1-\cos(a-b)}{|B-A|}+\frac{\cos(c-b)-1}{|C-B|}=0$$

$$\frac{1-\cos(b-c)}{|C-B|}+\frac{\cos(a-c)-1}{|A-C|}=0$$

E queremos provar:

$$\frac{1-\cos(c-a)}{|A-C|}+\frac{\cos(b-a)-1}{|B-A|}=0$$

Para provar isso, basta somar as hipóteses.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4: THIAGO BARROS RODRIGUES COSTA (FORTALEZA – CE)

Seja *p* um polinômio irredutível em $\mathbb{Q}[x]$ admitindo duas raízes *r* e *s* cujo produto é $1\left(r=\frac{1}{s}\right)$.

Temos $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ (podemos supor *p* mônico sem perda de generalidade).

Como *p* é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$, *p* deve ser igual ao polinômio minimal de *r* e *s* sobre $\mathbb{Q}\Rightarrow$ se $g(x)\in\mathbb{Q}[x]$ é tal que $g(s)=0$ ou $g(r)=0$, então $p(x)\,|\,g(x)$.

$$\text{Seja } g(x)=\frac{1}{a_0}\cdot x^n p\left(\frac{1}{x}\right).$$

É fácil ver que todas as potências de x serão $\geq 0 \Rightarrow g(x)$ é um polinômio sobre $\mathbb{Q}[x]$. Mas

$$g(r) = \frac{1}{a_0}\ r^n\left(p\left(\tfrac{1}{r}\right)\right) = \frac{1}{a_0} r^n \cdot p(s) = 0 \Rightarrow g(r) = 0 \Rightarrow p(x) \mid g(x).$$

Mas g é mônico e tem o mesmo grau de $p \Rightarrow$

$$p(x) = g(x) \Rightarrow p(x) = \frac{1}{a_0} x^n \cdot p\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

Se α é raiz de $p(x)$ (obviamente $\alpha \neq 0$ pois p é irredutível e tem grau > 1), então,

$$p\left(\tfrac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{a_n} \cdot \frac{1}{\alpha^n} \cdot p(\alpha) = 0.$$

Logo as raízes de p sempre aparecem aos pares $\alpha, \tfrac{1}{\alpha}$. Além disso,

$$\left(x-\alpha\right)^k \Big| p(x) \Rightarrow x^k\left(\frac{1}{x}-\alpha\right)^k = \left(-\alpha\right)^k\left(x - \frac{1}{\alpha}\right)^k \Big| \frac{1}{a_0} x^n p\left(\frac{1}{x}\right) = p(x).$$

Veja que $\alpha = \tfrac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha = 1$ ou -1. Mas nenhum desses valores pode ser raiz de p pois o polinômio minimal deles sobre $\mathbb{Q}$ tem grau 1, e p tem grau > 1.

$\Rightarrow$ as raízes aparecem aos pares $\left(\alpha, \tfrac{1}{\alpha}\right)$

$\Rightarrow p$ tem um número par de raízes $\Rightarrow p$ tem grau par.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5: EDUARDO POÇO (SÃO PAULO – SP)

Note que $f(0) = 0$, e toda função crescente e bijetora é contínua, e logo integrável em qualquer intervalo finito.

Como $\tfrac{1}{f(x)}$ é decrescente, pelo critério da integral $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$ converge se e somente se $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{f(x)} dx$ converge. Por outro lado,

$$\int_1^{\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x^2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{f^{-1}(x)}{x^2} dx, \text{ e}$$

$$f^{-1}(n)/4n^2 \leq f^{-1}(n)\Big/(n+1)^2 \leq \int_n^{n+1} f^{-1}(x)/x^2 dx \leq f^{-1}(n+1)/n^2 \leq 4 f^{-1}(n+1)/(n+1)^2,$$

donde

$\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{-1}(n)}{n^2} \le \int_1^{\infty}\frac{f^{-1}(x)}{x^2}dx \le 4\sum_{n=1}^{\infty} f^{-1}(n+1)\big/(n+1)^2 = 4\sum_{n=2}^{\infty} f^{-1}(m)\big/m^2 \le$ $\le 4\sum_{m=1}^{\infty} f^{-1}(m)\big/m^2$, e, em particular, $\int_1^{\infty}\frac{f^{-1}(x)}{x^2}dx$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f^{-1}(n)\big/(n)^2$ converge. Basta agora relacionar a convergência de $\int_1^{\infty}\frac{1}{f(x)}dx$ e de $\int_1^{\infty}\frac{f^{-1}(x)}{x^2}dx$, que são integráveis em intervalos finitos.

Um resultado conhecido (que pode ser facilmente verificado derivando) é a fórmula da primitiva da inversa:

$$\int g^{-1}(x)dx = xg^{-1}(x) - G\left(g^{-1}(x)\right), \text{ sendo } G(x) \text{ uma primitiva de } g(x)$$

Utilizando $g^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$, temos então $g(x) = f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$, e assim:

$$\int_1^b \frac{1}{f(x)}dx = b\frac{1}{f(b)} - 1\frac{1}{f(1)} - G\left(\frac{1}{f(b)}\right) + G\left(\frac{1}{f(1)}\right)$$

$$\int_1^b \frac{1}{f(x)}dx = \frac{b}{f(b)} - \frac{1}{f(1)} - \int_{\frac{1}{f(1)}}^{\frac{1}{f(b)}} f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

Essa relação também pode ser percebida diretamente do gráfico de $1/f(x)$, que é uma função decrescente. Com a transformação $x = 1/y$:

$$\int_1^b \frac{1}{f(x)}dx = \frac{b}{f(b)} - \frac{1}{f(1)} + \int_{f(1)}^{f(b)} \frac{f^{-1}(y)}{y^2}dy \text{ (I).}$$

Suponha agora que $\int_1^{\infty} \frac{1}{f(x)} dx$ converge. Logo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{f(x)} = 2 \lim_{x\to\infty} \int_{x/2}^{x} \frac{1}{f(x)} dt \le 2 \lim_{x\to\infty} \int_{x/2}^{x} \frac{1}{f(t)} dt \le 2 \lim_{x\to\infty} \int_{x/2}^{\infty} \frac{1}{f(t)} dt = 0$$

Então $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{f(x)} = 0$. Fazendo $b \to \infty$ em (I), temos a integral à esquerda convergindo e a parcela $\frac{b}{f(b)}$ indo para zero, o que resulta num valor finito para $\int_1^{\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x^2} dx$, donde concluímos que essa integral converge.

Da mesma forma, se $\int_1^{\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x^2} dx$ converge, prova-se que $\lim_{x\to\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x} = 0$, e como *f* é crescente e bijetora, podemos ir para o infinito com $x = f(y)$, de onde tiramos $\lim_{y\to\infty} \frac{f^{-1}(f(y))}{f(y)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{y\to\infty} \frac{y}{f(y)} = 0$. Novamente aplicando o limite $b \to \infty$ em (I), temos que a integral à direita e $\frac{b}{f(b)}$ convergem para valores finitos, donde $\int_1^{\infty} \frac{1}{f(x)} dx$ converge.

Retornando às séries, pelo critério da integral, a equivalência na convergência das integrais, já provada, transmite equivalência na convergência das séries.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6: COLABORAÇÃO DE DARIO BERALDO (PISA – ITÁLIA)

Indutivamente, para cada inteiro *k*,

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2k & 1 \end{pmatrix}.$$

Sejam A, B, I transformações na reta projetiva (uma reta do plano projetivo), de modo que, em coordenadas homogêneas,

$$A^k\begin{bmatrix}1\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+2kt\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2k+\dfrac{1}{t}\\1\end{bmatrix}$$

e

$$B^h\begin{bmatrix}s\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s\\1+2hs\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2h+\dfrac{1}{s}\end{bmatrix},$$

para cada $s,t\in\mathbb{R}^*$.

Assim, para s irracional,

$$A^kB^h\begin{bmatrix}s\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2k+\dfrac{1}{2h+\dfrac{1}{s}}\\1\end{bmatrix}.$$

Iterando, eventualmente obtemos a seguinte formula:

$$A^{a_1}B^{b_1}\ldots A^{a_n}B^{b_n}\begin{bmatrix}s\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a_1+\cfrac{1}{2b_1+\cfrac{1}{\ddots\,2a_n+\cfrac{1}{2b_n+\cfrac{1}{s}}}}\\1\end{bmatrix}.$$

Suponhamos, por contradição, que existem inteiros $a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n$ tais que

$$M:=A^{a_1}B^{b_1}\ldots A^{a_n}B^{b_n}=I.$$

Dado um número transcendente s, a hipótese $M=I$ implica em particular que as linhas determinadas por

$$\begin{bmatrix}s\\1\end{bmatrix}\text{ e }\begin{bmatrix}2a_1+\cfrac{1}{2b_1+\cfrac{1}{\ddots\,2a_n+\cfrac{1}{2b_n+\cfrac{1}{s}}}}\\1\end{bmatrix}$$

devem ser as mesmas, i.e.

$$s = 2a_1 + \cfrac{1}{2b_1 + \cfrac{1}{\ddots 2a_n + \cfrac{1}{2b_n + \cfrac{1}{s}}}}$$

Agora, basta certificar-se que existe uma relação algébrica não trivial (certamente quadrática) para s, o que é um absurdo.

Usaremos a seguinte notação:

$$\{c_0, c_1, ..., c_n\} = c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{\ddots \, c_{n-1} + \cfrac{1}{c_n}}}.$$

Então, nossa relação é $s = \{2a_1, 2b_1, ..., 2a_n, 2b_n, s\} = \{m_0, m_1, m_2, ...m_N, s\}$, em que os m_j são inteiros pares. Precisamos uma regra para escrever frações contínuas como uma simples fração, i.e.

Lema: Dado $\{c_0, c_1, ..., c_k\}$, para cada inteiro $0 \le j \le k$,

$$\{c_0, ..., c_j\} = \frac{p_j}{q_j}$$

onde

$p_j = c_j p_{j-1} + p_{j-2}, q_j = c_j q_{j-1} + q_{j-2}$ (com $p_0 = c_0, p_1 = c_0 c_1 + 1, q_0 = 1, q_1 = c_1$).

Esta é uma indução fácil: temos $\{c_0, ..., c_j, c_{j+1}\} = \{c_0, ..., c_{j-1}, c_j + 1/c_{j+1}\} =$

$$= \frac{\left(c_j + \frac{1}{c_{j+1}}\right) p_{j-1} + p_{j-2}}{\left(c_j + \frac{1}{c_{j+1}}\right) q_{j-1} + q_{j-2}} = \frac{c_{j+1}(c_j p_{j-1} + p_{j-2}) + p_{j-1}}{c_{j+1}(c_j q_{j-1} + q_{j-2}) + q_{j-1}} = \frac{c_{j+1} p_j + p_{j-1}}{c_{j+1} q_j + q_{j-1}} = \frac{p_{j+1}}{q_{j+1}}, \text{cqd.}$$

Em particular, aplicando o lema para $\{m_0, m_1, m_2, ...m_N, s\}$, obtemos, no caso em que $b_n \neq 0$,

$$s = \frac{p_N s + p_{N-1}}{q_N s + q_{N-1}} (*)$$

onde $p_N, q_N, p_{N-1}, q_{N-1}$ são inteiros (pelo lema e o fato que p_0, p_1, q_0, q_1 e os m's são inteiros). Note que $q_N \neq 0$. De fato, $q_0 = 1$, $q_1 = m_1 = 2b_1 \neq 0$ e, para $k \geq 1, q_{k+1} = m_{k+1}q_k + q_{k-1}$, o que, como m_{k+1} é um inteiro par não nulo (pelo menos para $1 \leq k < N-1$) implica, por indução, que $|q_{k+1}| > |q_k|$. De fato, teremos $|q_{k+1}| \geq |m_{k+1}q_k| - |q_{k-1}| \geq 2|q_k| - |q_{k-1}| > |q_k|$. No caso em que $m_N = 2b_n = 0$, teremos $s = \{2a_1, 2b_1, ..., 2a_n, 1/s\} = \left\{m_0, m_1, ..., m_{N-1}, \frac{1}{s}\right\} = \dfrac{p_{N-1}/s + p_{N-2}}{q_{N-1}/s + q_{N-2}} = \dfrac{p_{N-1} + p_{N-2}s}{q_{N-1} + q_{N-2}s}$, e, como $N = 2n-1 \geq 3, N-2 \geq 1$ e logo $q_{N-2} \neq 0$. Isto implica que s é uma raiz de uma equação de segundo grau com coeficientes inteiros, e segue a conclusão.

Obs. Em vez de tomar s transcendente, poderíamos tomar, por exemplo, $s = \sqrt[3]{2}$. Temos $\sqrt[3]{2}$ irracional, pois $1 < \sqrt[3]{2} < 2$ e, se $\sqrt[3]{2} = p/q$ com p e q inteiros, $q > 1$ e $mdc(p,q) = 1$, teríamos $2 = p^3/q^3$, mas $q^3 > 1$ e $mdc(p^3, q^3) = 1$, donde $p^3/q^3 \notin \mathbb{Z}$, absurdo. Se $\sqrt[3]{2}$ fosse raiz de uma equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ com $a, b, c \in \mathbb{Z}$ e $a \neq 0$, teríamos $a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} + c = 0$, donde $\sqrt[3]{4} = -\dfrac{b}{a}\sqrt[3]{2} - \dfrac{c}{a} = u + v\sqrt[3]{2}$, com $u = -c/a$ e $v = -b/a$ racionais. Multiplicando por $\sqrt[3]{2}$, teríamos $2 = u\sqrt[3]{2} + v\sqrt[3]{4} = u\sqrt[3]{2} + v\left(u + v\sqrt[3]{2}\right) = uv + \left(u + v^2\right)\sqrt[3]{2}$. Se $u + v^2 \neq 0$, teríamos $\sqrt[3]{2} = \dfrac{2 - uv}{u + v^2} \in \mathbb{Q}$, absurdo. Assim, $u + v^2 = 0$ e $uv = 2 \Rightarrow -v^3 = 2 \Rightarrow \sqrt[3]{2} = -v \in \mathbb{Q}$, absurdo.

XXVIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Resultado – Nível 1 (5ª. e 6ª. Séries)

NOME	CIDADE - ESTADO	PRÊMIO
Otávio Augusto de Oliveira Mendes	Pilar do Sul - SP	Ouro
Guilherme Cherman Perdigão de Oliveira	Rio de Janeiro - RJ	Ouro
Bruno Silva Mucciaccia	Vitória - ES	Ouro
João Lucas Camelo Sá	Fortaleza - CE	Ouro
Douglas Souza Alves Junior	Vassouras - RJ	Ouro
Kayo de França Gurgel	Fortaleza - CE	Prata
Rafael Ferreira Antonioli	S. B. do Campo - SP	Prata
Nikolas Leonel Carvalho	Salvador - BA	Prata
Gabriela de Paula Gonzalvez	Jundiaí - SP	Prata
Rodrigo Nagamine	Santo André - SP	Prata
Ana Thais Castro de Santana	Rio de Janeiro - RJ	Prata
Ycaro César Campello Izaias	Fortaleza - CE	Prata
Débora Jun Portugheis	Campinas - SP	Prata
Gustavo Lopes Perosini	Tabapuã - SP	Prata
Felipe Figueiredo Souza e Silva	Nova Lima - MG	Prata
Marla Rochana Braga Monteiro	Fortaleza - CE	Prata
Alexandre Crepory Abbott de Oliveira	Brasília - DF	Bronze
Rafael Kazuhiro Miyazaki	São Paulo - SP	Bronze
Tiago Leandro Estevam Dias	Rio de Janeiro - RJ	Bronze
Daniel Silva Luiz Crispin	Fortaleza - CE	Bronze
Ana Lívia Ruegger Saldanha	Araras - SP	Bronze
Wladimir José Lopes Martins	Recife - PE	Bronze
Daniel dos Santos Bossle	Porto Alegre - RS	Bronze
Erica Saldanha Freire Simões	Fortaleza - CE	Bronze
Lucas Almeida Rocha	Taubaté - SP	Bronze
Hugo Rodrigues Martins Dantas	Fortaleza - CE	Bronze
Daniel Cardoso de Sousa	Teresina - PI	Bronze
Nicolas Iso Magosso Grigolli Gibin	S. B. do Campo - SP	Bronze
Marcos Massayuki Kawakami	São Paulo - SP	Bronze
Paula Dias Garcia	Brasília - DF	Bronze
Renner Tetzner Ramos	Vitória - ES	Bronze
Bernardo de Andrade Macêdo	Rio de Janeiro - RJ	Bronze
Marina Pessoa Mota	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Luis Henrique Kobaya Shi Higa	Campo Grande - MS	Menção Honrosa
Gabriel Militão Vinhas Lopes	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Filipe José Oliveira Sabóia	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Vitor Silveira da Costa	Curitiba - PR	Menção Honrosa
Tiago da Ávila Palhares	Ponte Nova - MG	Menção Honrosa
Gustavo Pereira de Castro	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Douglas Michael da Costa Cezar	Santa Maria - RS	Menção Honrosa
Bruna Rufino Leão	Teresina - PI	Menção Honrosa
Thomas Rincon Reis	Belo Horizonte - MG	Menção Honrosa
Ramon Silva de Lima	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Eric Tada de Souza	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Rodrigo Gabriel Caetano	Piracicaba - SP	Menção Honrosa
Renato Soares Nunes	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Rafael Alves Pinheiro	Parnamirim - RN	Menção Honrosa
Leticia da Silva Inácio	S.J. da Boa Vista - SP	Menção Honrosa
José Elton Albuquerque Filho	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Luiz Fernando Cirigliano Villela	Uberaba - MG	Menção Honrosa
Gabriel Ilharco Magalhães	Juiz de Fora	Menção Honrosa
Fernanda Bahia de Carvalho Coutinho	Belo Horizonte - MG	Menção Honrosa
Victor Venturi	Campinas - SP	Menção Honrosa
Lara Timbó Araújo	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Julia Langraf Scatolin	Pirassununga - SP	Menção Honrosa
Francisco Carvalho Osório de Souza	Campinas - SP	Menção Honrosa
Luiza Christófaro Bragança de Matos	Belo Horizonte - MG	Menção Honrosa
Francisco Jairo Rodrigues Lima	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Otavia Ruanna Cordeiro de Oliveira	Salgueiro - PE	Menção Honrosa
Carolina Yumi Vezato	Araraquara - SP	Menção Honrosa

Nível 2 (7^a. e 8^a. Séries)

NOME	CIDADE – ESTADO	PRÊMIO
Renan Henrique Finder	Joinville - SC	Ouro
Hugo Fonseca Araújo	Juiz de Fora - MG	Ouro
Thiago Ribeiro Ramos	Varginha - MG	Ouro
Matheus Barros de Paula	Taubaté - SP	Ouro
Rafael Alves da Silva	Teresina - PI	Ouro
Robério Soares Nunes	Ribeirão Preto - SP	Prata
Leonardo Pereira Stedile	São Paulo - SP	Prata
Gustavo Lisbôa Empinotti	Florianópolis - SC	Prata
Victor Reis de Abreu Cavalcanti	Maceió - AL	Prata
Thiago Augusto da Silva Baleixo	Rio de Janeiro - RJ	Prata
Heverton Carlos Bezerra de Azevedo	Rio de Janeiro - RJ	Prata
James Jun Hong	São Paulo - SP	Prata
Leonardo Caruso de Oliveira	Rio de Janeiro - RJ	Prata
Pedro Caetano Cardoso	Rio de Janeiro - RJ	Prata
Illan Feiman Halpern	Itatiaia - RJ	Prata
Davi de Melo Pontes Mendes	Fortaleza - CE	Bronze
Matheus Araújo Marins	São Gonçalo - RJ	Bronze
Marcelo Tadeu de Sá Oliveira Sales	Barreiras - BA	Bronze
Dan Zylberglejd	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
João Mendes Vasconcelos	Fortaleza - CE	Bronze
José Ailton Azevedo Araújo Filho	Fortaleza - CE	Bronze
Leonardo Shimizu Yojo	São Paulo – SP	Bronze
Gelly Whesley Silva Neves	Fortaleza - CE	Bronze
Frederico Gaia Costa da Silva	Teresina - PI	Bronze
Ana Luísa de Almeida Losnak	São Paulo - SP	Bronze
Saulo Moraes de Faria	Niterói - RJ	Bronze
Guilherme Salvador Vieira	Rio Claro - SP	Bronze
Fernando Fonseca Andrade Oliveira	Belo Horizonte - MG	Bronze
Rafael Farias Cação	Campo Grande - MS	Bronze
Edson Ryokei Onoga	São Paulo - SP	Bronze
Rafael Gribel de Paula Neves	Rio de Janeiro - RJ	Bronze
Luiz Castelo Branco Cavalcante	Teresina - PI	Bronze
Filipe Gabriel Soares Rodrigues	Teresina - PI	Menção Honrosa
Rafael Horimoto de Freitas	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Germano Luis Lopes de Mello	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Silvio Tacla Alves Barbosa	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Pedro Pacheco Louzada	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
André Saraiva Nobre dos Santos	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Mateus Bezerra Alves da Costa	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Leandro Lyra Braga Dognini	Barcarena - PA	Menção Honrosa
Gabriel de Andrade Issisaki	Guaíra - SP	Menção Honrosa
Isabella Amorim Gonzalez	Maceió - AL	Menção Honrosa
André Bina Possatto	São Caetano - SP	Menção Honrosa
Obed Leite Vieira	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Eduardo Kaiser Ururahy Nunes	Itatiaia - RJ	Menção Honrosa
Paulo Ricardo de Souza Costa	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Guilherme Vieira Melo	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Stephane Hilda Barbosa Lima	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Camila Miraglia Ribeiro	Curitiba - PR	Menção Honrosa
Patrícia Fernanda Hongo	Bragança Paulista - SP	Menção Honrosa
Marcel Ichiro Bastos Kamiyama	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Camilla Kikuchi	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Yuri Santana do Carmo	Belém - PA	Menção Honrosa
Juliana Rangel Cenzi	Jacareí - SP	Menção Honrosa
Rafael Eiki Takemura	São Paulo – SP	Menção Honrosa

Nível 3 (Ensino Médio)

NOME	CIDADE – ESTADO	PRÊMIO
Jose Marcos Andrade Ferraro	São Paulo – SP	Ouro
Henrique Pondé de Oliveira Pinto	Salvador - BA	Ouro
Guilherme Rodrigues Nogueira de Souza	São Paulo - SP	Ouro
Leandro Farias Maia	Fortaleza – CE	Ouro
Ramon Moreira Nunes	Fortaleza – CE	Ouro
Rafael Mendes de Oliveira	Rio de Janeiro – RJ	Ouro
Regis Prado Barbosa	Fortaleza - CE	Ouro
Edson Augusto Bezerra Lopes	Fortaleza - CE	Prata
André Linhares Rodrigues	Fortaleza – CE	Prata
Willy George do Amaral Petrenko	Rio de Janeiro - RJ	Prata
Leonardo Ribeiro de Castro Carvalho	São Paulo - SP	Prata
Rodrigo Viana Soares	Fortaleza – CE	Prata
Artur de Almeida Losnak	São Paulo - SP	Prata
Paulo André Carvalho de Melo	Rio de Janeiro - RJ	Prata
Renato Rebouças de Medeiros	Fortaleza - CE	Prata
Rafael Sampaio de Rezende	Fortaleza - CE	Prata
Rafael Tupynambá Dutra	Belo Horizonte - MG	Prata
Alfredo Roque de Oliveira Freire Filho	Salvador - BA	Prata
Rafael Morioka Oda	São Paulo - SP	Bronze
Adenilson Arcanjo de Moura Júnior	Fortaleza - CE	Bronze
Giuliano Pezzolo Giacaglia	São Paulo - SP	Bronze
Wilson Camara Marriel	Rio de Janeiro - RJ	Bronze
Rafael Sabino Lima	Rio de Janeiro - RJ	Bronze
Marlen Lincoln da Silva	Fortaleza – CE	Bronze
César Ryudi Kawakami	São Paulo – SP	Bronze
Hugo Musso Gualandi	Vitória - ES	Bronze
Raphael Rodrigues Mata	Salvador - BA	Bronze
Alexandre Hideki Deguchi Martani	São Paulo – SP	Bronze
Ricardo Turolla Bortolotti	Rio Claro – SP	Bronze
Felipe Gonçalves Assis	Campina Grande - PB	Bronze
Max Douglas Peixoto da Silva	Fortaleza - CE	Bronze
Èurope Moraes Gorito	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Fernando Nascimento Coelho	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Guilherme Philippe Figueiredo	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Marcelo Matheus Gauy	S.J. do Rio Preto - SP	Menção Honrosa
Luiz Carlos da Silva Sobral	Aracaju - SE	Menção Honrosa
Iuri Lima Ribeiro	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Alex Atsushi Takeda	Londrina - PR	Menção Honrosa
Gabriel Caser Brito	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Jose Armando Barbosa Filho	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Henrique Hiroshi Motoyama Watanabe	São Paulo - SP	Menção Honrosa
João Luiz de Oliveira Madeira	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Lúcio Eiji Assaoka Hossaka	Curitiba - PR	Menção Honrosa
Pedro Pinheiro de Negreiros Bessa	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Davi Lopes Alves de Medeiros	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Paulo Sérgio de Castro Moreira	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Roberto Akiba de Oliveira	Sorocaba - SP	Menção Honrosa
Enzo Haruo Hiraoka Moriyama	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Alexandre Azevedo Cezar	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
José Airton Coelho Lima Filho	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Pedro Paulo Gondim Cardoso	Salvador - BA	Menção Honrosa
Thiago da Silva Pinheiro	São Paulo - SP	Menção Honrosa

Nível Universitário

NOME	CIDADE – ESTADO	PRÊMIO
Fábio Dias Moreira	Rio de Janeiro - RJ	Ouro
Alex Corrê Abreu	Niterói - RJ	Ouro
Humberto Silva Naves	S.J. dos Campos - SP	Ouro
Samuel Barbosa Feitosa	Fortaleza - CE	Ouro
Levi Máximo Viana	Rio Janeiro - RJ	Ouro
Rafael Daigo Hirama	S.J. dos Campos - SP	Prata
Rafael Marini Silva	Vila Velha - ES	Prata
Thiago Barros Rodrigues Costa	Fortaleza - CE	Prata
Henry Wei Cheng Hsu	São Paulo - SP	Prata
Murilo Vasconcelos Andrade	Rio de Janeiro - RJ	Prata
Luiz Felipe Marini Silva	S.J. dos Campos - SP	Prata
Thiago da Silva Sobral	S.J. dos Campos - SP	Prata
Felipe Rodrigues Nogueira de Souza	São Paulo - SP	Prata
Thiago Costa Leite Santos	São Paula - SP	Prata
Raphael Constant da Costa	Rio de Janeiro - RJ	Prata
Eduardo de Moraes Rodrigues Poço	São Paulo - SP	Bronze
Elton Gomes Coriolano	Fortaleza - CE	Bronze
Elder Rodrigo Barbosa Coelho	Rio de Janeiro - RJ	Bronze
Ronaldo Rodrigues Pelá	S.J. dos Campos - SP	Bronze
Estillac Lins Maciel Borges Filho	Belém - PA	Bronze
Thomás Yoiti Sasaki Hoshina	Rio de Janeiro - RJ	Bronze
Luís Daniel Barbosa Coelho	Rio de Janeiro - RJ	Bronze
Renato Francisco Lopes Mello	J. dos Guararapes - PE	Bronze
Pedro Henrique Milet Pinheiro Pereira	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
Pedro Henrique Silva Belisário	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
Luty Rodrigues Ribeiro	S.J. dos Campos - SP	Bronze
José Mário da Silva Filho	S.J. dos Campos – SP	Bronze
Kellem Corrêa Santos	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
Marcos Francisco Ferreira Martinelli	Rio de Janeiro - RJ	Bronze
Evandro Makiyama	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Nilson Maciel de Paiva Júnior	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Igor de Castro Lima	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Eric Campos Bastos Guedes	Niterói - RJ	Menção Honrosa
Marcelo de Araújo Barbosa	S.J. dos Campos - SP	Menção Honrosa
Pedro Meira de Vasconcelos Bezerra	Recife - PE	Menção Honrosa
Moyses Afonso Assad Cohen	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Davi de Melo Jorge Barbosa	Fortaleza -CE	Menção Honrosa
Rodrigo Pereira Maranhão	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa

AGENDA OLÍMPICA

XXIX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

NÍVEIS 1, 2 e 3

Primeira Fase – Sábado, 16 de junho de 2007
Segunda Fase – Sábado, 15 de setembro de 2007
Terceira Fase – Sábado, 27 de outubro de 2007 (níveis 1, 2 e 3)
Domingo, 28 de outubro de 2007 (níveis 2 e 3 - segundo dia de prova).

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Primeira Fase – Sábado, 15 de setembro de 2007
Segunda Fase – Sábado, 27 e Domingo, 28 de outubro de 2007

♦

XIII OLIMPÍADA DE MAIO

12 de maio de 2007

♦

XVIII OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL

Uruguai
12 a 17 de junho de 2007

♦

XLVIII OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

19 a 31 de julho de 2007
Vietnã

♦

XIV OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA

3 a 9 de agosto de 2007
Blagoevgrad, Bulgária

♦

XXII OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA

6 a 16 de setembro de 2007
Coimbra, Portugal

♦

X OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA

5 de novembro de 2007

COORDENADORES REGIONAIS

Alberto Hassen Raad	(UFJF)	Juiz de Fora – MG
Américo López Gálvez	(USP)	Ribeirão Preto – SP
Amarísio da Silva Araújo	(UFV)	Viçosa – MG
Andreia Goldani	FACOS	Osório – RS
Antonio Carlos Nogueira	(UFU)	Uberlândia – MG
Ali Tahzibi	(USP)	São Carlos – SP
Benedito Tadeu Vasconcelos Freire	(UFRN)	Natal – RN
Carlos Alexandre Ribeiro Martins	(Univ. Tec. Fed. de Paraná)	Pato Branco - PR
Carmen Vieira Mathias	(UNIFRA)	Santa María – RS
Claus Haetinger	(UNIVATES)	Lajeado – RS
Cleonor Crescêncio das Neves	(UTAM)	Manaus – AM
Cláudio de Lima Vidal	(UNESP)	S.J. do Rio Preto – SP
Denice Fontana Nisxota Menegais	(UNIPAMPA)	Bagé – RS
Edson Roberto Abe	(Colégio Objetivo de Campinas)	Campinas – SP
Élio Mega	(Faculdade Etapa)	São Paulo – SP
Eudes Antonio da Costa	(Univ. Federal do Tocantins)	Arraias – TO
Fábio Brochero Martínez	(UFMG)	Belo Horizonte – MG
Florêncio Ferreira Guimarães Filho	(UFES)	Vitória – ES
Francinildo Nobre Ferreira	(UFSJ)	São João del Rei – MG
Genildo Alves Marinho	(Centro Educacional Leonardo Da Vinci)	Taguatingua – DF
Ivanilde Fernandes Saad	(UC. Dom Bosco)	Campo Grande– MS
Jacqueline Rojas Arancibia	(UFPB))	João Pessoa – PB
Janice T. Reichert	(UNOCHAPECÓ)	Chapecó – SC
João Benício de Melo Neto	(UFPI)	Teresina – PI
João Francisco Melo Libonati	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
José Luiz Rosas Pinho	(UFSC)	Florianópolis – SC
José Vieira Alves	(UFPB)	Campina Grande – PB
José William Costa	(Instituto Pueri Domus)	Santo André – SP
Krerley Oliveira	(UFAL)	Maceió – AL
Licio Hernandes Bezerra	(UFSC)	Florianópolis – SC
Luciano G. Monteiro de Castro	(Sistema Elite de Ensino)	Rio de Janeiro – RJ
Luzinalva Miranda de Amorim	(UFBA)	Salvador – BA
Mário Rocha Retamoso	(UFRG)	Rio Grande – RS
Marcelo Rufino de Oliveira	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Marcelo Mendes	(Colégio Farias Brito, Pré-vestibular)	Fortaleza – CE
Newman Simões	(Cursinho CLQ Objetivo)	Piracicaba – SP
Nivaldo Costa Muniz	(UFMA)	São Luis – MA
Osvaldo Germano do Rocio	(U. Estadual de Maringá)	Maringá – PR
Raúl Cintra de Negreiros Ribeiro	(Colégio Anglo)	Atibaia – SP
Ronaldo Alves Garcia	(UFGO)	Goiânia – GO
Rogério da Silva Ignácio	(Col. Aplic. da UFPE)	Recife – PE
Reginaldo de Lima Pereira	(Escola Técnica Federal de Roraima)	Boa Vista – RR
Reinaldo Gen Ichiro Arakaki	(UNIFESP)	SJ dos Campos – SP
Ricardo Amorim	(Centro Educacional Logos)	Nova Iguaçu – RJ
Sérgio Cláudio Ramos	(IM-UFRGS)	Porto Alegre – RS
Seme Gebara Neto	(UFMG)	Belo Horizonte – MG
Tadeu Ferreira Gomes	(UEBA)	Juazeiro – BA
Tomás Menéndez Rodrigues	(U. Federal de Rondônia)	Porto Velho – RO
Valdenberg Araújo da Silva	(U. Federal de Sergipe)	São Cristovão – SE
Vânia Cristina Silva Rodrigues	(U. Metodista de SP)	S.B. do Campo – SP
Wagner Pereira Lopes	(CEFET – GO)	Jataí – GO