CONTEÚDO

AOS LEITORES

Este número da Eureka! contém as provas das competições internacionais de que participamos na primeira parte do ano 2000: a Olimpíada de Maio, a Olimpíada do Cone Sul e a Olimpíada Internacional de Matemática. Estas provas fornecem material que pode (e deve) ser usado na preparação para a Terceira Fase da Olimpíada Brasileira de Matemática.

Na seção de artigos, é com prazer que publicamos artigos de novos colaboradores da Eureka!. Destacamos o artigo do Prof. José Rosales Ortega, da Costa Rica, que esperamos dê início a uma colaboração intensa com professores de outros países, igualmente dedicados à disseminação da matemática entre os jovens.

Neste número inauguramos uma nova seção, "Olimpíadas ao Redor do Mundo", organizada pelo Prof. Antônio Luiz Santos, que trará problemas de Olimpíadas realizadas em outros países. Esta seção se junta à de problemas propostos no objetivo de fornecer ainda mais material para treinamento e desenvolvimento individual.

Aproveitamos para registrar, com satisfação, um grau cada vez maior de participação de nossos leitores. Temos recebido um número crescente de soluções para os problemas propostos, além de sugestões de novos problemas. Obrigado a todos que têm colaborado!

Comitê Editorial

XI OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL

14 a 19 de abril, Montevidéu - Uruguai

A XI Olimpíada de Matemática do Cone Sul foi realizada em Montevidéu, Uruguai, no período de 14 a 19 de abril de 2000. A equipe brasileira foi liderada pelos professores Paulo José Bonfim Gomes Rodrigues e Marcelo Mendes, ambos de Fortaleza - CE. Nesta oportunidade a equipe brasileira obteve a maior pontuação entre os países participantes e a única medalha de ouro da competição.

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	**Carlos Stein Naves de Brito**	**Prata**
BRA2	**Davi Máximo Alexandrino Nogueira**	**Bronze**
BRA3	**Humberto Silva Naves**	**Ouro**
BRA4	**Larissa Cavalcante Queiroz de Lima**	**Prata**

PROBLEMA 1

Dizemos que um número é descendente se cada um de seus dígitos é menor do que ou igual ao dígito anterior, da esquerda para a direita. Por exemplo, 4221 e 751 são números descendentes, enquanto 476 e 455 não são descendentes. Determine se existem inteiros positivos n para os quais 16^n é descendente.

SOLUÇÃO DE CARLOS STEIN NAVES DE BRITO (GOIÂNIA - GO)

Sabemos que $16^n \equiv 6(\text{mod}\,10)$, pois $6^n \equiv 6(\text{mod}\,10)$.

Assim o dígito das unidades será sempre 6.

Temos então:

$$2^{4n} \equiv 6(\text{mod}\,10)$$

$$2^{4n} \equiv 2^4 \cdot k(\text{mod}\,10.000) \text{ pois } (10.000, 2^{4n}) = 2^4.$$

Temos que $2^4 \cdot k \equiv 6(\text{mod}\,10) \to k = 5q + 1$.

$$2^{4n} \equiv 2^4(5q+1)(\text{mod}\,10.000)$$

$$2^{4n} \equiv 10(8q+1) + 6(\text{mod}\,10.000)$$

Temos que $8q + 1$ deve ter dígitos maiores ou iguais a 6. Em particular, $8q + 1$ termina por 7 ou 9. Temos então as seguintes possibilidades para os seus últimos 3 dígitos:
999, 997, 987, 977, 887, 877, 777.
Os únicos que são da forma $8q + 1$ são 977 e 777.
Como 2^5 divide 7776, 16^n não termina em 77776 nem em 97776.
$16^n \equiv 87776(\text{mod}\,10^5) \Rightarrow 16^n \equiv 987776(\text{mod}\,10^6)$. Como 2^7 divide 987776, 16^n não termina em 9987776. Como 2^6 divide 99776, 16^n não termina em 999776 $\Rightarrow$ 16^n tem no máximo 6 dígitos, e basta verificar os casos. Como para nenhum caso haverá solução, 16^n nunca é descendente.

PROBLEMA 2
Em um tabuleiro 8×8 distribuímos os inteiros de 1 a 64, um em cada casa.
A seguir, colocam-se sobre o tabuleiro fichas quadradas 2×2, que cobrem exatamente quatro casas (sem superposição) e de modo que os quatro números cobertos por cada ficha determinem uma soma menor que 100.

Mostrar uma distribuição desses inteiros que permita colocar o maior número de fichas, e demonstrar que não é possível obter uma distribuição que permita colocar mais fichas.

SOLUÇÃO DE CARLOS STEIN NAVES DE BRITO (GOIÂNIA - GO)
Sabemos que o somatório dos números sobre os quais colocamos fichas dividido pelo número de fichas deve ser menor que 100.
Logo se preenchessemos todo o tabuleiro (com 16 fichas):

$$\frac{1+2+3+...+64}{16} \leq 100 \leftrightarrow \frac{\frac{(64+1)64}{2}}{16} \leq 100 \leftrightarrow \frac{32\cdot 65}{16} \leq 100 \leftrightarrow 130 \leq 100. \text{ Absurdo!}$$

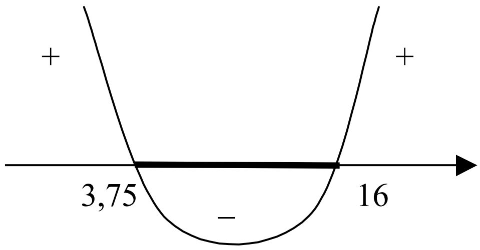
Então a cada ficha a menos que colocamos devemos tirar o maior somatório de números sem estar preenchidos, pois assim a razão anterior vai ser mínima.
A cada ficha que retiramos tiraremos 64, 63, 62, 61, depois 60, 59, 58, 57... até a razão do somatório dos números preenchidos dividido pelo número de fichas ser menor que 100. Disso temos:
Dado: o somatório inicial é 2080 e o número inicial de fichas é 16 e sendo n o número de fichas retiradas que deve ser mínimo

$$\frac{2080-\left[64+(64-1)+(64-2)+...+(64-(4n-1))\right]}{16-n}\le 100 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2080-\left[4n\cdot 64-\left(\frac{(4n-1+0)\cancel{4}n}{\cancel{2}}\right)\right]}{16-n}\le 100 \Leftrightarrow$$

$$2080-256n+8n^2-2n\le 1600-100n \Leftrightarrow 4n^2-79n+240\le 0$$

$$\left(4n^2-79n+240=0\Rightarrow \quad n=\frac{79\pm 49}{8}<\begin{matrix}n_1=16\\ n_2=3,75\end{matrix}\right)$$



Como se quer o *n* mínimo, que satisfaça a desigualdade, *n* é 4 e teremos 12 fichas no máximo.
Para $n = 3$, com 13 fichas:
Podemos colocar 12 fichas, do seguinte modo:
Vamos ter os números de 1 até 48. É agrupamos eles de 4 em 4 para a soma ser menor que 100.
Esses grupos são {1, 24, 25, 48}, {2, 23, 26, 47},...,{12, 13, 36, 37}.
Da forma $\{1+n, 24-n, 25+n, 48-n\}$ com $n \in \{0, 1, ..., 11\}$.
Então colocaremos esses números em espaços 2×2:

1	24	2	23	3	22	4	21
25	45	26	47	27	46	28	45

Faremos isso com todos os grupos, sobrando ainda um espaço 2×8, que não terão ficha, onde colocaremos aleatóriamente os números {49, 50,...,64}.
Sendo essa uma solução com cada ficha sob um grupo daqueles citados.

Exemplo completo:

1	24	2	23	3	22	4	21
25	48	26	47	27	46	28	45
5	20	6	19	7	18	8	17
29	44	30	43	31	42	32	41
9	16	10	15	11	14	12	13
33	40	34	39	35	38	36	37
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

PROBLEMA 3

Um quadrado de lado 2 é dividido em retângulos mediante várias retas paralelas aos lados (algumas horizontais e outras verticais). Os retângulos são coloridos alternadamente de preto e branco, como se fosse um tabuleiro de xadrez. Se deste modo a área branca resultou igual a área preta, demonstrar que ao recortar os retângulos pretos ao longo de seus bordos, é possível formar com estes (sem superposição) um retângulo preto 1×2.

SOLUÇÃO DE HUMBERTO SILVA NAVES (SÃO PAULO - SP)

Seja $x_1; x_2; x_3; ...; x_n$ as distâncias entre as retas verticais (x_i é distância entre a i-ésima reta e a $(i-1)$-ésima reta) e $y_1; y_2; ...; y_p$ as distâncias entre as retas horizontais: (y_i é a distância entre a i-ésima reta vertical e a $(i-1)$-ésima reta).

Por simetria, podemos considerar:

$$\text{Área sombreada} = \sum_{\substack{i \text{ e } j \text{ de} \\ \text{mesma} \\ \text{paridade}}} x_i \; y_j = \sum_{i \text{ e } j \text{ pares}} x_i \; y_j + \sum_{i \text{ e } j \text{ ímpares}} x_i \; y_j$$

Logo, área sombreada =

$$2 = \sum_{i \text{ e } j \text{ pares}} x_i y_j + \sum_{\substack{i \text{ e } j \\ \text{ímpares}}} x_i y_j = \left(\sum_{i \text{ par}} x_i\right)\left(\sum_{i \text{ par}} y_i\right) + \left(\sum_{j \text{ ímpar}} x_j\right)\left(\sum_{j \text{ ímpar}} y_j\right)$$

e denotamos:

$$A = \sum_{\text{"}i\text{" par}} x_i \text{ e } B = \sum_{\text{"}i\text{" par}} y_i$$

mas $\sum x_i = \sum_{"i" \text{ par}} x_i + \sum_{"j" \text{ ímpar}} x_j = 2 \Rightarrow \sum_{"j" \text{ ímpar}} x_j = 2 - A$, e de mesmo modo concluímos que: $\sum_{"j" \text{ ímpar}} y_j = 2 - B$.

Logo: Área sombreada = 2 = $A \cdot B + (2 - A)(2 - B) \Leftrightarrow$

$2 = 2AB + 4 - 2(A + B) \Leftrightarrow 2(A + B) - 2AB = 2 \Leftrightarrow$

$A + B - AB = 1 \Leftrightarrow A(1 - B) = 1 - B \Leftrightarrow (A - 1)(1 - B) = 0$

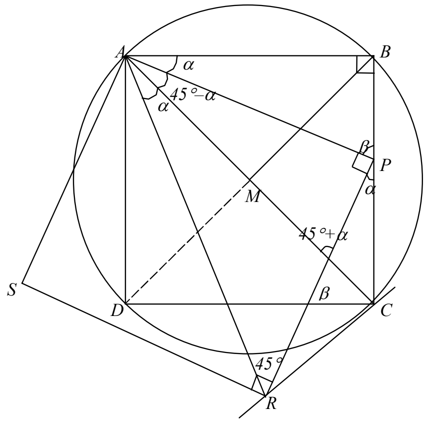
Logo devemos ter $\begin{cases} A - 1 = 0 \\ 1 - B = 0 \end{cases}$ ou

$\Rightarrow A = 1$ ou $B = 1$ Agora o problema fica fácil, pois se $A = 1$ (por simetria), temos: $\sum_{i \text{ par}} x_i = \sum_{j \text{ ímpar}} x_j$, logo basta juntar os "quadradinhos" de cada linha, aí vai formar um retângulo de base 1, e se juntarmos todos esses retângulos de base 1, vamos formar outro retângulo, cujos lados medem: 2 e 1.

PROBLEMA 4

Sejam *ABCD* um quadrado (sentido horário) e *P* um ponto qualquer pertencente ao interior do segmento *BC*. Constrói-se o quadrado *APRS* (sentido horário). Demonstrar que a reta *CR* é tangente a circunferência circunscrita ao triângulo *ABC*.

SOLUÇÃO DE LARISSA CAVALCANTE QUEIROZ DE LIMA (FORTALEZA-CE)



O ΔABC é retângulo, portanto o centro da circunferência circunscrita está no ponto médio de sua hipotenusa: $AC \Rightarrow$ centro da circunferência é o ponto *M*

**ABCD* é um quadrado $\Rightarrow$ as diagonais se cortam ao meio, e as diagonais são iguais $\Rightarrow AM = BM = MC = MD$

Seja $B\hat{A}P = \alpha$ e $B\hat{P}A = \beta$; $\alpha + \beta = 90°$ (Δ retângulo ABP); $\alpha + \beta + 90° = 180°$

Note que $R\hat{P}C = 180° - 90° - \beta \Rightarrow R\hat{P}C = \alpha$

* $B\hat{A}C = 45°(\Delta ABC$ é retângulo é isósceles)

$\Rightarrow P\hat{A}C = B\hat{A}C - B\hat{A}P = 45° - \alpha$

* $\Delta\, APR$ é isósceles e retângulo $\begin{cases} AP = PR \\ A\hat{P}R = 90° \end{cases} \Rightarrow P\hat{A}R = P\hat{R}A = 45°$

$\Rightarrow R\hat{A}C = P\hat{A}R - P\hat{A}C = 45° - (45° - \alpha) = 45° - 45° + \alpha = \alpha$

$\Rightarrow R\hat{A}C = R\hat{P}C = \alpha \Rightarrow APCR$ é um quadrilátero inscritível

$\Rightarrow A\hat{P}R = A\hat{C}R = 90°$

$\Rightarrow CR$ é perpendicular a AC e que é o diâmetro da circunferência circunscrita a $ABC \Rightarrow CR$ é tangente.

PROBLEMA 5

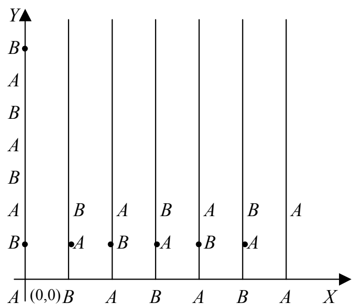
No plano cartesiano, considere os pontos de coordenadas inteiras. Uma operação consiste em:

Escolher um destes pontos e realizar uma rotação de 90º. no sentido anti-horário, com centro neste ponto.

É possível, através de uma seqüência dessas operações, levar o triângulo de vértices (0, 0), (1, 0), e (0, 1) no triângulo de vértices (0, 0), (1, 0) e (1, 1)?

SOLUÇÃO ADAPTADA DA SOLUÇÃO DE DAVI MÁXIMO ALEXANDRINO NOGUEIRA (FORTALEZA - CE)

Considere a figura relativa a demonstração:



Considere duas cores A e B. Pinte o ponto (0,0) de A. A partir daí, pinte todos os outros pontos (coordenadas inteiras) do plano com as cores A e B,

alternadamente. Isto é, pintamos (a, b) de A se $a + b$ é par, e de B se $a + b$ é ímpar. Vamos provar que um ponto e sua imagem possuem a mesma cor.
De fato, se $P = (x, y)$, a imagem de (a, b) pela rotação de 90º no sentido antihorário com centro em P e $(x + y - b, x + y + a)$, cuja soma das coordenadas é $2x + 2y + a - b \equiv a + b \pmod 2$.
Como o primero triângulo tem um ponto da cor A e dois da cor B e o segundo tem dois pontos da cor A e um da cor B não é possível tal coisa.

PROBLEMA 6
Existe um inteiro positivo divisível pelo produto de seus algarismos e tal que esse produto é maior que 10^{2000}?

SOLUÇÃO DE HUMBERTO SILVA NAVES (SÃO PAULO - SP)
Primeiramente vamos provar que 10 é raiz primitiva no módulo 7^n.
*Sabemos que quando $n = 1$ ou $n = 2$, isto é verdadeiro.
** Suponhamos que 10 seja uma raiz primitiva no módulo $7^n\,(n \geq 2)$
Seja "a" uma raiz primitiva no módulo 7^{n+1} (ela existe pois 7^{n+1} é uma potência de um primo), isto é: a^j percorre todas as classes de congruência que são primas com 7, no módulo 7^{n+1}, consequentemente "a" também é raiz primitiva no módulo 7^n.
Pela definição de "a", existe um $x \in \mathbb{N}$ e um $y \in \mathbb{N}$, tais que:

$$a^x \equiv 10 (\operatorname{mod} 7^n)$$
$$a^y \equiv 10 (\operatorname{mod} 7^{n+1})$$

Temos que $mdc\,(x; \varphi(7^n)) = 1,$ pois 10 também é raiz primitiva no módulo 7^n.
Se $mdc\,(y; \varphi(7^{n+1})) = d \neq 1,$ teríamos:

$$a^y \equiv 10 (\operatorname{mod} 7^{n+1}) \Rightarrow \begin{cases} a^y \equiv 10 (\operatorname{mod} 7^n) \\ a^x \equiv 10 (\operatorname{mod} 7^n) \end{cases} \Rightarrow a^x \equiv a^y (\operatorname{mod} 7^n) \Rightarrow x \equiv y (\operatorname{mod} \varphi(7^n)) \Rightarrow$$

$\Rightarrow y$ é primo com $\varphi(7^n)$ (pois x também é)
Chegamos a uma contradição, pois $mdc\,(y; \varphi(7^{n+1})) = d$ e
$mdc\ (y; \varphi(7^n)) = 1$, isto quer dizer:
$mdc\,(y; 6 \cdot 7^n) \neq 1$ e $mdc\ (y; 6 \cdot 7^{n-1}) = 1$ (com $n \geq 2$), que é um absurdo.
Daí concluímos que $mdc\ (y; \varphi(7^{n+1})) = 1$.

Logo 10 também é uma raiz primitiva no módulo 7^{n+1}, e por indução concluímos que:

$\forall n \in \mathbb{N};\ 10$ é raiz primitiva no módulo 7^n.

Agora vamos achar um exemplo:

Considere a, tal que: $7^a > 10^{2000}$

E como 10 é raiz primitiva no módulo 7^a, considere $b > a$, tal que:

$10^b \equiv 7 - 6 \cdot 10^a \pmod{7^a}$, temos que:

$$\Rightarrow x = \left(\frac{10^a - 1}{9} \cdot 7\right) + \frac{10^b - 10^a}{9} \equiv 0 \pmod{7^a} \Rightarrow x \equiv 0 \pmod{7^a}$$

mas:

$$x = \underbrace{1111111...1}_{\text{total de: "}b-a\text{" "1"'}s}\ \underbrace{000...0}_{\text{"}a\text{" }0's} + \underbrace{777...7}_{\text{"}a\text{" 7's}} = \overbrace{1111111...1}^{b-a \text{ dígitos}}\overbrace{777...7}^{a \text{ dígitos}}$$

Ou seja x é divisível pelo produto de seus dígitos.

Você sabia…

Que foi novamente batido o record de maior primo de Fermat generalizado conhecido?

É o número $48594^{65536} + 1$ descoberto este ano por Scott e Gallot, que é o 6°. maior primo conhecido (e o único primo conhecido com mais de um milhão de bits que não é de Mersenne). Com isso, os 9 maiores primos conhecidos são de Mersenne ou de Fermat generalizados. São eles: $2^{6972593} - 1$, $2^{3021377} - 1$, $2^{2976221} - 1$, $2^{1398269} - 1$, $2^{1257787} - 1$, $48594^{65536} + 1$, $2^{859433} - 1$, $2^{756839} - 1$ e $167176^{32768} + 1$, os quais têm, respectivamente, 2098960, 909526, 895932, 420921, 378632, 307140, 258716, 227832 e 171153 dígitos.

VI OLIMPÍADA DE MAIO

13 de maio de 2000

PRIMEIRO NÍVEL

Duração da prova: 3 horas

PROBLEMA 1

Encontre todos os números naturais de quatro algarismos formados por dois dígitos pares e dois dígitos ímpares tais que, ao multiplicá-los por 2, se obtém números de quatro algarismos com todos os seus dígitos pares e, ao dividí-los por 2, se obtém números naturais de quatro algarismos com todos os seus dígitos ímpares.

PROBLEMA 2

Seja ABC um triângulo retângulo em A, cujo cateto AC mede 1cm. A bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$ corta a hipotenusa em R; a perpendicular a AR traçada por R corta o lado AB em seu ponto médio. Encontre a medida do lado AB.

PROBLEMA 3

Para escrever todos os números naturais consecutivos desde $1ab$ até $ab2$ inclusive foram utilizados $1ab1$ algarismos. Determine quantos algarismos a mais precisam-se para escrever os números naturais até o aab inclusive. Diga todas as possibilidades. (a e b representam dígitos).

PROBLEMA 4

Temos peças com forma de triângulo equilátero de lados 1; 2; 3; 4; 5 e 6 (50 peças de cada medida).

Precisa-se armar um triângulo equilátero de lado 7 utilizando algumas destas peças, sem buracos nem superposições. Qual é o menor número de peças necessárias?

PROBLEMA 5

Numa fileira temos 12 cartas que podem ser de três tipos: com as duas faces brancas, com as duas faces pretas ou com uma face branca e a outra preta.

Inicialmente temos 9 cartas com a face preta voltada para cima.

Viram-se as seis primeiras cartas da esquerda e ficam 9 cartas com a face preta voltada para cima.

Continuando, viram-se as seis cartas centrais, ficando 8 cartas com a face preta voltada para cima.

Finalmente, viram-se seis cartas: as três primeiras da esquerda e as três últimas da direita, ficando 3 cartas com a face preta voltada para cima.
Diga se com esta informação se pode saber com certeza quantas cartas de cada tipo existem na fileira.

SEGUNDO NÍVEL

PROBLEMA 1

O conjunto {1, 2, 3, 4} pode ser dividido em dois subconjuntos A = {1, 4} e B = {3, 2} sem elementos comuns e tais que a soma dos elementos de A seja igual a soma dos elementos de B. Essa divisão é impossível para o conjunto {1, 2, 3, 4, 5} e também para o conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
Determine todos os valores de n para os quais o conjunto dos primeiros n números naturais pode ser dividido em dois subconjuntos sem elementos comuns tais que a soma dos elementos de cada subconjunto seja a mesma.

PROBLEMA 2

Num paralelogramo de área 1 são traçadas retas que unem cada vértice com o ponto médio de cada lado não adjacente a ele. As oito retas traçadas determinam um octógono no interior do paralelogramo. Calcule a área do octógono.

PROBLEMA 3

Sejam S uma circunferência de raio 2; S_1 uma circunferência de raio 1 tangente interiormente a S em B e S_2 uma circunferência de raio 1 tangente a S_1 no ponto A, mas que não é tangente a S. Se K é o ponto de interseção da reta AB com a circunferência S, demonstre que K pertence a circunferência S_2.

PROBLEMA 4

Temos um cubo de $3 \times 3 \times 3$ formado pela união de 27 cubinhos $1 \times 1 \times 1$. Retiramos alguns cubinhos de tal modo que os que permanecem seguem formando um sólido constituído por cubinhos que estão unidos pelo menos por uma face ao resto do sólido. Quando um cubinho é retirado, os que permanecem ficam no mesmo lugar em que estavam inicialmente.
Qual é o máximo número de cubinhos que podem ser retirados de modo que a área do sólido que resulte seja igual à área do cubo original?

PROBLEMA 5

Um retângulo pode ser dividido em n quadrados iguais e também pode ser dividido em n + 98 quadrados iguais. Se a área do retângulo é n, com n inteiro, encontre os lados do retângulo. Diga todas as possibilidades.

VI OLIMPÍADA DE MAIO

Resultados

PRIMEIRO NÍVEL

Fabio Dias Moreira	Medalha de Ouro	Rio de Janeiro - RJ
Guilherme Salermo Santos	Medalha de Prata	Goiânia - GO
Raul M. Alexandrino Nogueira	Medalha de Prata	Fortaleza - CE
Alex Correa Abreu	Medalha de Bronze	Niteroi - RJ
Iuri Lima Ribeiro	Medalha de Bronze	Fortaleza - CE
Antônia Taline de Souza Mendonça	Medalha de Bronze	Fortaleza - CE
Cincinato Furtado Leite Neto	Medalha de Bronze	Fortaleza - CE
Alan Hideki Uchida	Menção Honrosa	São Paulo - SP
Rodrigo Aguiar Pinheiro	Menção Honrosa	Fortaleza - CE
Luty Rodrigues Ribeiro	Menção Honrosa	Fortaleza - CE

SEGUNDO NÍVEL

Marcio Antonio F. Belo	Medalha de Ouro	Goiânia - GO
Henrique Chociay	Medalha de Prata	Curitiba - PR
Davi M. Alexandrino Nogueira	Medalha de Prata	Fortaleza - CE
Larissa Goulart Rodrigues	Medalha de Bronze	Goiânia - GO
Andreia Lucio dos Santos	Medalha de Bronze	Goiânia - GO
Thiago da Silva Sobral	Medalha de Bronze	Fortaleza - CE
Luis Gustavo Bastos Pinho	Medalha de Bronze	Fortaleza - CE
Samuel Barbosa Feitosa	Menção Honrosa	Fortaleza - CE
Adriano Arantes Paterlini	Menção Honrosa	Tatuí - SP
Germanna de Oliveira Queiroz	Menção Honrosa	Fortaleza - CE

XLI OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

13 a 25 de julho, Taejon - Coréia do Sul

A XLI Olimpíada Internacional de Matemática foi realizada em Taejon, Coréia do Sul, no período de 13 a 25 de julho de 2000. A equipe brasileira foi liderada pelos professores Élio Mega e Edmilson Motta, ambos de São Paulo - SP.

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	**Daniel Nobuo Uno**	**Bronze**
BRA2	**Daniel Massaki Yamamoto**	**Bronze**
BRA3	**Fabrício Siqueira Benevides**	**Bronze**
BRA4	**Humberto Silva Naves**	**----------**
BRA5	**Sergio Tadao Martins**	**----------**
BRA6	**Ulisses Medeiros de Albuquerque**	**Menção Honrosa**

PROBLEMA 1

Duas circunferências Γ_1 e Γ_2 intersectam-se em M e N.

Seja l a tangente comum a Γ_1 e Γ_2 que está mais próxima de M do que de N. A reta l é tangente a Γ_1 em A e a Γ_2 em B. A reta paralela a l que passa por M intersecta novamente a circunferência Γ_1 em C e novamente a circunferência Γ_2 em D.

As retas CA e DB intersectam-se em E; as retas AN e CD intersectam-se em P; as retas BN e CD intersectam-se em Q.

Mostre que $EP = EQ$.

PROBLEMA 2

Sejam a, b, c números reais positivos tais que $abc = 1$. Prove que

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leq 1.$$

PROBLEMA 3

Seja $n \geq 2$ um número inteiro positivo. No início existem n pulgas numa reta horizontal, nem todas no mesmo ponto.

Para um número real positivo $\lambda,$ define-se um *salto* da seguinte maneira:

- Escolhem-se duas pulgas quaisquer nos pontos A e B com o ponto A à esquerda do ponto B;
- A pulga que está em A salta até o ponto C da reta, à direita de B, tal que $\frac{BC}{AB} = \lambda.$

Determine todos os valores de λ para os quais, para qualquer ponto M na reta e quaisquer posições iniciais das n pulgas, existe uma sucessão finita de saltos que levam todas as pulgas para pontos à direita de M.

PROBLEMA 4

Um mágico tem cem cartões numerados de 1 a 100. Coloca-os em três caixas, uma vermelha, uma branca e uma azul, de modo que cada caixa contém pelo menos um cartão.

Uma pessoa da platéia escolhe duas das três caixas, seleciona um cartão de cada caixa e anuncia a soma dos números dos dois cartões que escolheu. Ao saber esta soma, o mágico identifica a caixa da qual não se retirou nenhum cartão.

De quantas maneiras podem ser colocados todos os cartões nas caixas de modo de que este truque sempre funcione? (Duas maneiras consideram-se diferentes se pelo menos um cartão é colocado numa caixa diferente).

PROBLEMA 5

Verifique se existe um inteiro positivo n tal que n é divisível por exatamente 2000 números primos diferentes e $2^n + 1$ é divisível por n.

PROBLEMA 6

Sejam AH_1, BH_2, CH_3 as alturas de um triângulo acutângulo ABC. A circunferência inscrita no triângulo ABC é tangente aos lados BC, CA, AB em $T_1, T_2, T_3,$ respectivamente. Seja l_1 a reta simétrica da reta H_2H_3 relativamente à reta T_2T_3, l_2 a reta simétrica da reta H_3H_1 relativamente à reta T_3T_1 e l_3 a reta simétrica da reta H_1H_2 relativamente à reta T_1T_2.

Prove que l_1, l_2, l_3 determinam um triângulo cujos vértices pertencem à circunferência inscrita no triângulo ABC.

INTRODUÇÃO À GEOMETRIA PROJETIVA

Luciano G. M. Castro

♦ Nível Avançado

Artigo baseado em aula ministrada na III Semana Olímpica
Piracicaba - SP

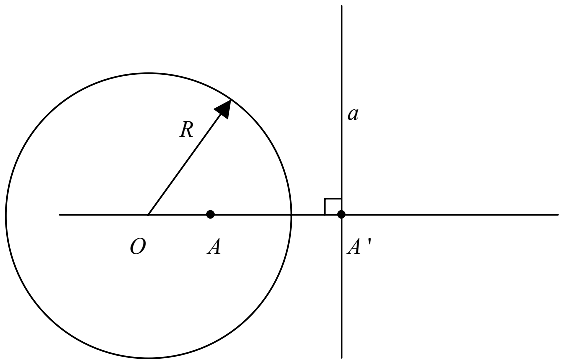
Começamos com um problema de Geometria Euclidiana:

Problema Inicial:

As tangentes a uma circunferência de centro O, traçadas por um ponto exterior C, tocam a circunferência nos pontos A e B. Seja S um ponto qualquer da circunferência. As retas $\overleftrightarrow{SA}, \overleftrightarrow{SB}$ e $\overleftrightarrow{SC}$ cortam o diâmetro perpendicular a $\overleftrightarrow{OS}$ nos pontos A', B' e C', respectivamente.
Prove que C' é o ponto médio de $A'B'$.
Encorajamos o leitor a resolver este problema utilizando métodos da Geometria Euclidiana, antes de prosseguir.
Nossa principal meta é desenvolver ferramentas da Geometria Projetiva que nos permitam resolver este e outros problemas similares de forma direta e natural.

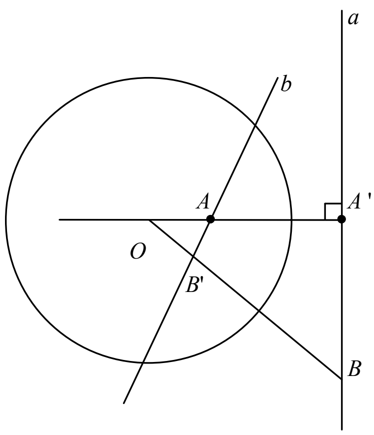
1. POLARIDADE

Dada uma circunferência γ, de centro O e raio R, vamos criar uma associação entre pontos e retas do plano, da seguinte maneira: Para cada ponto A distinto de O, seja A' o ponto da semi-reta $\overrightarrow{OA}$ tal que $OA \times OA' = R^2$. (A' é chamado inverso de A em relação a γ. A transformação $A \to A'$ é a inversão relativa a γ). Seja a a reta perpendicular a $\overrightarrow{OA}$ passando por A'. Dizemos que a é a reta polar de A em relação a γ, e que A é o pólo de a em relação a γ.



A transformação do plano que leva cada ponto em sua polar e cada reta em seu pólo é chamada de polaridade. Para simplificar a notação, usaremos a mesma letra para designar um ponto (maiúscula) e sua polar (minúscula).

Teorema 1: Sejam A e B dois pontos do plano, a e b suas respectivas polares. Se $B \in a$, então $A \in b$. Neste caso, dizemos que A e B são conjugados.



Considere um ponto $B \in a$.

Seja $B' \in \overrightarrow{OB}$ tal que $\overleftrightarrow{AB'} \perp \overrightarrow{OB}$. Os triângulos OAB' e OBA' são retângulos e têm um ângulo comum ($A\hat{O}B' \cong B\hat{O}A'$), logo são semelhantes. Assim,

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'} \Leftrightarrow OB \times OB' = OA \times OA' = R^2.$$

Logo B' é o inverso de B, de onde $\overleftrightarrow{AB'} = b$ e $A \in b$.

Assim, se imaginarmos o ponto B variando ao longo da reta a, sua polar, b, variará ao longo do feixe de retas que passam pelo ponto A.

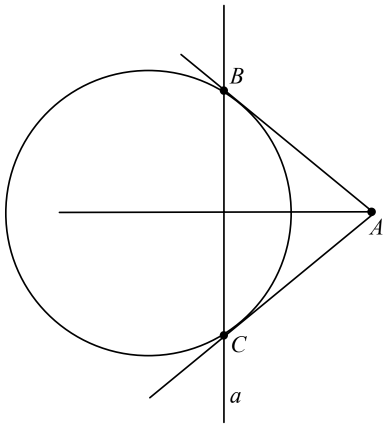
Diremos que um ponto e uma reta são incidentes quando o ponto pertence à reta, o que é o mesmo que dizer que a reta passa pelo ponto.

A polaridade, portanto, é uma transformação que preserva incidências.

Exercício 1: Se um ponto é conjugado a si mesmo, então ele pertence à circunferência e sua polar é a tangente à circunferência por ele.

Este resultado nos permite desenvolver a seguinte construção para a reta polar de um ponto A exterior à circunferência:

Exercício 2: Se A é exterior à circunferência, sejam B e C os pontos de contato das duas tangentes à circunferência traçadas por A. A reta $\overleftrightarrow{BC}$ é a polar de A.



Solução:
Como A pertence às polares de B e C, então B e C pertencem à polar de A. Logo $a = \overleftrightarrow{BC}$

2. O PLANO PROJETIVO

A polaridade definida anteriormente sugere que pontos e retas têm comportamentos parecidos em relação à incidência. Há algumas falhas, porém. A transformação não está definida para o ponto O, centro da circunferência, nem tampouco para as retas que passam por O.

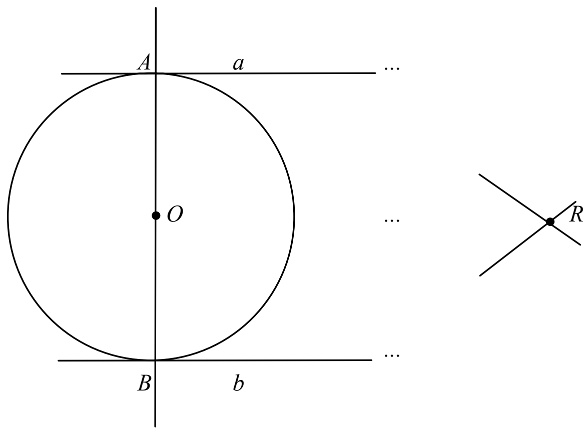
Podemos resolver este problema ampliando o plano euclidiano, acrescentando-lhe uma nova reta que chamaremos de "reta do infinito", que representaremos por o. Esta nova reta será a polar do ponto O.

Formalmente, os pontos da nova reta do infinito estão em correspondência biunívoca com os feixes de retas paralelas no plano euclidiano.

Vejamos como a polaridade nos leva naturalmente a esta definição para os pontos do infinito.

Por exemplo, vamos identificar o pólo de uma reta r que passa por O. Sejam A e B os pontos de contato de r com a circunferência. Como A e B estão sobre a reta r, suas retas polares a e b passam pelo pólo R. Logo R é o ponto de encontro das duas retas a e b, que no plano Euclidiano seriam paralelas. De fato, a reta polar de qualquer ponto de r será perpendicular a r no plano euclidiano. Estas retas passam a ser, no plano projetivo, um feixe de retas concorrentes (no ponto do infinito R).

Esta é a maneira de trabalhar com a reta do infinito: cada um de seus pontos corresponde a um único feixe de retas paralelas no plano euclidiano. E vice-versa: a cada feixe de retas paralelas no plano euclidiano corresponde um único ponto da reta do infinito.



3. O PRINCÍPIO DA DUALIDADE

Os pontos e retas do plano projetivo têm exatamente o mesmo comportamento em relação a incidência. Assim, qualquer propriedade envolvendo pontos, retas e incidência permenece válida ao trocarmos pontos por retas e retas por pontos. A nova propriedade assim obtida é denominada "dual" da primeira.

Em outras palavras, para todo teorema da Geometria Projetiva recebemos outro grátis, oferecido pelo Princípio da Dualidade. Basta trocar a palavra "ponto" pela palavra "reta" e vice versa.

Exemplos:

Propriedade	Dual
Dada uma reta, sempre existe um ponto não incidente a ela.	Dado um ponto, sempre existe uma reta não incidente a ele.
Cada reta é incidente a pelo menos três pontos distintos.	Cada ponto é incidente a pelo menos três retas distintas.
Dois pontos distintos determinam uma única reta a eles incidente.	Duas retas distintas determinam um único ponto a elas incidente.

Observação:
Apesar de termos definido o plano projetivo como uma extensão do plano euclidiano, isto não é necessário. O plano projetivo existe de forma independente, podendo ser caracterizado a partir de um conjunto de axiomas, entre os quais estão as propriedades duais citadas anteriormente.

4. QUÁDRUPLAS HARMÔNICAS

No plano euclidiano, se quatro pontos *A, B, C* e *D* de uma reta são tais que:

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD},$$

dizemos que *C* e *D* "dividem harmonicamente" o segmento $\overline{AB}$.
Observe que, de acordo com a definição, isto também implica que *A* e *B* dividem harmonicamente o segmento $\overline{CD}$. Representaremos esta situação com o símbolo $\mathcal{H}(AB,CD)$. Também diremos que *A, B, C* e *D* , nesta ordem, formam uma "quádrupla harmônica".
Dados os pontos *A*, *B* e *C* sobre uma reta, o ponto *D* tal que $\mathcal{H}(AB;CD)$ é chamado "conjugado harmônico" de *C* em relação a $\overline{AB}$.
Surpreendentemente, apesar da definição utilizar a noção de distância (que não faz sentido no plano projetivo), o conceito de quádruplas harmônicas faz sentido no Plano Projetivo, por meio da seguinte construção para o conjugado harmônico:

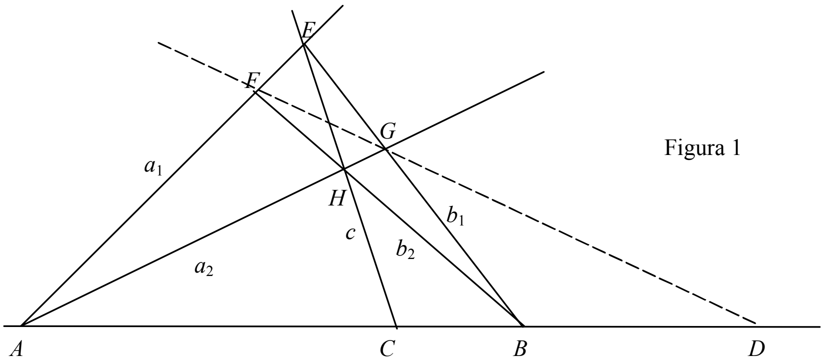


Figura 1

Dados os pontos A, B e C sobre uma reta r, traçamos duas retas quaisquer a_1 e a_2 passando por A e uma reta c passando por C. Unindo a B os pontos de incidência de c com a_1 e a_2 , respectivamente, obtemos as retas b_1 e b_2. Fica então formado um quadrilátero ($EFHG$, na figura) tal que os lados opostos concorrem em A e B, e tal que uma de suas diagonais passa por C. Seja D o ponto de encontro de r com a outra diagonal do quadrilátero. Então D é o conjugado harmônico de C em relação a $\overleftrightarrow{AB}$.

Esta construção é a definição de quádruplas harmônicas no plano projetivo. Vejamos que ela coincide, no plano Euclidiano, com a definição usual. Sejam os pontos E, F, G como na figura 1.
Aplicando o Teorema de Menelaus* no ΔABE, secante DGF, temos:

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BG}{EG} \cdot \frac{EF}{AF} = 1. \quad (1)$$

No ΔABE, aplicamos o Teorema de Ceva* para as cevianas concorrentes $\overline{EC}, \overline{BF}$ e $\overline{AG}$:

$$\frac{AC}{BC} \cdot \frac{BG}{EG} \cdot \frac{EF}{AF} = 1. \quad (2)$$

De (1) e (2) temos $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AD}{BD}$.

*Ver apêndice.

5. PONTO MÉDIO E CONJUGAÇÃO HARMÔNICA

O principal indício de que quádruplas harmônicas são uma noção projetiva é o fato de, no plano euclidiano, o ponto médio de um segmento não possuir conjugado harmônico.

Porém, no plano projetivo, sejam A e B pontos sobre a reta r e C o ponto médio de $\overline{AB}$. Ao realizarmos a construção da figura 1, verificamos que $\overline{FC}$ é paralelo a r. No plano projetivo, o conjugado harmônico D é o ponto do infinito correspondente ao feixe de retas paralelas a r.

6. FEIXES HARMÔNICOS

Vamos agora dualizar a definição de quádrupla harmônica. Dadas 3 retas a, b e c concorrentes em um ponto R, podemos dualizar, passo a passo, a construção do conjugado harmônico:

Sobre a reta a tomamos dois pontos distintos A_1 e A_2 e sobre a reta c tomamos um ponto C. Sejam B_1 e B_2 os pontos de intersecção da reta b com as retas $\overleftrightarrow{CA_1}$ e $\overleftrightarrow{CA_2}$, respectivamente. Seja d a reta determinada pelos pontos R e $\overleftrightarrow{A_1B_2} \cap \overleftrightarrow{A_2B_1}$. Chamamos d de conjugado harmônico de c em relação a a e b. Dizemos que as quatro retas concorrentes a, b, c, e d formam um "feixe harmônico". Representamos esta situação com o símbolo $\mathcal{H}(ab, cd)$.

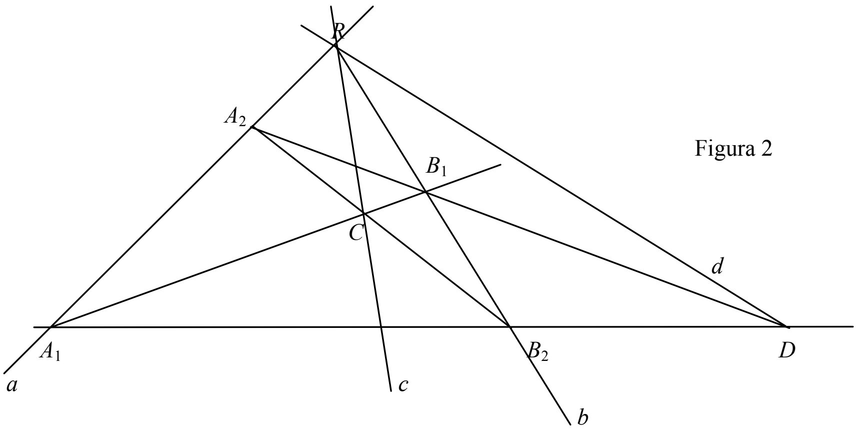


Figura 2

Teorema 2: Uma reta qualquer do plano corta um feixe harmônico em quatro pontos que formam uma quádrupla harmônica.

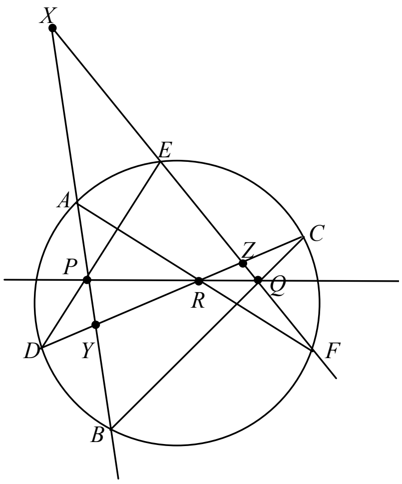
Se você percebeu a semelhança entre as figuras 1 e 2 deve ter desconfiado deste fato. A demonstração é imediata.
Na construção da figura 2, os pontos A_1 e B_2 podem ser escolhidos sobre uma reta s arbitrária (que não passe por R), e o ponto C fora de s. As retas $\overleftrightarrow{A_1C}$ e $\overleftrightarrow{B_2C}$ determinam os pontos B_1 e A_2. Sendo $c \cap s = C'$ e $d \cap s = D$, vemos que o quadrilátero RA_2CB_1 possui dois lados opostos concorrendo em A_1 e B_2, com suas diagonais passando por C' e D. Portanto $\mathcal{H}(A_1B_2;C'D)$, como queríamos demonstrar.

Exercício 3:
Escreva o dual doTeorema anterior.

7. O TEOREMA DE PASCAL

Sem dúvida, é um dos mais belos teoremas da Geometria Projetiva. É válido para qualquer cônica, apesar de que aqui só veremos a demonstração para a circunferência, no plano euclidiano. É importante mencionar, no entanto, que no Plano Projetivo não há qualquer diferença entre uma circunferência e qualquer outra cônica não-degenerada.

Teorema 3: Os pontos de encontro entre os 3 pares de lados opostos de um hexágono $ABCDEF$ (convexo ou não) inscrito em uma circunferência são colineares.



Consideremos o triângulo XYZ indicado na figura. Aplicamos o Teorema de Menelaus três vezes:

ΔXYZ, secante PDE:

$$\frac{PX}{PY}\cdot\frac{DY}{DZ}\cdot\frac{EZ}{EX}=1$$

ΔXYZ, secante QBC:

$$\frac{QZ}{QX}\cdot\frac{BX}{BY}\cdot\frac{CY}{CZ}=1$$

ΔXYZ, secante RAF:

$$\frac{RY}{RZ}\cdot\frac{AX}{AY}\cdot\frac{FZ}{FX}=1$$

Multiplicando essas três últimas equações e lembrando que
$XA \cdot XB = XE \cdot XF$,
$YA \cdot YB = YC \cdot YD$ e
$ZC \cdot ZD = ZE \cdot ZF$ (potência dos pontos x, y, z em relação à circunferência), obtemos $\frac{PX}{PY} \cdot \frac{QZ}{QX} \cdot \frac{RY}{RZ} = 1$.

Logo, pelo recíproco do Teorema de Menelaus no triângulo XYZ, secante PQR, temos que P, Q e R são colineares.

Fazendo coincidir certos pares de pontos no hexágono $ABCDEF$, podemos deduzir teoremas análogos ao de Pascal para pentágonos, quadriláteros e até triângulos inscritos na circunferência. Por exemplo, fazendo coincidir A com B e D com E, as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{DE}$ tornam-se tangentes à circunferência, e obtemos a seguinte configuração:

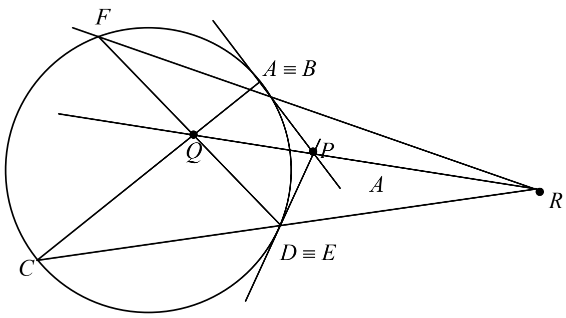


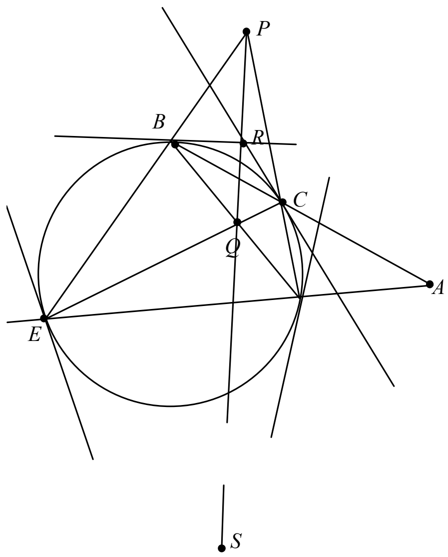
Figura 3

Exercício 4:
Na figura anterior, verifique que o ponto comum às tangentes em C e F também pertence à reta PQR.

8. MAIS POLARIDADES

Agora estamos prontos para retomar nosso estudo das polaridade. Aproveitando tudo o que vimos até aqui, vamos deduzir algumas propriedades mais avançadas.

Teorema 4: (Construção da reta polar usando apenas régua)
Seja γ uma circunferência e A um ponto exterior a ela.
Consideremos duas retas distintas passando por A e cortando γ nos pontos B, C, D e E (figura). Então a reta polar de A em relação a γ é a reta que une os pontos $\overleftrightarrow{BD} \cap \overleftrightarrow{EC}$ e $\overleftrightarrow{BE} \cap \overleftrightarrow{CD}$.



Demonstração:

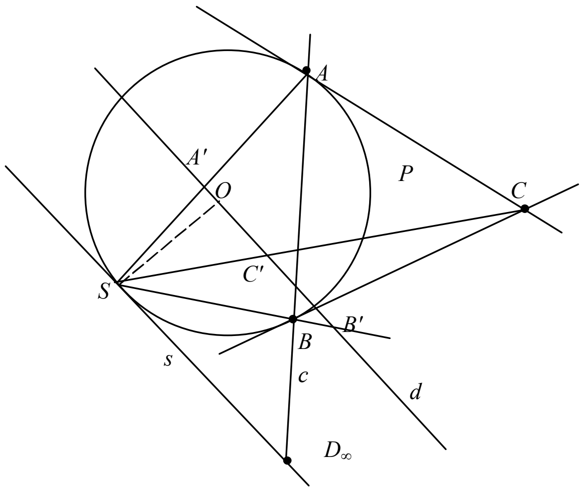
As polares de B, C, D e E são as retas b, c, d, e e tangentes a γ em seus respectivos pólos.
Sendo $R = b \cap c$ e $S = d \cap e$, temos que as polares de R e S são as retas $r = \overleftrightarrow{BC}$ e $s = \overleftrightarrow{DE}$.
Como $A = r \cap s$, sua polar é a reta $a = \overleftrightarrow{RS}$.
Sendo $P = \overleftrightarrow{BE} \cap \overleftrightarrow{CD}$ e $Q = \overleftrightarrow{BD} \cap \overleftrightarrow{EC}$, um dos corolários do Teorema de Pascal garante que P, Q, R e S são colineares, logo $a = \overleftrightarrow{PQ}$, como queríamos demonstrar.

Teorema 5: (Relação entre reta polar e quádruplas harmônicas)
Dados uma circunferência γ e um ponto exterior A, qualquer reta secante à circunferência passando por A corta a polar a no conjugado harmônico do ponto A em relação ao segmento com extremos nos dois pontos de corte da secante com a circunferência.

Demonstração: Exercício 5
(Dica: na figura anterior, use o quadrilátero $PBQC$ para encontrar o conjugado harmônico de A em relação a $\overline{ED}$).

9. RESOLUÇÃO DO PROBLEMA INICIAL:

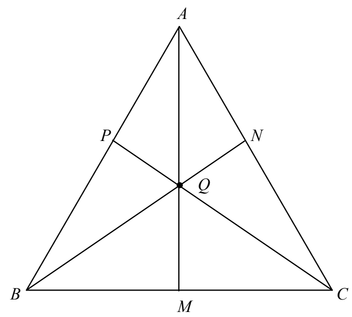
Podemos agora apresentar uma solução simples e elegante para o problema proposto no início deste artigo.



Seja d o diâmetro perpendicular a $\overline{OS}$.
Seja D_∞ o ponto do infinito correspondente ao feixe de retas paralelas a d. Queremos provar que $\mathcal{H}(A'B', C'D_\infty)$. Para isto, basta provar que as retas $\overleftrightarrow{SA}$, $\overleftrightarrow{SB}$, $\overleftrightarrow{SC}$ e $\overleftrightarrow{SD_\infty}$ formam um feixe harmônico. Parece natural tentar verificar que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ corta o feixe em uma quádrupla harmônica. Mas isso equivale a provar que $\overleftrightarrow{SC}$ é a reta polar do ponto $\overleftrightarrow{SD_\infty} \cap \overleftrightarrow{AB}$.
Isto é simples:

$\rightarrow$ C é a intersecção das polares de A e B, logo sua polar é $c = \overleftrightarrow{AB}$.
$\rightarrow$ $\overleftrightarrow{SD_\infty}$ é tangente à circunferência no ponto S, logo é a polar de S $(\overleftrightarrow{SD_\infty} = s)$.
Assim, $\overleftrightarrow{SD_\infty} \cap \overleftrightarrow{AB} = s \cap c$, e sua polar é, portanto, $\overleftrightarrow{SC}$, como queríamos demonstrar.

APÊNDICE:
TEOREMA DE CEVA:



Suponha que as cevianas AM, BN e CP de um triângulo ABC se encontrem em um ponto Q. Então

$$\frac{AN}{CN}\cdot\frac{CM}{BM}\cdot\frac{BP}{AP}=1.$$

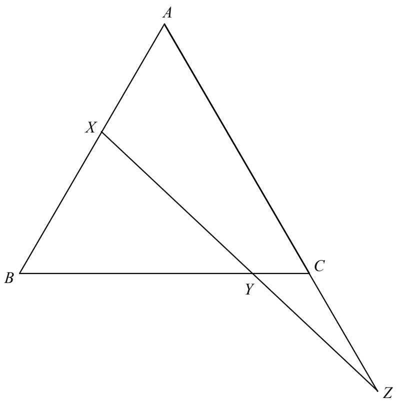
Prova:

Suponha que $Q=t_1A+t_2B+t_3C$ com $t_1+t_2+t_3=1$.

Então teremos $M=\dfrac{t_2B+t_3C}{t_2+t_3}$, $N=\dfrac{t_1A+t_3C}{t_1+t_3}$ e $P=\dfrac{t_1A+t_2B}{t_1+t_2}$.

Assim, $\dfrac{AN}{CN}\cdot\dfrac{CM}{BM}\cdot\dfrac{BP}{AP}\cdot\dfrac{t_3}{t_1}\cdot\dfrac{t_2}{t_3}\cdot\dfrac{t_1}{t_2}=1$ ❑

TEOREMA DE MENELAUS:



Suponha que $X\in\overleftrightarrow{AB}$, $Y\in\overleftrightarrow{BC}$ e $Z\in\overleftrightarrow{AC}$ sejam colineares. Então

$$\frac{AX}{BX}\cdot\frac{BY}{CY}\cdot\frac{CZ}{AZ}=1.$$

Prova:

Suponha que $X=tA+(1-t)B$ e $Y=sB+(1-s)C.$

Então $Z=uX+(1-u)Y,$ onde u é tal que $(1-t)u+s(1-u)=0,$ ou seja,

$Z=\dfrac{st}{s+t-1}A-\dfrac{(1-s)(1-t)}{s+t-1}C.$ Assim,

$\dfrac{AX}{BX}\cdot\dfrac{BY}{CY}\cdot\dfrac{CZ}{AZ}=\dfrac{1-t}{t}\cdot\dfrac{1-s}{s}\cdot\dfrac{st}{(1-s)(1-t)}=1$ ❑

CONTAR DUAS VEZES PARA GENERALIZAR (O RETORNO)

José Paulo Q. Carneiro, Universidade Santa Úrsula

♦ Nível Avançado

1. A fórmula que dá diretamente a soma dos quadrados $S_n^{(2)} = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ dos n primeiros inteiros positivos pode ser deduzida de várias maneiras (por exemplo, [3]). Uma das mais comuns é partir da identidade: $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$, escrevê-la para k variando de 1 até n:

$2^3 - 1^3 = 3\times 1^2 + 3\times 1 + 1$

$3^3 - 2^3 = 3\times 2^2 + 3\times 2 + 1$

....

$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$

e somar termo a termo estas n igualdades, obtendo:

$(n+1)^3 - 1^3 = 3S_n^{(2)} + 3S_n^{(1)} + n$

onde $S_n^{(1)} = 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, como é bem conhecido (ver [1]). Substituindo este valor e fazendo as contas, chega-se a :

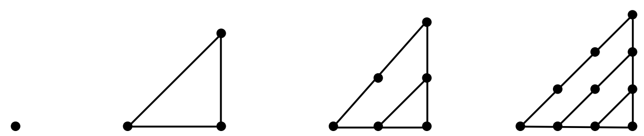
$$S_n^{(2)} = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Esta dedução é bastante eficiente e rápida, mas, quando apresentada pela primeira vez a um estudante, costuma deixar aquela sensação de "coelho tirado da cartola", devido ao aparecimento súbito de uma identidade cuja motivação não se sabe de onde veio. Este tipo de sensação desperta admiração em uns, mas em outros inspira uma frustração, proveniente da reflexão: "eu nunca vou conseguir bolar um artifício destes!". Coloca-se, portanto, a questão: há algum problema onde a soma dos quadrados apareça naturalmente? E, para este problema, há alguma outra maneira de resolvê-lo, por meio da qual possamos deduzir a fórmula da soma dos quadrados?

2. Tradicionalmente, em problemas de contagem, o símbolo C_n^p ("combinação de n, p a p") representa o número de subconjuntos de p elementos contidos em um conjunto de n elementos. Se, por exemplo, fizermos $p = 2$, então C_n^2 é o número de pares (não ordenados) que se pode extrair de um conjunto com n

elementos. Exemplos: o número de apertos de mão dados por n pessoas quando cada uma cumprimenta todas as outras somente uma vez, ou ainda o número de partidas de futebol em um campeonato com um só turno e n equipes. Em [1], um artigo com o mesmo título que o presente aproveitava justamente o último exemplo citado para mostrar como, resolvendo um mesmo problema de contagem por dois métodos diferentes, era possível deduzir que: $C_n^2 = 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \dfrac{(n-1)n}{2}$.

3. Os pitagóricos (sec.VI a.C.) chamavam os números C_n^2 de **números triangulares**. O motivo é que eles podem ser vistos como "triângulos" nas figuras:

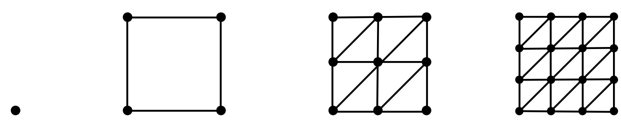


$T_1 = 1 \quad T_2 = 1 + 2 = 3 \quad T_3 = 1 + 2 + 3 = 6 \quad T_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

Deste modo: $C_n^2 = T_{n-1}$, para $n > 1$.

Além dos números triangulares, os pitagóricos consideravam também os **números quadrados** $Q_1 = 1^2 = 1$, $Q_2 = 2^2 = 4$, etc., que podem ser visualizados como quadrados (daí seu nome).

Estas figuras pitagóricas sugerem também uma relação interessante entre os números triangulares e os números quadrados. Se você partir o quadrado usando a diagonal sudoeste-nordeste, e incluindo esta diagonal na parte de baixo, você poderá olhar cada número quadrado como a soma de dois números triangulares consecutivos; mais especificamente: $Q_n = T_{n-1} + T_n$.



$2^2 = 1 + 3 \qquad 3^2 = 3 + 6 \qquad 4^2 = 6 + 10$

Esta relação pode, é claro, ser confirmada algebricamente, já que: $T_{n-1}+T_n=\frac{(n-1)n}{2}+\frac{n(n+1)}{2}=n^2=Q_n$.

4. A observação precedente pode ser usada para calcular a soma dos quadrados dos n primeiros números naturais. De fato:

$Q_1 = \quad T_1$

$Q_2 = T_1 + T_2$

$Q_3 = T_2 + T_3$

....

$Q_n = T_{n-1} + T_n$

Somando termo a termo, temos: $S_n^{(2)} = Q_1 + \cdots + Q_n = 2(T_1 + \cdots + T_{n-1}) + T_n$. Só resta agora calcular $T_1 + \cdots + T_{n-1}$, isto é, a soma dos $n-1$ primeiros números triangulares. Para isto, lembremos que esta soma é o mesmo que $C_2^2 + C_3^2 \cdots + C_n^2$, a qual vamos calcular pelo artifício de resolver um mesmo problema por duas contagens diferentes (ver [1]).

O número de subconjuntos de 3 elementos contidos em um conjunto A de $n+1$ elementos é representado, como já se sabe, por C_{n+1}^3. Vamos contar estes subconjuntos.

Para formar um subconjunto de A com 3 elementos, primeiramente escolhemos um elemento $a \in A$. Para isto, temos $n+1$ escolhas. Uma vez escolhido a, temos n escolhas possíveis para tomar um segundo elemento b; e para cada escolha de a e b, temos $n-1$ escolhas possíveis para selecionar o terceiro elemento c. Isto dá então um total de $(n+1)n(n-1)$ escolhas. Mas é claro que esta contagem inclui repetições. Para cada a,b,c escolhidos, houve 6 repetições, correspondentes às 6 permutações destes elementos, a saber: a,b,c; a,c,b; b,a,c; b,c,a; c,a,b; c,b,a. Portanto: $C_{n+1}^3 = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}$.

Por outro lado, se quisermos evitar desde o início as repetições, podemos contar do seguinte modo. Primeiramente, fixamos o elemento a; o número de subconjuntos de A com 3 elementos e que possuem a é o mesmo que o de subconjuntos de $A-\{a\}$ com 2 elementos, isto é: C_n^2. Tomemos agora um segundo elemento $b \neq a$. O número subconjuntos de A com 3 elementos, que possuem b mas não a, é o mesmo que o de subconjuntos de $A - \{a;b\}$ com 2 elementos, isto é: C_{n-1}^2. Analogamente, o número subconjuntos de A com 3 elementos, que contêm c, mas não intersectam $\{a,b\}$, é o mesmo que o de subconjuntos de $A - \{a;b;c\}$ com 2 elementos, isto é: C_{n-2}^2. E assim por diante, até que cheguemos ao antepenúltimo elemento, quando já teremos contado todos os subconjuntos A com 3 elementos. Logo: $C_{n+1}^3 = C_n^2 + C_{n-1}^2 + \cdots + C_2^2$.

Deste modo, concluímos que:

$T_1 + \cdots + T_{n-1} = C_2^2 + C_3^2 \cdots + C_n^2 = C_{n+1}^3 = \dfrac{(n+1)n(n-1)}{6}$. Conseguimos, portanto, calcular a soma dos $n-1$ primeiros números triangulares. Daí concluímos que:

$$S_n^{(2)} = Q_1 + \cdots + Q_n = 2(T_1 + \cdots + T_{n-1}) + T_n = \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{(n+1)n}{2}$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Podemos generalizar as fórmulas acima, calculando de duas maneiras diferentes o número de subconjuntos de $k + 1$ elementos contidos em um conjunto A de $n + 1$ elementos, que é representado por C_{n+1}^{k+1}.

A primeira expressão para C_{n+1}^{k+1} é clássica e pode ser provada do mesmo modo que foi feito para $k + 1 = 3$: temos

$$C_{n+1}^{k+1} = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{(k+1)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$$

(lembremos que $m! = 1 . 2 . ... . m$).

Seja agora $A = \{a_1, a_2, ..., a_{n+1}\}$. O número de subconjuntos de $k + 1$ elementos de A que contêm a_1 é C_n^k (escolhemos os k elementos de A diferentes de a_1). O número de subconjuntos de $k + 1$ elementos de A que contêm a_2 mas não contêm a_1 é C_{n-1}^k, e assim sucessivamente, o que mostra a igualdade

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_{n-1}^k + ... + C_k^k.$$

Se $P_k(n) = C_{n+k-1}^{k} = \dfrac{(n+k-1)(n+k-2)...(n+1)n}{k!}$ é o "polinômio triangular generalizado de dimensão *k*", temos que $P_k\ (n)$ é um polinômio em *n* de grau *k*, e, pela fórmula acima, temos

$$P_k(1) + P_k(2) + ... + P_k(m) = C_k^k + C_{k+1}^k + ... + C_{m+k-1}^k = C_{m+k}^{k+1}.$$

Podemos, como antes, escrever n^k como uma combinação linear dos polinômios $P_j(n), 0 \le j \le k,$ e usar a fórmula acima para obter uma fórmula para $S_n^{(k)} = 1^k + 2^k + ... + n^k$ (essa fórmula será a combinação correspondente dos termos C_{n+j}^{j+1}, com $0 \le j \le k$).

Tal fórmula também pode ser obtida recursivamente como no início do artigo, somando as identidades $(j+1)^{k+1} - j^{k+1} = \sum_{r=0}^{k} C_{k+1}^{r} \cdot j^r$, desde j = 1 até j = n, ficando o lado esquerdo igual a $(n+1)^{k+1} - 1$ e o direito igual a $(k+1)S_n^{(k)} + \sum_{r=0}^{k-1} C_{k+1}^{r}\ S_n^{(r)}$, o que dá $S_n^{(k)} = \dfrac{1}{k+1}\left((n+1)^{k+1} - 1 - \sum_{r=0}^{k-1} C_{k+1}^{r} S_n^{(r)} \right).$

Referências Bibliográficas:

[1] Carneiro, J.P., Contar duas vezes para generalizar, *Eureka!*, nº6, pp.15-17, 1999.
[2] Eves, H., Introdução à História da Matemática, Editora da UNICAMP, 1995
[3] Valadares, E.C., e Wagner, E., Usando geometria para somar, *Revista do Professor de Matemática*, nº39, pp.1-8, 1999.

O PRINCÍPIO DO ELEMENTO EXTREMO

José Rosales Ortega
Escola de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica

♦ Nível Avançado

Resumo

O artigo expõe um princípio de natureza heurística chamado o "princípio do extremo", que permite resolver problemas matemáticos de nível olímpico de maneira simples.

1.- Introdução.

Muitos matemáticos profissionais desejam contribuir para tornar a Matemática mais atrativa aos estudantes com talento. Uma forma de seguir este objetivo é criar problemas que requeiram uma grande dose de sentido comum, imaginação, e muitas vezes, uma estratégia específica de resolução de problemas. Este artigo introduz uma dessas estratégias, o "princípio do elemento extremo". Ainda que este nome não seja amplamente usado, este princípio pode lhe ajudar a resolver problemas matemáticos que aparecem freqüentemente em olimpíadas. O material é baseado na experiência pessoal ganha ao trabalhar com estudantes com talento em matemática e na minha participação como organizador de várias competições olímpicas.

2.- A idéia do princípio.

Considere uma fileira de estudantes ordenada em forma decrescente segundo a altura. A maioria deles tem dois vizinhos. Dois "elementos extremos", o mais alto e o mais baixo, tem somente um vizinho, porém estes dois elementos extremos possuem outras propriedades muito úteis. Por exemplo, quando contamos os estudantes na fileira, a melhor maneira é começar com um destes elementos extremos.

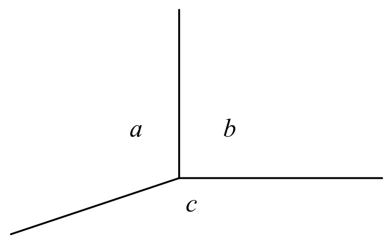
Em matemática, algumas vezes trabalhamos com conjuntos cujos elementos parecem ser equivalentes e cujas propriedades conhecidas são poucas. Uma estratégia poderosíssima em tais casos é considerar o elemento, ou os elementos, que de alguma forma são elementos extremos. Por exemplo, quando consideramos um conjunto infinito de números naturais, o elemento extremo é seu elemento menor. Para um conjunto finito de números reais os elementos extremos são o máximo e o mínimo do conjunto.

Em muitos casos o elemento extremo é atrativo devido a que suas propriedades adicionais nos permitem obter concluir sobre o mesmo elemento, ou sobre o do conjunto como um todo. Por exemplo, em um triângulo o lado maior se opõe ao ângulo maior e vice-versa. Na continuação apresentamos mais exemplos.

Exemplo 1. Sejam $\alpha \le \beta \le \gamma$ os ângulos de um triângulo. Como γ é o ângulo maior, então $\gamma \ge \pi/3$, já que, caso contrário, teríamos $\gamma < \pi/3, \beta < \pi/3$ e $\alpha < \pi/3$, o que condradiz o fato de que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Da mesma forma podemos concluir que $\alpha \le \pi/3$.

Também não é difícil obter que, se α é o menor ângulo de um polígono convexo com n lados ($n > 3$), então $\alpha \le (n-2)\pi/n$. Para provar isto assuma o contrário, e use o resultado que estabelece que a soma dos ângulos no polígono é igual a $(n-2)\pi$.

Exemplo 2. Considere três raios com origem comum num mesmo plano, formando três ângulos $a \le b \le c$, tal que $a + b + c = 2\pi$. É fácil ver que $c \ge 2\pi/3$ e $a \le 2\pi/3$. Expressões similares podem ser encontradas se, em lugar de três raios considerarmos n raios com um origem comum.



Exemplo 3. Os exemplos anteriores podem ser generalizados se considerarmos uma sucessão $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ de números reais tais que $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Então $a_1 \le s/n$ e $a_n \ge s/n$.

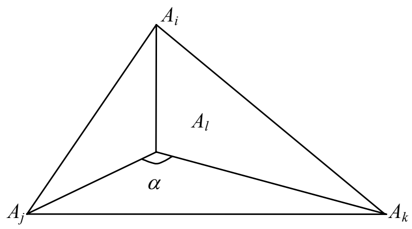
Estes exemplos são elementares, mas eles preparam o caminho para resolver o primeiro exemplo não trivial.

Exemplo 4. Seis pontos em um plano são tais que quaisquer três deles não são colineares. Prove que três desses seis pontos formam um triângulo que possui um ângulo interno maior ou igual a $\frac{2\pi}{3}$.

Solução: Denote os pontos por $A_1 . A_2 ,..., A_6$, e seja M seu fecho convexo. Podem ocorrer dois casos:

- *M* possui seis vértices. Aplicando o resultado da segunda parte do exemplo 1, para *n* = 6, vemos que o maior dos ângulos α de *M* satisfaz a desigualdade $\alpha \geq 2\pi / 3$. Se denotarmos por A_i o vértice de α, e por A_j e A_k os vértices adjacentes a α, então o triângulo $\Delta A_i A_j A_k$ tem a propriedade requerida.

- M possui menos de seis vértices. Neste caso existem três vértices A_i, A_j e A_k de *M*, e um ponto A_l dentro do triângulo $\Delta A_i A_j A_k$.



Aplicando o resultado do exemplo 2 aos raios A_lA_i, A_lA_j, e A_lA_k, segue-se que o maior dos ângulos α satisfaz a desigualdade $\alpha \geq 2\pi / 3$. Então o triângulo $\Delta A_l A_j A_k$ possui a propriedade requerida.

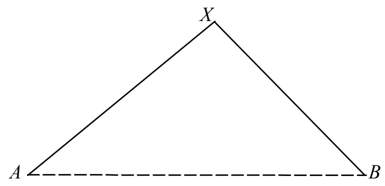
3.- Aplicações Geométricas.

As aplicações nesta seção estão relacionadas com objetos geométricos. Em cada caso o problema é resolvido ao encontrar a maior ou a menor distância, ângulo ou área.

Problema 1.- Em certo país existem 100 cidades. As distâncias entre cada par de cidades estão especificadas, e todas são diferentes.
Uma estrada conecta duas cidades *A* e *B* se, e somente se, *B* é a cidade mais próxima de *A* ou *A* é a cidade mais próxima de *B*.

- Prove que existem no máximo 5 estradas que saem de cada cidade.
- É possível que algumas das estradas formem um polígono?

Solução: Provemos a primeira parte. Considere uma cidade X e duas estradas XA e XB que ligam X a A e a B, respectivamente.

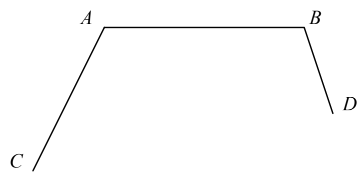


Segue-se que AB é o maior lado do triângulo ΔABX. Isto é verdade, pois, se (por exemplo) AX for o maior lado do triângulo ΔABX, então nem A é a cidade mais próxima para X, nem X é a cidade mais próxima para A e portanto a estrada X não deveria existir. Portanto, o ângulo $A\hat{X}B$ é o maior ângulo no triângulo ΔABX. Segue-se (exemplo 1) que $A\hat{X}B \neq 60°$ porque ΔABX é escaleno.

Suponha que exista uma cidade X e que seis estradas vão desde X até outras cidades. Então a soma dos seis ângulos em volta de X deveria ser maior que $6 \times 60° = 360°$, o que é impossível.

Mostremos a segunda parte. Para isto suponhamos que existam estradas que formam um polígono.

A estrada AB foi construída por um dos seguintes motivos:

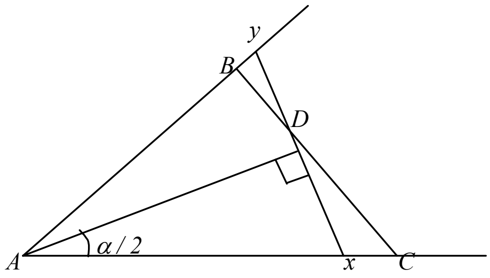


- B é a cidade mais próxima de A, ou
- A é a cidade mais próxima de B.

Considere ainda sem perda de generalidade, que AB é o maior lado do polígono. Então $CA < AB$ e $BD < AB$. Portanto, B não é a cidade mais próxima de A e A não é a cidade mais próxima de B. Logo, a estrada AB não deveria existir. Segue-se que tal polígono não existe.

Problema 2.- Os comprimentos das bissetrizes de um triângulo ABC são menores ou iguais a 1. Prove que a área do triângulo é menor ou igual a $\sqrt{3}/3$.

Solução: Seja $\alpha = \angle BAC$ o menor ângulo do triângulo, e seja AD a sua bissetriz. AB e AC não podem ser ambos maiores que $AD/\cos(\alpha/2)$. Para demonstrar isso, veja a figura:



$$Ax = Ay = \frac{AD}{\cos(\alpha/2)}$$

Suponhamos que $AB \le AD/\cos(\alpha/2)$.. Como $\alpha \le 60°$, então

$$AB \le \frac{AD}{\cos\frac{\alpha}{2}} \le \frac{AD}{\cos 30°} \le \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Denotemos por h_c e l_c a altura e a bissetriz do vértice C do triângulo ABC, respectivamente. Então, a área do triângulo é:

$$(ABC) = \frac{1}{2}h_c \times AB \le \frac{1}{2}l_c \times AB \le \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Problema 3.- Sejam $n(n > 3)$ pontos num plano tais que a área de qualquer triângulo com três desses pontos como vértices não seja maior que 1. Prove que todos os pontos estão contidos num triângulo, cuja área é menor ou igual a 4.

Solução: Este problema tem o aspecto de ser muito difícil. A idéia para resolvê-lo está baseada no seguinte: se você tem um triângulo de área 4, como poderia relacioná-lo com um triângulo de área 1? Uma boa idéia é conectar os pontos médios dos lados do triângulo de área 4. A área do triângulo obtido é 1. Raciocinando inversamente, se temos um triângulo de área 1 e se traçarmos paralelas m, n, p aos lados AB, BC e CA (de modo que $C \in m$, $A \in n$ e $B \in p$), respectivamente, obteremos um triângulo de área 4.

Agora não é difícil completar a solução. Considere todos os triângulos cujos vértices são três quaisquer dos n pontos dados. Seja ABC o triângulo de maior área. Trace as retas m, n, p como foi descrito anteriormente. Se o ponto A e o ponto X onde X é um dos n pontos dados estão em diferentes lados de m, então $(ABX) > (ABC)$. Os outros casos são análogos. Segue-se que nenhum dos pontos dados está fora do triângulo *MNP* triângulo formado pelas interseçcões de *m*, *n*, *p*. Como $(ABC) \leq 1$, então o triângulo *MNP* contém os pontos, e $(MNP) \leq 4$.

4.- Aplicações Algébricas.

Problema 4.- Em cada quadrado de um tabuleiro com infinitas fileiras e colunas, se escreve um número natural. O número escrito em cada quadrado é igual à média dos números escritos em todos seus quadrados vizinhos (Dois quadrados são vizinhos se eles compartilham um lado em comum.) Prove que todos os números escritos são iguais.

Solução: Aqui aplicaremos o famoso resultado sobre conjuntos não vazios de números naturais, o qual estabelece que sempre há um elemento mínimo. Seja *f* o menor dos números naturais escritos no tabuleiro, e sejam *a*, *b*, *c*, *d* os números escritos nos quatro quadrados vizinhos de *f*. Então

$$f = \frac{a+b+c+d}{4},$$

quer dizer $a+b+c+d = 4f$. Como f é o elemento mínimo, segue-se que $a \geq f, b \geq f, c \geq f$ e $d \geq f$. Se uma destas quatro desigualdades não é uma igualdade, então teríamos $a+b+c+d > 4f$, o que é um absurdo. Portanto, se *x* é um número escrito em uma casa da mesma coluna da casa na qual está escrito o número *f*, então $x = f$. O mesmo resultado é válido para as linhas. Logo, todos os números escritos são iguais.

Problema 5.- Em cada quadrado de um tabuleiro de *m* fileiras por *n* colunas, se escreve um número real. O número em cada quadrado é igual a média dos números escritos em todos seus quadrados vizinhos. (Dois quadrados são vizinhos se eles compartilham um lado comum.) Prove que todos os números escritos são iguais.
A solução deste exercício é um pouco diferente da do exercício prévio.

Solução: Há duas coisas diferentes. Primeiro, alguns quadrados tem menos que quatro quadrados vizinhos. O leitor pode adaptar facilmente a situação ao raciocínio da solução do exemplo 4. Segundo, a existência do número menor se baseia em uma razão diferente: cada conjunto finito de números possui um elemento menor. Este é um assunto importante. Se estamos tratando com elementos extremos, devemos estar certos de que existem, qualquer que seja a razão.

Problema 6.- Prove que não existem inteiros positivos *x*, *y*, *z* e *t* tais que

$$x^2 + y^2 = 3(z^2 + t^2).$$

Solução: Algumas vezes não é fácil imaginar como introduzir um elemento extremo. Uma boa ideia nestes casos é assumir a negação da proposição, e ver onde se pode encontrar uma contradição.

Assuma que existem inteiros positivos *x*, *y*, *z* e *t* tais que $x^2 + y^2 = 3(z^2 + t^2)$. Já que $x^2 + y^2$ é divisível por 3, então *x*, *y* também são divisíveis por 3 (Prove). Portanto, $x = 3m$ e $y = 3n$, onde *m*, *n* são inteiros positivos. Depois de substituir $3m$ por *x* e $3n$ por *y* na equação, e dividindo por 3, obtemos que

$$z^2 + t^2 = 3(m^2 + n^2).$$

Pela mesma razão que antes se conclui que $z = 3p$ e $t = 3q$, onde *p*, *q* são inteiros positivos. Logo, a equação original é equivalente a

$$m^2 + n^2 = 3(p^2 + q^2).$$

Portanto, obtivemos inteiros positivos *m*, *n*, *p* e *q*, que satisfazem a equação, e tais que $m < x$, $n < y$, $p < z$ e $q < t$. O argumento anterior pode ser usado indefinidamente para obter sucessões decrescentes de números inteiros positivos, o que é impossível. Logo, a idéia é considerar o menor elemento, em algum sentido.

Sejam *x*, *y*, *z* e *t* inteiros positivos tais que $x^2 + y^2 = 3(z^2 + t^2)$ e a soma $(x^2 + y^2)$ é a menor entre todas as soluções da equação. Seguindo o raciocínio de antes obteremos os números *m*, *n*, *p* e *q*, que satisfazem a equação, com $m < x$ e $n < y$. Portanto,

$$m^2 + n^2 < x^2 + y^2.$$

Esta é uma contradição.

5.- Aplicações Variadas.

A pergunta "Como começar a solução?" parece ser a principal pergunta nas soluções dos problemas deste artigo. Espera-se que, quanto maior a quantidade de exemplos que o leitor vir, maior será a experiencia ganha. Portanto exporemos mais exemplos que ajudem a exemplificar o princípio do extremo.

Problema 7.- Existirá uma função $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$; onde $\mathbb{N}^*$ é o conjunto dos inteiros positivos tais que se cumpra a seguinte igualdade para cada número natural $n > 1$:

$$f(n) = f(f(n-1)) + f(f(n+1))?$$

Solução: A resposta é NÃO. Para ver isto observe que entre os valores

$$f(2), f(3),..., f(n),...,$$

deve haver um elemento mínimo, digamos que seja $f(n_0)$, onde $n_0 > 1$.
Observe que

$$f(n_0+1) \geq f(n_0) = f(f(n_0-1)) + f(f(n_0+1)) \geq 1+1 > 1.$$

Como

$$f(n_0+1) > 1, \text{ então } f(f(n_0+1)) \in \{f(2), f(3),...\}$$

Portanto, $f(f(n_0+1)) \geq f(n_0)$, o que implica que

$$f(n_0) = f(f(n_0-1)) + f(f(n_0+1)) \geq 1 + f(n_0),$$

o que é impossível.

Problema 8.- Cada quadrado de um tabuleiro de dimensões 8 × 8 contém ou um 0 ou um 1. Para cada quadrado *A* que contém um 0, a soma dos números na mesma fileira de *A* e os números na mesma coluna de *A* é maior ou igual a 8. Prove que a soma de todos os números no tabuleiro é maior ou igual a 32.

Solução: Considere a soma dos números em cada fileira e em cada coluna. Escolha a menor destas somas. Suponha que tal soma corresponda à fileira *L*. Denote por *k* o número de números 1 que aparecem em *L*. Podem ocorrer os seguintes casos:

- $k \geq 4$. Então cada fileira contém ao menos quatro números 1. Portanto, a soma de todos os números no tabuleiro é maior ou igual a 4 × 8 = 32.

- $k < 4$. Então existem $8 - k$ zeros em *L*. Cada coluna que cruza *L* em um quadrado com um 0 contém não menos que $8 - k$ uns. Portanto, a soma de todos os números no tabuleiro é maior ou igual a

$$(8-k)^2 + k^2 = 2(32 - 8k + k^2) = 2((k-4)^2 + 16) \geq 2 \times 16 = 32.$$

Uma extensão do princípio do extremo é a seguinte regra: "ordene os elementos segundo o seu tamanho (valor)". Esta regra é usada na solução do seguinte problema.

Problema 9.- A soma de 17 inteiros positivos distintos é igual a 1000. Prove que podem ser escolhidos 8 destes inteiros de tal forma que a sua soma é maior ou igual a 500.

Solução: Ordene os inteiros em uma fileira $a_1 < a_2 < ... < a_{17}$. Considere o número a_9 que é a metade da fileira, e o valor médio da soma, parte inteira de 1000/17, que é 58. Podem ocorrer os seguintes casos:

- $a_9 \geq 58$. Então $a_{10} \geq 59$, $a_{11} \geq 60$,..., $a_{17} \geq 66$. Portanto, $a_{10} + a_{11} + ... + a_{17} \geq 59 + 60 + ... + 66 = 500$.

- $a_9 < 58$. Então $a_9 \leq 57$, $a_8 \leq 56$,..., $a_1 \leq 49$. Portanto, $a_1 + a_2 + ... + a_9 \leq 49 + 50 + ... + 57 = 477$.

Segue que $a_{10} + a_{11} + ... + a_{17} \geq 1000 - 477 > 500$.

Problema 10.- Encontre todas as soluções positivas do sistema

$$x_1 + x_2 = x_3^2, x_2 + x_3 = x_4^2, x_3 + x_4 = x_5^2, x_4 + x_5 = x_1^2, x_5 + x_1 = x_2^2$$

Solução: Sejam x e y o maior e o menor dos números $x_1,..., x_5$, respectivamente. Observe que temos que $x^2 \leq 2x$ e $y^2 \geq 2y$. Como $x > 0$ e $y > 0$ segue-se que $x \leq 2$ e que $y \geq 2$, logo se conclui que

$$2 \leq y \leq x \leq 2.$$

Portanto, segue-se que a única solução do sistema é dada por

$$x_1 = x_2 = ... = x_5 = 2.$$

6.- Exercícios.

Nesta seção voce encontrará alguns problemas que são resolvidos por meio do princípio do extremo, estando claro que pode haver outras soluções que não usem este princípio. Mas pede-se ao leitor que faça todo o esforço possível para resolver os seguintes exercícios usando unicamente o princípio do extremo.

1. Os números positivos x, y e z são tais que

$$x = \frac{2y}{1+y}, y = \frac{2z}{1+z}, z = \frac{2x}{1+x}.$$

Prove que $x = y = z$.

2. Seis círculos iguais num mesmo plano possuem um ponto em comum. Prove que um dos círculos contém o centro de outro dos círculos.

3. Oito pontos são escolhidos dentro de um círculo de raio um. Prove que existem dois pontos cuja distância é menor que 1.

4. A soma de vários números reais não negativos é 3, e a soma de seus quadrados é estritamente maior que um. Prove que podem ser escolhidos três destes números cuja soma é estritamente maior que um.

Referências

[1] María Falk de Losada, *Problemas y Soluciones* 1987-1991, *Nivel Superior,* Universidad Antonio Nariño, Colombia, 1994.

[2] Eduardo Wagner, Carlos Gustavo T. de A. Moreira et al, 10 *Olimpíadas Iberoamericanas de Matemática, OEI,* Madrid, 1996.

[3] Loren Larson, *Problem -Solving Through Problems,* Springer - Verlag, New York, 1983.

[4] G. Polya, *How to solve it,* Princeton University Press, USA, 1965.

[5] D. O. Shklarsky, N.N Chentzov e I.M. Yaglom, *The USSR Olympiad Problem Book,* Dover Publications, New-York, 1993.

[6] Ravi Vakil, *A Mathematical Mosaic: patterns and problem-solving,* Bredan Kelly Publishing, Burlington, Ontario, 1996.

FUNÇÕES MULTIPLICATIVAS E A FUNÇÃO DE MÖBIUS*

Carlos Gustavo. T. de A. Moreira, IMPA & Nicolau Saldanha, PUC-Rio

♦ Nível Avançado

Recordamos inicialmente uma propriedade da função φ de Euler, provada em [2] (Lema 2, página 52). Lembremos que, para n inteiro positivo, $\varphi(n) := \#\{\overline{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid a \text{ é invertível módulo } n\} = \#\{k \in \mathbb{Z} \mid 0 \le k < n \text{ e } \operatorname{mdc}(m,n) = 1\}$.

Teorema 1: Para todo natural n,

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Prova: Considere as n frações

$$\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$$

e simplifique cada uma delas: obtemos assim, para cada $d|n$, $\varphi(d)$ frações com denominador d, donde segue a identidade do enunciado.

Mais formalmente, dado $\overline{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, sejam $d = n/(n, a)$ e $a' = a/(n, a)$. Claramente $\overline{a'} \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^*$, e definimos assim uma função de $\mathbb{Z}/(n)$ para a união disjunta dos conjuntos $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^*$, onde d varia sobre os divisores de n. A inversa desta função leva $\overline{a'} \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^*$ em $\overline{a}$, com $a = na'/d$, donde a função é uma bijeção ❑

O processo de construir g a partir de f como

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

é bastante comum em teoria dos números Um fato interessante sobre este tipo de construção é ligado à noção de funções multiplicativas. Dizemos que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ é multiplicativa se $mdc(m,n) = 1 \Rightarrow f(mn) = f(m)f(n)$. A função φ de Euler, por exemplo, é multiplicativa (ver o corolário da página 47 de [2]). Se f é uma função multiplicativa e $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ é a fatoração prima de n, então

*** Adaptado do livro Primos de Mersenne (e outros primos muito grandes), dos mesmos autores([1]).**

$f(n)=\prod_{i=1}^{k} f(p_i^{\alpha_i})$. Além disso, vale a seguinte

Proposição: Se $f:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ é multiplicativa então $g:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$, $g(n)=\sum_{d|n} f(d)$ é multiplicativa.

Prova: Se $mdc(m,n)=1, g(mn)=\sum_{d|mn} f(d)=\sum_{\substack{d_1|m\\ d_2|n}} f(d_1d_2)=\sum_{\substack{d_1|m\\ d_2|n}} f(d_1)f(d_2)=$

$$\left(\sum_{d_1|m} f(d_1)\right)\left(\sum_{d_2|n} f(d_2)\right)=g(m)g(n)$$ ❑

Note que esta proposição fornece uma nova prova do Teorema 1: pela multiplicidade de $\sum_{d|n}\varphi(d)$, basta provar que $\sum_{d|n}\varphi(d)=n$ se n é potência de primo, mas se p é primo

$$\sum_{d|p^k}\varphi(d)=\sum_{j=0}^{k}\varphi(p^j)=1+\sum_{j=1}^{k}\varphi(p^j)=1+\sum_{j=1}^{k}(p^j-p^{j-1})=p^k.$$

Seria interessante poder inverter em geral identidades do tipo $g(n)=\sum_{d|n} f(d)$ para escrever f a partir de g. O teorema anterior nos mostra que se fazemos $f=\varphi$ na equação acima temos $g(n)=n$; invertendo esta identidade teríamos uma fórmula para φ. Vamos mostrar como fazer este tipo de inversão.

Definimos a função de Möbius $\mu:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ por

$$\mu(n)=\begin{cases}(-1)^m, & \text{se } n=p_1p_2...p_m, \text{com } p_1,p_2,...,p_m \text{ primos distintos,}\\ 0, & \text{se } n \text{ tem algum fator primo repetido em sua fatoração.}\end{cases}$$

Assim, $\mu(1)=\mu(6)=\mu(10)=1$, $\mu(2)=\mu(3)=\mu(5)=\mu(7)=-1$ e $\mu(4)=\mu(8)=\mu(9)=0$. Note que μ é uma função multiplicativa.

Lema: Para todo inteiro positivo n temos

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ 0, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Dem: Como μ é multiplicativa, $h(n) = \sum_{d|n} \mu(d)$ é multiplicativa.

Temos $h(1) = 1$ e, para cada p primo e $k \geq 1$ inteiro, $h(p^k) = \sum_{j=0}^{k} \mu(p^j) = 1 + (-1) = 0$,

donde, se $n > 1$, $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k} \Rightarrow h(n) = h(p_1^{\alpha_1}) h(p_2^{\alpha_2}) h(p_k^{\alpha_k}) = 0$ ❑

Teorema 2: (Fórmula de inversão de Möbius) Se para todo $n > 0$ temos

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

então

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(n/d) g(d).$$

Dem: Basta provar que

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(n/d) \left(\sum_{d'|d} f(d') \right).$$

Mas, escrevendo $d'' = n/d$ e $m = n/d'$ temos

$$\sum_{d|n} \mu(n/d) \left(\sum_{d'|d} f(d') \right) = \sum_{m|n} \left(\sum_{d''|m} \mu(d'') \right) f(n/m) = f(n) \quad ❑$$

Corolário: Para todo natural n, $\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(n/d) d = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$.

Teorema 1.22: (Segunda fórmula de inversão de Möbius) Sejam f e g funções reais com domínio $(0, +\infty)$ tais que $f(t) = g(t) = 0$ para todo $t < 1$. Se

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{x}{k} \right) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} f\left(\frac{x}{k} \right)$$

para todo x então, para todo x,

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(k)g\left(\frac{x}{k}\right)=\sum_{k=1}^{\lfloor x\rfloor}\mu(k)g\left(\frac{x}{k}\right).$$

Prova: Basta provar que

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(k)\left(\sum_{r=1}^{\infty}f\left(\frac{x}{kr}\right)\right),$$

mas, tomando $m = kr$ a última soma é igual a

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\left(\sum_{k|m}\mu(k)\right)f\left(\frac{x}{m}\right)\right),$$

que pelo lema é igual a $f(x)$ ❑

Apesar de não estar relacionada com o resto da nossa discussão, não podemos deixar de mencionar a seguinte conjectura.

Conjectura (Hipótese de Riemann): Se $\alpha > 1/2$ então

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\sum_{m=1}^{n}\mu(m)=0.$$

Esta é uma das formulações da famosa hipótese de Riemann, um dos problemas em aberto mais importantes da matemática.
Podemos reenunciar esta conjectura assim: seja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(t)=0$ se $t < 1$ e

$$\sum_{k=1}^{\infty}f(t/k)=1,\ \text{se}\ t\ge 1.$$

Então, para todo $\alpha > 1/2$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(t)}{t^{\alpha}}=0.$$

De fato, pela segunda fórmula de inversão de Möbius temos

$$f(t)=\sum_{m=1}^{\lfloor t\rfloor}\mu(m).$$

[1] Carlos Gustavo T. de A. Moreira e Nicolau Saldanha, Primos de Mersenne (e outros primos muito grandes), 22°. Colóquio Brasilerio de Matemática IMPA, 1999.

[2] Carlos Gustavo T. de A. Moreira, Divisibilidade, congruências e aritmética módulo *n*, Eureka! N°. 2, pp. 41-52.

OLIMPÍADAS AO REDOR DO MUNDO

A partir deste número da EUREKA! apresentaremos esta nova seção cujo objetivo é contemplar os leitores que não têm facilidade de acesso a problemas de competições de outras nações com alguns exemplos de problemas, de tais competições.

Nações distintas possuem culturas matemáticas distintas, portanto o leitor pode achar alguns problemas extremamente fáceis e outros extremamente difíceis. Tentaremos apresentar uma grande variedade de problemas principalmente daqueles países que costumam ter um bom desempenho na Olimpíada Internacional de Matemática. Divirtam-se e mandem suas soluções.

Antonio Luiz Santos

PROBLEMAS:

1. **(Bulgária-1998)** Seja $f(x)=x^3-3x+1$. Determine o número de soluções reais distintas da equação $f(f(x))=0$.
2. **(Repúblicas Tcheca e Eslovaca-1998)** Determine todos os números reais x tais que $x\lfloor x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor=88$.
3. **(Áustria/Polônia-1998)** Considere todos os pares ordenados (a,b) de números naturais tais que o produto $a^a b^b$, escrito na base 10, termina com exatamente 98 zeros. Determine o par (a,b) para o qual o produto ab é o menor possível.
4. **(Reino Unido-1998)** Em um triângulo ABC, D é o ponto médio de AB e E é um ponto do lado BC tal que $BE = 2EC$. Sabendo que $\angle ADC = \angle BAE$ determine a medida do ângulo $\angle BAC$.
5. **(Turquia-1998)** Seja (a_n) uma seqüência de números reais definida por $a_1=t$ e $a_{n+1}=4a_n(1-a_n)$ para $n\geq 1$. Para quantos valores distintos de t teremos $a_{1998}=0$?
6. **(Rússia-1998)** Um número de 10 algarismos é dito *interessante* se todos os seus algarismos são distintos e ele é um múltiplo de 11111. Quantos números interessantes existem?
7. **(Rússia-1998)** Existem números de 5 algarismos M e N onde todos os algarismos de M sejam pares, todos os algarismos de N sejam ímpares, cada um dos algarismos de 0 a 9 ocorrendo exatamente uma vez entre M e N e tais que M divide N?

8. (Romênia-1998) O volume de um paralelepípedo é $216cm^3$ e a sua área total é $216cm^2$. Mostre que o paralelepípedo é um cubo.

9. (Irlanda-1998) Um triângulo ABC possui medidas dos lados expressas por números inteiros, $\angle A = 2\angle B$ e $\angle C > 90°$. Determine o valor mínimo do perímetro deste triângulo.

10. (Canadá-1998) Em um triângulo ABC tem-se que $\angle BAC = 40°$ e $\angle ABC = 60°$. Sejam D e E pontos sobre os lados AC e AB respectivamente tais que $\angle CBD = 40°$ e $\angle BCE = 70°$. Mostre que a reta que contém AF é perpendicular à que contém BC.

11. (China-1999) A base de uma pirâmide é um polígono convexo de 9 lados. Pinta-se cada uma das diagonais da base e cada uma de suas arestas laterais de preto ou de branco (observe que os lados da base não estão coloridos). Mostre que existem três segmentos coloridos com a mesma cor que formam um triângulo.

12. (Irlanda-1999) Três números $a < b < c$ estão em progressão aritmética se $c - b = b - a$. Definamos a seqüência (u_n), $n = 0,1,2,3,...$ da seguinte maneira : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ e para cada $n \geq 1$, u_{n+1} é o menor inteiro positivo tal que $u_{n+1} > u_n$ e $\{u_0, u_1, ..., u_n, u_{n+1}\}$ não possui três elementos em progressão aritmética. Determine u_{100}.

13. (Irlanda-1999) Uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfaz às condições :

$f(ab) = f(a)f(b)$ se o máximo divisor comum de a e b é 1,

$f(p + q) = f(p) + f(q)$ para todos os números primos p e q.

Mostre que $f(2) = 2, \mathrm{f}(3) = 3$ e $f(1999) = 1999$.

14. (Suíça-1999) Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ satisfazendo $\frac{1}{x} f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x$ para todo $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

15. (Suíça-1999) Dois círculos intersectam-se em dois pontos M e N. Um ponto A qualquer do primeiro círculo, distinto de M e N, é unido aos pontos M e N de modo que as retas AM e AN intersectam novamente o segundo círculo nos pontos B e C. Mostre que a tangente ao primeiro círculo em A é paralela a BC.

16. (Estônia-1999) Mostre que o segmento que une o ortocentro e o baricentro de um triângulo acutângulo ABC é paralelo ao lado AB se, e somente se, $tg\angle A \cdot tg\angle B = 3$.

17. **(Ucrânia-1999)** Mostre que o número $9999999+1999000$ é composto.

18. **(Armênia-1999)** Resolva a equação $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\left(4-\sqrt{3}x\right)^2}=1$

19. **(Lituânia-1999)** Duas cordas *AB* e *CD* de um círculo intersectam-se no ponto *K*. O ponto *A* divide o arco *CAD* em duas partes iguais. Se *AK* = *a*, *KB* = *b*, determine a medida da corda *AD*.

20. **(Espanha-1999)** Mostre que existe uma seqüência de inteiros positivos $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ tal que $a_1^2+a_2^2+...+a_n^2$ é um quadrado perfeito para todo inteiro positivo *n*.

21. **(Estônia-1999)** Determine o valor da expressão

$$f\left(\frac{1}{2000}\right)+f\left(\frac{2}{2000}\right)+\cdots+f\left(\frac{1999}{2000}\right)+f\left(\frac{2000}{2000}\right)+f\left(\frac{2000}{1999}\right)+\cdots+f\left(\frac{2000}{1}\right)$$

supondo que $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$.

22. **(Eslovênia-1999)** Inicialmente os números $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{1998}, \frac{1}{1999}$ são escritos em um quadro negro.

Em cada passo, escolhemos dois destes números, digamos *a* e *b*, e os substituímos pelo número $a+b+ab$. Continuamos desta maneira até que reste um único número no quadro negro. É possível que este número seja 2000? Justifique sua resposta.

23. **(Rússia-1999)** A soma dos algarismos de um inteiro positivo n escrito no sistema de numeração decimal é igual a 100 e a soma dos algarismos do número $44n$ é 800. Determine a soma dos algarismos do número $3n$.

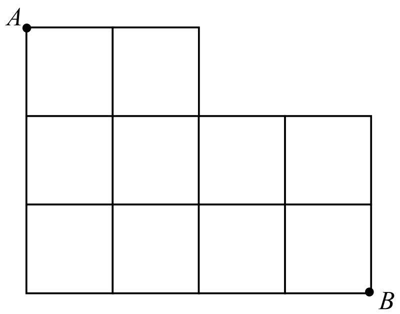
24. **(Rússia-1999)** Um círculo que passa pelos vértices *A* e *B* de um triângulo *ABC* é tangente ao lado *BC*, e o círculo que passa pelos vértices *B* e *C* e é tangente ao lado *AB* intersecta o primeiro círculo no ponto *K*, $K \neq B$. Se *O* é o centro do círculo circunscrito ao triângulo *ABC*, mostre que $\angle BKO = \frac{\pi}{2}$.

25. **(Espanha-2000)** Determine o maior número inteiro *N* que satisfaz as seguintes condições :

(a) $\left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor$ possui seus três algarismos iguais.

(b) $\left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor$ é igual à soma de n números naturais consecutivos a partir de 1.

26. **(Espanha-2000)**



A figura mostra um plano com ruas que delimitam 12 quadras quadradas. Uma pessoa P caminha de A até B e outra Q caminha de B até A.
Ambas partem ao mesmo tempo seguindo caminhos de comprimento mínimo com a mesma velocidade constante.
Em cada ponto com duas possíveis direções a tomar, ambas possuem a mesma probabilidade.
Determine a probabilidade de que P e Q se cruzem.

27. **(Polonia-2000)** Prove ou disprove a seguinte afirmativa :
Todo número racional positivo pode ser escrito sob a forma $\frac{a^2+b^3}{c^5+d^7}$ onde a, b, c e d são inteiros positivos.

28. **(Polonia-2000)** Seja I o incentro de um triângulo ABC com $AB \neq AC$. As retas suportes dos segmentos BI e CI intersectam os lados AC e AB nos pontos D e E respectivamente. Determine todos os ângulos $\angle BAC$ para os quais a igualdade $DI = EI$ pode ser satisfeita.

29. **(Áustria/Polonia-1999)** Determine todos os pares de inteiros positivos (x, y) tais que $x^{x+y} = y^{y-x}$.

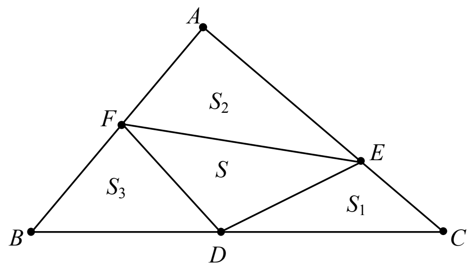
30. **(Polonia-1998)** Determine todos os pares de inteiros positivos (x, y) tais que $y^x = x^{50}$.

31. **(Baltic Way-1999)** As bissetrizes dos ângulos $\angle A$ e $\angle B$ do triângulo ABC intersectam os lados BC e CA nos pontos D e E respectivamente. Supondo que $AE + BD = AB$, determine a medida do ângulo $\angle C$.

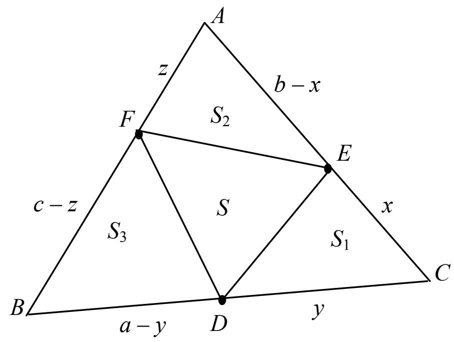
SOLUÇÕES DE PROBLEMAS PROPOSTOS

Publicamos aqui algumas das respostas enviadas por nossos leitores.

36) Na figura abaixo o triângulo *DEF* tem área de medida *S*. Sabendo-se que o triângulo *DEF* está inscrito num triângulo arbitrário *ABC*, mostre que as medidas S_i ($i = 1, 2, 3$) das áreas dos outros triângulos formados satisfazem a desigualdade $S \geq \dfrac{3}{\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\dfrac{1}{S_3}}$ e que a igualdade ocorre se e só se os pontos *DEF* são os pontos médios dos lados do triângulo, *ABC*.



Solução de Carlos Alberto da Silva Victor (Rio de Janeiro - RJ):



$$\begin{cases} AC = b \\ AB = c \\ BC = a \end{cases}$$

Provar que $S \geq \dfrac{3}{\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\dfrac{1}{S_3}}$ é idêntico a mostrar que $\dfrac{S}{S_1}+\dfrac{S}{S_2}+\dfrac{S}{S_3} \geq 3.$

Se k a área de ABC, temos então:

$$S_1 = \frac{k \cdot x \cdot y}{a \cdot b};\ S_2 = \frac{k \cdot z(b-x)}{b \cdot c};\ S_3 = \frac{k(c-z)\cdot(a-y)}{a \cdot c} \text{ e } S = k - S_1 - S_2 - S_3.$$

Façamos também:

$m_1 = \frac{x}{b}$; $m_2 = \frac{z}{c}$ e $m_3 = \frac{y}{a}$ e evidentemente teremos $0 < m_1 < 1$; $0 < m_2 < 1$; $0 < m_3 < 1$; e consequentemente: $S_1 = k \cdot m_1 \cdot m_3$; $S_2 = km_2(1-m_1)$ e $S_3 = k(1-m_2)\cdot(1-m_3)$. Seja $\varphi = (k - S_1 - S_2 - S_3)\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3}\right)$.

Portanto $\varphi = \frac{m_2}{m_3} + \frac{m_3}{m_2} + \frac{1-m_2}{m_1} + \frac{1-m_2 + m_1\overbrace{(m_2 - m_3)}^{1-m_3-(1-m_2)}}{(1-m_2)(1-m_3)} + \frac{1-m_3}{1-m_1} - 3$

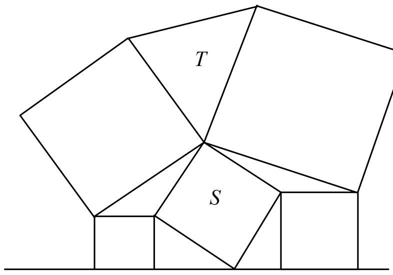
ou seja:

$$\varphi = \underbrace{\frac{m_2}{m_3} + \frac{m_3}{m_2}}_{\varphi_1} + \underbrace{\frac{1-m_2}{m_1} + \frac{m_1}{1-m_2}}_{\varphi_2} + \underbrace{\frac{1-m_3}{1-m_1} + \frac{1-m_1}{1-m_3}}_{\varphi_3} - 3$$

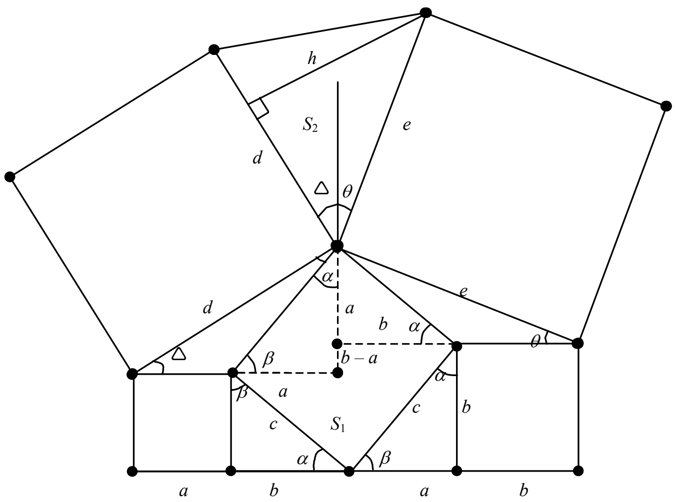
como a soma de qualquer número positivo x com o seu inverso é sempre maior do que 2 ou igual a 2, valendo a igualdade se e só se $x = 1$ (de fato, $x + \frac{1}{x} - 2 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \ge 0$), teremos: $\varphi \ge 2 + 2 + 2 - 3 = 3$. observe também que só temos $\varphi_1 = 2$ quando $m_2 = m_3$; $\varphi_2 = 2$ quando $m_1 = 1 - m_2$ e que $\varphi_3 = 2$ quando $1 - m_3 = 1 - m_1$; ou seja $m_1 = m_2 = m_3 = \frac{1}{2}$, o que garante que os pontos D, E e F são médios dos lados correspondentes e como consequência teremos o mínimo de $\varphi = 3$.

Conclusão: $\varphi \ge 3$ e a igualdade ocorre para os pontos médios.

37) Cinco quadrados são dispostos conforme ilustra o diagrama abaixo. Mostre que a medida da área do quadrado S é igual a medida da área do triângulo T.



Solução de Geraldo Perlino (Itapecerica da Serra - SP):



Prove : $S_1 = S_2$ $\qquad$ $S_1 = c^2$ $\qquad$ e $\qquad$ $a^2 + b^2 = c^2$ (Pitágoras)

$$S_2 = \frac{dh}{2} \qquad h = e \cdot sen(\Delta + \theta) \therefore S_2 = \frac{d}{2} \cdot e \cdot sen(\Delta + \theta)$$

$$S_2 = \frac{d}{2} \cdot e \cdot (sen\Delta\cos\theta + sen\theta\cos\Delta);\ d^2 = b^2 + 4a^2 \text{ e } e^2 = a^2 + 4b^2.$$

$$\begin{cases} sen\Delta = \dfrac{b}{d}; sen\theta = \dfrac{a}{e} \\ \cos\Delta = \dfrac{2a}{d}; \cos\theta = \dfrac{2b}{e} \end{cases} \Rightarrow S_2 = \frac{d}{2}\cdot e\cdot\left(\frac{2b^2}{de}+\frac{2a^2}{de}\right)$$

$\therefore\ S_2 = a^2 + b^2 = c^2$.

38) Os lados e diagonais de um polígono regular de n lados são coloridos em k cores tais que:

i) para cada cor a e dois vértices A e B do polígono, o segmento AB é colorido de a ou existe um vértice C tal que AC e BC são coloridos de a.

ii) os lados de qualquer triângulo com vértices entre os vértices do polígono são coloridos usando no máximo 2 cores.

Prove que $k \le 2$.

Solução:

Suponha que haja pelo menos 3 cores *a, b* e *c*. Vamos construir um subconjunto infinito de vértices de X, o que é uma contradição.

Fixemos um vértice $Z \in X$. Existe um vértice A_1 tal que $A_1\,Z$ tem a cor a, e um vértice B_1 tal que a cor de $B_1\,A_1$ e de $B_1\,Z$ é b. Existe um vértice C tal que as cores de $C_1\,Z$ e C_1B_1 são C. Considerando os triângulos $C_1\,A_1\,Z$ e $C_1\,A_1\,B_1$, e usando a condição ii), concluímos que a cor de C_1A_1 tem que ser C.

Vamos construir por indução vértices A_n, B_n, C_n para cada inteiro positivo n, todos distintos tais que, para todo $i < n$, as cores de ZA_n, A_iA_n, B_iA_n e C_iA_n são a, as cores de $ZB_n, A_iB_n, B_iB_n, C_iB_n$ e A_nB_n são b e as cores de $ZC_n, A_iC_n, B_iC_n, C_iC_n, A_nC_n$ e B_nC_n são c.

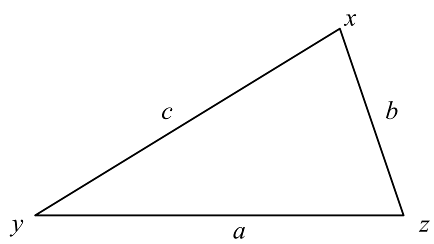
Suponhamos contruídos A_j, B_j, C_j para $1 \le j \le n$.

Por *i*), existe A_{n+1} tal que as cores de $A_{n+1}B_n$ e $A_{n+1}C_n$ são a. Considerando os triângulos $A_{n+1}B_nP$ e $A_{n+1}C_nP$, (e usando a condição *ii*), concluímos que a cor de $A_{n+1}B_nP$ tem que ser a, para cada ponto P criado anteriormente. Do mesmo modo, existe B_{n+1} tal que as cores de $B_{n+1}A_{n+1}$ e $B_{n+1}C_n$ são b. Considerando os triângulos $B_{n+1}A_{n+1}P$ e $B_{n+1}C_nP$, para cada ponto P criado anteriormente, concluímos que a cor de $B_{n+1}P$ tem que ser b. Por fim, existe C_{n+1} tal que as cores de $C_{n+1}B_{n+1}$ e $C_{n+1}A_{n+1}$ são c, e, considerando os triângulos $C_{n+1}B_{n+1}P$ e $C_{n+1}A_{n+1}P$, para cada ponto P criado anteriormente, concluímos que a cor de

$C_{n+1}P$ tem que ser c. É fácil ver que os pontos criados são todos distintos. Por exemplo: como a cor de A_nZ é a, temos $A_n \neq B_k$ e $A_n \neq C_k$ para todo k. Como a cor de A_nB_{n-1} é a, $A_n \neq Z$, e como a cor de A_nC_{n-1} é a, $A_n \neq A_j$, para todo $j < n$.

39) Sejam x, y e z os ângulos de um triângulo de lados opostos a, b e c respectivamente. Prove que $a\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+b\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+c\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq 2\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)$.

Solução:



Suponha sem parda de generalidade que $a \geq b \geq c$.

Teremos por tanto $x \geq y \geq z$, logo $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{z}$.

Temos então $(a-b)\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right) \geq 0, (b-c)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{y}\right) \geq 0$ e $(c-a)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{z}\right) \geq 0$.

Somando essas 3 desigualdades obtemos a desigualdade do enunciado.

40) a) Calcular a soma dos divisores positivos de um número natural em termos de sua fatoração prima.

b) Dizemos que $n \geq 1$ é abundante se a soma de seus divisores é maior que $2n$. Prove que se n é abundante então kn é abundante para todo inteiro $k \geq 1$.

c) Prove que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todo inteiro $n \geq n_0$ pode ser escrito como soma de dois números abundantes.

Solução de Marcio Afonso Assad Cohen (Rio de Janeiro - RJ):

a) Seja $k = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot ... \cdot p_n^{\alpha_n}$

Todo divisor de *k* é da forma $p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot ... \cdot p_n^{a_n}$ com $0 \le a_i \le \alpha_i$, e reciprocamente.
Portanto a soma de todos os divisores é:

$$S(k) = \sum_{a_1=0}^{\alpha_1} \cdot \sum_{a_2=0}^{\alpha_2} ... \sum_{a_n=0}^{\alpha_n} (p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot ... \cdot p_n^{a_n}) = \sum_{a_1=0}^{\alpha_1} ... \sum_{a_{n-1}=0}^{\alpha_{n-1}} (p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot ... \cdot p_{n-1}^{a_{n-1}}) \cdot \sum_{a_n=0}^{\alpha_n} p_n^{a_n} =$$

(pois $p_1^{a_1} \cdot ... \cdot p_{n-1}^{a_{n-1}}$ é constante para o somatório em a_n).

$$= \sum_{a_1=0}^{\alpha_1} ... \sum_{a_{n-1}}^{\alpha_{n-1}} p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot ... \cdot p_{n-1}^{a_{n-1}} \cdot \left(\frac{p_n^{\alpha_n+1} - 1}{p_n - 1} \right) \qquad \text{(soma da P.G.)}$$

$\left(\frac{p_n^{\alpha_n+1} - 1}{p_n - 1} \right) \sum_{a_1=0}^{\alpha_1} \cdot ... \cdot \sum_{a_{n-1}}^{\alpha_{n-1}} p_1^{a_1} \cdot ... \cdot p_{n-1}^{a_{n-1}}$. (pois $\frac{p_n^{\alpha_n+1} - 1}{p_n - 1}$ é constante em relação às variáveis $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$).

Procedendo de maneira análoga, agora para o termo p_{n-1}, e assim por diante obtemos:

$$S(k) = \left(\frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \right) \cdot \left(\frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \right) \cdot ... \cdot \left(\frac{p_n^{\alpha_n} - 1}{p_n - 1} \right), \text{ que é o que queríamos.}$$

b) Vamos analisar a razão $\frac{S(k)}{k}$ para $k = p_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot p_n^{\alpha_n}$

Temos que

$$\frac{S(k)}{k} = \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \right) \cdot ... \cdot \left(\frac{p_n^{\alpha_n+1} - 1}{p_n - 1} \right) = \frac{(1 + p_1 + p_1^2 + ... + p_1^{\alpha_1})}{p_1^{\alpha_1}} \cdot ... \cdot \frac{(1 + p_n + ... + p_n^{\alpha_n})}{p_n^{\alpha_n}} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2^2} + ... + \frac{1}{p_1^{\alpha_1}} \right) \cdot ... \cdot \left(1 + \frac{1}{p_n} + ... + \frac{1}{p_n^{\alpha_n}} \right).$$

Agora se multiplicarmos *k* por $m = q_1^{k_1} \cdot q_2^{k_2} \cdot ... \cdot q_s^{k_s}$, duas coisas podem acontecer:

i) Para cada primo p_i que aparece na fatoração de k e de m, o fator referente a ele no produtório $\frac{S(kn)}{kn}$ aumenta, pois, $\frac{1}{p_i^{\alpha_i+1}} > 0, ..., \frac{1}{p_i^{\alpha_i+r}} > 0$

e portanto, $\left(1 + \frac{1}{p_i} + ... + \frac{1}{p_i^{\alpha_i}} \right) < \left(1 + \frac{1}{p_i} + \cdot ... \cdot \frac{1}{p_i^{\alpha_i+r}} \right)$.

ii) Para cada primo q_j que só aparece na fatoração de k, vemos que ao calcularmos $\frac{S(km)}{km}$, aparecerá um novo fator $\left(1+\frac{1}{q_j}+\ldots+\frac{1}{q_j^{k_j}}\right)>1,$ de modo que $\frac{S(km)}{km}>\frac{S(k)}{k}$.

Em qualquer caso portanto, vale $\frac{S(km)}{km}\geq\frac{S(k)}{k},\forall m\in\mathbb{N}^*$. Em particular, k abundante $\Rightarrow\frac{S(k)}{k}>2\Rightarrow\frac{S(km)}{km}>2.$

c) Note que na letra b), vale a desigualdade estrita $\frac{S(km)}{km}>\frac{S(k)}{k}$ para todo $m\geq 2.$

- Em particular, como $\frac{S(6)}{6}=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}=2,$

vemos que todo múltiplo de 6, maior do que 6 é abundante. (pois $n=6t;t>1\Rightarrow\frac{S(n)}{n}=\frac{S(6t)}{6t}>\frac{S(6)}{6}=2$)

- Logo, se para um natural N, existe N_1 abundante tal que $N\equiv N_1\bmod 6,$ e $N-N_1>6,$ então $N-N_1=6t;t\in\mathbb{N}\Rightarrow N=N_1+6t;t>1\Rightarrow N$ pode ser escrito como soma de dois números abundantes.

- Nosso problema se resume então a descobrir 6 números abundantes, dois a dois distintos módulo 6: mas para isso é suficiente achar N abundante tal que $N\equiv 1\bmod 6$ (pois nesse caso $2N\equiv 2\bmod 6$ e $2N$ é abundante pela letra b); e analogamente, $3N\equiv 3\bmod 6, 4N\equiv 4; 5N\equiv 5$ e $6N\equiv 0\bmod 6$ são todos abundantes e distintos módulo 6).

Também seria suficiente achar algum T abundante tal que $T\equiv 5\bmod 6,$ pois nesse caso, $5T$ é congruente a 1 mod 6 e recaímos no caso anterior.

- Note agora, que todo número da forma

$N\equiv 5^{\alpha_1}\cdot 7^{\alpha_2}\cdot 11^{\alpha_3}.\cdots\equiv(-1)^{\alpha_1}\cdot 1^{\alpha_2}\cdot(-1)^{\alpha_3}\cdot\ldots\bmod 6\Rightarrow N\equiv 1\bmod 6$ ou $N\equiv -1\equiv 5\bmod 6.$

Obs: todo primo $p>3$ é congruente a 1 ou –1 mod 6, pois do contrário teríamos: $p\equiv 2,4,0(\bmod 6)\Rightarrow p$ é par ou $p\equiv 3(\bmod 6)\Rightarrow p$ é múltiplo de 3.

- O problema então fica sendo o de encontrar um número da forma $N \equiv 5^{\alpha_5} \cdot 7^{\alpha_7} \cdot ... \cdot p^{\alpha_p}$ abundante.

Isso é possível mesmo se nos restringirmos apenas a números em que $\alpha_5 = \alpha_7 = ... = \alpha_p = 1$.

Basta ver que nesse caso, $\frac{S(N)}{N} = \left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{7}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{11}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{13}\right)...\left(1+\frac{1}{p}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S(N)}{N} = \frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{14}{13}\cdot...\cdot\frac{p+1}{p}$.

Em particular, $S(5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23\cdot29\cdot31) = \frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{14}{13}\cdot\frac{18}{17}\cdot\frac{20}{19}\cdot\frac{24}{23}\cdot\frac{30}{29}\cdot\frac{32}{31} =$

$= \left(\frac{6\cdot8\cdot12\cdot14\cdot18}{5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17}\right)\cdot\left(\frac{20\cdot24\cdot30\cdot32}{19\cdot23\cdot29\cdot31}\right) = \frac{145152}{85085}\cdot\frac{460800}{392863} > 1{,}7059\cdot1{,}1729 > 2{,}0008 > 2.$

Logo, $N = 5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23\cdot29\cdot31$ é abundante.
(temos $N \equiv (-1)\cdot1\cdot(-1)\cdot1\cdot(-1)\cdot1\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot1 \equiv 5 \bmod 6$)
Tomando portanto $N_0 = 5N$, temos $N_0, 2N_0, 3N_0, 4N_0, 5N_0, 6N_0$ são abundantes distintos módulo 6. Fazendo então $n_0 = 6N_0 + 6$, vemos pelas observações anteriores que $\forall n > n_0$ tem-se que n pode ser escrito como soma de dois números abundantes!.

PROBLEMA "CUÁTICO" (Publicado na Eureka! N^o. 5):
Prove que para qualquer conjunto de inteiros positivos A e para todo inteiro positivo k existe um conjunto infinito de números primos S tal que o produto de k elementos distintos de S está sempre em A ou o produto de k elementos distintos de S nunca pertence a A.

Solução de Daniel Massaki Yamamoto (São Paulo - SP):
Considere o Conjunto P formado por todos os primos.
Para todo subconjunto de P com k elementos, pinte-o de azul se o produto destes pertencer a A e de vermelho caso contrário. Pelo Teorema de Ramsey Infinito, existe um subconjunto infinito de P tal que todos os seus subconjuntos de k elementos são da mesma cor, ou seja os produtos de seus elementos sempre pertencem ou nunca a A. Chamando-o de S, acabamos o problema.

Agradecemos também o envio das soluções e a colaboração de:

Alex Correa Abreu	**(Niteroi - RJ)**
Carlos A. Gomes	**(Natal - RN)**
Diego Alvarez Araújo Correia	**(Fortaleza - CE)**
Estillac Lins Maciel Borges Filho	**(Belém - PA)**
Fabrício Siqueira Benevides	**(Fortaleza - CE)**
Fernando Carvalho Ramos	**(Santa Maria - RS)**
Geraldo Perlino Júnior	**(São Paulo - SP)**
José Clovis Adão Macedo	**(Matão - SP)**
José Guilherme Moreira Pinto	**(Juiz de Fora - MG)**
Luciano Marinho Filho	**(Recife - PE)**
Luiz Fernando Athayde Júnior	**(Rio de Janeiro - RJ)**
Marcelo Rufino de Oliveira	**(Belém - PA)**
Nijair Araújo Pinto	**(Fortaleza - CE)**
Osvaldo Mello Sponquiado	**(Olímpia - SP)**
Paulo de Sousa Sobrinho	**(Natal - RN)**

Errata:

O problema N^{o}. 4 (Olimpíada Romênia 92) publicado Na Eureka! N^{o}. 6, pág 37, deveria dizer: Sejam $p,\ q \in \mathbb{C}$, $q \neq 0$. Se as raízes da equação $x^2 + px + q = 0$ têm o mesmo módulo, mostre que $\frac{p^2}{q}$ é um número real.

O problema N^{o}. 8 (Olimpíada Hungria 1899) publicado Na Eureka! N^{o}. 6, pág 38, deveria dizer: A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 dividem a circunferência unitária em cinco partes iguais. Prove que $(A_0A_1 \cdot A_2A_4)^2 = 5$.

Você sabia…

Que foram recentemente batidos os recordes de maior par de primos gêmeos (p, p +2) conhecido? São eles $4648619711505 \cdot 2^{60000} \pm 1$, descobertos este ano por Wassing, Jarai e Indlekofer, e têm 18075 dígitos cada. Também tem 18075 dígitos o maior primo conhecido p tal que $2p + 1$ também é primo (tais primos são conhecidos como primos de Sophie Germain). É o número $3714089895285 \cdot 2^{60000} - 1$, descoberto pelos mesmos Wassing, Jarai e Indlekofer. Este é o maior primo conhecido p tal que o número de Mersenne $2^p - 1$ é composto (de fato é divisível por $2p + 1$; veja o problema 43 proposto na página 60).

PROBLEMAS PROPOSTOS

✉ *Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e sugestões de novos problemas para os próximos números.*

41) Se a e b são números reais positivos, então $a^b + b^a > 1$.

42) Suponha que a, b e c são as medidas dos lados de um triângulo ABC, com semi-perímetro p e área S, verifique que
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \le \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{p}{s}$$
e mais ainda: verifique que a igualdade acima ocorre apenas se o triângulo for equilátero.

43) Prove que se p é um primo da forma $4k + 3$, então $2p + 1$ também é primo se e somente se $2p + 1$ divide $2^p - 1$.

44) O produto de dois inteiros positivos consecutivos pode ser igual ao produto de dois inteiros positivos consecutivos pares?

45) Existe uma seqüência infinita de:
a) Números reais
b) Números inteiros
Tais que a soma de quaisquer dez termos consecutivos é positiva, enquanto que para todo n a soma dos primeiros $10n + 1$ termos consecutivos é negativa?

46) (Baltic Way, 1997)
i) Prove a existência de dois conjuntos infinitos A e B, não necessariamente disjuntos, de inteiros não negativos tais que cada inteiro não negativo pode ser representado de uma única forma como $a + b$, com $a \in A$ e $b \in B$.

ii) Prove que em cada tal par (A, B), ou A ou B contém apenas múltiplos de algum inteiro $k > 1$.

Problemas 41 e 42 propostos por Carlos Alexandre Gomes da Silva (Natal - RN), problemas 44 e 45 obtidos do 21º. Torneio das Cidades - Primaveira 2000.

AGENDA OLÍMPICA

XI OLIMPÍADA DO CONE SUL
14 a 19 de abril de 2000
Montevidéu – Uruguai

♦

VI OLIMPÍADA DE MAIO
13 de maio de 2000

♦

XXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - 2000
Primeira Fase – Sábado, 10 de junho
Segunda Fase – Sábado, 02 de setembro
Terceira Fase – Sábado, 21 de outubro (níveis 1,2 e 3)
Domingo, 22 de outubro (nível 3 - segundo dia).

♦

XLI OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA
13 a 25 de julho de 2000
Taejon, Coréia do Sul.

♦

XV OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA
16 a 24 de setembro de 2000
Caracas, Venezuela

♦

III OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
7 de outubro de 2000

COORDENADORES REGIONAIS

Amarisio da Silva Araújo	*(UFV)*	*Viçosa - MG*
Alberto Hassen Raad	*(UFJF)*	*Juiz de Fora - MG*
Angela Camargo	*(Centro de Educ.de Adultos - CEA)*	*Blumenau - SC*
Benedito T. Vasconcelos Freire	*(UFRN)*	*Natal - RN*
Claudio Arconcher	*(Col. Leonardo da Vinci)*	*Jundiaí - SP*
Claus Haetinger	*(UNIVATES)*	*Lajeado - RS*
Crescêncio das Neves	*(UFAM)*	*Manaus-AM*
Élio Mega	*(Col. ETAPA)*	*São Paulo - SP*
Enzo Marcom Takara	*(Col. Singular)*	*Santo André - SP*
Florêncio F. Guimarães Filho	*(UFES)*	*Vitória - ES*
Francisco Dutenhefner	*(UFMG)*	*Belo Horizonte - MG*
Gisele de A. Prateado Gusmão	*(UFGO)*	*Goiânia - GO*
Ivanilde H. Fernandes Saad	*(U. Católica Dom Bosco)*	*Campo Grande - MS*
Jacqueline F. Rojas Arancibia	*(UFPB)*	*João Pessoa - PB*
João Benício de Melo Neto	*(UFPI)*	*Teresina - PI*
João F. Melo Libonati	*(Grupo Educ. IDEAL)*	*Belém - PA*
Irene Nakaoka	*(UEM)*	*Maringá - PR*
José Carlos Pinto Leivas	*(UFRG)*	*Rio Grande - RS*
José Cloves Saraiva	*(UFMA)*	*São Luis - MA*
José Gaspar Ruas Filho	*(ICMC-USP)*	*São Carlos - SP*
José Luis Rosas Pinho	*(UFSC)*	*Florianópolis - SC*
José Paulo Carneiro	*(Univ. Santa Úrsula)*	*Rio de Janeiro - RJ*
José Vieira Alves	*(UFPB)*	*Campina Grande - PB*
Leonardo Matteo D'orio	*(Sistema Titular de Ensino)*	*Belém - PA*
Licio Hernandes Bezerra	*(UFSC)*	*Florianópolis - SC*
Luzinalva M. de Amorim	*(UFBA)*	*Salvador - BA*
Marcondes Cavalcante França	*(UF Ceará)*	*Fortaleza - CE*
Pablo Rodrigo Ganassim	*(L. Albert Einstein)*	*Piracicaba - SP*
Paulo H. Cruz Neiva de L. Jr.	*(Esc. Tec.Everardo Passos)*	*SJ dos Campos - SP*
Reinaldo Gen Ichiro Arakaki	*(INPE)*	*SJ dos Campos - SP*
Ricardo Amorim	*(Centro Educ. Logos)*	*Nova Iguaçu - RJ*
Roberto Vizeu Barros	*(Colégio ACAE)*	*Volta Redonda - RJ*
Sergio Claudio Ramos	*(IM-UFRGS)*	*Porto Alegre - RS*
Seme Gebara Neto	*(UFMG)*	*Belo Horizonte - MG*
Silvio de Barros Melo	*(UFPE)*	*Recife - PE*
Tadeu Ferreira Gomes	*(U. do Estado da Bahia)*	*Juazeiro - BA*
Tomás Menéndez Rodrigues	*(U. Federal de Rondonia)*	*Porto Velho - RO*
Valdenberg Araújo da Silva	*(U. Federal de Sergipe)*	*São Cristovão - SE*
Wagner Pereira Lopes	*(Esc. Tec. Fed. de Goiás)*	*Jataí - GO*
Waldemar M. Canalli	*(P.M. S. João de Meriti)*	*S. João de Meriti - RJ*