CONTEÚDO

AOS LEITORES

Países de grande tradição nas olimpíadas de Matemática têm o seu excelente rendimento em muito baseado na existência de revistas de divulgação para estudantes pré-universitários. Apenas citando alguns exemplos, a húngara KöMaL, a russa (agora também americana) Kvant (Quantum), a romena Gazeta Matematica e a canadense (lida por alguns, poucos, brasileiros) Crux Mathematicorum desenvolvem em seus países o ambiente ideal para o aparecimento e desenvolvimento de jovens talentosos. Nós queremos que a *Eureka!* tenha o mesmo sucesso que essas revistas.

Para isso estamos tentando trazer artigos cada vez mais interessantes e elucidativos, e problemas cada vez mais bonitos e desafiantes para todos os leitores da *Eureka!* (inclusive os dos Níveis 1 e 2), porém tal sucesso não depende exclusivamente de nós. É fundamental a participação (muito) ativa de todos os leitores. Ficamos bastante contentes com a repercussão da seção "Olimpíadas ao Redor do Mundo", com vários leitores enviando resoluções dos problemas propostos. Mas queremos que todas as outras seções e artigos tenham a mesma repercussão. Por exemplo, vários artigos trazem problemas propostos porém raramente recebemos resolução desses problemas. Ficaremos contentes em recebê-las e poderemos saber se o público-alvo os entendeu.

Assim, faça-nos saber todo o estudo(!) e a diversão(!!) que cada uma das *Eureka!* proporcionou (não se esqueça dos números antigos).

INSTRUÇÕES PARA AUTORES

Serão publicados na revistas *Eureka!* artigos relevantes na preparação dos estudantes para a Olimpíada Brasileira de Matemática em seus diversos níveis e para várias olimpíadas de caráter internacional das quais o Brasil participa.

Como para a grande maioria dos tópicos e técnicas explorados nas olimpíadas não existem publicações expositórias adequadas em língua portuguesa, nosso objetivo inicial é abordá-los todos em artigos auto-suficientes. Assim, daremos preferência àqueles que tratem de assuntos ainda não explorados nos números anteriores da *Eureka!*. Como a deficiência em artigos adequados para estudantes do Ensino Fundamental (Níveis 1 e 2 da OBM) é ainda mais grave, estes terão primazia na sua publicação. Vale a pena observar que, quando um tema é importante para os estudantes de diversos níveis, ele deve aparecer em artigos adequados para cada um desses níveis, separadamente.

É recomendável que os artigos tragam alguns problemas resolvidos detalhadamente e referências que o complementem ou aprofundem.

Os Editores.

XV OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA

16 a 24 de setembro, Caracas - Venezuela

A XV Olimpíada Iberoamericana de Matemática foi realizada em Caracas, Venezuela no período de 16 a 24 de setembro de 2000. A equipe brasileira foi liderada pelos professores Ralph Costa Teixeira (Rio de Janeiro - RJ) e Eduardo Tengan (São Paulo - SP). Nesta oportunidade a equipe brasileira obteve a maior pontuação entre os países participantes além da Copa Puerto Rico, prêmio entregue ao país com maior progresso nos últimos dois anos na competição.

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	**Daniel Nobuo Uno**	**Prata**
BRA2	**Daniel Massaki Yamamoto**	**Ouro**
BRA3	**Fabrício Siqueira Benevides**	**Ouro**
BRA4	**Humberto Silva Naves**	**Ouro**

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Constrói-se um polígono regular de n lados ($n \geq 3$) e enumeram-se os vértices de 1 a n. Traçam-se todas as diagonais do polígono. Demonstrar que se n é ímpar, é possível associar a cada lado e a cada diagonal um número inteiro de 1 a n, tal que se verifiquem simultaneamente as seguintes condições:

1. O número associado a cada lado ou diagonal seja diferente dos números dos seus vértices.

2. Para cada vértice, todos os lados e diagonais que nele se intersectem tenham números diferentes.

SOLUÇÃO DE HUMBERTO SILVA NAVES (SÃO PAULO - SP)

Existe um jeito simples de pintar os lados e as diagonais do polígono regular. Escolhe-se um ponto do polígono regular com o número "i" associado à este ponto, que chamaremos de P_i.

Seja O o centro da circunferência circunscrita ao polígono regular.

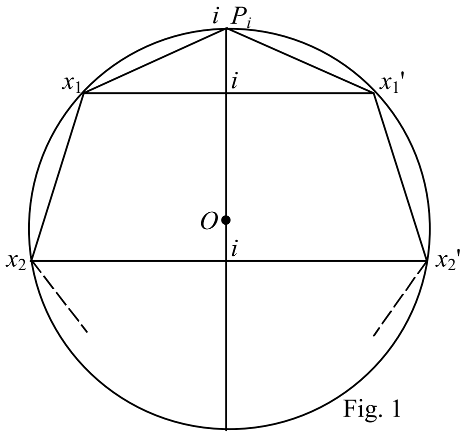
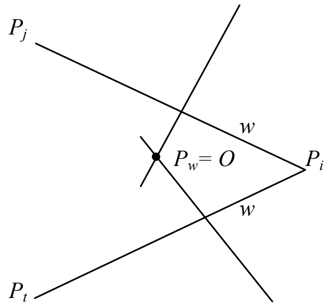


Fig. 1

Sabemos que a reta $\overleftrightarrow{P_iO}$ é eixo de simetria dos pontos do polígono regular e nenhum ponto do polígono está sobre a reta $\overleftrightarrow{P_iO}$ (pois n é ímpar). Digamos esses pares de pontos simétricos e numeramos com o número "i", ou seja pegamos um outro ponto qualquer (diferente de P_i) do polígono regular, ligamos com o seu respectivo simétrico e numeramos com o número "i" (fazemos isso para todos os outros pontos). Vide fig. 1.
Este é um exemplo do processo para o ponto P_i.
Repetimos esse processo para todos os pontos do polígono regular.
Desta forma pintamos todos os lados e todas as diagonais, pois:
De uma forma geral (e mais simples):
Se quisermos saber o número de um segmento $\overline{P_iP_j}$ do polígono regular, basta traçarmos a mediatriz desse segmento, que vai certamente encontrar um outro vértice X do polígono regular (pois n é ímpar) e o segmento $\overline{P_iP_j}$ vai ter o mesmo número de X.
Esta forma de numeração claramente satisfaz as condições do enunciado pois:

1) Não existe nenhum segmento com o mesmo número de um de seus vértices, pois a mediatriz desse segmento não passa pelos vértices do segmento.

2) Para cada vértice, todos os lados e todas as diagonais que incidem neste vértice tem números diferentes, pois se existissem dois segmentos de mesmo número, teríamos:



O ponto P_w (que deve estar na mediatriz de $\overline{P_iP_j}$ e na mediatriz de $\overline{P_iP_t}$) é o próprio O, um absurdo.

Logo vale a propriedade 2 e isso acaba o problema.

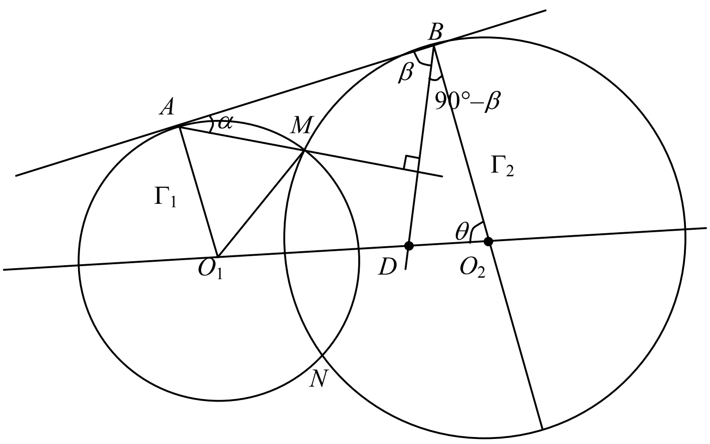
PROBLEMA 2

Sejam S_1 e S_2 duas circunferências de centros O_1 e O_2, respectivamente, secantes em M e N. A reta t é a tangente comum a S_1 e S_2, mais próxima de M. Os pontos A e B são os pontos de tangência de t com S_1 e S_2, respectivamente, C é o ponto diametralmente oposto a B e D é o ponto de interseção da reta O_1O_2 com a reta perpendicular à reta AM que passa por B. Demonstrar que M, D e C são colineares.

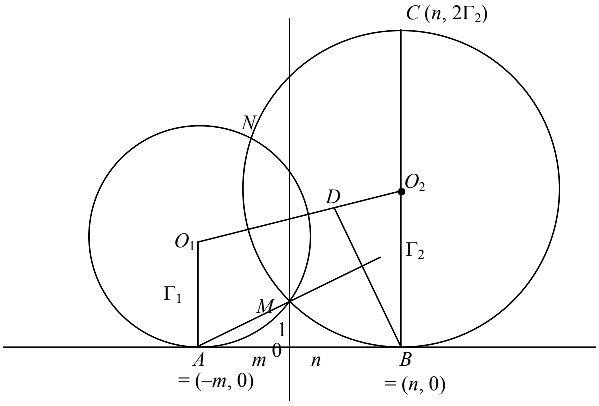
SOLUÇÃO DE DANIEL MASSAKI YAMAMOTO (SÃO PAULO - SP)

BC é diâmetro $\Rightarrow B\hat{M}C = 90°$

Para provar $[MDC]$, basta provar que $B\hat{M}D = B\hat{M}C = 90°$



Geometria Analítica:
Dados:
$M = (0, 1)$
$A = (-m, 0)$
$O_1 = (-m, y_1)$
$B = (n, 0)$
$O_2 = (n, y_2)$
Quero determinar D:



$$\overleftrightarrow{AM} : y = \frac{1}{m}(x - m)$$

$$\overleftrightarrow{BD} : \perp \overleftrightarrow{AM}$$

$$\overleftrightarrow{BD} : y = -m(x - n) \Leftrightarrow x = -\frac{y}{m} + n$$

$$\overleftrightarrow{O_1O_2} : y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{m + n}(x - n)$$

$$\overleftrightarrow{BD} \cap \overleftrightarrow{O_1O_2} = \{D\}$$

$$y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{m + n}\left(-\frac{y}{m}\right)$$

$$y\left(1 + \frac{y_2 - y_1}{(m + n)m}\right) = y_2$$

$$y_D = y_2\left(\frac{m(m + n)}{m(m + n) + y_2 - y_1}\right)$$

$$x_0 = -\frac{y_2(m + n)}{m(m + n) + y_2 - y_1} + n$$

coef. angular de $\overleftrightarrow{DM} : \dfrac{y_D - 1}{x_D} = \dfrac{\left(\dfrac{y_2 m(m + n) - m(m + n) - y_2 + y_1}{m(m + n) + y_2 - y_1}\right)}{\left(\dfrac{mn(m + n) + n(y_2 - y_1) - y_2(m + n)}{m(m + n)y_2 - y_1}\right)}$

$$=\frac{\left(\frac{n^2+1}{2}\right)m(m+n)-m^2-mn-\left(\frac{n^2+1}{2}\right)+\left(\frac{m^2+1}{2}\right)}{mn(m+n)+n\left(\frac{n^2-m^2}{2}\right)-\left(\frac{n^2+1}{2}\right)(m+n)}$$

$$=\frac{\frac{n^2}{2}\left(m^2+mn\right)+\frac{m^2}{2}+\left(\frac{mn}{2}\right)-m^2-mn-\frac{n^2}{2}+\frac{m^2}{2}}{\left(m+n\right)\left(mn+\frac{n(n-m)}{2}-\frac{n^2}{2}-\frac{1}{2}\right)}=\frac{n\left[\frac{n}{2}(m^2+mn)-\frac{m}{2}-\frac{n}{2}\right]}{(m+n)\left(\frac{mn-1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\frac{n}{2}\left[mn(m+n)-(m+n)\right]}{(m+n)\left(\frac{mn-1}{2}\right)}=\frac{n(m+n)(mn-1)}{(m+n)(mn-1)}=n$$

coef. ang. de $\overleftrightarrow{BM}:-\frac{1}{n}$

$n\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)=-1$, logo

$\overleftrightarrow{BM}\perp\overleftrightarrow{DM}$.

PROBLEMA 3

Encontrar todas as soluções da equação

$$\left(x+1\right)^y-x^z=1$$

para x, y, z inteiros maiores que 1.

SOLUÇÃO

Considerando a equação módulo $x+1$, obtemos

$$\left(-1\right)^z\equiv 1(\operatorname{mod} x+1),$$

o que implica que z é ímpar. Logo

(1) $\left(x+1\right)^y-x^z=1\Leftrightarrow(x+1)^y=x^z+1\Leftrightarrow(x+1)^y=(x+1)(x^{z-1}-x^{z-2}+\ldots-x+1)\Leftrightarrow$

(2) $\left(x+1\right)^{y-1}=x^{z-1}-x^{z-2}+\ldots-x+1$ e, então, x é par pois, caso contrário, os dois lados de (2) seriam de paridade oposta.

Analogamente, escrevendo (1) na forma $(x+1)^{y-1}+(x+1)^{y-2}+...+(x+1)+1=x^{z-1}$, nós vemos que y é par também.
Sejam, portanto, $x=2x_1$ e $y=2y_1$ Então por (1),

(3) $((x+1)^{y_1}-1)((x+1)^{y_1}+1)=x^z$.

Temos ainda que $x\,|\,(x+1)^{y_1}-1$ e, como x é par, $mdc\ ((x+1)^{y_1}-1,(x+1)^y+1)=2$.
Assim de (3),

$$\left|\begin{array}{l}(x+1)^{y_1}-1=2x_1^z\\(x+1)^{y_1}+1=2^{z-1}\end{array}\right. \quad (4).$$

Conseqüentemente, $2^{z-1}>2x_1^z$, ou seja, $x_1=1\Leftrightarrow x=2$ e, de (4), $y=2$ e $z=3$.
P.S. É gratificante saber que tal equação estudada por grandes matemáticos desse século como W.J. Leveque e A. Schinzel, pode ser resolvida por brilhantes estudantes pré-universitários em um tempo tão limitado quando o de uma prova de olimpíada.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

De uma progressão aritmética infinita 1, a_1, $a_2,\cdots$ de números reais, eliminam-se termos, obtendo-se uma progressão geométrica infinita 1, a_{n_1}, $a_{n_2},\cdots$ de razão q. Determinar os possíveis valores de q.

SOLUÇÃO DE DANIEL NOBUO UNO (SÃO PAULO - SP)

PG = 1, $1+m_1r;1+m_2r;1+m_3r...$ com $m_i\in\mathbb{Z}_+$; apenas

$$m_0=0\Rightarrow q=\frac{1+m_1r}{1}=\frac{1+m_2r}{1+m_1r}=...=\frac{1+m_{i+1}r}{1+m_ir}.$$

$$\Rightarrow(1+m_2r)\cdot1=(1+m_1r)^2\Rightarrow1+m_2r=1+m_1^2r^2+2m_1r.$$

Supondo

$$r\neq0;m_2=m_1^2r+2m_1\Rightarrow m_2=m_1(m_1r+2)\Rightarrow\frac{m_2}{m_1}=m_1r+2\Rightarrow\frac{\frac{m_2}{m_1}-2}{m_1}=r$$

Como $m_1; m_2 \in \mathbb{Z}_+$, então r é racional; Seja $r = \dfrac{|a|}{b}$; onde a; $b \in \mathbb{Z}$; $b \neq 0$, a e b primos entre si.

Daí: $q = 1 + m_1 r$.

$m_1 r \in \mathbb{Q} \Rightarrow q \in \mathbb{Q}$.

Seja $q = \dfrac{|c|}{d}; c; d \in \mathbb{Z}; d \neq 0$ c e d primos entre si.

Daí teremos

PA : $1 + k_i \cdot \dfrac{|a|}{b} = \dfrac{k_i |a| + b}{b}$

PG: $\left(\dfrac{|c|}{d}\right)^j = \dfrac{|c^j|}{d^j}$

Análise do denominador:

PA: $\dfrac{k_i |a| + b}{b}; k_i |a| + b \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ o máximo do denominador é b.

PG: $\dfrac{|c^j|}{d^j}$ como $mdc(c; d) = 1 \Rightarrow$ o denominador é d^j.

Podemos pegar um j suficientemente grande tal que $|d^j| > |b|$

Logo, a PG não pode ser infinita para $|d| > 1$.

Logo; como $d \in \mathbb{Z} \Rightarrow d = 1$ ou $d = -1$.

Se $d = 1 \Rightarrow q = c \Rightarrow$ razão inteira, e para isso, é só pegar $r = 1$ e tirar os termos desnecessários.

A PA será sempre crescente ou sempre decrescente $(p/r \neq 0)$ se $d = -1$.

PROBLEMA 5

Dois jogadores, alternadamente, retiram pedras de um conjunto de 2000 pedras, de acordo com as seguintes regras:

1. Em cada jogada pode-se retirar 1, 2, 3, 4 ou 5 pedras.
2. Em cada jogada, um jogador não pode retirar o mesmo número de pedras que o seu adversário retirou na jogada anterior.

O jogador que, na sua vez, não puder jogar de maneira válida, perde. Determinar que jogador tem uma estratégia que lhe garanta a vitória e encontrar essa estratégia.

SOLUÇÃO DE DANIEL MASSAKI YAMAMOTO (SÃO PAULO - SP)

n\ m	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1
3	1	1	0	1	1
4	1	1	1	0	1
5	1	1	1	1	0
6	1	1	0	1	1
7	0	0	0	0	0
8	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1
11	1	1	1	0	1
12	1	1	1	1	0
13	0	0	0	0	0
14	0	1	1	1	1
15	1	1	1	1	1
16	1	1	0	1	1
17	1	1	1	1	1
18	1	1	1	1	0
19	1	1	0	1	1
20	0	0	0	0	0
21	0	1	1	1	1
22	1	1	1	1	1
23	1	1	1	1	1

n\ m	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
24	1	1	1	0	1
25	1	1	1	1	0
26	0	0	0	0	0
27	0	1	1	1	1
28	1	1	1	1	1
29	1	1	0	1	1
30	1	1	1	1	1
31	1	1	1	1	0
32	1	1	0	1	1
33	0	0	0	0	0
34	0	1	1	1	1
35	1	1	1	1	1
36	1	1	1	1	1
37	1	1	1	0	1
38	1	1	1	1	0
39	0	0	0	0	0
40	0	1	1	1	1
41	1	1	1	1	1
42	1	1	0	1	1
43	1	1	1	1	1
44	1	1	1	1	0
45	1	1	0	1	1
46	0	0	0	0	0

$$G(n,m)=\begin{cases}0 \text{ se quem vai jogar agora perde (com ambos jogando o melhor possível).}\\ 1 \text{ se ganha.}\end{cases}$$

n = atual
m = movimento anterior

$G(1, 1) = 0$

A fórmula recursiva é

$$G(n,m)=\begin{cases}0 \text{ se para todo } 1\le i\le 5, n\ge i, i\ne m, G(n-i,i)=1 \text{ (isto é, se o outro ganha}\\ \text{para qualquer movimento)}\\ 1 \text{ caso contrário.}\end{cases}$$

Para $1 \le n \le 5,\ G(n, m) = 1$ se $m \neq n$
Podemos definir $G(0, m) = 0$

Visualizando:
Como preencher a linha n: veja os quadrados com (*)

					(*)
				(*)	
			(*)		
		(*)			
	(*)				
n					

Se foram todos $1's$, a linha n terá só zeros.
Se tiver dois ou mais zeros, a linha n terá todos $1's$.
Se for zero, todos serão $1's$, a menos da que está na mesma coluna do zero.

Sempre perde:
7, 13, 20, 26, 33, 39, 46

Parece que para $n = 7$ ou 13 (mód 13) sempre perde ($G(n, m) = 0$)
Basta ver que há um bloco 5×5 da tabela que se repete, (tirando as 6 primeiras linhas).
Agora vamos provar a fórmula recursiva.
Primeiras 5 linhas:

- $G(n, m) = 1$ se $m \neq n$, pois ele pode tirar n pedras e ganhar.
- $G(1, 1) = 0$, pois não pode jogar.
- $G(2, 2) = 1$, pois tirando uma pedra, forçará o outro a ficar com $G(1, 1)$,...
- $G(i, i) = 0$, $i = 3$, 4 ou 5, pois não importa como jogue o outro pode ganhar.

Agora, a fórmula nos outros casos:

Tirando i pedras, se você está com $G(n, m)$, o adversário vai ficar com $G(n - i, i)$. Se algum deles for 0, o adversário vai perder e você ganha. Se todos forem 1, o adversário sempre ganha.
Note que você não pode tirar m pedras, então não pode deixar o adversário com $G(n - m, m)$.

Na tabela, o bloco que se repete é $13 \le n \le 17$, igual a $26 \le n \le 30$.

Então o primeiro jogador ganha, pois se ele tirar 4 pedras na primeira jogada, vai deixar o outro com 1996 pedras.
$1996 \equiv 7(\text{mod}\,13) \Rightarrow$ o segundo perde.

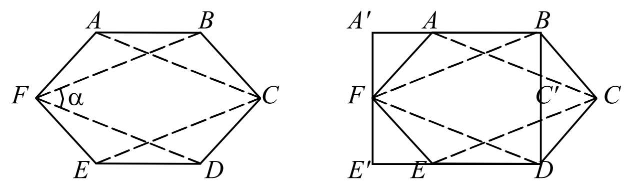
PROBLEMA 6
Um hexágono convexo é *bonito* se tem quatro diagonais de comprimento 1 cujos extremos contêm todos os vértices do hexágono.

(a) Para cada número k maior que 0 e menor ou igual a 1, encontrar um hexágono bonito de área k.

(b) Demonstrar que a área de um hexágono bonito qualquer é menor que $\frac{3}{2}$.

SOLUÇÃO

Consideremos todos os hexágonos bonitos $ABCDEF$ com lados opostos paralelos tais que os quatro segmentos dados de comprimento 1 são $\overline{AC}, \overline{CE}, \overline{BF}$ e $\overline{FD}$. Seja $\alpha = \angle BFD = \angle ACE$ (figura (a)).

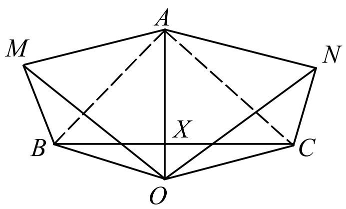


(a) (b)

Translademos os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{CE}$ na direção de $\overline{AB}$ para obter $\overline{A'C'}$ e $\overline{C'E'}$ respectivamente de forma que A', F, E' sejam colineares do mesmo modo que B, C', D. A área do hexágono $ABCDEF$ é igual a área do retângulo $A'BDE'$ que por sua vez é igual a *sen* α (figura (b)). Dado que quaisquer $k \in (0,1]$ é igual a *sen* α para algum α com $0 < \alpha \le 90°$ então temos um hexágono bonito que cumpre o pedido.

b) Para demonstrar o resultado pedido, enunciamos os seguintes lemas sem demonstração:

1- A soma dos comprimentos de um par de lados opostos de um quadrilátero convexo é menor que a soma dos comprimentos das diagonais.
2- A área de um quadrilátero convexo é menor ou igual que a metade do produto das suas diagonais.
Utilizaremos por simplicidade a seguinte terminología:
Sabemos que no hexágono há quatro diagonais de comprimento 1 cujos extremos contém todos os vértices do mesmo. Chamaremos diagonais *principais* as diagonais em questão. Definamos o grau de um vértice de um hexágono bonito como o número de diagonais principais que passam por ele. Além disso denotaremos por diagonal que divida ao hexágono nos quadriláteros.
Dado que a soma dos graus dos vértices é 8 e o grau de cada um é pelo menos 1, temos dois casos:
a) Um vértice tem grau 3 e os restantes têm grau 1.
b) Dois vértices têm grau 2 e os restantes têm grau 1.
No primeiro caso, dado que há exatamente três diagonais que saem de um mesmo vértice num hexágono, só há um possível tipo de configuração (salvo "issomorfismo" de grafos):
Pelo lema 2 a área do hexágono é menor ou igual que $\frac{1}{2}(AB + AC)$ e isto é menor que $\frac{1}{2}(2AX + BC)$ pela desigualdade triangular. Como $AX \le 1, BC = 1,$ a área é menor que $\frac{3}{2}$.



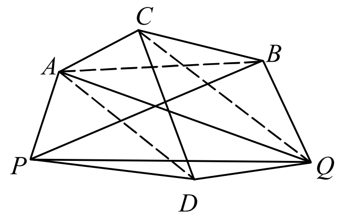
Para o segundo caso, sejam P e Q os vértices de grau máximo. Consideremos as possibilidades:
c) Os vértices P, Q estão conectados por uma diagonal principal. Nesse caso se a diagonal que os conecta não é central, as outras diagonais principais que saem destes dois vértices devem estar num mesmo lado de $\overline{PQ}$. Além disso, alguma dessas diagonais deve ser central, pois caso contrário, chegariam a um mesmo ponto e nesse caso se formaria um triângulo equilátero com diagonais principais como lados e sabemos que isso não pode ocorrer pois haveria três vértices de

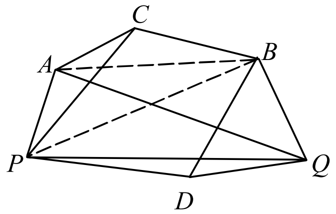
grau 2. Portanto, dependendo se ambas diagonais são centrais ou só uma é, se apresentam as seguintes configurações:

No desenho à direita, $AB \leq 1$ pelo lema 1. Logo a área do hexágono é menor ou igual que

$$\frac{1}{2}(AB \cdot CQ + PQ \cdot AD) < \frac{1}{2}(CQ + AD)$$

e isto é menor que 1 pelo lema 1.



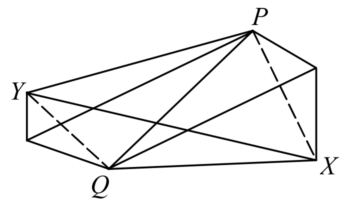


No desenho à esquerda, $AB < 2$ pelo lema 1. Logo, a área do hexágono é menor ou igual que

$$\frac{1}{2}(AB \cdot PC + PQ \cdot BD) < \frac{1}{2}(2+1) = \frac{3}{2}$$

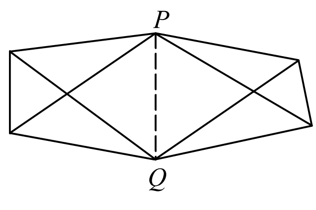
Se a diagonal que os conecta é central, as outras diagonais principais que saem de P e Q devem estar em lados distintos de $\overline{PQ}$, pois caso contrário, se utilizarão já três diagonais sem haver unido dois vértices consecutivos que ficam a um lado de $\overline{PQ}$ e estes não podem ser conectados pela diagonal que falta. Então, só há uma configuração possível:

Aqui a área é menor ou igual que $\frac{1}{2}(PX + QY) < \frac{1}{2}(2) = 1,$ pelos lemas 2 e 1 respectivamente.

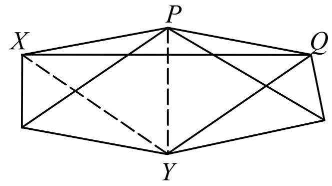


d) Os vértices P e Q não estão conectados por uma diagonal principal.
Nesse caso só há três configurações possíveis:

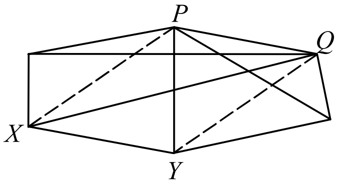
Pelo lema 2, neste caso a área é menor ou igual que $\frac{1}{2}(1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = 1.$



Neste caso a área é menor ou igual que $\frac{1}{2}(XY+1) < \frac{1}{2}(2+1) < \frac{3}{2}$, onde o último se da por desigualdade triangular.



Pelo lema 1, algum dos segmentos $\overline{PX}$ ou $\overline{QY}$ mede menos que 1, logo esta configuração pode ser reduzida à configuração de um vértice de grau três, que já foi estudada (se bem não é a mesma, o raciocínio é idêntico).
Esgotadas as possibilidades, se resolve completamente o problema.



Você sabia…

Que existe um algoritmo que, dada uma soma envolvendo uma função hipergeométrica (por exemplo: binomiais, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas), expressa-a como uma soma telescópica. Com isso, podemos encontrar uma recursão satisfeita por tal soma ou mesmo, quando possível, obter uma fórmula fechada. O mais impressionante é que o algoritmo só não obtém uma fórmula fechada se esta não existir (mais precisamente, quando a soma não puder ser escrita como uma função hipergeométrica).
Os autores deste algoritmo - Marko Petkovsek, Herbert Wilf e Doron Zeilberger - publicaram um livro descrevendo sua descoberta, com o inusitado título "*A = B*".
Este livro encontra-se disponível na rede. Veja :

http://www.cis.upenn.edu/~wilf/AeqB.html

XLI OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

Problemas e Soluções

PROBLEMA 1

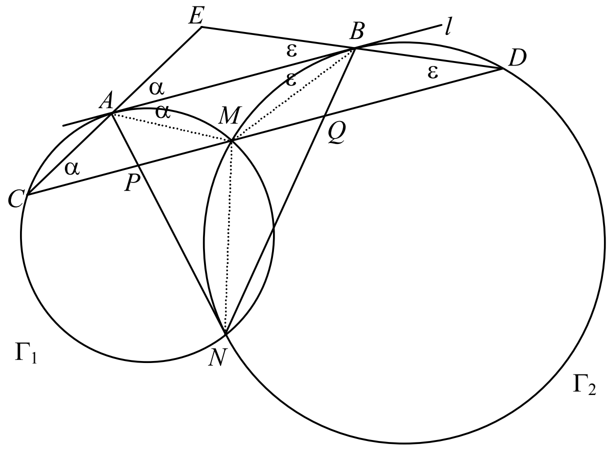
Duas circunferências Γ_1 e Γ_2 intersectam-se em *M* e *N*.

Seja *l* a tangente comum a Γ_1 e Γ_2 que está mais próxima de *M* do que de *N*. A reta *l* é tangente a Γ_1 em *A* e a Γ_2 em *B*. A reta paralela a *l* que passa por *M* intersecta novamente a circunferência Γ_1 em *C* e novamente a circunferência Γ_2 em *D*.

As retas *CA* e *DB* intersectam-se em *E*; as retas *AN* e *CD* intersectam-se em *P*; as retas *BN* e *CD* intersectam-se em *Q*.

Mostre que *EP* = *EQ*.

SOLUÇÃO DE ONOFRE CAMPOS DA SILVA FARIAS (FORTALEZA - CE) e DANIEL MASSAKI YAMAMOTO (SÃO PAULO - SP)



Inicialmente, vamos mostrar que *AE* = *AM* e que *BE* = *BM*. De fato, como *AB* || *CD* e *AB* é tangente a Γ_1, segue-se que

$$\angle EAB = \angle ACM = \angle BAM = \alpha$$

e

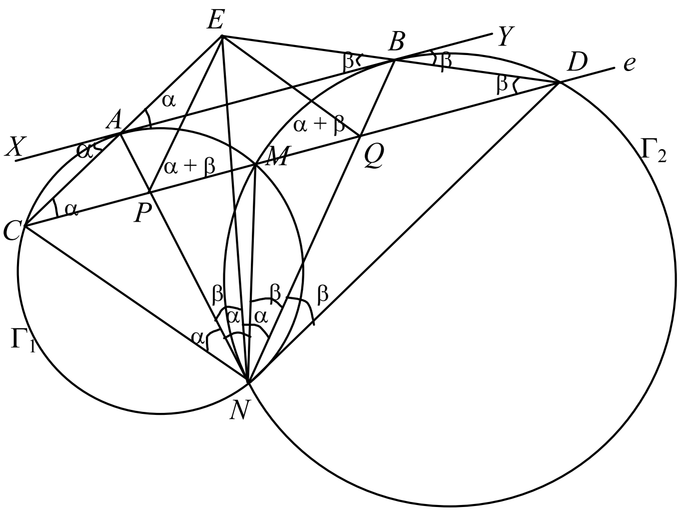
$$\angle EBA = \angle BDM = \angle ABM = \varepsilon$$

Daí, é imediato que os triângulos *EAB* e *MAB* são congruentes (caso *ALA*), de modo que

$$AE = AM \text{ e } BE = BM.$$

Além disso, segue da congruência que $EM \perp AB$, e portanto, $EM \perp CD$. Agora, basta mostrarmos que $PM = MQ$, porque dessa forma EM será mediatriz de PQ, tal que $EP = EQ$. Para isto, note que o prolongamento de MN passa pelo ponto médio de AB, pois MN é o eixo radical das duas circunferências e AB é tangente comum. Assim, como $PQ \parallel AB$, concluímos que MN também passa pelo ponto médio de PQ. Logo, $EM \perp PQ$ e EM passa pelo ponto médio de PQ, de modo que EM é mediatriz de PQ e $EP = EQ$.

SOLUÇÃO DE DANIEL NOBUO UNO (SÃO PAULO - SP)



$[XABY]$

Temos $C\hat{A}N = C\hat{M}N$ e $N\hat{B}D = N\hat{M}D$. Como $C\hat{M}N + N\hat{M}D = \pi \Rightarrow$ $E\hat{A}N + E\hat{B}N = \pi - C\hat{A}N + \pi - N\hat{B}D = \pi$; temos que $AEBN$ é cíclico.

Seja $E\hat{A}B = \alpha \Rightarrow E\hat{C}D = \alpha \Rightarrow A\hat{N}M = \alpha; X\hat{A}C = \alpha \Rightarrow C\hat{N}A = \alpha.$

Seja $E\hat{B}A = \beta$, analogamente, $B\hat{D}M = B\hat{N}M = Y\hat{B}D = D\hat{N}B = \beta$

Como $AEBN$ é cíclico, $E\hat{A}B = E\hat{N}B = \alpha$; $E\hat{B}A = E\hat{N}A = \beta$

$E\hat{C}Q = E\hat{N}Q \Rightarrow ECNQ$ é cíclico $\Rightarrow E\hat{Q}C = E\hat{N}C = \alpha + \beta$

$E\hat{D}P = E\hat{N}P \Rightarrow EDNP$ é cíclico $\Rightarrow E\hat{P}D = E\hat{N}D = \alpha + \beta.$

Logo, EPQ é isósceles.

PROBLEMA 2

Sejam a, b, c números reais positivos tais que $abc = 1$. Prove que

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leq 1.$$

SOLUÇÃO

Fazendo $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$

(podemos tomar, por exemplo, $y=1, x=a, z=\frac{1}{b}=ac$), a desigualdade é equivalente a $(x+z-y)(x+y-z)(y+z-x)\leq xyz.$ Fazendo $u=x+z-y,$ $v=x+y-z$ e $w=y+z-x,$ temos $u+v=2x, u+w=2z$ e $v+w=2y,$ donde a desigualdade é equivalente a $8uvw\leq(u+v)(u+w)(v+w).$ Como $u+v, u+w$ e $v+w$ são todos positivos, no máximo um dentre os números $u,$ v e w não é positivo. Se houver um tal número, $8uvw$ será negativo ou nulo, enquanto $(u+v)(u+w)(v+w)$ é positivo, e a desigualdade acima é trivial. Se u, v e w são positivos, a desigualdade acima é conseqüência direta da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, pois $(u+v)(u+w)(v+w)=u^2v+uv^2+u^2w+$ $+uw^2+v^2w+vw^2+2uvw,$ donde a desigualdade é equivalente a $u^2v+uv^2+u^2w+uw^2+v^2w+vw^2\geq 6uvw,$ que segue das desigualdades $u^2v+vw^2\geq 2uvw, uv^2+uw^2\geq 2uvw$ e $u^2w+v^2w\geq 2uvw.$

PROBLEMA 3

Seja $n\geq 2$ um número inteiro positivo. No início existem n pulgas numa reta horizontal, nem todas no mesmo ponto.

Para um número real positivo $\lambda,$ define-se um *salto* da seguinte maneira:

- Escolhem-se duas pulgas quaisquer nos pontos A e B com o ponto A à esquerda do ponto B;
- A pulga que está em A salta até o ponto C da reta, à direita de B, tal que $\frac{BC}{AB}=\lambda.$

Determine todos os valores de λ para os quais, para qualquer ponto M na reta e quaisquer posições iniciais das n pulgas, existe uma sucessão finita de saltos que levam todas as pulgas para pontos à direita de M.

SOLUÇÃO:

A resposta é para $\ell \geq \dfrac{1}{(n-1)}$

Devemos demonstrar duas coisas:

a) que, para $\ell \geq \dfrac{1}{(n-1)}$, existe uma seqüência infinita de movimentos que vai levando as pulgas cada vez mais para a direita, ultrapassando qualquer ponto prefixado M;

b) que, para $\ell < \dfrac{1}{(n-1)}$ e para qualquer posição inicial dada as pulgas, existe um ponto M tal que as pulgas em um número finito de movimentos jamais alcançam ou ultrapassam M.

Começaremos pelo item b). Sejam x_1, x_2, ..., x_n as posições iniciais das pulgas, com $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$, de tal forma que x_n é a posição da pulga mais à direita.

$$\text{Seja } P = \left(\frac{1}{(1-(n-1)\ell)}\right) \cdot \left(x_n - \ell \cdot x_1 - \ell \cdot x_2 - ... - \ell \cdot x_{n-1}\right).$$

O ponto P claramente está à direita de todas as pulgas.

Afirmamos que se após alguns movimentos as novas posições são $x'_1, ..., x'_n$ e definimos

$$P' = \left(\frac{1}{(1-(n-1)\ell)}\right) \cdot \left(x'_n - \ell \cdot x'_1 - \ell \cdot x'_2 - ... - \ell \cdot x'_{n-1}\right).$$

Se $P' \leq P$, isto conclui a demonstração.

Basta considerar o que ocorre após um movimento.

Se a pulga que estava em x_i pula sobre a pulga que estava em x_n então $x'_n - x_n = \ell \cdot (x_n - x_i)$ e $x'_n - \ell \cdot x_n = x_n - \ell \cdot x_i$ e $P' = P$.

Qualquer outro caso é ainda mais favorável. De fato, se a pulga que pulou continua atrás de x_n, temos $x_n' = x_n$ e $x_1' + ... + x_{n-1}' > x_1 + ... + x_{n-1}$, donde $P' < P$. Se ela passa de x_n, teremos $x_n' = x_j + \ell(x_j - x_i) \Rightarrow x_n' - \ell x_n < x_n' - \ell x_j = x_j - \ell x_i < x_n - \ell x_i$.

Item *a*) Se $P = x_n - \ell(x_1 + x_2 + ... + x_{n-1})$ se, em cada movimento, a pulga mais à esquerda pula sobre a pulga mais à direita, temos $x_n' = x_n + \ell(x_n - x_1) \Rightarrow$ $x_n' - \ell x_n = x_n - \ell x_1$ e $P' = P,$ donde P é uma constante positiva (escolhendo a origem, por exemplo, em x_n). Temos então

$$\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}(x_n - x_j) = x_n - \frac{1}{n-1}(x_1 + ... + x_{n-1}) \geq x_n - \ell(x_1 + ... + x_{n-1}) = P \Rightarrow$$

$x_n - x_1 \geq \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}(x_n - x_j) = P \Rightarrow x_n' - x_n = \ell(x_n - x_1) \geq \dfrac{P}{n-1},$ donde o ponto mais à direita caminha pelo menos $\dfrac{P}{n-1}$ para a direita a cada passo, logo tende a infinito. Como o ponto mais a direita, após n – 1 passos será o ponto mais à esquerda, todos os pontos tendem a infinito (para a direita).

Nota: Na estratégia descrita na solução do item *a*), o ponto mais à esquerda se torna sempre o mais à direita, donde podemos definir $x_{n+1} = x_n' = x_n + \ell(x_n - x_1),$ e teriamos simplesmente $x_j' = x_{j+1}, \forall j.$ Reduzimos então a análise dessa estratégia ao estudo da recorrência linear $x_{n+1} = (1+\ell)x_n - \ell x_1,$ cujo polinômio característico é $P(x) = x^{n+1} - (1+\ell)x^n + \ell,$ do qual 1 é raiz, donde, como $\dfrac{P(x)}{x-1} = x^n - \ell(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1),$ a expressão $y_m = x_m - \ell(x_{m-1} + x_{n-2} + ... + x_{m-n+2} + x_{m-n+1})$ é um invariante da recorrência, isto é, $y_{m+1} = y_m \forall m,$ donde y_m é constante. Daí vem nossa fórmula para *P*. Veja o artigo sobre equações de recorrência nesta Eureka.

PROBLEMA 4

Um mágico tem cem cartões numerados de 1 a 100. Coloca-os em três caixas, uma vermelha, uma branca e uma azul, de modo que cada caixa contém pelo menos um cartão.

Uma pessoa da platéia escolhe duas das três caixas, seleciona um cartão de cada caixa e anuncia a soma dos números dos dois cartões que escolheu. Ao saber esta soma, o mágico identifica a caixa da qual não se retirou nenhum cartão.

De quantas maneiras podem ser colocados todos os cartões nas caixas de modo de que este truque sempre funcione? (Duas maneiras consideram-se diferentes se pelo menos um cartão é colocado numa caixa diferente).

SOLUÇÃO DE FABRÍCIO SIQUEIRA BENEVIDES (FORTALEZA - CE)

Seja $f(n)$ o número de maneiras de se colocarem os cartões de 1 a n, mas sem contar a ordem das caixas. No final, basta multiplicar $f(100)$ por 6 = 3!.
Achamos facilmente que $f(4) = 2$, onde as duas únicas maneiras são:

1, 4		1
2	e	2, 3
3		4

Vamos provar por indução que $f(n+1) = f(n) = 2$ para $n \geq 4$, e que as únicas maneiras são das formas:

A) 1, 4, 7,...		B)	1
2, 5,...	e		2, 3, ..., $n - 1$
3, 6,...			n

Há duas possibilidades para o cartão n + 1:

1) Ele aparece junto com outros cartões. Nesse caso, os cartões de 1 a n estarão na configuração A ou B.
Se for A): $n-2, n-1$ e n estão em caixas diferentes. n + 1 não pode estar na mesma caixa de n ou n – 1, pois $(n-2)+(n+1)=(n-1)+(n)$
Se colocarmos n + 1 na mesma caixa de n – 2, a mágica funcionará. Basta ver a soma módulo 3.
No caso B): $n+1$ não pode entrar em nenhuma caixa, pois
$1+(n+1)=2+(n)$ e $(n)+3=(n+1)+2$

2) $(n+1)$ está em uma caixa isolada.
Como $(n+1)+(1)=(2)+(n)$, 2 e n devem estar na mesma caixa.
Temos a seguinte configuração:

$n+1$	Se k está junto com 2 e k + 1 está na outra caixa,
$2, n, k$	$(n+1)+k=n+(k+1) \Rightarrow\Leftarrow$.
$k+1$	Então k e k + 1 estão na mesma caixa.

Fazendo isso para k = 2, 3,..., n – 2, temos que os cartões 2, 3,..., n estão na mesma caixa . Como a outra caixa não pode ficar vazia, 1 está nela.

Para ver que esta configuração funciona, basta ver os intervalos das possíveis somas para cada par de caixas.
o número total é $6 \cdot f(100) = 12$.

PROBLEMA 5
Verifique se existe um inteiro positivo *n* tal que *n* é divisível por exatamente 2000 números primos diferentes e $2^n + 1$ é divisível por *n*.

SOLUÇÃO DE HUMBERTO SILVA NAVES (SÃO PAULO - SP)

Vamos, primeiramente, provar o seguinte "super-lema":

Lema: $3^n \mid 2^{3^n} + 1$ e $2^{3^n} + 1$ tem pelo menos "*n*" fatores primos distintos:
Esse lema será provado por indução:
Quando *n* = 1 ou *n* = 2, o lema é verdadeiro pois
$2^3 + 1 = 9 = 3^2$ e
$2^{3^2} + 1 = 513 = 3^3 \cdot 19$

Suponha que seja válido, também, para um certo "*p*" $(p \ge 2)$, Vamos provar que também é verdadeiro para "$p+1$":
$* 3^p \mid 2^{3^p} + 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid 2^{3^p} + 1 = k \cdot 3^p \Leftrightarrow 2^{3^p} = -1 + k \cdot 3^p \Leftrightarrow (2^{3^p})^3 =$
$= (-1 + k \cdot 3^p)^3 \Leftrightarrow 2^{3^{p+1}} = -1 + k \cdot 3^{p+1} - k^2 \cdot 3^{2p+1} + k^3 \cdot 3^{3p} \Leftrightarrow 2^{3^{p+1}} + 1 =$
$= (k - k^2 \cdot 3^p + k^3 \cdot 3^{2p-1}) \cdot 3^{p+1} \Rightarrow 3^{p+1} \mid 2^{3^{p+1}} + 1.$
$** 2^{3^{p+1}} + 1 = (2^{3^p})^3 + 1^3 = (2^{3^p} + 1)[(2^{3^p})^2 - (2^{3^p}) + 1]$, pois
$\forall a, b \in \mathbb{R}$ temos: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
Só que $2^{2 \cdot 3^p} - 2^{3^p} + 1 = (2^{3^p} + 1)^2 - 3(2^{3^p} + 1) + 3 \Rightarrow mdc\,(2^{3^p} + 1; 2^{2 \cdot 3^p} - 2^{3^p} + 1) =$
$= mdc(2^{3^p} + 1; 3) = 3$ pois $3^p \mid 2^{3^p} + 1 \Rightarrow 3 \mid 2^{3^p} + 1$. Logo deve existir um fator primo "*j*" tal que $j \mid (2^{2 \cdot 3^p} - 2^{3^p} + 1)$ e $j \nmid (2^{3^p} + 1)$, logo $2^{3^{p+1}} + 1 = (2^{3^p} + 1)(2^{2 \cdot 3^p} - 2^{3^p} + 1)$ tem pelo menos 1 fator primo a mais que $2^{3^p} + 1$, logo $2^{3^{p+1}} + 1$ tem pelo menos "$p + 1$" fatores primos em sua decomposição.
Logo o lema é válido para "$p + 1$", também.
Pelo princípio da indução finita, provamos que o lema é verdadeiro para todo natural "*n*".

Pronto, o "super-lema" veio te salvar nessa hora de sufoco!

Sabemos que ímpar $2^{3^{2000}}+1$ tem pelo menos 2000 fatores primos e pegamos 1999 fatores primos que são diferentes de 3 e os chamamos de $p_1; p_2; p_3;...; p_{1999}$. Temos que

$$3^{2000} \mid 2^{3^{2000}}+1 \text{ e}$$

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 ... p_{1999} \mid 2^{3^{2000}}+1$$

Basta escolhermos o inteiro ímpar $n = 3^{2000} \cdot p_1 ... p_{1999}$, pois:

$3^{2000} \mid n \Rightarrow 2^{3^{2000}}+1 \mid 2^n+1$ e como

$$n \mid 2^{3^{2000}}+1 \Rightarrow n \mid 2^n+1$$

Logo existe um "n" de 2000 fatores primos, tal que $n \mid 2^n+1$.

PROBLEMA 6

Sejam AH_1, BH_2, CH_3 as alturas de um triângulo acutângulo *ABC*. A circunferência inscrita no triângulo *ABC* é tangente aos lados *BC*, *CA*, *AB* em T_1, T_2, T_3, respectivamente. Seja l_1 a reta simétrica da reta H_2H_3 relativamente à reta T_2T_3, l_2 a reta simétrica da reta H_3H_1 relativamente à reta T_3T_1 e l_3 a reta simétrica da reta H_1H_2 relativamente à reta T_1T_2.

Prove que l_1, l_2, l_3 determinam um triângulo cujos vértices pertencem à circunferência inscrita no triângulo *ABC*.

SOLUÇÃO DE ONOFRE CAMPOS DA SILVA FARIAS (FORTALEZA - CE)

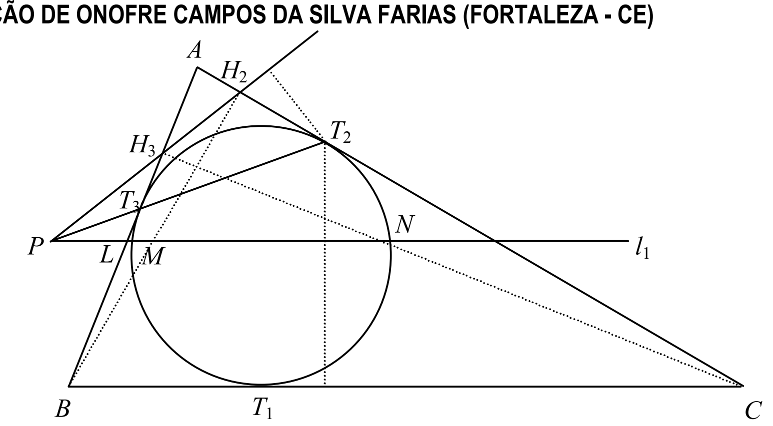


fig. 01

Inicialmente, vamos mostrar que as retas l_1, l_2 e l_3 são paralelas aos lados BC, CA e AB, respectivamente.

Sejam $P \equiv \overleftrightarrow{H_2H_3} \cap \overleftrightarrow{T_2T_3}$, M e N os pontos de interseção da reta l_1 com a circunferência inscrita. Supondo $AB < AC$, temos a fig. 01 acima. Veja que

$$\angle PH_3T_3 = \angle AH_3H_2 = C\ ,$$

$$\angle AT_3T_2 = \angle AT_2T_3 = \frac{B+C}{2}\ ,$$

de modo que

$$\angle H_3PT_3 = \frac{B-C}{2} \text{ e } \angle H_3PM = 2.\angle H_3PT_3 = B - C,$$

e, portanto,

$$\angle H_3LM = \angle H_3PM + \angle LH_3P = (B - C) + C = B.$$

Logo, $l_1 \parallel BC$ e, analogamente, concluímos que $l_2 \parallel AC$ e $l_3 \parallel BA$.

Se $AB = AC$, então, $l_1 \parallel BC$ por simetria. Neste caso, teremos $H_2H_3 \parallel T_2T_3 \parallel l_1 \parallel BC$.

Agora, vamos calcular a distância entre as retas l_1 e BC. Como PT_2 é a bissetriz do ângulo H_2PN, então

$$d(T_2, PH_2) = d(T_2, l_1) \text{ e } d(l_1, BC) = d(T_2, BC) - d(T_2, PH_2) \quad (1)$$

Mas,

$$d(T_2, BC) = (p - c).\text{sen } C$$

e como $\angle AH_2H_3 = B$, segue que $d(T_2, PH_2) = H_2T_2.\text{sen } B$. (2)

Também,

$$H_2T_2 = CH_2 - CT_2 = a.\cos C - (p - c).$$

Em (2), obtemos:

$$d(T_2, PH_2) = (a.\cos C - (p - c))\text{sen } B. \quad (3)$$

Usando que $a.\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}$, $\text{sen } B = \dfrac{b}{2R}$, $\text{sen } C = \dfrac{c}{2R}$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
d(l_1, BC) &= (p-c).senC + (p-c).senB - senB.(a.\cos C) \\
&= (p-c)\left(\frac{c}{2R}+\frac{b}{2R}\right) - \frac{b}{2R}.\frac{a^2+b^2-c^2}{2b} \\
&= \frac{(a+b-c).(b+c)}{4R} - \frac{a^2+b^2-c^2}{4R} \\
&= \frac{ab+ac-a^2}{4R} \\
&= \frac{a}{2R}\frac{b+c-a}{2} \\
&= (p-a).senA.
\end{aligned}
$$

Dessa forma, acabamos de mostrar que

$$d(l_1, BC) = d(T_2, AB) = d(T_3, AC) = (p-a).\text{sen } A. \quad (*)$$

Vamos mostra agora que $BT_2 = BN$ e, analogamente, mostraremos que $CT_3 = CM$.

Sejam U e V as projeções ortogonais de T_2 e N sobre os lados AB e BC respectivamente. Então,

$$NV = T_2U = (p-a).\text{sen } A.$$

Sejam I o incentro e E a projeção ortogonal de I sobre l_1 (fig. 02). Veja que

$$EN = T_1V \text{ e } EI = |(p-a).\text{sen } A - r|.$$

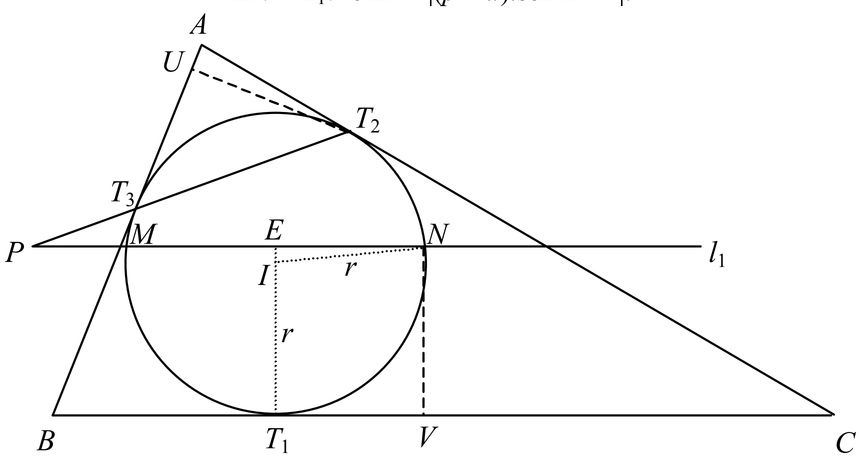


fig. 02

$i)\ T_1V^2 = EN^2 = IN^2 - EI^2 = r^2 - ((p-a).\text{sen}\,A - r)^2$

$= 2r.(p-a)\,\text{sen}\,A - (p-a)^2.\text{sen}^2\,A$

$ii)\ T_3U^2 = T_2T_3^{\ 2} - T_2U^2$

$= T_2T_3^{\ 2} - (p-a)^2.\text{sen}^2\,A$

Agora, o quadrilátero AT_3IT_2 é inscritível na circunferência de diâmetro AI. Logo, temos duas relações:

I) $T_2T_3 = AI.\text{sen}\,A$;
II) $T_2T_3.AI = 2r.AT_2 = 2r.(p - a)$ (pelo teorema de Ptolomeu).

De (I) e (II), obtemos $T_2T_3^{\ 2} = 2r.(p - a).\text{sen}\,A$. Portanto, em ($i$) e ($ii$) ficamos com $T_1V^2 = T_3U^2 \therefore T_1V = T_3U$, e como $BT_1 = BT_3$, por último segue que

$$\Delta BVN \equiv \Delta BUT_2 \ (**)$$

de modo que $BT_2 = BN$, como queríamos demonstrar.

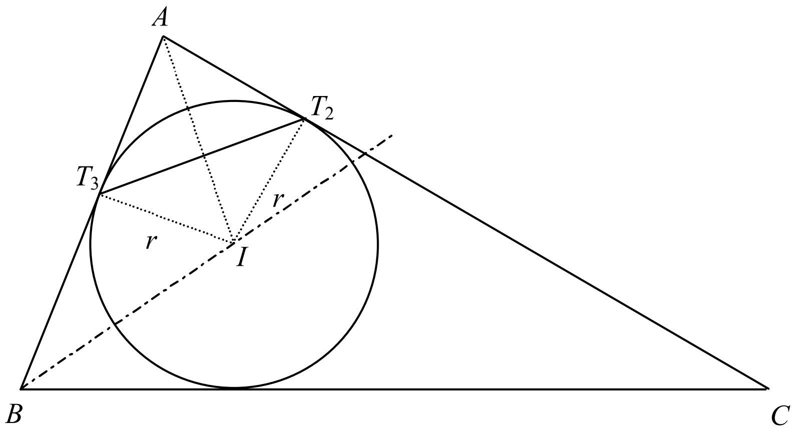


fig. 03

De (**), ainda podemos concluir que $\angle ABT_2 = \angle CBN$, e como $\angle ABI = \angle CBI$, temos $\angle T_2BI = \angle NBI$.

Finalmente, como $T_2B = NB$, podemos concluir que ***N* é o simétrico de *T_2* em relação à bissetriz do ângulo *B***. Analogamente, M é o simétrico de T_3 em relação à bissetriz interna do ângulo C.

Dessa forma, podemos redefinir as retas l_1, l_2 e l_3 da seguinte forma:

Sejam S_1, S_2 e S_3, respectivamente, os simétricos de T_1, T_2 e T_3 em relação às bissetrizes dos ângulos $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$, respectivamente. L_1 é a reta que passa por S_2 e S_3, l_2 é a reta que passa por S_1 e S_3 e l_3 é a reta que passa por S_1 e S_2.

Claramente, l_1, l_2 e l_3 determinam um triângulo inscrito na circunferência inscrita no triângulo ABC.

BRAHMAGUPTA PARA TODOS

José Cloves Verde Saraiva - UEMA

◆ Nível Intermediário

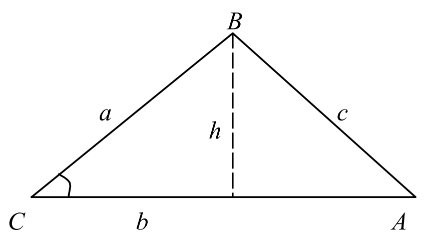
Nestas notas apresentaremos as fórmulas da geometria plana para o cálculo da área de um triângulo e de um quadrilátero cíclico (inscrito numa circunferência) em função do comprimento de seus lados e de seu semi-perímetro. Para o triângulo esta é conhecida como a fórmula de Heron de Alexandria, embora escritores árabes afirmem que esta foi descoberta por Arquimedes. Para os quadriláteros cíclicos há uma generalização natural da fórmula de Heron, tão importante, que é considerada como a mais notável descoberta da geometria hindu, feita por BRAHMAGUPTA. Originalmente a prova de Brahmagupta faz uso do conhecido Teorema de Ptolomeu para quadriláteros cíclicos. Aqui, estas duas fórmulas são deduzidas, elementarmente, da Lei dos co-senos para um triângulo.

1. A FÓRMULA DE HERON

Seja ΔABC um triângulo cujos lados medem a, b e c indicados na figura abaixo, então a medida da área deste triângulo é dada pela fórmula:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

onde $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ é o semi-perimetro do ΔABC.



O autor agradece o apoio à pesquisa da Universidade Estadual de Maranhão (UEMA) e o saudável ambiente de trabalho do DEMATI-CECEN

Prova: Todos sabem que a área de um triângulo é calculada pela fórmula $S=\frac{1}{2}bh.$ Nas condições aqui tratadas sabemos que a altura relativa ao lado $\overline{CA}$ é dada por $h=a\cdot sen\hat{C},$ donde podemos escrever para a área:

$$S=\frac{1}{2}ab\ \ sen\hat{C}\ \ (*)$$

É também muito conhecida a Lei dos co-senos para um triângulo. E, pela figura acima, esta pode ser escrita como:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\hat{C}\ \ (**)$$

Com efeito, elevando ao quadrado *S* na expressão (*) temos que:

$$\begin{aligned}4S^2&=a^2b^2sen^2\hat{C}=a^2b^2(1-\cos^2\hat{C})=ab(1-\cos\hat{C})\cdot ab(1+\cos\hat{C})=\\&=(ab-ab\cos\hat{C})(ab+ab\cos\hat{C})\end{aligned}$$

Multiplicando este último resultado por 4, obtemos:

$$16S^2=(2ab-2ab\cos\hat{C})(2ab+2ab\cos\hat{C})$$

no qual podemos completar quadrados e adequar os fatores para o uso da Lei dos co-senos (**) temos:

$$\begin{aligned}16S^2&=[-a^2-b^2+2ab+a^2+b^2-2ab\cdot\cos\hat{C}][a^2+b^2+2ab-a^2-b^2+2ab\cdot\cos\hat{C}]=\\&=[-(a-b)^2+c^2][(a+b)^2-c^2]=[c^2-(a-b)^2][(a+b)^2-c^2]\end{aligned}$$

fatorando as diferenças de quadrados, podemos escrever:

$$\begin{aligned}16S^2&=(c+a-b)(c-a+b)(a+b+c)(a+b-c)\\&=(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\end{aligned}$$

Aonde, dividindo por 16:

$$S^2=\frac{1}{2}(a+b+c)\frac{1}{2}(a+b+c-2a)\frac{1}{2}(a+b+c-2b)\frac{1}{2}(a+b+c-2c)$$

Portanto:

$$S^2 = \frac{1}{2}(a+b+c)\left[\frac{1}{2}(a+b+c)-a\right]\left[\frac{1}{2}(a+b+c)-b\right]\left[\frac{1}{2}(a+b+c)-c\right]$$

substituindo o semi-perímetro $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$, concluímos que:

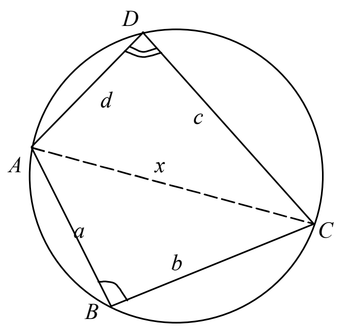
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, a conhecida fórmula de Heron.

De uma certa analogia da fórmula acima demonstrada deduzimos, a seguir, o resultado principal destas notas.

2. A FÓRMULA DE BRAHMAGUPTA

A medida da área de um quadrilátero cíclico de lados a, b, c, d cujo semi-perímetro denotado por p é a seguinte:

$$K = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$



onde $p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$

$$(p-a) = \frac{1}{2}(-a+b+c+d)$$

$$(p-b) = \frac{1}{2}(a-b+c+d)$$

$$(p-c) = \frac{1}{2}(a+b-c+d)$$

$$(p-d) = \frac{1}{2}(a+b+c-d)$$

Os seguintes fatos elementares são considerados na prova:

I. Seja um quadrilátero tal que seus ângulos opostos internos sejam suplementares: na figura temos $\hat{B} + \hat{D} = 180°$ (esta relação vale para os quadriláteros cíclicos).

II. As áreas dos triângulos S_1 e S_2 são dadas pelas relações:

$$S_1 = \frac{1}{2}ab \cdot sen\hat{B} \text{ e } S_2 = \frac{1}{2}cd \cdot sen\hat{D}$$

III. A diagonal x, indicada na figura anterior, pela Lei dos co-senos aplicada aos triângulos S_1 e S_2 verifica a relação:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{B} = x^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cdot \cos \hat{D}$$

Prova: De I. obtemos que $\cos(\hat{B} + \hat{D}) = -1$, que implica a igualdade $sen\hat{B} \cdot sen\hat{D} = 1 + \cos \hat{B} \cdot \cos \hat{D}$ (*). Com efeito, seja K a medida da área do quadrilátero cíclico dada por: $K = S_1 + S_2$, Substituindo II. Obtemos a igualdade $2K = ab \cdot sen\hat{B} + cd \cdot sen\hat{D}$. Elevando ao quadrado obtemos:

$$4K^2 = a^2b^2 \cdot sen^2 \hat{B} + 2 \cdot abcd \cdot sen\hat{B} \cdot sen\hat{D} + c^2d^2 \cdot sen^2 \hat{D}$$

substituindo (*) no produto de senos temos:

$$4K^2 = a^2b^2(1 - \cos^2 \hat{B}) + 2abcd(1 + \cos \hat{B} \cdot \cos \hat{D}) + c^2d^2(1 - \cos^2 \hat{D})$$

ou melhor,

$$4K^2 = a^2b^2(1 - \cos^2 \hat{B}) + abcd(1 + \cos \hat{B} \cdot \cos \hat{D}) + abcd(1 + \cos \hat{B} \cdot \cos \hat{D}) + c^2d^2(1 - \cos^2 \hat{D})$$

$$4K^2 = a^2b^2(1 - \cos \hat{B})(1 + \cos \hat{B}) + ab(1 + \cos \hat{D})cd(1 + \cos \hat{B}) + c^2d^2(1 - \cos \hat{D})(1 + \cos \hat{D})$$

Multiplicando, adequadamente, por 4 os dois membros,

$$16K^2 = 2[ab \cdot (1 - \cos \hat{B}) + cd \cdot (1 + \cos \hat{D})] \cdot 2 \cdot [ab \cdot (1 + \cos \hat{B}) + cd \cdot (1 - \cos \hat{D})]$$

$$16K^2 = -[2ab \cdot \cos \hat{B} - 2ab - 2cd \cdot \cos \hat{D} - 2cd][2ab \cdot \cos \hat{B} + 2ab + 2cd \cdot \cos \hat{D} - 2cd \cdot \cos \hat{D}]$$

Substituindo a relação III. obtemos:

$$16K^2 = -[a^2 + b^2 - 2ab - (c^2 + d^2) - 2cd][a^2 + b^2 + 2ab - (c^2 + d^2) + 2cd]$$

$$16K^2 = -[(a-b)^2 - (c+d)^2][(a+b)^2 - (c-d)^2]$$

$$16K^2 = -[(a-b) - (c+d)][(a-b) + (c+d)][(a+b) - (c-d)][(a+b) + (c-d)]$$

por tanto temos que:

$$K^2 = \frac{1}{2}(-a + b + c + d)\frac{1}{2}(a - b + c + d)\frac{1}{2}(a + b - c + d)\frac{1}{2}(a + b + c - d)$$

daí, é imediato ver que:

$$K^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$$

permitindo concluir que,

$$K = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

concluindo a prova.

Como observação final, a fórmula acima demonstrada não pode ser mais geral do que foi provado por BRAHMAGUPTA. De fato, a fórmula vale exatamente para os quadriláteros cíclicos. Em geral, se o quadrilátero não for cíclico, sua área é estritamente menor que $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, pois nesse caso $sen\hat{B}\, sen\hat{D} < 1 + \cos\hat{B}\cos\hat{D}$, o que pode ser usado como na prova acima para provar nossa afirmação.

REFERÊNCIA

E.W. Hobson, *A Treatise on Plane Trigonometry* (NY)*; Macmillan Company,* 4ª ed., (1902), pg. 204.

EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA

Héctor Soza Pollman - Universidade Católica do Norte - Antofagasta, Chile

◆ Nível Avançado

Frenqüentemente em teoria da Computação (ver exemplo [2]), ao analisar o tempo de execução de um algoritmo (ou o espaço ocupado na memória pelos dados), obtemos uma (ou mais) equações discretas, chamadas de Equações de Recorrência, cuja incógnita é uma função inteira $f(n)$, que geralmente é uma função do tamanho n do problema (por exemplo: a quantidade de dados a ordenar se é um algoritmo de ordenamento). Esta equação resulta ser uma relação entre $f(n)$ e seus valores prévios, como são $f(n-1)$, $f(n/2)$, ou outro. Além disso se conhecemos o algoritmo analisado com detalhe, podemos estabelecer um valor de bordo num ponto dado (como $f(0)$ por exemplo). Neste artigo são apresentados alguns dos métodos desenvolvidos para resolver este tipo de equações, as quais aparecem em ordem de dificuldade.

Os tipos de equações de recorrência a serem consideradas são as seguintes, em que a incógnita é a sucessão x_n com $n \geq 0$:

1. EQUAÇÃO LINEAR DE PRIMEIRA ORDEM COM COEFICIENTES DE VALOR INTEIRO 1.

O tipo mais simples de equação de recorrência de primeira ordem é:

$$x_{n+1} = x_n + b_n \ , \ n \geq 0$$

em que x_0 e a sucessão b_n são dados do problema. Sua resolução faz uso da propriedade telescópica da soma obtendo:

$$x_n = x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} b_i, \ \ n \geq 1$$

Exemplo: Para a equação: $x_{n+1} = x_n + 2^n, n \geq 0,$ com $x_0 = 1,$ obtemos $x_n = 2^n, n \geq 0.$

2. EQUAÇÃO LINEAR DE PRIMEIRA ORDEM COM COEFICIENTES CONSTANTES.

A equação linear de primeira ordem com coeficientes constantes é:

$$a_n x_n = b_n x_{n-1} + c_n, \ \ n \geq 0$$

em que x_0 e as sucessões numéricas a_n, b_n e c_n são dados do problema (as sucessões a_n e b_n não devem ser nulas). Para resolver esta equação ela deve ser multiplicada pelo fator S_n (chamado *fator somante*):

$$S_n a_n x_n = S_n b_n x_{n-1} + S_n c_n$$

Impõe-se a condição:

$$S_n b_n = S_{n-1} a_{n-1} \quad (1)$$

com o qual obtemos:

$$S_n a_n x_n = S_{n-1} a_{n-1} x_{n-1} + S_n c_n$$

Observa-se que a equação anterior se reduz a uma de primeiro tipo, e que sua solução é:

$$x_n = \frac{1}{S_n a_n}(S_0 a_0 x_0 + \sum_{i=1}^{n} S_i c_i), n \geq 0$$

O fator somante é obtido a partir da condição (1) e considerando que $S_0 = 1$:

$$S_n = \frac{a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0}{b_n b_{n-1} \ldots b_2 b_1}, n \geq 1$$

EXEMPLO: AS TORRES DE HANOI.

Dadas três varetas e *n* discos de distintos tamanhos colocados na primeira vareta em ordem de tamanho (do menor ao maior), mover estes *n* discos desde a vareta inicial até a terceira usando a segunda como auxiliar, sem colocar um disco de tamanho maior sobre um de tamanho menor (para maiores explicações ver [4]). Se x_n é a quantidade de movimentos para levar os *n* discos da primeira a terceira vareta, podemos provar, ao analisar como são distribuídos os movimentos, que, se x_n é a quantidade de movimentos para mover os *n* discos desde a primeira à terceira vareta (com $n \geq 0$), então:

$$x_n = 2x_{n-1} + 1, \quad n \geq 1$$

com $x_0 = 0$. De fato, dada uma solução do problema de Hanoi com *n* – 1 discos em x_{n-1} movimentos, podemos mover os *n* – 1 primeiros discos para a segunda vareta, depois mover o último disco para a terceira vareta e por fim mover os $n-1$ primeiros discos para a terceira vareta, gastando $x_{n-1} + 1 + x_{n-1} = 2x_{n-1} + 1$ movimentos. Neste caso temos que o fator somante resulta ser: $S_n = \frac{1}{2^n}$. Logo, a solução da equação das torres de Hanoi é:

$$x_n = 2^n - 1, \quad n \geq 0$$

Observamos, por exemplo, que para $n = 3$ devem ser realizados 7 movimentos. Deixamos como exercício para o leitor provar que é impossível resolver este problema usando uma quantidade menor de movimentos.

3. EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS DE PRIMEIRA ORDEM COM COEFICIENTES CONSTANTES.

Considere a equação:

$$a_k x_{n+k} + a_{k-1} x_{n+k-1} + \ldots + a_0 x_n = 0, \quad n \geq 0 \quad (2)$$

em que $a_0, \ldots, a_k$ são sucessões independentes de n, e os valores de x_i são conhecidos para $i = 0, \ldots, k - 1$ (correspondem aos valores de bordo). Supondo que a equação (2) admite uma solução do tipo: $x_n = \lambda^n$, em que λ é um parâmetro inteiro, e substituindo em (2) temos:

$$a_k \lambda^{n+k} + a_{k-1} \lambda^{n+k-1} + \ldots + a_0 \lambda^n = 0$$

Se $\lambda \neq 0$ então obtemos a *equação característica* associada a equação (2):

$$a_k \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \ldots + a_0 \lambda^0 = 0$$

Vamos mostrar que se esta equação tem as raízes complexas $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ com multiplicidades $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}$, respectivamente, então as soluções de (2) são exatamente as seqüências (x_n) da forma $x_n = Q_1(n)\lambda_1^n + Q_2(n)\lambda_2^n + \ldots + Q_r(n)\lambda_r^n$, onde $Q_1, \ldots, Q_r$ são polinômios com grau $(Q_i) < \alpha_i$, $1 \leq i \leq r$ (em particular, se λ_i é uma raíz simples então Q_i é constante).

Seja $P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_0$ um polinômio.

Dizemos que uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaz a propriedade $\operatorname{Rec}(P(x))$ se $a_k x_{n+k} + a_{k-1} x_{n+k-1} + \ldots + a_0 x_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Não é difícil verificar os seguintes fatos:

i) Se (X_n) e (Y_n) satisfazem $\operatorname{Rec}(P(x))$ e $c \in \mathbb{C}$ então $(Z_n) = X_n + cY_n$ satisfaz $\operatorname{Rec}(P(x))$.

ii) Se $Q(x) = b_r X^r + b_{r-1} X^{r-1} + \ldots + b_0$ e (X_n) satisfaz $\operatorname{Rec}(P(x))$ então (X_n) satisfaz $\operatorname{Rec}(P(x)Q(x))$

(isso segue de $\sum_{j=0}^{r} b_j (a_k X_{n+j+k} + a_{k-1} X_{n+j+k-1} + \ldots + a_0 X_{n+j}) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$)

iii) (X_n) satisfaz $\text{Rec}(P(x))$ se e só se $(Y_n) = \left(X_n / \lambda^n\right)$ satisfaz $\text{Rec}(P(\lambda X))$ (substitua $X_{n+j} = \lambda^{n+j} Y_{n+j}$ em $\sum_{j=0}^{k} a_j X_{n+j} = 0$).

iv) Se $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ então (x_n) satisfaz $\text{Rec}(P(x))$ se e só se (S_n) satisfaz $\text{Rec}((x-1)P(x))$ (escreva $x_{n+j+1} = S_{n+j+1} - S_{n+j}$ e substitua em $\sum_{j=0}^{n} a_j x_{n+j+1} = 0$).

Por iii), para ver que, para todo polinômio $Q(x)$ de grau menor que *m*, $X_n = Q(n)\lambda^n$ satisfaz $\text{Rec}((x-\lambda)^m)$, basta ver que $(Y_n) = (Q(n))$ satisfaz $\text{Rec}((x-1)^m)$, o que faremos por indução. Isso é claro se *m* = 1, e em geral, se $Z_n = Y_{n+1} - Y_n = Q(n+1) - Q(n)$, como $\widetilde{Q}(x) = Q(x+1) - Q(x)$ tem grau menor que *m* – 1, (Z_n) satisfaz $\text{Rec}((x-1)^{m-1})$ (por hipótese de indução), e logo, por (iv), (Y_n) satisfaz $\text{Rec}((x-1)^m)$. Essa observação, combinada com ii), mostra que se $(P(x) = (x-\lambda_1)^{\alpha_1}(x-\lambda_2)^{\alpha_2}...(x-\lambda_r)^{\alpha_r}$, e grau $(Q_i) < \alpha_i$ para $1 \le i \le r$ então $x_n = \sum_{i=1}^{r} Q_i(n)\lambda_i^n$ satisfaz $\text{Rec}(P(x))$.

Para ver que se (x_n) satisfaz $\text{Rec}(P(x))$ então x_n é da forma acima, usaremos indução novamente.

Supomos $\lambda_1 \ne 0$ e tomamos $Y_n = X_n / \lambda_1^n$, $Z_n = Y_{n+1} - Y_n$ (com $Z_0 = Y_0$).
Por iii) e iv), Z_n satisfaz $\text{Rec}(P(\lambda_1 x)/(x-1))$ e, portanto por hipótese de indução, $Z_n = \widetilde{Q}_1(x) + \widetilde{Q}_2(x)(\lambda_2/\lambda_1)^n + ... + \widetilde{Q}_r(x)(\lambda_r/\lambda_1)^n$, onde grau $\widetilde{Q}_i < \alpha_i$ para $2 \le i \le r$ e grau $\widetilde{Q}_1 < \alpha_1 - 1$.

Para terminar a prova, vamos mostrar que se existem polinômios $P_1, P_2, ..., P_k$ tais que $Y_{n+1} - Y_n = P_1(n) + P_2(n)\beta_2^n + ... + P_k(n)\beta_k^n$ (onde $1, \beta_2, ..., \beta_k$ são complexos distintos e $P_i \ne 0, \forall i \ge 2$) então $Y_n = \widetilde{P}_1(n) + \widetilde{P}_2(n)\beta_2^n + ... + \widetilde{P}_k(n)\beta_k^n$, onde $\widetilde{P}_1, ..., \widetilde{P}_k$ são polinômios com grau $P_i = \text{grau}\,\widetilde{P}_i$ para $i \ge 2$ e grau $\widetilde{P}_1 = \text{grau}\,P_1 + 1$, por indução na soma dos graus dos polinômios P_i, onde convencionamos que o grau do polinômio nulo é –1.

(no nosso caso temos $\beta_i = \lambda_i / \lambda_1$, e como $X_n = \lambda_1^n Y_n$ o resultado segue imediatamente).

Para provar essa afirmação observamos inicialmente que, se a soma dos graus de P_i é -1, então $Y_{n+1} - Y_n = 0, \forall n$, e logo, Y_n é constante e, em geral, consideramos 2 casos:

a) $P_1(x) = c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + ... + c_0, c_m \neq 0.$ Nesse caso definimos $\widetilde{Y}_n = Y_n - \frac{c_m n^{m+1}}{m+1}$, e temos $\widetilde{Y}_{n+1} - \widetilde{Y}_n = Q_1(n) + P_2(n)\beta_1^n + ... + P_k(n)\beta_k^n$, com grau $Q < m.$ Por hipótese de indução, $\widetilde{Y}_n$ (e logo Y_n) é da forma desejada.

b) $P_2(x) = d_s x^s + d_{s-1} x^{s-1} + ... + d_0, d_s \neq 0.$ Nesse caso, definimos $\widetilde{Y}_n = Y_n - \frac{d_s n^s \lambda_2^n}{\lambda_2 - 1}$, e temos $\widetilde{Y}_{n+1} - \widetilde{Y}_n = P_1(n) + Q(n)\beta_2^n + P_3(n)\beta_3^n + ... + P_k(n)\beta_k^n$, com grau $Q < s.$ Por hipótese de indução, $\widetilde{Y}_n$ (e logo Y_n) é da forma desejada.

Exemplo: $x_n = sen(n\alpha)$ satisfaz uma recorrência linear. De fato,
$x_{n+1} = sen(n\alpha + \alpha) = sen(n\alpha)\cos\alpha + \cos(n\alpha) sen\alpha \Rightarrow$
$x_{n+2} = sen(n\alpha + 2\alpha) = sen(n\alpha)\cos 2\alpha + \cos(n\alpha) sen 2\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow x_{n+2} - \frac{sen 2\alpha}{sen\alpha} x_{n+1} = (\cos 2\alpha - \frac{sen 2\alpha}{sen\alpha}\cos\alpha) x_n$, ou seja,
$x_{n+2} = 2\cos\alpha X_{n+1} - X_n$. Note que x_n não parece ser da forma geral descrita nesta seção, mas de fato,

$$x_n = \frac{e^{in\alpha} - e^{-in\alpha}}{2i} = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha})^n - \frac{1}{2i}(e^{-i\alpha})^n = \frac{1}{2i}(\cos\alpha + i sen\alpha)^n - \frac{1}{2i}(\cos\alpha - i sen\alpha)^n$$

Obs. Se (x_n) satisfaz Rec$((x-1)P(x))$, onde $P(x) = a_n x^k + a_{k-1} x^{k-1} + ... + a_0$, então, se definirmos $Y_n = a_k x_{n+k} + a_{k-1} x_{n+k-1} + ... + a_0 x_n$, teremos $Y_{n+1} = Y_n, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, Y_n é constante. Assim, $a_k x_{n+k} + ... + a_0 x_n$ é um invariante da seqüência x_n, o que é uma observação útil para muitos problemas olímpicos. Veja o problema 3 da IMO.

EXEMPLO: OS NÚMEROS DE FIBONACCI.

A sucessão que lhes dá origem é: $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, n \geq 0$
em que f_0 e f_1 são dados. Ao aplicar o método analisado, considerando $f_0 = 0$ e $f_1 = 1$, obtemos o polinômio característico $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, cujas soluções são:

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Considerando as condições do bordo a solução geral da equação de Fibonacci é (ver [3]):

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^n - \lambda_2^n), n \geq 0$$

Observa-se que os valores associados a esta sucessão são todos inteiros. Por exemplo: $f_3 = 2, f_4 = 3$, etc. Podemos comprovar que, se n converge a infinito então λ_2 converge a zero, portanto, f_n é da ordem de λ_1^n, e a fração f_{n+1}/f_n converge a λ_1.

4. EQUAÇÕES NÃO HOMOGÊNEAS DE PRIMEIRA ORDEM COM COEFICIENTES CONSTANTES.

A equação mencionada é do tipo:

$$a_k x_{n+k} + a_{k-1} + \ldots + a_0 x_n = y_n,$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_k$ são constantes e y_n satisfaz uma equação homogênea de primeira ordem com coeficientes constantes.
Supondo que y_n satisfaça

$$b_\ell y_{n+\ell} + b_{\ell-1} y_{n+\ell-1} + \ldots + b_0 y_n = 0,$$

onde $b_0, b_1, \ldots, b_\ell$ são constantes, observamos que

$$\begin{gathered} b_\ell (a_k x_{m+\ell+k} + \ldots + a_0 x_{m+\ell}) + \\ b_{\ell-1}(a_k x_{m+\ell-1+k} + \ldots + a_0 x_{m+\ell-1}) + \ldots \\ b_0 (a_k x_{m+k} + \ldots + a_0 x_m) = 0, \end{gathered}$$

ou seja, temos uma equação homogênea de primeira ordem com coeficientes constantes.
Pode-se demonstrar que a equação característica da recorrência é:

$$(a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_0) \cdot (b_\ell x^\ell + b_{\ell-1} x^{\ell-1} + \ldots + b_0) = 0.$$

Exemplo 1: Considere a seguinte equação de recorrência

$$x_n - x_{n-1} = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é multiplo de } 4, n \geq 1; \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$x_0 = 0.$

$$y_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é multiplo de } 4, \text{satisfaz a recorrência.} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$y_{n+4} = y_n \Leftrightarrow y_{n+4} - y_n = 0, n \geq 0.$ Assim,

$$(x_{n+4} - x_{n+3}) - (x_n - x_{n-1}) = 0 \Leftrightarrow$$
$$x_{n+4} - x_{n+3} - x_n + x_{n-1} = 0 \text{ e}$$
$$x_0 = 0; x_1 - x_0 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0;$$
$$x_2 - x_1 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0;$$
$$x_3 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 0;$$
$$x_4 - x_3 = 1 \Leftrightarrow x_4 = 1.$$

A equação característica é $x^5 - x^4 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^4 - 1) \cdot (x - 1) = 0$ a qual possui as raízes 1 (raiz dupla); –1; i ; – i. Ou seja,

$$x_n = (A_n + B) \cdot 1^n + C \cdot (-1)^n + D \cdot i^n + E \cdot (-1)^n,$$

A, B, C, D, E constantes.
De fato, considerando as condições de bordo,

$$x_n = \frac{n}{4} - \frac{3}{8} + \frac{(-1)^n}{8} + \frac{(1+i)}{8} \cdot i^n + \frac{(1-i)}{8} \cdot (-i)^n \Leftrightarrow$$

$$x_n = \frac{n}{4} + \frac{i^n((1+i) + (-1)^n(1-i)) + (-1)^n - 3}{8}$$

(É interessante notar que, na verdade, $x_n = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$.)

Exemplo 2: Seja a seguinte equação de recorrência, que considera logaritmos em base 2:

$$f(n) = 2f(\sqrt{n}) + \log_2 \log_2 n, n \geq 3$$
$$f(2) = 1$$

Neste caso aplicamos uma troca de variável para ir desta equação a uma equação linear, e poder resolvê-la, o qual significa que haverá solução só para os valores de n que tome com este cambio. Este é:

$$n = 2^{2^k}\ ,\ \sqrt{n} = 2^{2^{k-1}}\ ,\ \log_2 \log_2 n = k$$

Ao efetuar essas substituições na equação obtemos:

$$x_k - 2x_{k-1} = k \ \ (3)$$

onde:

$$x_k = f(n) = f(2^{2^k})$$

$$x_0 = f(2^{2^0}) = 1$$

A equação (3) é uma equação não homogênea. Procedendo como acima Δ obtemos:

$$x_{k+2} - 4x_{k+1} + 5x_k - 2x_{k-1} = 0$$

cuja solução considerando a condição do bordo é:

$$x_k = -2 - k + 3 \cdot 2^k, k \geq 0$$

Logo, voltando a variável n original, a solução final é:

$f(n) = 3\log_2 n - \log_2 \log_2 n - 2,\ \ n = 2^{2^k}, k \geq 0$

A solução só tem resultados inteiros para os valores de n mencionados. Por exemplo: $f(4) = 3, f(16) = 8,$ etc. Deixamos a prova deste fato como exercício para o leitor.

EQUAÇÕES FUNCIONAIS

Eduardo Tengan - Colégio Etapa

◆ Nível Avançado

Uma das técnicas básicas para a resolução de equações com funções é perceber quando ela é injetora, isto é, quando $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b.$ Isto é particularmente freqüente em problemas em que temos equações do tipo $f(f(x)) = kx, k \neq 0.$ De fato, $f(a) = f(b) \Rightarrow f(f(a)) = f(f(b)) \Leftrightarrow ka = kb \Leftrightarrow a = b.$ "Sabendo que f é injetora, podemos provar novas relações aplicando f dos dois lados da equação". Por exemplo, considere o seguinte problema:

(IMO) Seja $\mathbb{Q}^+$ o conjunto dos racionais positivos. Construa uma função $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ tal que $f(xf(y)) = f(x)/y$ para todo $x, y \in \mathbb{Q}^+$.

Para $x = 1$, temos $f(f(y)) = f(1)/y$ e daí temos que f é injetora: $f(a) = f(b) \Rightarrow f(f(a)) = f(f(b)) \Leftrightarrow f(1)/a = f(1)/b \Leftrightarrow a = b.$ ($f(1) \in \mathbb{Q}^+$, logo $f(1) \neq 0$).

Agora, vamos provar que a função é multiplicativa, isto é, que $f(ab) = f(a)f(b).$ Aplicamos f a cada membro da equação,

$$f(f(ab)) = \frac{f(1)}{ab}$$

$$f(f(a)f(b)) = \frac{f(f(a))}{b} = \frac{f(1)}{ab}$$

Como os resultados são iguais e f é injetora, concluímos que $f(ab) = f(a)f(b).$

Daí temos:

$$f(1 \cdot 1) = f(1)f(1) \Leftrightarrow f(1) = 1$$

$$f\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = f(a)f\left(\frac{1}{a}\right) \Leftrightarrow 1 = f(a)f\left(\frac{1}{a}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{f(a)}$$

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = f\left(a \cdot \frac{1}{b}\right) = \frac{f(a)}{f(b)}$$

Assim, basta construir a função para os inteiros positivos. Mais ainda, basta defini-la para os primos. Devemos ter $f(f(p)) = f(1)/p = 1/p$. Pensando um pouco, sendo $p_1, p_2, p_3, \ldots$ todos os primos, podemos tomar

$$f(p_n)=\begin{cases} p_{n-1} & \text{se } n \text{ é par} \\ 1/p_{n+1} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

e verificar que a condição inicial é satisfeita.

EXERCÍCIO 1

(IMO) Determine o menor valor possível de $f(1998)$, onde f é uma função do conjunto $\mathbb{N}$ dos inteiros positivos nele mesmo, tal que, para todo $m,n\in\mathbb{N}$:

$$f(n^2 f(m)) = m(f(n))^2.$$

Para funções de domínio real, podemos utilizar desigualdades para obter igualdades. Por exemplo, considere o seguinte problema.

Determine todas as funções $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tais que $f(a;a)=a$ para todo $a\in\mathbb{R}$ e $a+b<c+d\Rightarrow f(a,b)<f(c,d)$ para quaisquer $a, b, c, d \in\mathbb{R}$.

Observe, em primeiro lugar, que, para $\varepsilon>0$,

$$f\left(\frac{a+b}{2}-\varepsilon,\frac{a+b}{2}-\varepsilon\right)\le f(a,b)\le f\left(\frac{a+b}{2}+\varepsilon,\frac{a+b}{2}+\varepsilon\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{2}-\varepsilon\le f(a,b)\le\frac{a+b}{2}+\varepsilon \quad (*)$$

Logo é razoável que $f(a,b)=(a+b)/2$. Suponha que existam a_0 e b_0 tais que $f(a_0,b_0)\neq(a_0+b_0)/2$. Se $f(a_0,b_0)>(a_0+b_0)/2$, então $f(a_0,b_0)=(a_0+b_0)/2+p, p>0$. Mas $f(a_0,b_0)\le(a_0+b_0)/2+p/2$ por (*), ou seja,

$$(a_0+b_0)/2+p\le(a_0+b_0)/2+p/2\Leftrightarrow p\le 0, \text{ absurdo.}$$

Analogamente $f(a_0,b_0)<(a_0+b_0)/2$ é impossível. Logo $f(a,b)=(a+b)/2$ para todo $a,b\in\mathbb{R}$.

Podemos utilizar um raciocínio semelhante em diversos problemas que envolvem funções crescentes. Às vezes, é necessário obter a desigualdade a partir das condições do problema, muitas vezes, utilizamos relações como $f(x^2)=(f(x))^2$ para concluir que $x\ge 0\Rightarrow f(x)\ge 0$ (basta substituir $\sqrt{x}$ no lugar de x na relação anterior).

Observe o exercício a seguir.

Seja f uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tal que $f(1) = 1$, $f(a + b) = f(a) + f(b)$ para todo a, b e $f(x)f(1/x)=1$ para todo $x\neq 0$. Prove que $f(x)=x$ para todo número real.

É fácil ver que $f(n) = n$ para todo n inteiro positivo e de $f(0) = f(0) + f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$ e $f(0) = f(1) + f(-1) \Leftrightarrow f(-1) = -1$, que $f(x) = x$ para todo $x \in Z$. Para verificar este resultado para $x \in \mathbb{Q}$, basta utilizar $f(1/x) = 1/f(x)$. Observamos ainda que f é injetora: temos $f(y) + f(x-y) = f(x) \Leftrightarrow f(x-y) = f(x) - f(y)$.
Como $f(x) \cdot f(1/x) = 1 \Rightarrow f(x) \neq 0$, então $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ e
$f(x) = f(y) \Leftrightarrow f(x) - f(y) = 0 \Leftrightarrow f(x-y) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$.
Para estender o resultado para $\mathbb{R}$, precisamos obter uma desigualdade (na verdade, é só desta forma que poderemos distinguir o conjunto dos racionais do conjunto dos reais. No jargão matemático, dizemos que $\mathbb{R}$ é um *corpo ordenado completo*). Utilizando a observação que precede o exercício, vamos tentar calcular $f(x^2)$.
Se $a \neq a^2$, $f(a - a^2) \neq 0$ (pois *f* é injetora), logo

$$\frac{1}{f(a) - f(a^2)} = \frac{1}{f(a - a^2)} = f\left(\frac{1}{a - a^2}\right) = f\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{1-a}\right)$$
$$= f\left(\frac{1}{a}\right) + f\left(\frac{1}{1-a}\right) = \frac{1}{f(a)} + \frac{1}{f(1-a)} \Rightarrow f(a^2) = (f(a))^2,$$

que vale também quando $a = a^2 \Leftrightarrow a = 0$ ou $a = 1$.
Agora, observando que $a > b \Rightarrow a - b > 0 \Rightarrow f(a-b) > 0 \Rightarrow f(a) > f(b)$, concluímos verificando que, por exemplo, se $f(x_0) > x_0$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}$, que se $f(x_0) < x_0$ então existe um $q \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x_0) > q > x_0$. Porém $q > x_0 \Rightarrow f(q) > f(x_0) \Leftrightarrow q > f(x_0)$, o que é absurdo. O caso $f(x_0) < x_0$ é análogo, o que termina o problema.

EXERCÍCIO 2

(IMO) Encontre todas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$.
Dica: Prove que $f(x^2) = (f(x))^2$ e que $f(x+y) = f(x) + f(y)$, para $x \geq 0$ e $y \in \mathbb{R}$, então conclua. Se voce não conseguir concluir, puxa!! Você passou muito perto da resolução.

EXERCÍCIO 3

(IMO) Encontre todas as funções *f*, definidas no conjunto dos reais não negativos e assumindo valores reais não negativos, tais que:
i) $f(xf(y))f(y) = f(x+y)$ para todo $x, y \geq 0$

ii) $f(2) = 0$

iii) $f(x) \neq 0$ para $0 \leq x < 2$

Dica: $x \geq 2 \cdot y \Leftrightarrow x \geq 2/f(y)$. Incrível, não?

PONTO FIXO

Muitas vezes, é útil considerarmos os pontos fixos de uma função, isto é, pontos *x* tais que $f(x) = x$. Para mostrar que esta simples consideração leva, muitas vezes, à solução do problema, observe abaixo o seguinte exemplo:

(IMO) Seja S o conjunto dos reais maiores que -1. Encontre todas as funções $f : S \to S$ satisfazendo as condições

i) $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x), \forall x, y \in S$

ii) $f(x)/x$ é estritamente crescente para $-1 < x < 0$ e $x > 0$.

Para $x = 0$, temos $f(f(y)) = y(1 + f(0)) + f(0)$, donde concluímos que *f* é injetora. De $f(f(0)) = f(0)$ e da injetividade de *f*, concluímos que $f(0) = 0$.

Seja x_0 um ponto fixo de *f*. Sabemos da condição ii) que há no máximo um ponto em cada um dos intervalos $(-1;\ 0)$ e $(0;\ +\infty)$. Substituindo $x = y = x_0$ em i), encontramos $f\left(x_0^2 + 2x_0\right) = x_0^2 + 2x_0$.

Se $x_0 \in (-1;0), x_0^2 + 2x_0 \in (-1;0)$, logo $x_0^2 + 2x_0 = x_0$, absurdo. Analogamente, não há pontos fixos em $(0;+\infty)$.

Assim, 0 é o único ponto fixo de *f*. Substituindo $x = y$ em i), temos $f(x + f(x) + xf(x)) = x + f(x) + xf(x)$, ou seja $xf(x)$ é ponto fixo e, portanto, igual a 0, logo $f(x) = -x/(1 + x)$, que satisfaz i) e ii).

EXERCÍCIO 4

(IMO) Encontre todas as funções *f* definidas no conjunto dos reais positivos e assumindo valores neste conjunto e que satisfaz as condições:

i) $f(xf(y)) = yf(x)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}_+^*$;

ii) $f(x) \to 0$ quando $x \to +\infty$.

EXERCÍCIO 5

(Torneio das Cidades) Mostre que não existem funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais $f(f(x)) = x^2 - 1996$. Dica: utilize pontos fixos, mas utilize mesmo!

EXERCÍCIO 6

(IMO) Seja N_0 o conjunto dos inteiros não negativos. Encontre todas as funções $f : N_0 \to N_0$ tais que $f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n), \quad \forall m, n \in N_0$.

Dica: considere o menor ponto fixo da função.

OLIMPÍADAS AO REDOR DO MUNDO

O comitê editorial da EUREKA! sente-se gratificado pela acolhida desta nova seção por parte dos seus leitores.

Aproveitamos a oportunidade para agradecer aqueles que nos enviaram sugestões, opiniões, críticas e principalmente soluções para os problemas. Cumpre informar, aos leitores, que por uma questão de espaço físico as soluções de todos os problemas propostos, em um exemplar de EUREKA!, não poderão ser apresentadas no número posterior ao daquele em que foram publicados visto que a revista possui outras seções de grande interesse do público em geral.

Entretanto, as mesmas serão divulgadas nos números posteriores à medida que os leitores as enviarem. Se houver interesse "mais urgente" na solução de algum problema específico, solicitamos contactar a OBM, seção **OLIMPÍADAS AO REDOR DO MUNDO**, através de carta ou e-mail.

Antonio Luiz Santos

Primeiramente vamos aos problemas propostos deste número

32. (Moldávia-1998) A seqüência (a_n), $n \in \mathbb{N}^*$ verifica as relações $a_1 = \frac{1}{2}$ e $a_n = \frac{a_{n-1}}{2na_{n-1}+1}$ para todo número natural $n > 1$. Calcule $a_1 + a_2 + \cdots + a_{1998}$.

33. (Moldávia-1999) Seja n um número natural tal que $2n^2$ possui 28 divisores distintos e o número $3n^2$ possui 30 divisores distintos . Qual o número de divisores do número $6n^2$?

34. (Ucrânia-1996) A seqüência (a_n), $n \geq 0$ é tal que $a_0 = 1$, $a_{100} = 0$, e para todo $n \geq 1$, tem-se que $a_{n+1} = 2a_1a_n - a_{n-1}$.

a) Mostre que $|a_1| \leq 1$.

b) Determine a_{1996}

35. (Ucrânia-1997) Seja $d(n)$ o *maior* divisor ímpar de um número natural n. Definamos uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(2n-1) = 2^n$ e $f(2n) = n + \left(\frac{2n}{d(n)}\right)$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Determine todos os valores de k tais que $f(f(\ldots f(1)\ldots)) = 1997$ onde f é iterada k vezes.

36. (China-1999) Seja $PQRS$ um quadrilátero inscrito num círculo e cuja medida do ângulo $\angle PSR$ seja igual a 90^o. Se H e K são os pés das perpendiculares baixadas de Q sobre PR e PS respectivamente (convenientemente prolongados se necessário). Mostre que HK divide QS ao meio.

37. (Rússia-1999) Os algarismos de um inteiro positivo A em sua representação no sistema de numeração decimal crescem da esquerda para a direita. Determine a soma dos algarismos do número $9 \cdot A$.

38. (Japão-1999) Para um hexágono convexo $ABCDEF$ cujos lados possuem todos medidas iguais a 1, determine o valor máximo M e o valor mínimo m das diagonais AD, BE e CF e seus possíveis conjunto de valores.

39. (Irlanda-1999) Determine todos os inteiros positivos m tais que a quarta potência do número de seus divisores positivos é igual a m.

40. (Irlanda-1999) Mostre que existe um número inteiro positivo na seqüência de Fibonacci que é divisível por 1000.

41. (Taiwan-1999) Seja P^* o conjunto de todos os números primos ímpares menores do que 10000. Determine todos os números primos $p \in P^*$ tal que para cada subconjunto S de P^*, digamos, $S = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$, com $k \geq 2$, sempre que $p \notin S$, existe algum q em P^*, mas não em S tal que $q + 1$ é um divisor de $(p_1 + 1)(p_2 + 1)\cdots(p_k + 1)$.

42. (Taiwan-1999) As alturas de um triângulo acutângulo ABC onde $AB > AC$ intersectam os lados BC, AC e BC nos pontos D, E e F respectivamente. Se EF intersecta BC no ponto P e a reta que passa por D e é paralela a EF intersecta AC e AB em Q e R respectivamente, seja N um ponto sobre o lado BC tal que $\angle NQP + NRP < 180^o$. Prove que $BN > CN$.

43. (Bulgária-1999) Seja p um parâmetro real tal que a equação $x^2 - 3px - p = 0$ possui duas raízes reais distintas x_1 e x_2.

a) Prove que $3px_1 + x_2^2 - p > 0$.

b) Determine o menor valor possível de $A = \dfrac{p^2}{3px_1 + x_2^2 + 3p} + \dfrac{3px_2 + x_1^2 + 3p}{p^2}$.

Quando ocorre a igualdade ?

44. (Bulgária-1999) Determine o menor número natural n tal que a soma dos quadrados de seus divisores (incluindo 1 e n) é igual a $(n+3)^2$.

45. (Bulgária-1999) Seja M o ponto médio do lado BC de um triângulo ABC no qual $\angle CAB = 45^o$ e $\angle ABC = 30^o$.

a) Determine $\angle AMC$

b) Prove que $AM = \dfrac{AB \cdot BC}{2AC}$

46. (Bulgária-1999) Sejam M um ponto do interior de um quadrado $ABCD$ e A_1, B_1, C_1 e D_1 os pontos de interseção de AM, BM, CM e DM respectivamente com o círculo circunscrito ao quadrado $ABCD$. Mostre que $A_1B_1 \cdot C_1D_1 = A_1D_1 \cdot B_1C_1$.

47. (Irã-1999) Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfazem a $f(f(x)+y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y$ para todos os números reais x e y.

48. (Irã-1999) Em um triângulo ABC a bissetriz do ângulo $\angle BAC$ intersecta o lado BC no ponto D. Seja Γ um círculo tangente a BC no ponto D e que passa pelo ponto A. Se M é o segundo ponto de interseção de AC com Γ e se BM intersecta o círculo em P, mostre que AP é uma mediana do triângulo ABD.

49. (Repúblicas Tcheca e Eslovaca-1999) Determine o menor número natural que pode ser obtido colocando-se parêntesis na expressão

$$15:14:13:12:11:10:9:8:7:6:5:4:3:2$$

50. (Repúblicas Tcheca e Eslovaca-1999) A média aritmética de uma quantidade de números primos distintos é igual a 27. Determine o maior número primo que aparece entre eles.

51. (Repúblicas Tcheca e Eslovaca-1999) Mostre que para todo número natural n o produto

$$\left(4-\frac{2}{1}\right)\left(4-\frac{2}{2}\right)\left(4-\frac{2}{3}\right)\cdots\left(4-\frac{2}{n}\right)$$

é um inteiro.

52. (Espanha-1998) As tangentes dos ângulos de um triângulo são inteiros positivos. Determine estes números.

53. (Espanha-1998) Determine todas as funções estritamente crescentes $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ tais que $f(n+f(n))=2f(n)$

54. (Eslovênia-1999) Seja O o centro do círculo circunscrito ao triângulo ABC. Se P e Q são os pontos médios de AO e BC respectivamente, determine a medida do ângulo $\angle OPQ$ se $\angle CBA = 4\cdot\angle OPQ$ e $\angle ACB = 6\cdot\angle OPQ$.

55. (Eslovênia-1999) Determine todos os inteiros x e y que satisfazem à equação $x^3+9xy+127=y^3$.

56. (Estônia-1999) Determine todos os valores de a tais que o valor absoluto de uma das raízes da equação $x^2+(a-2)x-2a^2+5a-3=0$ seja igual a duas vezes o valor absoluto da outra raiz.

57. (Estônia-1999) Sejam O_1 e O_2 os centros de dois círculos que não se intersectam e de mesmo raio. Se s é a reta que passa pelos seus centros e t é sua tangente comum externa, considere um círculo tangente aos dois círculos nos pontos K e L e também tangente às retas s e t nos pontos M e P respectivamente. Determine a medida de O_1O_2. Mostre ainda que os pontos M, K e N estão alinhados onde N é o ponto de tangência da reta t com o primeiro círculo.

58. (St.Petersburg-1999) 150 bolas de encher (bexigas) vermelhas, 150 azuis e 150 verdes flutuam sob o teto de um circo. Existem exatamente 13 bolas verdes dentro de cada bola azul e exatamente 5 bolas azuis e 19 bolas verdes dentro de cada bola vermelha. Mostre que algumas bolas verdes não estão contidas no interior de nenhuma das outras 449 bolas.

59. (St.Petersburg-1999) Todos os números inteiros positivos não superiores a 100 são escritos em ambos os lados de 50 cartas (cada número é escrito exatamente uma vez). Estas cartas são postas sobre uma mesa de modo que somente os números que estejam virados para cima podem ser vistos. Gustavo pode escolher várias cartas, virá-las e então calcular a soma de todos os 50 números que aparecem agora. Qual é o valor máximo da soma S tal que Gustavo pode com certeza obter uma soma não inferior a S?

60. (St.Petersburg-1999) Três mágicos apresentam um truque entregando a uma pessoa da platéia um maço de cartas numeradas com $1, 2, \ldots, 2n+1 (n > 6)$. O espectador fica com uma das cartas e aleatoriamente distribui as restantes entre o primeiro e o segundo mágicos (cada um deles fica com n cartas) . Estes olham suas cartas (sem se comunicar um ao outro) e cada um escolhe duas cartas formando um maço (ordenado) com estas cartas e as entrega ao terceiro mágico. O terceiro mágico olha estas quatro cartas e anuncia a carta que ficou com o espectador. Explique como este truque pode funcionar.

Agora vamos aos comentários e soluções dos leitores para alguns dos problemas apresentados no número anterior de EUREKA!. *O critério por nós adotado para este número foi apresentar as soluções dos problemas que foram, até o presente momento, resolvidos pelo maior número de leitores.*

4. (Reino Unido-1998) Em um triângulo ABC, D é o ponto médio de AB e E é um ponto do lado BC tal que $BE = 2EC$. Sabendo que $\angle ADC = \angle BAE$ determine a medida do ângulo $\angle BAC$.

Enviaram soluções Einstein do Nascimento Júnior (Fortaleza-CE), Geraldo Perlino Júnior (SP) e Diego Alvarez Araújo Correia (Fortaleza-CE).

Solução de Einstein do Nascimento Júnior:

Sejam $\alpha = \angle ADC = \angle BAE$ e $P = AE \cap CD$ e tracemos pelo ponto D uma reta paralela a AE e que intersecta o lado BC no ponto Q. Como $EC = EQ$ e $DQ // PE$ então $AP = PD$. Daí, $PD = PA = PC$ e seja $\angle PCA = \angle PAC = \theta$ logo, $\angle PCA + \angle PAC + \angle PAB + \angle PDA = 180^o \Rightarrow 2\theta + 2\alpha = 180^o \Rightarrow \alpha + \beta = 90^o$.

7. (Rússia-1998) Existem números de *n* algarismos *M* e *N* onde todos os algarismos de *M* sejam pares, todos os algarismos de *N* sejam ímpares, cada um dos algarismos de 0 a 9 ocorrendo exatamente uma vez entre M e N e tais que M divide N?

Enviaram soluções com comentários sobre um possível erro no enunciado: Diego Alvarez Araújo Correia (Fortaleza-CE) e Marcílio Miranda de Carvalho (Teresina – PI).

Solução de Marcílio Miranda de Carvalho:

$$M \mid N \Rightarrow \underbrace{M \cdot K}_{par} = \underbrace{N}_{ímpar} \text{ absurdo!}$$

Conclusão : **Não** existem M e N que satisfaçam às condições do problema

Marcílio também observou que como a Rússia tem grande tradição em IMO's deveria haver um erro no enunciado e que o mesmo possivelmente deva ser : *" ... e tais que N divide M "* apresentando a seguinte solução para o novo enunciado :

$$M \equiv 0+2+4+6+8 \equiv 2 (\text{mod } 9)$$
$$N \equiv 1+3+5+7+9 \equiv 7 (\text{mod } 9)$$

$$N \mid M \Rightarrow N \cdot K = M \Rightarrow 7K \equiv 2 (\text{mod} 9) \Rightarrow K \equiv 8 (\text{mod} 9) \Rightarrow K \geq 8.$$

Mas $N \geq 13579 \Rightarrow N \cdot K > 10^5 \Rightarrow M$ possui mais de 5 algarismos.

Conclusão : Não existem M e N que satisfaçam ás condições do problema.

8. (Romênia-1998) O volume de um paralelepípedo é $216 cm^3$ e a sua área total é $216 cm^2$. Mostre que o paralelepípedo é um cubo.

Enviaram soluções Einstein do Nascimento Júnior (Fortaleza-CE), Geraldo Perlino Júnior (SP), José Guilherme Moreira Pinto (Juiz de Fora - MG) e Diego Alvarez Araújo Correia (Fortaleza-CE).

Solução de Diego Alvarez Araújo Correia:

Sejam a, b e c as medidas das dimensões do paralelepípedo. Pelo enunciado tem-se : $abc = 216$ e $ab + ac + bc = 108$.

Como $MA \geq MG$, $\frac{ab+bc+ac}{3} \geq \sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ac}$ então $\frac{108}{3} \geq \sqrt[3]{(abc)^2} = \sqrt[3]{(216)^2} = 36 \Rightarrow 36 \geq 36$. Como ocorre a igualdade, temos que $ab = bc = ca \Rightarrow a = b = c$.

13. (Irlanda-1999) Uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfaz às condições :

$f(ab) = f(a)f(b)$ se o máximo divisor comum de a e b é 1,
$f(p+q) = f(p) + f(q)$ para todos os números primos p e q.
Mostre que $f(2) = 2$, $f(3) = 3$ e $f(1999) = 1999$.

Enviaram soluções Marcílio Miranda de Carvalho (Teresina – PI) e Geraldo Perlino Júnior (SP).

Solução de Marcílio Miranda de Carvalho:
Seja p um número primo ímpar, então $f(2p) = f(2) \cdot f(p)$. Como,

$$f(2p) = f(p) + f(p) = 2f(p) \Rightarrow f(2) = 2$$

Além disso, $f(4) = f(2) + f(2) = 4 \Rightarrow f(12) = 4f(3)$.

Por outro lado

$$f(12) = f(7) + f(5) \Rightarrow f(12) = 2f(2) + f(3) + f(2) + f(3) = 6 + 2f(3) \Rightarrow f(3) = 3.$$

Finalmente,

$f(5) = f(2) + f(3) = 5 \Rightarrow f(15) = 15 \Rightarrow f(13) = 13 \Rightarrow f(26) = 26 \Rightarrow f(23) = 23.$
Mas, $f(13) = 13 \Rightarrow f(11) = 11 \Rightarrow f(33) = 33 \Rightarrow f(31) = 31 \Rightarrow f(29) = 29$. Logo,

$$f(2001) = f(3) \cdot f(23) \cdot f(29) = 2001 \Rightarrow f(1999) = 1999$$

14. (Suíça-1999) Determine todas as funções f : $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ satisfazendo a $\frac{1}{x} f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x$ para todos $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Enviaram soluções Marcílio Miranda de Carvalho (Teresina – PI) e Geraldo Perlino Júnior (SP).

Solução de Geraldo Perlino Júnior:

Seja $a \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$. Fazendo $x = -a$ e $x = \frac{1}{a}$ na equação dada temos $-\frac{1}{a} f(a) + f\left(-\frac{1}{a}\right) = -a$ e $a \cdot f\left(-\frac{1}{a}\right) + f(a) = \frac{1}{a}$. Resolvendo-se o sistema formado por estas duas equações chegamos a $f(a) = \frac{1}{2}\left(a^2 + \frac{1}{a}\right)$ e portanto, $f(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)$.

15. (Suíça-1999) Dois círculos intersectam-se em dois pontos M e N. Um ponto A qualquer do primeiro círculo, distinto de M e N, é unido aos pontos M e N de modo que as retas AM e AN intersectam novamente o segundo círculo nos pontos B e C. Mostre que a tangente ao primeiro círculo em A é paralela a BC.

Enviaram soluções Einstein do Nascimento Júnior (Fortaleza-CE), Geraldo Perlino Júnior (SP) e Diego Alvarez Araújo Correia (Fortaleza-CE) .

Solução de Einstein do Nascimento Júnior:
Seja $\angle MNA = \theta$ e P um ponto sobre a tangente ao primeiro círculo em A. Temos então que $\angle MAP = \theta = \angle MNA$ e como o quadrilátero $MNBC$ é inscritível então $\angle MNB = 180^o - \theta$ e daí $\angle MCB = \theta$
resultando em $\angle ACB = \angle CAP \Rightarrow AP // BC$.

17. (Ucrânia-1999) Mostre que o número $9999999 + 1999000$ é composto.

Solução de Marcílio Miranda de Carvalho:

$$9999999+1999000 = 10^7 - 1 + \left(2\cdot 10^3 - 1\right)\cdot 10^3 =$$
$$= 9\cdot 10^6 + 10^6 - 1 + 2\cdot 10^6 - 10^3 = 3\cdot 10^3\left(3\cdot 10^3 - 1\right) + 3\cdot 10^6 - 10^3 + 3\cdot 10^3 - 1 =$$
$$= 3\cdot 10^3\left(3\cdot 10^3 - 1\right) + 3\cdot 10^3\left(10^3 + 1\right) - \left(10^3 + 1\right) = 3\cdot 10^3\left(3\cdot 10^3 - 1\right) + \left(3\cdot 10^3 - 1\right)\cdot 10^3 + 1 =$$
$$= \left(3\cdot 10^3 - 1\right)\left(3\cdot 10^3 + 10^3 + 1\right) = 2999\cdot 4001$$

19. (Lituânia-1999) Duas cordas AB e CD de um círculo intersectam-se no ponto K. O ponto A divide o arco CAD em duas partes iguais. Se $AK = a$ e $KB = b$, determine a medida da corda AD.

Enviaram soluções Marcílio Miranda de Carvalho (Teresina – PI), Einstein do Nascimento Júnior (Fortaleza-CE), e Geraldo Perlino (SP) e Geraldo Perlino Júnior (SP).

Solução de Marcílio Miranda de Carvalho:

Seja $\angle ABD = \angle ADK = \alpha$ então tem-se que os triângulos ADK e ABD são semelhantes logo,

$$\frac{AD}{a} = \frac{a+b}{AD} \Rightarrow (AD)^2 = a(a+b) \Rightarrow AD = \sqrt{a(a+b)}$$

21. (Estônia-1999) Determine o valor da expressão

$$f\left(\frac{1}{2000}\right) + f\left(\frac{2}{2000}\right) + \cdots + f\left(\frac{1999}{2000}\right) + f\left(\frac{2000}{2000}\right) + f\left(\frac{2000}{1999}\right) + \cdots + f\left(\frac{2000}{1}\right)$$

supondo que $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$.

Enviaram soluções Marcílio Miranda de Carvalho (Teresina – PI), Einstein do Nascimento Júnior (Fortaleza-CE), Geraldo Perlino Júnior (SP), Diego Alvarez Araújo Correia (Fortaleza-CE) e Gibran Medeiros de Souza (Natal-RN).

Solução de Marcílio Miranda de Carvalho:

$f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{x^2}{1+x^2} + \dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \dfrac{x^2}{1+x^2} + \dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \dfrac{x^2+1}{x^2+1} = 1$. Logo o valor da expressão é

$$1999 + f\left(\frac{2000}{2000}\right) = 1999 + f(1) = \frac{3999}{2}$$

22. (Eslovênia-1999) Inicialmente os números $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{1998}, \frac{1}{1999}$ são escritos em um quadro negro. Em cada passo, escolhemos dois destes números, digamos a e b, e os substituímos pelo número $a + b + ab$. Continuamos desta maneira até que reste um único número no quadro negro. É possível que este número seja 2000 ? Justifique sua resposta.

Enviaram soluções Einstein do Nascimento Júnior (Fortaleza-CE) e Geraldo Perlino Júnior (SP).

Resumo da solução de ambos com adaptações:

Seja $a \otimes b = a + b + ab$. É fácil ver que $a \otimes b = b \otimes a$ e $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$ e portanto podemos escolher os números em qualquer ordem. Calculemos os resultados então na ordem dada :

$$1 \otimes \frac{1}{2} = 2, 2 \otimes \frac{1}{3} = 3, ..., 1998 \otimes \frac{1}{1999} = 1999$$

Deste modo vemos que nós sempre alcançaremos 1999 não podendo então alcançar 2000.

SOLUÇÕES DE PROBLEMAS PROPOSTOS

Publicamos aqui algumas das respostas enviadas por nossos leitores.

42) Suponha que a, b e c são as medidas dos lados de um triângulo ABC, com semi-perímetro p e área S, verifique que

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{p}{s}$$

e mais ainda: verifique que a igualdade acima ocorre apenas se o triângulo for equilátero.

Solução de Marcelo Rufino de Oliveira (Belém-PA):

Sejam $x=a+c-b \quad y=a+b-c \quad z=b+c-a$

Pela Desigualdade Triangular temos que $x>0$, $y>0$ e $z>0$.

Assim, isoloando a, b e c: $a=x+y \quad b=y+z \quad c=z+x$

Pela Desigualdade entre as Médias Aritmética e Geométrica temos:

$x+y\ge 2\sqrt{xy}$, $\quad y+z\ge 2\sqrt{yz}\quad$ e $\quad z+x\ge 2\sqrt{zx}\quad$ (1)

Vamos desenvolver agora o valor de $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$ em função de x, y e z, usando para isso o resultado (1):

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right)^2\le\left(\frac{1}{2\sqrt{xy}}+\frac{1}{2\sqrt{yz}}+\frac{1}{2\sqrt{zx}}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}\right)^2$$

Pela Desigualdade de Cauchy podemos afirmar que

$$(a_1+a_2+a_3)^2\le 3(a_1^2+a_2^2+a_3^2).$$

Fazendo então $a_1=\frac{1}{\sqrt{xy}}$, $a_2=\frac{1}{\sqrt{yz}}$ e $a_3=\frac{1}{\sqrt{zx}}$ concluímos que:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\le\frac{3}{4}\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)\quad (2)$$

Calculando $\frac{p}{s}$ em função de x, y e z obtemos:

$$\frac{p}{s}=\frac{x+y+z}{\sqrt{(x+y+z)xyz}}=\sqrt{\frac{x+y+z}{xyz}}=\sqrt{\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}}$$

Assim, usando o resultado (2):

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \le \frac{3}{4}\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)=\frac{3}{4}\frac{p^2}{s^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{p}{s} \quad (3)$$

Como nas duas desigualdade usadas a igualdade vale se e só se os termos são iguais, então temos a igualdade na desigualdade (3) sé e só se $a = b = c$.

43) Prove que se p é um primo da forma $4k + 3$, então $2p + 1$ também é primo se e somente se $2p + 1$ divide $2^p - 1$.

Solução de Alex Corrêa Abreu (Niterói - RJ):

Primeira parte:

Se $2p + 1$ também é primo, temos:

$$2^{\varphi(2p+1)} \equiv 1 (\bmod 2p+1) \Rightarrow 2^{2p} \equiv 1 (\bmod 2p+1) \Rightarrow$$

$$2^p \equiv \pm 1 (\bmod 2p+1), \text{ só que } 2p+1 \text{ é da forma } 8k+7, \text{ logo}$$

$$2^p \equiv 1 (\bmod 2p+1) \Rightarrow 2p+1 \mid 2^p - 1$$

Segunda parte:

Se $2^p \equiv 1 (\bmod 2p+1)$, como p é primo então:

$p = ord_{2p+1} 2$, só que $(2, 2p+1) = 1 \Rightarrow$

$\varphi(2p+1) = kp$, com $k \le 2$.

Não podemos ter $k = 1$, pois $\varphi(n)$ é par para todo $n \ge 3$. Assim, $\varphi(2p+1) = 2p \Rightarrow 2p+1$ é primo.

44) O produto de dois inteiros positivos consecutivos pode ser igual ao produto de dois inteiros positivos consecutivos pares?

Solução de Daniel Pessôa Martins Cunha (Fortaleza - CE):

Seja A o produto de dois números inteiros positivos consecutivos. Isto implica que $A = x(x+1)$ onde $x \in \mathbb{Z}$.

Observe que:

- Caso x seja par temos:

$(x-2)x < x(x+1) < x(x+2) \Rightarrow (x-2)x < A < x(x+2)$

(Esta desigualdade é fácil de ser vista)

- Caso x seja ímpar temos: (Logo $x + 1$ é par)

$(x-1)(x+1) < x(x+1) < (x+1)(x+3) \Rightarrow (x-1)(x+1) < A < (x+1)(x+3)$

(desigualdade fácil de ser vista)

Analizando os casos vemos que A está entre dois produtos consecutivos de dois inteiros pares consecutivos positivos.

Logo conclui-se que não é possível que o produto de dois inteiros positivos seja igual ao produto de dois inteiros positivos consecutivos pares.

46) (Baltic Way, 1997)

i) Prove a existência de dois conjuntos infinitos A e B, não necessariamente disjuntos, de inteiros não negativos tais que cada inteiro não negativo pode ser representado de uma única forma como $a + b$, com $a \in A$ e $b \in B$.

ii) Prove que em cada tal par (A, B), ou A ou B contém apenas múltiplos de algum inteiro $k > 1$.

Solução de Humberto Silva Naves (São Paulo - SP):

i) Todo natural se escreve da maneira única como soma de potências de 2 distintas, donde os conjuntos $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ se escreve como soma de potências de 2 distintas com expoente ímpar$\}$ e $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ se escreve como soma de potências de 2 distintas com expoente par$\}$ satisfazem as condições do enunciado (note que $0 \in A$ e $0 \in B$).

ii) 0 deve pertencer aos dois conjuntos, e 1 a exatamente um deles (senão $1 = 0 + 1 = 1 + 0$ seria representado de 2 formas distintas), digamos ao conjunto B. Seja k o menor elemento positivo do conjunto A. É fácil ver que $\{0, 1, ..., k-1\} \subset B$.

Vamos provar que o *mdc* dos elementos de A é k.

Para isso, vamos mostrar por indução que para cada inteiro positivo *m*, existem inteiros $r_1,...,r_s$ tais que $\{x \in B \mid x < mk\} = \bigcup_{i=1} \{r_i k, r_i k + 1,..., r_i k + k - 1\}$, e todos os elementos de *A* menores que *mk* são múltiplos de *k*. Consideremos o inteiro *mk*.
Ele deve ser escrito de maneira única como soma de um elemento de *A* com um elemento de *B*. Se $mk \in A$, podemos escrever os elementos $mk, mk+1,..., mk+k-1$ Como soma de um elemento de $A(mk)$ com um elemento de *B* (pertencente a $\{0,1,..., k-1\}$. Se $mk \notin A$, podemos escrever $mk = m\ell + m(k-\ell)$, com $m\ell \in A$ e $m(k-\ell) \in B$.
Devemos ter $\ell < k$. Se $\ell \geq 1$, por hipótese de indução, $m(k-\ell), m(k-\ell)+,..., m(k-\ell)+k-1$ pertencem a B , donde, para $O \leq j \leq k-1, mk+j = ml + (m(k-\ell)+j)$ é soma de elementos de A e de B menores que *mk*, donde nenhum dos $mk+j,\ 0 \leq j \leq k-1$ pertencem a *A* nem a *B* (pela unicidade da representação, senão poderíamos escrevê-los como $0+(mk+j)$ ou $(mk+j)+0)$, o que prova a afirmação para $m + 1$. Se $\ell = 0, mk \in B$. Queremos mostrar que para $0 \leq j \leq k-1, mk+j$ pertence a *B* (e logo não pertence a *A*), provando a afirmação para $m+1$. Suponha o contrário, e considere o menor *j* com $0 \leq j \leq k-1$ tal que $mk + j$ não pertence a *B*. Devemos ter $mk + j = x + y$, com $x \in A \setminus \{0\}$ e $y \in B$. Se $x < mk, x = rk$ e $y = (m-r)k + j$, donde por hipótese de indução, $(m-r)k \in B$ e $mk = 0 + mk = rk + (m-r)k$, contradizendo a unicidade. Se $x \geq mk$, como $mk, mk+1,..., mk+j-1$ pertencem a *B* (e portanto não pertencem a *A*), devemos ter $x = mk + j$ e $y = 0$, mas nesse caso teríamos $(m+1)k = k + mk = (mk+j)+(k-j)$, contradizendo novamente a unicidade.

Agradecemos também o envio das soluções e a colaboração de:

José Guilherme Moreira Pinto	**(Juiz de Fora - MG)**
Osvaldo Melo Sponquiado	**(Olímpia - SP)**
Diêgo Veloso Uchoa	**(Teresina - PI)**
Nijair Araújo Pinto	**(Fortaleza - CE)**
Gibran M. de Souza	**(Natal - RN)**
Carlos Alberto da Silva Victor	**(Nilópolis - RJ)**
Einstein do Nascimento Júnior	**(Fortaleza - CE)**
Samuel Barbosa Feitosa	**(Fortaleza - CE)**
Geraldo Perlino Jr.	**(São Paulo - SP)**

PROBLEMAS PROPOSTOS

✉ *Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e sugestões de novos problemas para os próximos números.*

47) Dada uma circunferência Γ, trace as tangentes a ela por um ponto exterior, A, tocando-a em M e N. Trace a reta r passando por A e tocando Γ em B e C. Se D é o ponto médio de $\overline{MN}$, prove que $\overline{MN}$ é a bissetriz de $\angle BDC$.

48) Doze pintores vivem em doze casas construídas ao longo de uma rua circular e são pintadas ou de branco ou de azul. Cada mês um dos pintores, pegando consigo bastante tinta branca e azul, deixa sua casa e caminha ao longo da rua no sentido anti-horário. Desta forma, ele repinta cada casa (iniciando na sua) com a cor oposta. Finaliza o trabalho tão longo repinte alguma casa branca de azul. Em um ano, cada casa estará pintada com a sua cor original sabendo que, no começo do ano, ao menos uma casa estava pintada de azul.

49) Dado um polígono regular de n lados.
Assinale aleatoriamente, no seu interior, um ponto M. Sendo $x_1, x_2, ..., x_n$ as distâncias de M a cada um dos lados, verifique que:
$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... \frac{1}{x_n} > \frac{2\pi}{a}$, onde a é a medida do lado do poligono.

50) Calcule o determinante:

$$\begin{vmatrix} MDC(1,1) & MDC(1,2) \cdots MDC(1,n) \\ MDC(2,1) & MDC(2,2) \cdots MDC(2,n) \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ MDC(n,1) & MDC(n,2) \cdots MDC(n,n) \end{vmatrix}$$

Onde MDC (a, b) é o máximo divisor comum de a e b.

51) Três feirantes foram vender melancias. Um levou 10; outro 16; o terceiro, 26. Todos venderam algumas melancias pelo mesmo preço até o meio dia. Depois disso, os três baixaram o preço, mas continuaram vendendo por preços iguais. Quando voltaram para casa, após venderem todas as melancias, cada um tinha a mesma quantia de dinheiro; 35 mil cruzeiros. Por quanto foi vendida cada melancia antes e após o meio-dia?

Problema 47 proposto por Carlos Lucas de Melo Pontes e Silva (Fortaleza - CE), problemas 48 e 51 propostos por Jorge Luis Rodrigues Costa (Fortaleza - CE) e problemas 49 e 50 propostos por Carlos A. Gomes (Natal - RN).

COORDENADORES REGIONAIS

Amarísio da Silva Araújo	*(UFV)*	*Viçosa - MG*
Alberto Hassen Raad	*(UFJF)*	*Juiz de Fora - MG*
Angela Camargo	*(Centro de Educ.de Adultos - CEA)*	*Blumenau - SC*
Benedito T. Vasconcelos Freire	*(UFRN)*	*Natal - RN*
Claudio Arconcher	*(Col. Leonardo da Vinci)*	*Jundiaí - SP*
Claus Haetinger	*(UNIVATES)*	*Lajeado - RS*
Cleonor Crescêncio das Neves	*(UTAM)*	*Manaus-AM*
Élio Mega	*(Col. ETAPA)*	*São Paulo - SP*
Kátia Gonçalves de Faria	*(Col. Singular)*	*Santo André - SP*
Florêncio F. Guimarães Filho	*(UFES)*	*Vitória - ES*
Francisco Dutenhefner	*(UFMG)*	*Belo Horizonte - MG*
Gisele de A. Prateado Gusmão	*(UFGO)*	*Goiânia - GO*
Ivanilde H. Fernandes Saad	*(U. Católica Dom Bosco)*	*Campo Grande - MS*
Jacqueline F. Rojas Arancibia	*(UFPB)*	*João Pessoa - PB*
João Benício de Melo Neto	*(UFPI)*	*Teresina - PI*
João F. Melo Libonati	*(Grupo Educ. IDEAL)*	*Belém - PA*
Irene Nakaoka	*(UEM)*	*Maringá - PR*
José Carlos Pinto Leivas	*(UFRG)*	*Rio Grande - RS*
José Cloves Saraiva	*(UFMA)*	*São Luis - MA*
José Gaspar Ruas Filho	*(ICMC-USP)*	*São Carlos - SP*
José Luis Rosas Pinho	*(UFSC)*	*Florianópolis - SC*
José Paulo Carneiro	*(Univ. Santa Úrsula)*	*Rio de Janeiro - RJ*
José Vieira Alves	*(UFPB)*	*Campina Grande - PB*
Marcelo Rufino de Oliveira	*(Sistema Titular de Ensino)*	*Belém - PA*
Licio Hernandes Bezerra	*(UFSC)*	*Florianópolis - SC*
Luzinalva M. de Amorim	*(UFBA)*	*Salvador - BA*
Marcondes Cavalcante França	*(UF Ceará)*	*Fortaleza - CE*
Pablo Rodrigo Ganassim	*(L. Albert Einstein)*	*Piracicaba - SP*
Paulo H. Cruz Neiva de L. Jr.	*(Esc. Tec.Everardo Passos)*	*SJ dos Campos - SP*
Reinaldo Gen Ichiro Arakaki	*(INPE)*	*SJ dos Campos - SP*
Ricardo Amorim	*(Centro Educ. Logos)*	*Nova Iguaçu - RJ*
Roberto Vizeu Barros	*(Colégio ACAE)*	*Volta Redonda - RJ*
Sérgio Cláudio Ramos	*(IM-UFRGS)*	*Porto Alegre - RS*
Seme Gebara Neto	*(UFMG)*	*Belo Horizonte -MG*
Silvio de Barros Melo	*(UFPE)*	*Recife - PE*
Tadeu Ferreira Gomes	*(U. do Estado da Bahia)*	*Juazeiro - BA*
Tomás Menéndez Rodrigues	*(U. Federal de Rondonia)*	*Porto Velho - RO*
Valdenberg Araújo da Silva	*(U. Federal de Sergipe)*	*São Cristovão - SE*
Wagner Pereira Lopes	*(Esc. Tec. Fed. de Goiás)*	*Jataí - GO*
Waldemar M. Canalli	*(P.M. S. João de Meriti)*	*S. João de Meriti - RJ*

Olimpíada Brasileira de Matemática

CADASTRAMENTO 2001

Colégios
(Preencher com letra de forma)

Instituição:	
Pública ○	Privada ○
Diretor:	
Endereço:	
Bairro:	
Cidade:	Estado:
Cep:	
Telefone: ( )	
Fax: ( )	
e-mail:	

Professor Responsável:	
Endereço:	
Bairro:	
Cidade:	Estado:
Cep:	
Telefone: ( )	
Fax: ( )	
e-mail:	

Para seguir participando Olimpíada Brasileira de Matemática, uma cópia desta ficha deve ser preenchida e enviada para a Secretaria da Olimpíada Brasileira de Matemática pelos **colégios ainda não recadastrados**.