CONTEÚDO

AOS LEITORES 2

5ª. OLIMPÍADA DE MAIO 3
Problemas

5ª. OLIMPÍADA DE MAIO 5
Resultados

10ª. OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL 7
Problemas e Soluções

40ª. OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA 15
Problemas e Resultados

ARTIGOS
ADEDANHA OU "DE COMO OS DEUSES MATEMÁTICOS TROUXERAM A PAZ AO MUNDO" 17
Pablo Emanuel

QUADRILÁTEROS E TRIÂNGULOS 23
Marcelo Mendes

O PRINCÍPIO DAS GAVETAS 27
Paulo Cezar Pinto Carvalho

DESIGUALDADES ELEMENTARES 34
Antonio Caminha Muniz Neto

40ª. OLIMPÍADA INTERNACIONAL E 14ª. OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA 50
Primeiro teste de Seleção

SOLUÇÕES DE PROBLEMAS PROPOSTOS 51

PROBLEMAS PROPOSTOS 57

COMO ASSINAR A EUREKA! 59

AGENDA OLÍMPICA 60

COORDENADORES REGIONAIS 61

AOS LEITORES

Realizamos a primeira fase da XXI Olimpíada Brasileira de Matemática em mais de 3.000 colégios do nosso país. Através dos relatórios enviados pelas escolas aos Coordenadores Regionais, estabelecemos as notas de corte para a promoção dos alunos à segunda fase que se realizará em agosto.

Notas de corte para promoção a segunda fase:

Primeiro nível (5ª. e 6ª. séries) :	**09 acertos ou mais.**
Segundo nível (7ª. e 8ª. séries) :	**10 acertos ou mais.**
Terceiro nível (Ensino médio) :	**12 acertos ou mais.**

A prova da segunda fase será discursiva e ainda será aplicada nos colégios. Os enunciados, as soluções e os criterios de pontuação serão enviados a todas as escolas participantes.

A Comissão de Olimpíadas agradece a participação de alunos e professores na primeira fase e deseja sucesso a todos nas fases seguintes.

Agradecemos às pessoas que colaboraram com este número propondo problemas e enviando soluções de problemas propostos. Aproveitamos para continuar estimulando nossos leitores a contribuir para nossa revista com artigos, problemas e soluções.

Lembramos da existência da lista de discussão de problemas de matemática da OBM, cujo endereço eletrônico mudou para: obm-l@mat.puc-rio.br . Para maiores informações escreva para obm@impa.br ou para o Prof. Nicolau Saldanha, administrador desta lista em nicolau@mat.puc-rio.br .

Comitê Editorial.

5ª. OLIMPÍADA DE MAIO

Primeiro Nível

PROBLEMA 1

São escolhidos 2 números inteiros entre 1 e 100 inclusive, tais que a diferença é 7 e o produto é múltiplo de 5. De quantas maneiras pode ser feita a escolha?

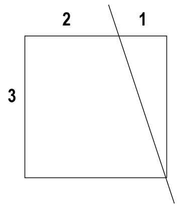
PROBLEMA 2

Num paralelogramo $ABCD$, BD é a diagonal maior.
Ao fazer coincidir B com D, mediante uma dobra, se forma um pentágono regular.
Calcular as medidas dos ângulos que a diagonal BD forma com cada um dos lados do paralelogramo.

PROBLEMA 3

Em cada um dos 10 degraus de uma escada existe uma rã.
Cada rã pode, de um pulo, colocar-se em outro degrau, mas quando uma rã faz isso, ao mesmo tempo, uma outra rã pula a mesma quantidade de degraus em sentido contrário: uma sobe e outra desce.
Conseguirão as rãs colocar-se todas juntas num mesmo degrau?

PROBLEMA 4



Dez cartões quadrados de 3 centímetros de lado são cortados por uma línha, como mostra a figura.
Depois dos cortes tem-se 20 peças: 10 triângulos e 10 trapézios. Forme um quadrado que utilize as 20 peças sem superposições nem espaços.

PROBLEMA 5

Ana, Beatriz, Carlos, Diego e Emilia jogam um torneio de xadrez.
Cada jogador enfrenta uma vez só cada um dos outros quatro jogadores.
Cada jogador consegue 2 pontos se ganha a partida, 1 ponto se empata e 0 pontos se perde a partida.
Ao finalizar o torneio, as pontuações dos 5 jogadores são todas diferentes.
Encontre o máximo número de empates que pode ter tido o torneio e justifique por que não pode ter havido um número maior de empates.

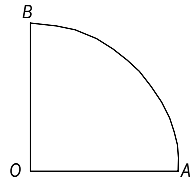
SEGUNDO NÍVEL

PROBLEMA 1

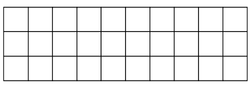
Um número natural de três algarismos é chamado de *tricúbico* se é igual à soma dos cubos dos seus dígitos. Encontre todos os pares de números consecutivos tais que ambos sejam *tricúbicos*.

PROBLEMA 2

A figura representa a quarta parte de um círculo de raio 1. No arco AB, se consideram pontos P e Q de forma tal que a reta PQ seja paralela à reta AB.
Sejam X e Y os pontos de interseção da reta PQ com as retas OA e OB respectivamente. Calcular $\overline{PX}^2 + \overline{PY}^2$.



PROBLEMA 3



A primeira fileira da tabela ao lado é preenchida com os números de 1 a 10, em ordem crescente. A segunda fileira é preenchida com os números de 1 a 10, em qualquer ordem.
Em cada casa da terceira fileira se escreve a soma dos dois números escritos nas casas acima. Existe alguma maneira de preencher a segunda fileira de modo que os algarismos das unidades dos números da terceira fileira sejam todos distintos?

PROBLEMA 4

Seja ABC um triângulo equilátero. M é o ponto médio do segmento AB e N é o ponto médio do segmento BC. Seja P o ponto exterior a ABC tal que o triângulo ACP é isósceles e retângulo em P. PM e AN cortam-se em I. Prove que CI é a bissetriz do ângulo MCA.

PROBLEMA 5

São dados 12 pontos que são os vértices de um polígono regular de 12 lados. Rafael deve traçar segmentos que tenham seus dois extremos em dois dos pontos desenhados.
É permitido que cada ponto seja extremo de mais de um segmento e que os segmentos se cruzem, mas é proibido traçar três segmentos que sejam os três lados de um triângulo em que cada vértice é um dos 12 pontos iniciais.
Encontre o número máximo de segmentos que pode traçar Rafael e justifique por que não é possivel traçar um número maior de segmentos.

5ª. OLIMPÍADA DE MAIO

Resultado Brasileiro

Primeiro Nível

Fábio Dias Moreira	**Ouro**	Rio de Janeiro - RJ
André de Carvalho Amaro	**Prata**	São Paulo - SP
Diego Costa de Almeida	**Prata**	Fortaleza - CE
Daniel Haanwinckel Junqueira	**Bronze**	Salvador - BA
Raúl M. Alexandrino Nogueira	**Bronze**	Fortaleza - CE
Bruna Griguol	**Bronze**	Cafelândia - PR
Felipe Oliveira de Sousa	**Bronze**	Fortaleza - CE
Guilherme Finkelfarb Lichand	**Menção Honrosa**	São Paulo - SP
Leonardo Luis Desideri Freitas	**Menção Honrosa**	Vitória - ES
Zilma K. Barbosa Bezerra	**Menção Honrosa**	Fortaleza - CE
Thiago Augusto Caldas Bello	**Menção Honrosa**	Salvador - BA
Mateus Gomes Filgueiras	**Menção Honrosa**	Fortaleza - CE

Segundo Nível

João Alfredo Castellani F. Freire	**Ouro**	Salvador - BA
Arthur Duarte Nehmi	**Prata**	São Paulo - SP
Davi M. Alexandrino Nogueira	**Prata**	Fortaleza - CE
Luiz Brizeno Firmeza Neto	**Bronze**	Fortaleza - CE
Luciana Andretta do Nascimento	**Bronze**	Cafelândia - PR
Thiago Barros Rodrigues Costa	**Bronze**	Fortaleza - CE
Daniel Pinheiro Sobreira	**Bronze**	Fortaleza - CE
Maurício Massão Soares Matsumoto	**Menção Honrosa**	São Paulo - SP
Fabio S. Toniolo	**Menção Honrosa**	São Paulo - SP
Einstein do Nascimento Jr.	**Menção Honrosa**	Fortaleza - CE
Hugo Pinto Iwata	**Menção Honrosa**	S J do Rio Preto - SP
Rodrigo Roque Dias	**Menção Honrosa**	São Paulo - SP

O Brasil teve uma excelente participação na 5ª. Olimpíada de Maio na qual participaram 13 paises, sendo o país com maior pontuação nos dois níveis em que é realizada esta competição.

5ª. OLIMPÍADA DE MAIO

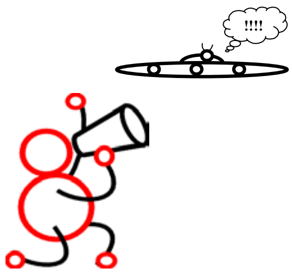
Clasificação por paises

PRIMEIRO NÍVEL

País	Pontuação
Brasil	286
Argentina	272
Espanha	206
México	168
Peru	157
Colombia	154
Cuba	152
Costa Rica	143
Uruguai	142
Chile	121
Bolívia	118
Venezuela	95
Equador	55

SEGUNDO NÍVEL

País	Pontuação
Brasil	405
Peru	341
Argentina	264
Cuba	219
Colombia	188
México	175
Espanha	136
Uruguai	125
Chile	123
Bolívia	108
Costa Rica	57
Venezuela	57
Equador	22



Você sabia... Que o maior número primo conhecido é $2^{6972593}-1$, que tem 2.098.960 dígitos e foi descoberto em 1/6/99 por Nayan Hafratwala, um participante do GIMPS, um projeto cooperativo para procurar primos de mersenne?

Consulte na Internet a página
Http://www.mersenne.org/prime.htm

10ª. OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL

Problemas e Soluções

A 10ª. Olimpíada de Matemática do Cone Sul foi realizada na cidade de Córdoba, Argentina no período de 17 a 24 de maio de 1999. Dela participaram alunos de até 15 anos dos seguintes países: Argentina, Brasil, Bolívia, Chile, Paraguai, Peru e Uruguai.

A equipe brasileira foi selecionada através de provas realizadas em março e maio deste ano e foi liderada pelos professores Florêncio Ferreira Guimarães Filho da UFES, e Antônio Caminha Muniz Neto, da UFCE.

O Resultado da Equipe Brasileira

BRA 1	**Daniel Massaki Yamamoto**	**BRONZE**
BRA 2	**Daniel Pinheiro Sobreira**	**BRONZE**
BRA 3	**Fabrício Siqueira Benevides**	**PRATA**
BRA 4	**Humberto Silva Naves**	**PRATA**

Primeiro Dia

Duração da prova: 4 horas

PROBLEMA 1

Achar o menor inteiro positivo n tal que as 73 frações

$$\frac{19}{n+21}, \frac{20}{n+22}, \frac{21}{n+23}, \ldots\ldots\ldots, \frac{91}{n+93}$$

sejam todas irredutíveis.

SOLUÇÃO

A fração $\frac{a}{b}$ é irredutível se e só se $\frac{a}{b-a}$ é irredutível (se a e b tem um fator comum, então a e $b-a$ têm um fator comum, e reciprocamente).

O problema se transforma em achar o menor valor de n tais que as frações

$$\frac{19}{n+2}, \frac{20}{n+2}, \ldots, \frac{91}{n+2}$$

sejam todas irredutíveis.

Se $n + 2$ é primo, maior que 91, todas as frações são irredutíveis. Assim, um valor possível de n é 95. Verifiquemos que é o menor possível.

Se $n + 2 < 97$ e $n + 2$ é par (n é par) há frações redutíveis, por exemplo $\frac{20}{n+2}$.

Se $19 \leq n + 2 \leq 91$, obviamente há uma fração redutível.
Se $n + 2 < 19$, então $n + 2$ tem um múltiplo entre 19 e 91, e portanto, há uma fração redutível.

Se $n + 2 = 93 = 3 \,.\, 31$, então $\frac{31}{n+2}$ é redutível.

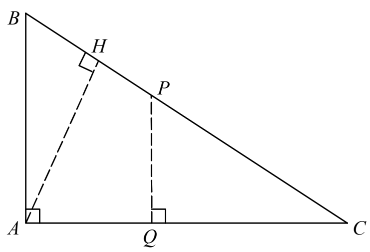
Se $n + 2 = 95 = 5 \,.\, 19$, então $\frac{19}{n+2}$ é redutível.

Então, o valor mínimo de $n + 2$ é 97, que corresponde a $n = 95$.

PROBLEMA 2

Seja ABC um triângulo retângulo em A. Construir o ponto P sobre a hipotenusa BC, tal que se Q for o pé da perpendicular traçada desde P ao cateto AC, então a área do quadrado de lado PQ é igual à área do retângulo de lados iguais a PB e PC. Mostrar os passos da construção.

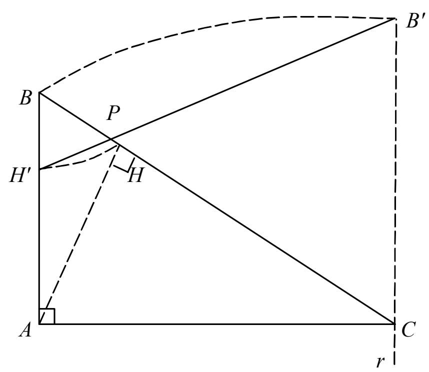
SOLUÇÃO



$P \in \overline{BC}$ satisfaz as condições do enunciado se e só se $\overline{PQ}^2 = \overline{PB} \cdot \overline{PC} (*)$. Como $\Delta PQC \cong \Delta BAC$, vem que $\frac{\overline{PQ}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$. Daí, $\overline{PQ} = \overline{PC} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$, e segue de (*) que $\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}^2}$. Sendo H o pé da altura relativa a $\overline{BC}$, temos $\overline{BH} \cdot \overline{BC} = \overline{AB}^2$, donde

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BH}}.$$

Temos então a seguinte construção:



i) Traçe, por C, a reta r tal que r $r \perp \overleftrightarrow{AC}$.

ii) Marque em r o ponto B' tal que $\overline{B'C} = \overline{BC}$ e B, B' estejam num mesmo semi-plano dos determinados por $\overleftrightarrow{BC}$.

iii) Trace a altura AH relativa à hipotenusa BC.

iv) Marque $H' \in AB$ tal que $BH' = BH$.

v) $BC \cap B'H' = \{P\}$

PROBLEMA 3

Há 1999 bolinhas em uma reta; algumas são vermelhas e as demais azuis (poderiam ser todas vermelhas ou todas azuis). Debaixo de cada bolinha escrevemos o número igual à soma da quantidade de bolinhas vermelhas à direita dela mais a quantidade de bolinhas azuis à esquerda dela. Se, na sequência de números assim obtida, houver exatamente três números que aparecem uma quantidade ímpar de vezes, quais podem ser estes três números?

SOLUÇÃO

Se as 1999 bolinhas são de uma mesma cor, a sucessão de números é crescente ou decrescente. Cada número aparece uma vez só e há 1999 (portanto, não há exatamente 3 números que se repetem um número ímpar de vezes (1 é ímpar). Logo, há bolinhas das duas cores.

Dada uma distribuição das bolinhas que tem em certa posição uma bolinha azul A e na posição seguinte uma bolinha vermelha R, se há a bolinhas azuis à esquerda de A e r bolinhas vermelhas à sua direita, então há $a + 1$ bolinhas azuis à esquerda de R e $r - 1$ bolinhas vermelhas à sua direita. O número escrito embaixo de A é $n = a + r$ e o número escrito embaixo de R é $a + 1 + r - 1 = n$.

Se trocamos de lugar A e R, e não mexemos em nenhuma outra bolinha, na nova distribuição há a bolinhas azuis à esquerda de R e $r - 1$ bolinhas vermelhas à sua direita, enquanto que à esquerda de A há a bolinhas azuis e, à sua direita, $r - 1$ bolinhas vermelhas. Os números escritos embaixo de R e A são $a + r - 1 = n - 1$ e $a + r - 1 = n - 1$. Os números escritos embaixo das outras bolinhas não mudam.

Então, depois da troca, o número n se repete duas vezes menos e o número $n - 1$ se repete duas vezes mais. Os números que se repetem uma quantidade ímpar de vezes serão os mesmos em ambas configurações.

Portanto, basta estudar a configuração na qual todas as bolinhas vermelhas são consecutivas, a partir da primeira, e todas as azuis são consecutivas, a partir da última vermelha.

Sejam α, β, as quantidades de bolinhas vermelhas e azuis, respectivamente; então $\alpha + \beta = 1999$. Embaixo da primeira bolinha (é vermelha) está o número $\alpha - 1$, na seguinte, $\alpha - 2$, depois $\alpha - 3$, e assim por diante, até ter 0 na última bolinha vermelha (na posição α). Então, embaixo da primeira bolinha azul há 0, na segunda 1 e assim por diante, até a última, que tem $\beta - 1$ embaixo.

Se $\alpha < \beta$, os números $0, 1, 2, \ldots, \alpha - 1$ aparecem duas vezes (quantidade par) e os números $\alpha, \alpha + 1, \alpha + 2, \ldots, \beta - 1$ aparecem uma vez (quantidade ímpar). Se há exatamente 3 números que aparecem uma quantidade ímpar de vezes, estes são α, $\alpha + 1$ e $\alpha + 2 = \beta - 1$. Portanto, $\alpha + \beta = 2\alpha + 3$, donde $\alpha = 998$, e os três números que se repetem uma quantidade ímpar de vezes são 998, 999 e 1000.

Se $\alpha > \beta$, os três números que aparecem uma quantidade ímpar de vezes são β, $\beta + 1$ e $\beta + 2 = \alpha - 1$, donde $\alpha + \beta = 2\beta + 3$ e os tres números são, novamente, 998, 999 e 1000.

Segundo Dia

Duração da prova 4 horas.

PROBLEMA 4

Seja A um número de seis algarismos, três dos quais estão coloridos e são iguais a 1, 2 e 4.

Demonstrar que é sempre possível obter um número que é múltiplo de 7, efetuando uma só das seguintes operações: ou suprimir os três algarismos coloridos, ou escrever todos os algarismos de A em alguma ordem.

SOLUÇÃO

Provaremos o seguinte resultado mais geral: Seja A um número de mais de 3 algarismos, três dos quais são 1, 2, 4. Prove que é sempre possível permutarmos os algarismos de A de modo que o número resultante seja um múltiplo de 7.

Prova: Seja $B = (a_k...a_1)_{10}$, $k \geq 1$, o número obtido a partir de A ao suprimirmos uma ocorrência de cada um dos algarismos 1, 2, 4 e C o número que queremos obter a partir de A.

i) $B = 7$: tome $C = 2471$

ii) $B = \underbrace{7......7}_{k>1}$: tome $C = \underbrace{7...7247}_{k-1}1$. Analogamente tratamos o caso em que só há algarismos 0 e 7 em B.
Suponhamos, de agora em diante, que nem todos os algarismos de B sejam iguais a 7 ou zero.

iii) B não é equivalente a 0 (mod 7):
Como {0, 124, 142, 214, 241, 412, 421} é um sistema completo de restos, módulo 7, (isto é, esses números, quando divididos por 7 deixam todos os restos possíveis: 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6) obtemos C justapondo, à direita de B, uma permutação conveniente de 124.

iv) $B \equiv 0$ ($mod.$ 7):
Se $a_1 \neq 7,0$ então $B' = (a_k...a_2\ 0\ a_1)_{10}$ não é múltiplo de 7, pois $10B - B' = 9a_1$. Como {0, 1024, 1042, 2014, 2041, 4012, 4021} também é um sistema completo de restos, módulo 7, obtemos C como em (iii) (isto é, somando $100B'$ a um dos seis números 1024,…,4021).

PROBLEMA 5

É dado um quadrado de lado 1. Demonstrar que, para cada conjunto finito de pontos no bordo do quadrado, é possível achar um vértice do quadrado com a seguinte propriedade: a média aritmética dos quadrados das distâncias de tal vértice aos pontos do conjunto é maior ou igual a $\frac{3}{4}$.

SOLUÇÃO

Sejam $A_1A_2A_3A_4$ o quadrado e $X_1, X_2, \ldots, X_n$ os pontos do perímetro. Devemos provar que uma das quatro somas $\overline{A_iX_1}^2 + \overline{A_iX_2}^2 + \ldots + \overline{A_iX_n}^2, i = 1, 2, 3, 4,$ é maior ou igual que $\frac{3n}{4}$.

Somamos entre si estas quatro somas

$$(\overline{A_1X_1}^2 + \overline{A_1X_2}^2 + \ldots + \overline{A_1X_n}^2) + (\overline{A_2X_1}^2 + \overline{A_2X_2}^2 + \ldots + \overline{A_2X_n}^2) +$$
$$(\overline{A_3X_1}^2 + \overline{A_3X_2}^2 + \ldots + \overline{A_3X_n}^2) + (\overline{A_4X_1}^2 + \overline{A_4X_2}^2 + \ldots + \overline{A_4X_n}^2)$$

e reagrupamos os somandos em n grupos, um por cada ponto X_i

$$(\overline{A_1X_1}^2 + \overline{A_2X_1}^2 + \overline{A_3X_1}^2 + \overline{A_4X_1}^2) + (\overline{A_1X_2}^2 + \overline{A_2X_2}^2 + \overline{A_3X_2}^2 + \overline{A_4X_2}^2) + \ldots +$$
$$(\overline{A_1X_n}^2 + \overline{A_2X_n}^2 + \overline{A_3X_n}^2 + \overline{A_4X_n}^2).$$

Demostraremos que, se X é um ponto do perímetro do quadrado, então

$$(\overline{A_1X}^2 + \overline{A_2X}^2 + \overline{A_3X}^2 + \overline{A_4X}^2) \geq 3.$$

Sejam x e $1 - x$ as distâncias X aos extremos do lado ao que pertencem. Então as distâncias de X aos outros dois vértices do quadrado são, em alguma ordem, $\sqrt{1+x^2}$ e $\sqrt{1+(1-x)^2}$, e temos

$$\overline{A_1X}^2 + \overline{A_2X}^2 + \overline{A_3X}^2 + \overline{A_4X}^2 = x^2 + (1-x)^2 + (1+x^2) + (1+(1-x)^2) = 4(x^2 - x + 1).$$

Devemos provar que, para todo $x \in [0,1]$,

$4(x^2 - x + 1) \geq 3,$ mas isto equivale a $(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4},$ que é claramente verdadeira.

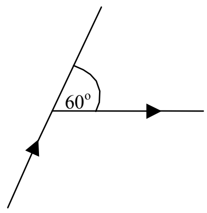
Temos assim que

$$(\overline{A_1X_1}^2 + \overline{A_1X_2}^2 + \ldots + \overline{A_1X_n}^2) + (\overline{A_2X_1}^2 + \overline{A_2X_2}^2 + \ldots + \overline{A_2X_n}^2) +$$
$$+ (\overline{A_3X_1}^2 + \overline{A_3X_2}^2 + \ldots + \overline{A_3X_n}^2) + (\overline{A_4X_1}^2 + \overline{A_4X_2}^2 + \ldots + \overline{A_4X_n}^2) \geq 3n,$$

portanto, um dos quatro somandos é maior ou igual que $\frac{3n}{4}$, c.q.d.

PROBLEMA 6

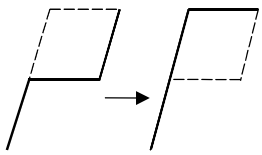
Uma formiga caminha pelo piso de um pátio circular de raio r e avança em linha reta, mas às vezes se detém. Cada vez que se detém, antes de continuar a caminhar, gira 60° alternando o sentido (se da última vez ela girou 60° para a direita da próxima vez gira 60° para a esquerda, e vice-versa). Achar o maior comprimento possível do caminho percorrido pela formiga. Demonstrar que o comprimento assim obtido é efetivamente, o máximo possível.

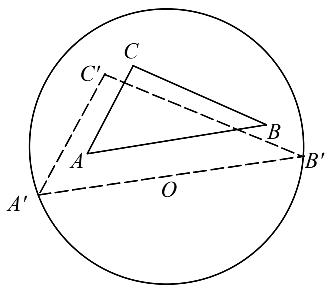


Giro de 60° à direita.

SOLUÇÃO

Podemos supor que a formiga só se detém uma vez, pois, caso se detenha mais vezes podemos substituir seu caminho por outro de mesmo comprimento onde ela só se detém uma vez, como na figura abaixo



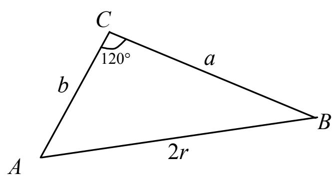


Sejam A e B respectivamente os pontos inicial e final do caminho percorrido pela formiga. Se AB não é diâmetro, traçamos o diâmetro $A'B' \,//\, AB$. Se C' é tal que $A'C'B' \cong ACB$, temos C' dentro do círculo (pois $A'C'B' = 120°$) e $A'C' + C'B' = \dfrac{A'B'}{AB}(AC + CB) > AC + CB.$

Logo, para o caminho ser máximo AB deve ser diâmetro, ou seja, $AB = 2r$

Temos agora que maximizar $AC + CB$ sobre todos os triângulos ACB. tais que que $A\hat{C}B = 120°$ e $AB = 2r$. Seguem duas demonstrações de que $AC + CB$ é máxima quando $AC = CB$:

1ª. demonstração

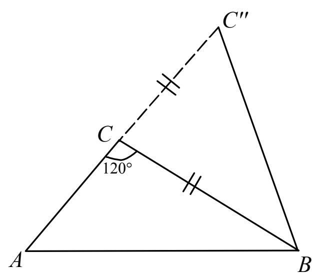


$$a^2+b^2+ab=4r^2 \Rightarrow (a+b)^2-ab=4r^2 \Rightarrow$$

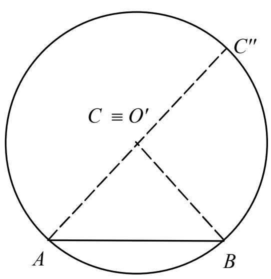
$$(a+b)^2-\frac{(a+b)^2}{4} \le (a+b)^2-ab=4r^2 \Rightarrow$$

$$a+b \le \frac{4r}{\sqrt{3}}, \text{com igualdade se e só se } a=b.$$

2ª. demonstração



Seja C'' sobre AC tal que $C''C=CB$ e $C''\neq A$.
Temos $AC''=AC+CB$ e $AC''B=60°$.



Então devemos determinar a maior corda AC'', com C'' sobre o arco capaz do ângulo $60°$ sobre AB.
Se O' é o centro da circunferência do arco capaz, a corda é o diâmetro por O', Daí, $C \equiv O'$ e $AC = CC'' = CB$

Assim, a resposta do problema é $\dfrac{4r}{\sqrt{3}}$.

40ª. OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

Problemas e Resultados

A 40ª. Olimpíada Internacional de Matemática foi realizada na cidade de Bucharest, Romênia, no período de 10 a 22 de julho de 1999. A equipe brasileira foi liderada pelos professores Nicolau Corção Saldanha, da PUC - Rio, e Carlos Gustavo T. de A. Moreira, do IMPA.

O Resultado da Equipe Brasileira

BRA 1	**Fabrício Siqueira Benevides**	**13 pontos**	**(Medalha de Bronze)**
BRA 2	**Pedro Paulo de Simoni Gouveia**	**12 pontos**	**(Medalha de Bronze)**
BRA 3	**Daniel Massaki Yamamoto**	**08 pontos**	
BRA 4	**Sérgio Tadao Martins**	**14 pontos**	**(Medalha de Bronze)**
BRA 5	**Daniel Nobuo Uno**	**11 pontos**	
BRA 6	**Humberto Silva Naves**	**17 pontos**	**(Medalha de Bronze)**

A prova deste ano foi considerada difícil. Pela primeira vez em muitos anos nenhum participante obteve a pontuação máxima (42 pontos). A maior pontuação obtida este ano foi de 39 pontos.

Primeiro Dia

Duração da prova: 4 horas e 30 minutos

PROBLEMA 1

Determine todos os conjuntos finitos S de pontos do plano com pelo menos três elementos que satisfazem a seguinte condição:

> Para quaisquer dois pontos distintos A e B de S, a mediatriz do segmento AB é um eixo de simetria de S.

PROBLEMA 2

Seja $n \geq 2$ um inteiro fixo.

a) Determinar a menor constante C para a qual a desigualdade

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C\Big(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i\Big)^4$$

é válida para quaisquer números reais $x_1, \ldots, x_n \geq 0$.

b) Para esta constante C, determine quando ocorre a igualdade.

PROBLEMA 3

Considere um tabuleiro quadrado $n \times n$, onde n é um inteiro positivo par fixo. O tabuleiro está dividido em n^2 quadrados unitários. Dizemos que dois quadrados distintos do tabuleiro são *adjacentes* se eles têm um lado comum.

Marcam-se N quadrados unitários do tabuleiro de tal forma que qualquer quadrado (marcado ou não) é adjacente a pelo menos um quadrado marcado.

Determine o menor valor possível para N.

Segundo Dia

Duração da prova: 4 horas e 30 minutos

PROBLEMA 4

Determine todos os pares (n, p) de inteiros estritamente positivos tais que

- p é primo,
- $n \le 2p$, e
- $(p-1)^n + 1$ é divisível por n^{p-1}.

PROBLEMA 5

Duas circunferências Γ_1 e Γ_2 estão contidas no interior de uma circunferência Γ e são tangentes a Γ em pontos distintos M e N, respectivamente. A circunferência Γ_1 passa pelo centro de Γ_2. A reta que passa pelos dois pontos de interseção de Γ_1 e Γ_2 intersecta Γ em A e B. As retas MA e MB intersectam Γ_1 respectivamente em C e D.

Prove que CD é tangente a Γ_2.

PROBLEMA 6

Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + x\,f(y) + f(x) - 1$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

ADEDANHA OU "DE COMO OS DEUSES MATEMÁTICOS TROUXERAM A PAZ AO MUNDO"

Pablo Emanuel - IMPA

♦ Nível Iniciante

Diz a lenda que, há muitos milênios, o mundo vivia em guerra constante, pois as pessoas não sabiam como resolver as suas discordâncias, a não ser pela força bruta. Um dia, os deuses (que são exímios matemáticos), para resolver esta situação, enviaram um mensageiro à Terra, com a missão de ensinar os homens a resolverem as suas disputas. O anjo se dirigiu então aos homens, dizendo:

- Quando dois entre vós precisarem chegar a um acordo, que se faça como vos digo: que um escolha *par* e o outro escolha *ímpar*, então que ambos mostrem ao mesmo tempo a mão exibindo uma certa quantidade de dedos. Serão então somadas estas quantidades. Se a soma for um número par declara-se vencedor o jogador que escolheu *par* e, caso contrário, declara-se vencedor aquele que escolheu *ímpar*.

Os homens ficaram maravilhados com a sabedoria dos deuses e, deste dia em diante, houve um grande período de paz, pois todas as questões eram resolvidas com o jogo que eles haviam aprendido dos deuses.

Um dia, porém, esta paz foi abalada. Três reis disputavam um pedaço de terra, que ficava exatamente na divisa entre os três países. Eles estavam prontos a utilizar o jogo divino do par-ou-ímpar, mas o rei que sabia mais matemática entre os três se levantou e disse:

- Caros colegas, nós todos sabemos que um número só pode ser par ou ímpar, não existindo uma terceira opção. Como somos três, algum de nós não vai ter opção alguma.

Este era realmente um problema muito sério. Para resolvê-lo, foi chamado o melhor matemático da Terra na época, chamado Zerinhoum. Ele pensou durante várias semanas em como resolver o problema dos reis, e finalmente chegou a uma solução:

- Majestades, encontrei a solução para o vosso problema. Ao mesmo tempo, vós estendereis vossas mãos, mantendo-as ou com a palma para cima ou com a palma para baixo. Aquele dentre vós que tiver a mão em posição diferente dos demais ganha a disputa.

- E se todos nós tivermos as palmas das mãos viradas para o mesmo lado? -indagaram os reis.

- Neste caso, majestades, vós jogareis novamente, até que algum entre vós vença.

Como a disputa era muito urgente, os reis aceitaram a sugestão do eminente matemático. Houve mais um período de paz, desta vez muito mais curto. Em pouco tempo, as pessoas perceberam que o jogo de Zerinhoum podia se alongar indefinidamente, e que era possível se fazer alianças para prejudicar adversários políticos.

Então as pessoas rezaram aos deuses, pedindo um novo jogo, que trouxesse de novo a paz à Terra. Os deuses então enviaram novamente um mensageiro. Quando ele chegou, os homens lhe cercaram dizendo:

- Mensageiro dos deuses, atendeste as nossas preces. Vivíamos em guerra, e os deuses nos enviaram o sagrado jogo do par-ou-ímpar, que nos trouxe a paz. Mas este jogo só podia ser jogado por dois jogadores, e as trevas se abateram de novo sobre nós. Então um grande homem nos ensinou um novo jogo, que chamamos Zerinhoum em sua homenagem. Mas este jogo tinha problemas, e a guerra voltou a nos assolar. Por favor, ó grande sábio, que vem em nome dos deuses, ensina-nos um novo jogo, que possa nos trazer de volta nossa paz.

E o anjo assim respondeu:

- Eu vos ensinarei um novo jogo. Zerinhoum era um grande matemático, mas não conhecia os segredos dos deuses. Eu vos revelarei estes segredos.

Para isto, o melhor é começar pelo antigo jogo do par-ou-ímpar. Como se decide se um número é par ou é ímpar? Basta dividi-lo por 2. Se o resto for igual a 0, o número será par, se for igual a 1, o número será ímpar. Estas são as únicas duas opções, porque o resto sempre é menor do que o dividendo (2). Reparai que se dividirmos o número por 3, passam a existir 3 opções para o resto, pois ele pode ser 0, 1 ou 2. Na divisão por 4, existem 4 restos possíveis (0, 1, 2 e 3). Em geral, quando dividimos um número por n , existem n restos possíveis (0, 1, 2, …, $n-2$ e $n-1$).

E o que isto tem a ver com o jogo? Tudo, eu vos digo. Se n pessoas estiverem em uma disputa, vós fareis como eu vos digo: As pessoas escolherão, cada uma, um número entre 0 e $n-1$ diferente. Depois, ao mesmo tempo, elas mostrarão as mãos, exibindo uma quantidade qualquer de dedos. As quantidades serão somadas, e o número resultante será dividido por n. A pessoa que escolheu o resto desta divisão será a vencedora.

Esta é a forma que os deuses jogam. Mas vós da Terra sois muito desorganizados para poder escolher tantos números de forma tranqüila. Portanto, eu vos ensinarei uma forma alternativa de jogar este jogo. Vós vos arrumareis em um círculo. Uma pessoa será designada a contar. Então vós gritareis a palavra mágica "Adedanha" e todos mostrarão as mãos. Os resultados serão somados, e aquele que havia sido designado fará o seguinte procedimento: Em primeiro lugar falará "Um", e apontará para o céu, para que nunca vos esqueçais de que foram os deuses que vos ensinaram este jogo. Então apontará para si mesmo e falará "Dois". Depois apontará para o jogador à sua esquerda e falará "Três", e depois seguirá apontando para o jogador à esquerda deste e assim por diante, sempre acrescentando um ao número que havia falado anteriormente, até chegar à soma que havia sido calculada. O jogador que estiver sendo apontado neste momento será o vencedor. Se a soma for 1, o jogador que estiver à direita do que estiver contando será declarado vencedor. Se for 0, será o que estiver à direita deste.

Os homens entenderam as determinações do mensageiro, mas ainda não entendiam porque o segundo jogo era equivalente ao primeiro. O anjo então lhes explicou:

- A pessoa que está contando vai apontar para si mesma quando estiver falando "2". Depois vai dar uma volta completa no círculo e vai apontar para si mesma novamente quando estiver no "$2 + n$", e novamente no "$2 + 2n$". Ou seja, ela vai estar apontando para si mesma se e somente se estiver falando um número cujo resto na divisão por n seja 2. Da mesma forma, vai estar apontando para o jogador à sua esquerda se e somente se estiver falando um número que deixa resto 3 ao ser dividido por n. E assim por diante, de forma que cada jogador terá associado a si um número entre 0 e $n - 1$ tal que ele é o vencedor se e somente se o resultado da soma deixa aquele resto quando dividido por n.

Os homens estavam maravilhados com a explicação do mensageiro, mas um sábio ancião levantou uma questão:

- Ó, mensageiro divino, sem dúvida és sábio e sagaz. No entanto, uma dúvida me corrói o espírito. Tendo cada jogador 10 dedos, esta soma pode atingir números muito elevados, fazendo com que o responsável pela contagem passe um tempo enorme falando e apontando até que se descubra o vencedor.

- Tens toda a razão, sábio homem. Mas em verdade vos digo que é tolice que um jogador exiba uma quantidade de dedos maior ou igual à quantidade de jogadores. Com efeito, suponde que um jogador coloque um número maior ou igual a n. Os primeiros n dedos só vão ter o efeito de fazer com que a contagem dê uma volta completa no círculo, sem alterar em nada quem será o vencedor. Portanto, ele pode subtrair n da sua quantidade sem que isto altere o resultado. Se o número persistir maior ou igual a n, basta voltar a subtrair, até que o número fique entre 0 e $n - 1$.

- Isto de fato diminui sobremaneira o esforço requerido- replicou o ancião. Mas ainda assim o resultado pode chegar a $n(n - 1)$, que ainda é bastante grande.

- És de fato perspicaz, meu nobre homem. Mas não penseis que a sabedoria dos deuses possui limite. O mesmo processo que foi aplicado a cada número individualmente pode ser aplicado à soma. Por exemplo, considerai um jogo com 4 jogadores. Suponde que um dos jogadores exibe 3 dedos e outro exibe 2 dedos. Por que considerar a sua soma como sendo 5, se o efeito de somar 4 é apenas fazer com que o responsável pela contagem dê uma volta a mais? Em vez disto, é muito mais sensato considerar a sua soma como sendo $5 - 4 = 1$. Mais geralmente, considere um jogo com n jogadores. Em primeiro lugar diminui-se n dos valores jogados por cada um, de forma que todos eles estejam entre 0 e $n - 1$ (se todos os jogadores dessem ouvidos às palavras dos deuses, não jogariam além destes limites). Depois procede-se a soma, da seguinte forma. Soma-se o primeiro valor com o segundo. Caso esta soma seja um valor maior ou igual a n, subtrai-se n do resultado (Sede espertos e sabereis que fazendo isto sempre obtereis um número entre 0 e $n - 1$). Depois, a este resultado, soma-se o terceiro valor, tomando-se o cuidado de se subtrair n caso a soma exceda $n - 1$. Prossegue-se desta forma até que todos os valores tenham sido somados. Se seguistes o meu raciocínio até este ponto, não deveria ser-vos surpresa o fato que o resultado de uma tal operação está sempre entre 0 e $n - 1$, e portanto o jogador responsável pela contagem nunca precisará dar mais de uma volta.

E então todos os habitantes se ajoelharam aos pés do anjo, reconhecendo a sua suprema sabedoria, e o mundo conheceu enfim a paz. Até hoje os homens jogam os jogos de par-ou-ímpar e adedanha da forma como foram ensinados pelos deuses, embora, infelizmente, a maioria tenha se esquecido da lição final e continue se extenuando em uma interminável contagem que dá voltas e mais voltas.

E foi assim que a lenda me foi contada pela minha avó, que ouviu de sua avó, que ouviu de sua própria avó, e assim por diante, até o princípio dos tempos.

Você deve estar achando meio esquisita a maneira de somar que foi ensinada pelos deuses. No entanto, eles a usaram em várias outras coisas que nos são muito familiares. Se você não acredita, responda rápido a estas perguntas:

a) Se uma coisa começa em uma segunda-feira e dura 7 dias, em que dia ela termina? E se durar 14 dias? E se durar 701 dias?

b) Se uma coisa começa às 8 horas da manhã e dura 24 horas, a que horas ela acaba? E se durar 48 horas? E se durar 4804 horas?

c) Se o ponteiro dos minutos de um relógio está apontando 23 minutos, para onde ele estará apontando daqui a 60 minutos? e daqui a 120 minutos? e daqui a 66681 minutos?

Garanto que, se você respondeu à terceira pergunta dos 3 ítens, não contou de um em um (ou então já estamos no terceiro milênio ☺). Você percebeu que os dias da semana se repetem de 7 em 7 dias, que as horas do dia se repetem de 24 em 24 horas e que o ponteiro do relógio volta a apontar para o mesmo ponto de 60 em 60 minutos. Garanto também que você, sem se dar conta, já pensou várias vezes coisas como "5 horas depois das 21 horas são 2 horas da manhã", ou seja, fez a conta $21 + 5 = 2$! E, por incrível que pareça, esta conta está certa!!! Está certa, porque você está pensando a menos de múltiplos de 24 (ou, como preferem os matemáticos, *módulo 24*) , ou seja:

$$21 + 5 = 2 \ (+ \text{ um múltiplo de } 24),$$

ou, como preferem os matemáticos,

$$21 + 5 = 2 \ (mod\ 24).$$

Desta forma, a terceira pergunta do item c) pode ser reescrita como "Quanto é $23 + 66681$ $(mod\ 60)$" . Se você foi esperto(a) o suficiente para responder àquela pergunta, você já deve ter percebido que $66681 = 21$ $(mod\ 60)$, e que $23 + 66681 = 23 + 21$ $(mod\ 60)$, ou seja, $23 + 66681 = 44$ $(mod\ 60)$, logo o ponteiro estará apontando para o minuto 44. Só para ver se você entendeu até agora, preencha estas lacunas:

$2 + 2 = 1$ (*mod* __)
$2 +$ __ $= 0$ (*mod* 17)
$26 = 3$ (*mod* __)

Não se esqueça que a expressão "*mod n*" é só uma forma abreviada de "+ um múltiplo de *n*". Lembrando-se disto, veja quantas coisas você sabia, mas não sabia que sabia:

$3 \times 3 = 1$ (*mod* 4)
$1 = -1$ (*mod* 2)
$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 1$ (*mod* 5)
$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 1$ (*mod* 5)

(esta talvez você não saiba, mas $n \times n \times n \times n = 1$ (*mod* 5), sempre que n não é múltiplo de 5. Você pode ver isto e muito mais no artigo do professor Carlos Gustavo Moreira, na EUREKA! Nº. 2. Pergunta: se n é múltiplo de 5, quanto é $n \times n \times n \times n$ (*mod* 5)?)

Agora que você já sabe o segredo dos deuses matemáticos, já pode jogar adedanha da forma original, como os deuses a conceberam, e manter a paz no mundo sem fazer esforço.

QUADRILÁTEROS E TRIÂNGULOS

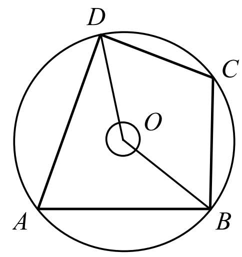
Marcelo Mendes

♦ Nível Intermediário

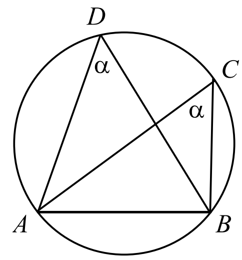
Apresentamos a seguir alguns resultados que servem de ferramenta para resolução de problemas de geometria elementar envolvendo quadriláteros e triângulos, bastante freqüentes em problemas de olimpíada.

QUADRILÁTEROS INSCRITÍVEIS

Os ângulos opostos de um quadrilátero inscritível são suplementares. Reciprocamente, se os ângulos opostos de um quadrilátero são suplementares, então esse quadrilátero é inscritível (cíclico).



Além disso, se ocorrer uma situação onde dois ângulos iguais "olham" para um mesmo segmento, então os extremos desse segmento e os vértices dos dois ângulos formam um quadrilátero inscritível.



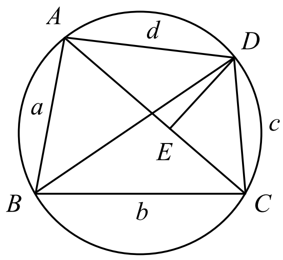
Exemplo: Seja AB o diâmetro de um semicírculo. Um ponto M é marcado no semicírculo e um ponto K é marcado sobre AB. Um círculo com o centro P passa por A, M, K e um círculo com centro Q passa por M, K, B. Prove que M, K, P, Q pertencem a um mesmo círculo.

Solução: No círculo circunscrito de AMK, $\angle MPK = 2\angle MAK$; e no círculo circunscrito de BMK, $\angle MQK = 2\angle MBK$. Como AB é diâmetro do semicírculo, $\angle AMB = 90^o$ e $\angle MAK+\angle MBK = 90^o$. Daí, $\angle MPK+\angle MQK = 180^o$ e $MPKQ$ é inscritível.

TEOREMA DE PTOLOMEU

Se $ABCD$ é um quadrilátero inscritível de diagonais AC e BD, então:

$$AB \times CD + AD \times BC = AC \times BD.$$



Prova: Seja $x = BD$ e $y = AC$ e a, b, c, d, os comprimentos dos lados. Construa $\angle CDE = \angle ABD$, $E \in AC$. Daí, $\Delta CDE \sim \Delta ADB$ e $\Delta ADE \sim \Delta BCD$, dando, respectivamente, $EC{\cdot}x = ac$ e $AE{\cdot}x = bd$. Somando essas duas últimas equações, temos $xy = ac + bd$, como queríamos provar ❑

Há também uma extensão para esse teorema que vale para quadriláteros não inscritíveis: $AB \times CD + AD \times BC > AC \times BD$, isto é, numa situação geral vale $AB \times CD + AD \times BC \geq AC \times BD$.

Exemplo: Prove que, se $ABCDEFG$ é um heptágono regular convexo, então:

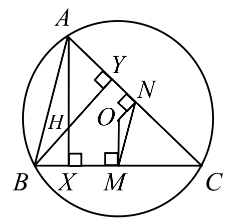
$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

Aplicando o Teorema de Ptolomeu no quadrilátero inscritível $ACDE$, onde

$CD = DE = a = AB$, $AC = CE = b$ e $AD = AE = c$, temos $bc = ac + ab$. Dividindo essa última equação por abc, segue o resultado.

A RELAÇÃO ENTRE A DISTÂNCIA DO ORTOCENTRO A UM VÉRTICE E DO CIRCUNCENTRO AO LADO OPOSTO

Sejam H e O respectivamente o ortocentro e o circuncentro, do ΔABC e M, o ponto médio do lado BC. Então $AH = 2\cdot OM$.



Prova: Sejam AX e BY alturas e N, o ponto médio de AC. Como MN é base média, $MN // AB$ e $MN = ½AB$. Daí, $\Delta ABH \sim \Delta OMN$ pois têm lados paralelos entre si (e razão 2:1). Portanto, $AH = 2\cdot OM$ ❑

Exemplo: Prove que o ortocentro, o baricentro e o circuncentro de um triângulo qualquer são colineares. **(*Reta de Euler*)**

Seja G a interseção de AM e HO (na figura acima). Então, $\Delta AHG \sim \Delta GOM$ na razão 2:1. Daí, $AG = 2\cdot GM$. Portanto, G é o baricentro e pertence à reta HO.

PROBLEMAS

1. Seja P um ponto sobre o menor arco AC da circunferência circunscrita a um triângulo equilátero ABC. Calcule a medida do ângulo $\angle APC$.

2. Prove que um trapézio é inscritível se, e somente se, ele for isósceles (lados não paralelos iguais).

3. Sejam AX e BY alturas de um triângulo isósceles ABC ($AC = BC$) de ortocentro H. Prove que $2\cdot HX\cdot XC = XY\cdot HC$.

4. Seja $ABCD$ um losango inscritível de lado 1 e P, um ponto sobre o menor arco CD. Prove que $PD^2 + PC \cdot PA = 1$.

5. Seja P um ponto sobre o menor arco AC da circunferência circunscrita a um triângulo equilátero ABC. Prove que $PB = PA + PC$.

6. Seja H o ortocentro de um triângulo ABC e P, o ponto diametralmente oposto a B na circunferência circunscrita a ABC. Prove que $AHCP$ é um paralelogramo.

7. $ABCD$ é um paralelogramo. H é o ortocentro do ΔABC e O, o circuncentro do ΔACD. Prove que H, O, D são colineares.

8. Seja $A_1A_2\ldots A_n$ um polígono regular de n lados. Se $\dfrac{1}{A_1A_2} = \dfrac{1}{A_1A_3} + \dfrac{1}{A_1A_4}$, calcule n.

9. Sejam M, N, P os pontos médios dos lados de um ΔABC acutângulo de circuncentro O. Prolongue MO, NO, PO, a partir de O, até X, Y, Z, respectivamente, tais que $MX = 2 \cdot OM, NY = 2 \cdot ON, PZ = 2 \cdot OP.$ Prove que ΔXYZ é semelhante ao ΔABC.

10. Sejam M, N, P os pontos médios dos lados de um ΔABC acutângulo de circuncentro O. Prolongue MO, NO, PO, a partir de O, até X, Y, Z, respectivamente, tais que MX, NY, PZ tenham comprimentos respectivamente iguais às metades das alturas do triângulo a partir dos vértices A, B, C. Prove que ΔXYZ é semelhante ao triângulo órtico de ABC (triângulo formado pelos pés das alturas do ΔABC).

O PRINCÍPIO DAS GAVETAS

Paulo Cezar Pinto Carvalho - IMPA

♦ Nível Intermediário

Muitos problemas atraentes de matemática elementar exploram relações entre conjuntos finitos, expressas em linguagem coloquial. Parte de sua atração vem justamente do fato de que podem ser formulados e, muitas vezes, resolvidos sem recorrer a fórmulas ou a técnicas complicadas. Vejamos um exemplo simples.

Exemplo 1. Qual é o número mínimo de pessoas que devemos reunir para que tenhamos certeza de que entre elas há duas que fazem aniversário no mesmo mês?

Solução: A resposta é 13. Se houvesse apenas 12 pessoas, seria possível que cada uma delas fizesse aniversário em um mês diferente. Com 13 pessoas, há , obrigatoriamente, pelo menos um mês com mais de um aniversário (se houvesse, no máximo, um aniversário por mês, o número de pessoas presentes seria, no máximo, 12).

O argumento empregado acima é conhecido como *Princípio das Gavetas de Dirichlet* ou *Princípio das Casas do Pombos*. Um possível enunciado para este princípio é o seguinte:

Se n objetos forem colocados em, no máximo, $n - 1$ gavetas, então pelo menos uma delas conterá pelo menos dois objetos.

(Uma maneira um pouco mais formal de dizer o mesmo é: *se o número de elementos de um conjunto finito* A *é maior do que o número de elementos de um outro conjunto* B*, então uma função de* A *em* B *não pode ser injetiva*.)

Embora trate-se de um fato extremamente elementar, ele é útil para resolver problemas que, pelo menos à primeira vista, não são imediatos. Para aplicá-lo, devemos identificar, na situação dada, quem faz o papel dos objetos e quem faz o papel das gavetas.

Exemplo 2. Uma prova de concurso possui 10 questões de múltipla escolha, com cinco alternativas cada. Qual é o menor número de candidatos para o qual podemos garantir que pelo menos dois deles deram exatamente as mesmas respostas para todas as questões?

Solução: Neste caso, os objetos são os alunos e as gavetas são as possíveis seqüências de respostas . Como cada questão pode ser respondida de 5 modos, a prova pode ser preenchida de $5 \times 5 \times 5 \times \ldots 5 = 5^{10} = 9\ 765\ 625$ modos. Logo, só se pode ter a certeza de que dois candidatos fornecem exatamente as mesmas respostas se houver pelo menos 9 765 626 candidatos.

Exemplo 3. Em uma reuniao há n pessoas. Mostre que existem duas pessoas que conhecem exatamente o mesmo número de outros participantes (admitimos que "conhecer"seja uma relação simétrica, ou seja, se a conhece b, então b conhece a).

Solução: Os objetos são as pessoas. As gavetas, naturalmente, são as quantidades de pessoas conhecidas. Temos, no entanto, uma dificuldade: as possíveis quantidades de conhecidos são $0, 1, 2, \ldots, n - 1$. Assim, à primeira vista, temos n gavetas para n objetos, o que nos impede de usar o princípio das gavetas. Note, porém, que as gavetas 0 e $n - 1$ não podem ser usadas simultaneamente: se existir uma pessoa que não conhece nenhum participante, então não pode existir um participante que conheça todos! Assim, uma das gavetas 0 ou $n - 1$ permanece desocupada e os n objetos devem ser, portanto, distribuídos em $n - 1$ gavetas. Portanto, uma delas será ocupada por pelo menos dois objetos, o que mostra que há duas pessoas que conhecem exatamente o mesmo número de participantes.

Nos casos anteriores, foi bastante simples identificar as gavetas. Nem sempre é assim. Os exemplos a seguir ilustram situações em que é necessário "construir" as gavetas a serem usadas.

Exemplo 4: Escolhem-se 5 pontos ao acaso sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que pelo menos um dos segmentos que eles determinam tem comprimento menor ou igual a $\sqrt{2}$.

Solução: Neste caso, está claro que os objetos são os 5 pontos. O ponto chave da resolução está na identificação das gavetas. Devemos subdividir o quadrado dado em 4 partes de modo tal que a distância entre dois pontos situados em uma destas partes nunca seja maior que $\sqrt{2}$. A Fig. 1 mostra como fazê-lo: basta dividi-lo nos quatro quadrados determinados pelas retas que unem os pontos médios dos lados opostos. Em cada uma destas quatro "gavetas", a distância máxima entre dois pontos é igual à sua diagonal, que mede $\sqrt{2}$. Portanto, dados 5 pontos, pelo menos 2 estarão em uma mesma "gaveta" e, assim, determinam um segmento de comprimento menor ou igual a $\sqrt{2}$.

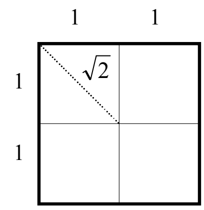


Figura 1

Exemplo 5. Escolha 101 números dentre os elementos do conjunto {1, 2, 3, …, 200}. Mostre que, dentre os números escolhidos, há sempre dois números tais que um divide o outro.

Solução: Antes de mais nada, observe que podemos escolher 100 números do conjunto sem que exista um par onde um número divide o outro: basta tomar os números 101, 102, …, 200. É claro que se acrescentamos mais um número p (obrigatoriamente menor ou igual a 100) a essa coleção, um múltiplo seu já estará lá. Na verdade, podemos garantir que esse múltiplo é da forma $2^r p$ (basta tomar p e multiplicá-lo sucessivamente por 2 até que ele se torne maior do que 100).
Mostraremos que isso ocorre para qualquer conjunto de 101 elementos. Ou seja*, todo subconjunto com* 101 *dos números de* 1 *a* 200 *sempre contém um número e um múltiplo seu obtido através de multiplicação por uma potência de* 2. Note que esta afirmativa é mais **forte** do que a dada do enunciado, mas, como veremos, nos permite estruturar uma demonstração. Isto ocorre com frequência nos problemas envolvendo o Princípio das Gavetas: parte do sucesso nas soluções depende da habilidade em perceber o que deve ser demonstrado. Voltando à solução, observemos que todo inteiro n se escreve, de modo único, na forma $n = 2^r b$, onde r é um inteiro não negativo e b é um número ímpar. Por exemplo, $18 = 2^1.9$, $36 = 2^2.9$ e $125 = 2^0.125$. Para os números de 1 a 200, os valores possíveis de b são os ímpares de 1 a 199, que são 100. Aqui estão nossas gavetas! Já que há 100 valores possíveis de b, qualquer coleção de 101 números de 1 a 200 possui dois números $x = 2^r b$ e $y = 2^s b$ com o mesmo b (isto é, temos dois objetos que serão colocados na mesma gaveta). Se $r < s$, então x divide y; senão, y divide x, o que conclui a demonstração.

O último exemplo requer um argumento um pouco mais sofisticado.

Exemplo 6: Em uma reunião, há 6 pessoas. Mostre que necessariamente existem 3 pessoas que se conhecem mutuamente ou 3 pessoas que não se conhecem mutuamente (como no exemplo 3 admitimos que, se a conhece b, então b conhece a).

Solução: Usaremos o diagrama da Fig. 2 abaixo para ilustrar a situção. Cada pessoa é representada por um vértice do hexágono. Quando duas pessoas se conhecem, ligamos os vértices correspondentes por um segmento contínuo; senão, usamos um segmento tracejado. O que devemos mostrar é que, nesta figura, necessariamente existe um triângulo formado por linhas contínuas ou um triângulo formado por linhas tracejadas.

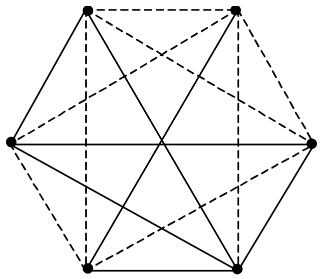


Figura 2

Consideremos os segmentos que incidem em um dos vértices p_1. Como eles são 5, há pelo menos 3 deles que são contínuos ou pelo menos 3 que são tracejados. Admitamos que haja 3 contínuos (o argumento seria análogo no outro caso). Denotemos por p_2, p_3 e p_4 vértices ligados a p_1 por segmentos contínuos (veja a Fig. 3). Se algum dos segmentos p_2p_3, p_2p_4 ou p_3p_4 é contínuo, este segmento, juntamente com os que ligam seus extremos a p_1, formam um triângulo contínuo. Por outro lado, se nenhum deles é contínuo, eles formam um triângulo tracejado, o que completa a demonstração.

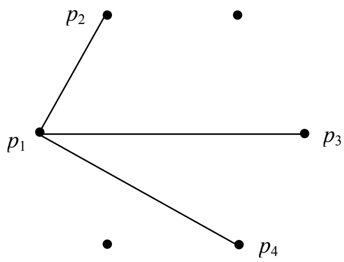


Figura 3

Este exemplo é um caso particular de um teorema mais geral, chamado *de Teorema de Ramsey*. Dado qualquer inteiro $k \geq 3$, existe um inteiro $R(k)$ tal que, em uma reunião de $R(k)$ pessoas, sempre existem k que se conhecem mutuamente ou k que não se conhecem mutuamente. Este resultado normalmente é expresso usando a linguagem de grafos: ao se colorir, com duas cores, as arestas de um grafo completo com $R(k)$ vértices, há sempre um subgrafo completo com k vértices onde todas as arestas têm a mesma cor. (Na realidade, o Teorema de Ramsey aborda situações mais gerais; veja, por exemplo os problemas 8 e 9 abaixo).

Aproveitamos para mencionar a seguinte generalização do princípio das gavetas: Se n objetos são colocados em m gavetas e $n > mk$ (onde m, n e k são números naturais) então alguma gaveta conterá pelo menos $k + 1$ objetos.

Terminamos com uma lista de problemas que podem ser resolvidos com as técnicas aqui ilustradas. As soluções serão publicadas nos próximos números da EUREKA!.

PROBLEMAS

1) Numa gaveta há 6 meias pretas e 6 meias brancas. Qual é o número mínimo de meias a se retirar (no escuro) para garantir que:

a) As meias retiradas contenham um par da mesma cor?
b) As meias retiradas contenham um para de cor branca?

2) Sejam n um natural ímpar e A uma matriz simétrica em que cada linha e coluna seja uma permutação dos inteiros $1, 2,\dots, n$.
Mostre que cada um destes números aparece uma vez na diagonal de A.

3) Mostre que se um subconjunto com $n + 1$ elementos é escolhido do conjunto $\{1, 2, 3,\dots, 2n\}$ então este subconjunto necessariamente contém um par de números primos entre si.

4) Considere 9 pontos de coordenadas inteiras no $\mathbb{R}^3$. Mostre que o ponto médio de um dos segmentos de reta definidos por estes pontos também tem coordenadas inteiras.

5) Mostre que se n é ímpar e $a_1, a_2,\dots,a_n$ é uma permutação de $1, 2,\dots,n$, então o produto $(a_1 - 1)\,(a_2 - 2)\dots(a_n - n)$ é par.

6) Mostre que em qualquer coleção de n inteiros há um subconjunto cuja soma dos elementos é divisível por n.

7) Mostre que em qualquer coleção de n inteiros existe um par cuja soma ou diferença é divisível por n.

8) Mostre que em toda reunião com 10 pessoas existem 3 que se conhecem mutuamente ou 4 que se desconhecem mutuamente. Mostre que, na realidade, o resultado vale mesmo que na reunião só existam 9 pessoas.

9) Dados inteiros a, $b \geq 2$, seja $N\,(a,\, b)$ o menor número para o qual, dado um conjunto com $N\,(a,\, b)$ pessoas, sempre existam a que se conheçam mutuamente ou b que se desconheçam mutuamente (se existir tal número). Os problemas anteriores implicam que $N\,(3, 3) \leq 6$ e $N\,(3, 4) \leq 9$. Mostre que:

a) $N(a, 2) = a$;
b) $N(a, b) = N\,(b, a)$;
c) $N(a, b) \leq N\,(a-1, b) + N\,(a, b-1)$; observe que, em consequência, $N(a, b)$ existe para todo par (a, b).

10) Dois discos A e B são divididos em $2n$ setores iguais. No disco A, n setores são pintados de azul e n de vermelho. No disco B, os setores são pintados de azul ou vermelho de forma completamente arbitrária.
Mostre que A e B podem ser superpostos de modo que pelo menos n setores tenham cores coincidentes.

11) Sejam $A_1, A_2,\ldots, A_{100}$ subconjuntos distintos de um conjunto X satisfazendo a propriedade de que cada A_i possua mais da metade dos elementos de X.
Mostre que existem 6 elementos x_1, x_2,…x_6 de X tais que cada A_i contenha pelo menos um destes 6 elementos.

12) Considere um conjunto A com n elementos. Seja F uma família de subconjuntos de A tal que:

- Quaisquer dois elementos de F têm interseção não vazia.
- Nenhum outro subconjunto de A intersecta todos os elementos de F.

a) Dê exemplo de uma família F satisfazendo a estas condições.
b) Mostre que F possui 2^{n-1} elementos.

13) Uma fábrica produz pelo menos uma unidade de um produto X por dia e no máximo 10 unidades deste produto por semana. Mostre que dado qualquer inteiro positivo n existe um conjunto de dias consecutivos em que a produção total é igual a n [Sugestão: mostre que existe um número k (dependente de n) suficientemente grande para o qual os conjuntos $\{S_1, S_2,\ldots S_k\}$ e $\{S_1 + n, S_2 + n, \ldots, S_k + n\}$ tem pelo menos um elemento comum, onde S_i é a soma das produções nos dias 1, 2, …, i.].

14) Mostre que toda sequência com $n^2 + 1$ elementos possui uma subsequência crescente com $n + 1$ elementos ou uma subsequência decrescente com $n + 1$ elementos.

15) Sejam $mn + 1$ elementos tais que $a_1 < a_2 < \ldots < a_{mn+1}$. Mostre que ou existem $m + 1$ destes números tais que nenhum é divisor de um outro ou existem $n + 1$ deles tais que cada um é divisor do seguinte.

16) Prove que se o conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 1978\}$ é partido em 6 subconjuntos, em algum destes subconjuntos existe um elemento que é igual à soma de dois elementos, não necessariamente distintos, do mesmo subconjunto.

17) Considere um conjunto com $2n$ pontos.

a) Mostre que é possível conectar estes pontos com n^2 segmentos de reta sem que um triângulo de vértices nos pontos dados seja formado.
b) Mostre que se os pontos são conectados por $n^2 + 1$ segmentos de reta, então pelo menos um triângulo é formado.

18) Considere um conjunto de n pontos 1, 2, …, n. Para cada par de pontos é escolhida uma orientação para o segmento de reta que os une. Se o segmento ij é orientado de i para j dizemos que $i \to j$. Mostre que existe uma permutação $a_1, a_2, \ldots a_n$ de 1, 2, …, n tais que $a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_n$.

19) São dados n pontos azuis e n pontos vermelhos no plano. Mostre que é possível formar n pares de pontos (um azul e um vermelho em cada par) de modo que os n segmentos de reta definidos por estes pares não se cruzem.

20) Mostre que dados 5 pontos do plano em posição geral há 4 que formam um quadrilátero convexo.

DESIGUALDADES ELEMENTARES

Antonio Caminha Muniz Neto

♦ Nível Avançado.

Pretendemos neste artigo desenvolver ferramentas básicas a fim de que o leitor se torne apto a resolver uma vasta gama de problemas de competições matemáticas que envolvam desigualdades. Tentamos tornar nossa exposição a mais auto-suficiente possível. Em certas passagens, contudo, algum conhecimento de cálculo é útil, ainda que não imprescindível. Em tais ocasiões indicamos ao leitor a referência [3] como bibliografia auxiliar.

Antes de discutirmos qualquer desigualdade em especial, consideremos um exemplo preliminar.

***Exemplo* 1**: Para todo inteiro positivo n, prove que
$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\ldots+\tfrac{1}{n}\geq\tfrac{1}{2}\left(\log_2 n+1\right).$$

<u>Solução</u> : Veja que, para todo inteiro $k > 1$,

$$\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\ldots+\frac{1}{2^k}>\underbrace{\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+\ldots+\frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}\text{ vezes}}=\frac{1}{2}$$

Portanto, sendo 2^k a maior potência de 2 menor ou igual a n, temos

$$1+\tfrac{1}{2}+\sum_{j=3}^{n}\tfrac{1}{j}\geq 1+\tfrac{1}{2}+\sum_{j=3}^{2^k}\tfrac{1}{j}=1+\tfrac{1}{2}+\sum_{j=2}^{k}\left(\frac{1}{2^{j-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^j}\right)>1+\tfrac{1}{2}+\sum_{j=2}^{k}\tfrac{1}{2}=1+\tfrac{k}{2}$$

Mas $2^k\leq n<2^{k+1}\Rightarrow k\leq\log_2 n<k+1\Rightarrow 1+\frac{k}{2}>\frac{1}{2}\left(\log_2 n+1\right)$, e a desigualdade do enunciado é imediata. ❑

O exemplo acima foi colocado de propósito. Ele chama atenção para o fato de que nem sempre precisamos de algo mais que raciocínio para resolver problemas envolvendo desigualdades. A proposição abaixo mostra um pouco mais sobre como podemos derivar desigualdades interessantes com muito pouca matemática.

Proposição* 1 *(Desigualdade do Rearranjo): Sejam $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ reais positivos dados, e considere a expressão $S = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$, onde $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ é uma reordenação de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Então

$$a_1a_n + a_2a_{n-1} + \ldots + a_na_1 \le S \le a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$$

Prova : Vamos primeiro tornar S a maior possível. Como só há um número finito (n fatorial) de possíveis reordenações $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, há uma delas que torna S máxima. Suponha então que estamos com a reordenação $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ que torna S máxima.

Queremos mostrar que essa reordenação é exatamente $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Para isso, basta mostrarmos que deve ser $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$. Suponha o contrário, i.e., que existam índices $i < j$ tais que $b_i > b_j$. Trocando as posições de b_i e b_j (i.e., pondo b_i ao lado de a_j e b_j ao lado de a_i), S varia de $a_ib_j + a_jb_i - (a_ib_i + a_jb_j) = (a_i - a_j)(b_j - b_i) > 0$, quer dizer, S aumenta. Mas isso contraria o fato de ser a reordenação $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ aquela que torna S máxima. Logo, $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$ e daí $b_i = a_i$ para todo i, donde o maior valor possível de S é $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$.
O raciocínio para minimizar S é análogo. ❑

Passemos agora a nosso principal objetivo, o estudo de desigualdades especiais. A mais importante destas é a dada pela proposição 2 abaixo. Antes, uma definição.

***Definição* 1** : Dados $n > 1$ reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, definimos

i. A *média aritmética* de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ como o número $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$.
ii. A *média geométrica* de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ como o número $\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$.

Proposição* 2 *(Desigualdade Entre as Médias Aritmética e Geométrica) : Dados $n > 1$ reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, sua média aritmética é sempre maior ou igual que a média geométrica, ocorrendo a igualdade se e só se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ forem todos iguais. Em símbolos:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

Prova : Façamos a prova em dois passos:

i. A desigualdade é verdadeira quando *n* for uma potência de 2, ocorrendo a igualdade se e só se todos os números forem iguais.
ii. A desigualdade é verdadeira em geral, e a igualdade ocorre se e só se os números forem todos iguais.

i. Façamos indução sobre $k \geq 1$, sendo $n = 2^k$: Para $k = 1$, temos $\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} \Leftrightarrow a_1 - 2\sqrt{a_1 a_2} + a_2 \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$, o que é verdade. Há igualdade se e só se $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 = 0$, i.e., se e só se $a_1 = a_2$.

Se já provamos que $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$, com igualdade se e só se $a_1 = \ldots = a_n$ para $n = 2^k$, então

$$\frac{(a_1+...+a_n)+(a_{n+1}+...+a_{2n})}{2n} = \frac{1}{2}\left[\frac{a_1+...+a_n}{n} + \frac{a_{n+1}+...+a_{2n}}{n}\right] \geq \frac{\sqrt[n]{a_1...a_n} + \sqrt[n]{a_{n+1}...a_{2n}}}{2} \geq$$
$$\geq \sqrt{\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}\ \sqrt[n]{a_{n+1} \ldots a_{2n}}} = \sqrt[2n]{a_1 \ldots a_n a_{n+1} \ldots a_{2n}}$$

Para haver igualdade, devemos ter igualdade em todas as passagens. Então, deve ser

$$\frac{a_1+...+a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}\ , \quad \frac{a_{n+1}+...+a_{2n}}{n} = \sqrt[n]{a_{n+1} \ldots a_{2n}} \text{ e}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a_1...a_n} + \sqrt[n]{a_{n+1}...a_{2n}}}{2} = \sqrt[2n]{a_1 \ldots a_n a_{n+1} \ldots a_{2n}}$$

Para as duas primeiras igualdades, segue da hipóteses de indução que deve ser

$$a_1 = \ldots = a_n \text{ e } a_{n+1} = \ldots = a_{2n}$$

A última igualdade ocorre se e só se $\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} = \sqrt[n]{a_{n+1} \ldots a_{2n}}$. Estas duas condições juntas implicam que devemos ter $a_1 = \ldots = a_n = a_{n+1} = \ldots = a_{2n}$. É também evidente que se os números forem todos iguais a igualdade ocorre.

ii. Seja agora $n > 1$ um natural qualquer e $a_1, a_2, ..., a_n$ reais positivos. Tome k natural tal que $2^k > n$. Usando a desigualdade entre as médias para os 2^k números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e $2^k - n$ cópias de $a = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$, obtemos

$$\frac{a_1 + ... + a_n + a + ... + a}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{a_1 \ldots a_n a^{2^k - n}} = \sqrt[2^k]{a^n a^{2^k - n}} = \sqrt[2^k]{a^{2^k}} = a,$$

e daí $a_1 + \ldots + a_n + (2^k - n)a \geq 2^k a$, ou ainda $\frac{a_1 + ... + a_n}{n} \geq a = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$, que era a desigualdade desejada.

Para haver igualdade, segue do item *i* que deve ser $a_1 = \ldots = a_n = a = \ldots = a$. Em particular, todos os números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ devem ser iguais. É fácil ver que se esses números forem todos iguais então há igualdade. ❑

***Corolário* 2.1** : Dados $n > 1$ reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, temos

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2,$$

com igualdade se e só se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ forem todos iguais.

Prova : Basta aplicarmos duas vezes a proposição 2 e multiplicarmos os resultados:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \quad \text{e} \quad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \geq n\sqrt[n]{\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n}}$$

❑

***Exemplo* 2** : (*Olimpíada Israelense*) Sejam k e n inteiros positivos, $n > 1$. Prove que

$$\frac{1}{kn} + \frac{1}{kn+1} + \ldots + \frac{1}{kn+n-1} > n\left(\sqrt[n]{\frac{k+1}{k}} - 1\right)$$

Prova : Basta ver que

$$\left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{kn+j}\right) + n = \sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{kn+j} + 1\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{kn+j+1}{kn+j} > n\sqrt[n]{\prod_{j=0}^{n-1} \frac{kn+j+1}{kn+j}} = n\sqrt[n]{\frac{k+1}{k}},$$

onde aplicamos a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica uma vez. Note que, como os números $\frac{kn+j+1}{kn+j}$ são dois a dois distintos, não há igualdade, razão do sinal > acima. ❑

Dentre todas as desigualdades especiais que temos oportunidade de usar em problemas de competições matemáticas, a desigualdade a seguir se constitui, juntamente com a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, num dos dois mais importantes resultados a serem guardados.

Proposição 3 (Desigualdade de Cauchy): Sejam $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ reais dados, não todos nulos ($n > 1$). Então

$$|a_1b_1 + \ldots + a_nb_n| \le \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}\ \sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2}$$

Além disso, teremos a igualdade se e só se os a_i e os b_i forem proporcionais, i.e., se e só se existir um real positivo λ tal que $b_i = \lambda a_i$ para todo i.

Prova : Considere o seguinte trinômio do segundo grau

$$f(x) = (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \ldots + (a_nx - b_n)^2$$

Desenvolvendo os parênteses, chegamos a

$$f(x) = (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$$

Por ser uma soma de quadrados, temos $f(x) \ge 0$ para todo real x, e daí deve ser $\Delta \le 0$, i.e.,

$$4(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \le 4(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$$

Cancelando o fator 4 e extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, chegamos na desigualdade de Cauchy. Examinemos agora a igualdade. Se houver igualdade, quer dizer, se for $\Delta = 0$, então o trinômio tem uma raiz real λ:

$$(a_1\lambda - b_1)^2 + (a_2\lambda - b_2)^2 + \ldots + (a_n\lambda - b_n)^2 = 0$$

Mas aí todos os parênteses devem ser nulos, i.e., $b_i = \lambda a_i$ para todo i. Então, havendo igualdade os a_i e b_i devem ser proporcionais. É evidente que se eles forem proporcionais a igualdade ocorre. ❑

Temos a seguir alguns corolários importantes.

Corolário 3.1 (Desigualdade entre as Médias Quadrática e Aritmética) : Dados reais positivos $a_1, \ldots, a_n$, temos $\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1+a_2+..+a_n}{n}$, com igualdade se e só se $a_1 = \ldots = a_n$.

<u>Prova</u> Fazendo $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1$ na desigualdade de Cauchy, obtemos

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}\ \sqrt{n},$$

com igualdade se e só se existir um real positivo λ tal que $a_i = \lambda$ para todo *i*, quer dizer, se e só se os a_i forem todos iguais. Para obter a desigualdade do enunciado, basta dividir ambos os membros da desigualdade acima por *n*. ❑

***Corolário* 3.2** : Se *n* > 1 é inteiro e $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ são reais positivos, então

$$\left(\frac{a_1}{b_1} + \ldots + \frac{a_n}{b_n}\right)\left(a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n\right) \geq \left(a_1 + \ldots + a_n\right)^2,$$

com igualdade se e só se $b_1 = \ldots = b_n$.

<u>Prova</u> : Faça $x_i = \sqrt{\frac{a_i}{b_i}},\ y_i = \sqrt{a_i b_i}$ e aplique a desigualdade de Cauchy para os números $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$. ❑

***Exemplo* 3** : (*Teste de Seleção da Romênia para IMO*) Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ reais positivos tais que $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x_{n+1}$. Prove que

$$\sqrt{x_1(x_{n+1} - x_1)} + \ldots + \sqrt{x_n(x_{n+1} - x_n)} \leq \sqrt{x_{n+1}(x_{n+1} - x_1) + \ldots + x_{n+1}(x_{n+1} - x_n)}$$

<u>Prova</u> : Para $1 \leq j \leq n$, seja $y_j = x_{n+1} - x_j$. Pela desigualdade de Cauchy temos

$$\sqrt{x_1 y_1} + \ldots + \sqrt{x_n y_n} \leq \sqrt{x_1 + \ldots + x_n}\sqrt{y_1 + \ldots + y_n} =$$

$$= \sqrt{x_{n+1}}\sqrt{(x_{n+1} - x_1) + \ldots + (x_{n+1} - x_n)}$$ ❑

Temos mais duas desigualdades importantes.

Proposição 4 (Chebychev): Sejam $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ reais, com $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ e $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$. Então

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}\right) \le \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{n},$$

com igualdade se e só se $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ ou $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$.

<u>Prova</u> :

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{n} - \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[n\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n\right) - \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)\left(b_1 + b_2 + \ldots + b_n\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \ge 0,$$

já que os a_i, b_i são igualmente ordenados.

Note que a condição do enunciado é suficiente para haver igualdade. Por outro lado, suponha que tenhamos a igualdade. Como $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \ge 0$ para todos *i*, *j*, devemos ter $(a_i - a_j)(b_i - b_j) = 0$ para todos os *i*, *j*. Suponha que existisse um índice *k* com $b_k < b_{k+1}$. Então $b_1 \le \ldots \le b_k < b_{k+1} \le \ldots \le b_n$, e de $(a_i - a_{k+1})(b_i - b_{k+1}) = 0$ segue que $a_i = a_{k+1}$ para $i \le k$. Portanto $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = a_{k+1}$. De $(a_i - a_k)(b_i - b_k) = 0$ e $i > k$ concluímos que $a_{k+1} = \ldots = a_n$. Logo, todos os a_i devem ser iguais. ❑

***Corolário* 4.1** : Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reais positivos e *k* um natural. Então

$$\frac{a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k}{n} \ge \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^k,$$

com igualdade se e só se todos os a_i forem iguais ou $k \in \{0, 1\}$.

Prova : Por indução, o resultado acima é trivialmente verdadeiro para $k = 1$. Suponha $k > 1$ e o resultado válido para $k - 1$. Como ambos os membros da desigualdade acima são invariantes por permutações dos índices 1, 2, ..., n, podemos supor sem perda de generalidade que $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$. Daí, $a_1^{k-1} \le a_2^{k-1} \le \ldots \le a_n^{k-1}$, e da desigualdade de Chebychev obtemos $\frac{a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k}{n} \ge \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)\left(\frac{a_1^{k-1} + a_2^{k-1} + \ldots + a_n^{k-1}}{n}\right)$.

Pela hipótese de indução, vem que $\frac{a_1^{k-1} + a_2^{k-1} + \ldots + a_n^{k-1}}{n} \ge \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^{k-1}$.

Combinando as duas desigualdades acima segue o resultado. A condição de igualdade é óbvia a partir da desigualdade de Chebychev. ❑

Por fim, vejamos algo um pouco mais sofisticado.

Definição 2 : Seja I um intervalo da reta e $f : I \to R$ uma função. A função f é dita

i. *Convexa* se $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$ para todos os x, y em I.

ii. *Côncava* se $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \ge \frac{f(x)+f(y)}{2}$ para todos os x, y em I.

Nas aplicações, quase sempre lidamos com funções contínuas (se você não sabe o que vem a ser uma função contínua, pense na mesma como uma função cujo gráfico *não sofre interrupções ou saltos* ao longo de seu domínio). Se f for contínua a proposição a seguir é geometricamente evidente. A partir de agora, sempre que nos referirmos a uma função estaremos sempre supondo ser seu domínio um intervalo da reta e a função contínua nesse intervalo.

***Proposição* 5** : Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ uma função. Então:

i. f é convexa se e só se, para todos x, y em I e todo $t \in [0, 1]$ tivermos

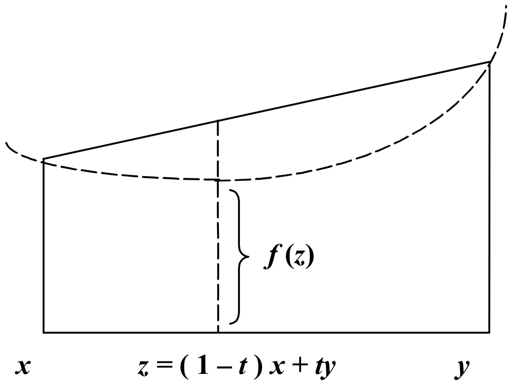
$$f\big((1-t)x + ty\big) \le (1-t)f(x) + tf(y)$$

ii. f é convexa se e só se, para todos x, y em I e todo $t \in [0,1]$ tivermos

$$f\big((1-t)x + ty\big) \ge (1-t)f(x) + tf(y)$$

Façamos o caso em que f é convexa. O outro caso é análogo. Observe que $(1-t)x + ty \in [x, y] \subseteq I$, e que, no trapézio abaixo, $(1-t)f(x) + tf(y)$

é o comprimento da paralela às bases pelo ponto $(1-t)x+ty$



Prova : Suponha primeiro que *f* satisfaz a condição do item *i*. Tomando $t=\frac{1}{2}$ concluímos que *f* é convexa. Reciprocamente, suponha que *f* seja convexa. Dados *x*, *y* em *I*, temos

$$f\left(\frac{x+3y}{4}\right)=f\left(\frac{\frac{x+y}{2}+y}{2}\right)\le\frac{f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f(y)}{2}\le\frac{\frac{f(x)+f(y)}{2}+f(y)}{2}=\frac{1}{4}f(x)+\frac{3}{4}f(y)$$ Trocando *x* por *y* e raciocinando como acima segue que, para

$$t\in\left\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1\right\},$$

$$f((1-t)x+ty)\le(1-t)f(x)+tf(y) \quad (*)$$

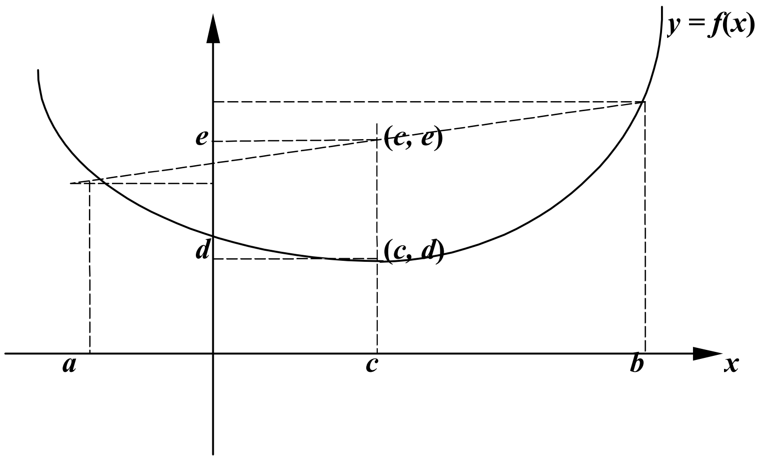
Por indução sobre *k* inteiro positivo podemos concluir de maneira análoga que (*) continua válida para todo *t* da forma $\frac{m}{2^k}$, onde $0\le m\le 2^k$ é inteiro. Como todo real em [0,1] é limite de uma seqüência de números dessa forma, segue que (*) continua válida para todo *t* em [0, 1]. ❑

As afirmações a seguir são agora bastante evidentes, e vão ser nosso principal guia quando quisermos decidir se uma dada função é ou não convexa ou côncava.

i. Se para todos $a < b$ em I o gráfico de f entre as retas $x = a$ e $x = b$ estiver abaixo da reta que passa por $(a, f(a)), (b, f(b))$, então f é convexa, e reciprocamente.

ii. Se para todos $a < b$ em I o gráfico de f entre as retas $x = a$ e $x = b$ estiver acima da reta que passa por $(a, f(a)), (b, f(b))$, então f é côncava, e reciprocamente.

A figura abaixo para se convencer da validez desse resultado no caso em que f é convexa.



Nele, $c = \frac{a+b}{2}$. É evidente que $d = f(c) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ e $e = \frac{f(a)+f(b)}{2}$. Daí, $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$ e f é convexa.

Para nós, a importância dessa discussão sobre funções côncavas e convexas reside na seguinte:

Proposição 6 (Desigualdade de Jensen): Sejam I um intervalo da reta e $f: I \to \mathbb{R}$ uma função. Se $x_1, \ldots, x_n \in I$ e $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$, com $t_1 + \ldots + t_n = 1$, então $t_1x_1 + \ldots + t_nx_n \in I$ e *i.* f convexa $\Rightarrow f\left(t_1x_1+\ldots+t_nx_n\right)\le t_1f\left(x_1\right)+\ldots+t_nf\left(x_n\right)$

ii. f côncava $\Rightarrow f\left(t_1x_1+\ldots+t_nx_n\right)\ge t_1f\left(x_1\right)+\ldots+t_nf\left(x_n\right)$

Prova : Façamos a prova, por indução sobre $n > 1$, para o caso em que f é convexa, sendo o outro caso análogo. O caso $n = 2$ é nossa hipótese. Suponha agora que para um certo $n > 1$ e todos $x_1,\ldots,x_n\in I$ e $t_1,\ldots,t_n\in[0,1]$, com $t_1+\ldots+t_n=1$, tenhamos

$$t_1x_1+\ldots+t_nx_n\in I \quad \text{e} \quad f\left(t_1x_1+\ldots+t_nx_n\right)\le t_1f\left(x_1\right)+\ldots+t_nf\left(x_n\right)$$

Considere agora $x_1,\ldots,x_{n+1}\in I$ e $t_1,\ldots,t_{n+1}\in[0,1]$, com $t_1+\ldots+t_{n+1}=1$. Se $t_{n+1}=1$ então $t_1=\ldots=t_n=0$ e nada há a fazer. Senão, defina

$$y=\frac{t_1x_1+\ldots+t_nx_n}{1-t_{n+1}}=s_1x_1+\ldots+s_nx_n,$$

onde $s_j=\frac{t_j}{1-t_{n+1}}$. Como $s_1+\ldots+s_n=1$, segue da hipótese de indução que $y\in I$. Daí,

$$f\left(t_1x_1+\ldots+t_{n+1}x_{n+1}\right)=f\left(\left(1-t_{n+1}\right)\left(\frac{t_1x_1+\ldots+t_nx_n}{1-t_{n+1}}\right)+t_{n+1}x_{n+1}\right)=$$

$$=f\left(\left(1-t_{n+1}\right)y+t_{n+1}x_{n+1}\right)\le\left(1-t_{n+1}\right)f(y)+t_{n+1}f(x_{n+1}),$$

já que f é convexa. Aplicando a outra metade da hipótese de indução, obtemos

$$f(y)=f\left(s_1x_1+\ldots+s_nx_n\right)\le s_1f\left(x_1\right)+\ldots+s_nf\left(x_n\right)=\frac{t_1}{1-t_{n+1}}f\left(x_1\right)+\ldots+\frac{t_n}{1-t_{n+1}}f\left(x_n\right)$$

Juntando essas duas desigualdades, obtemos a desigualdade de Jensen. ❑
Vejamos agora um exemplo de como aplicar a desigualdade de Jensen.

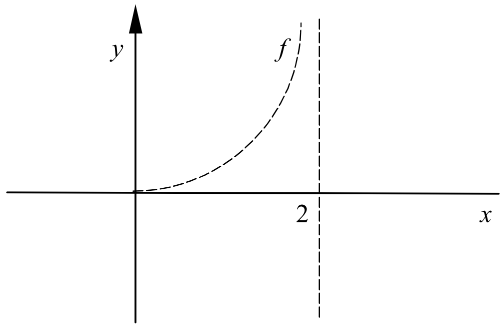
***Exemplo* 5**: (*Olimpíada Balcânica*) Sejam $n > 1$ e $a_1,\ldots,a_n$ reais positivos com soma 1. Para cada *i*, seja $b_i=\sum_{j=1,\,j\ne 1}^{n}a_j$. Prove que

$$\frac{a_1}{1+b_1}+\frac{a_2}{1+b_2}+\ldots+\frac{a_n}{1+b_n}\ge\frac{n}{2n-1}.$$

Prova : Veja que $b_j = 1 + \left(1 - a_j\right) = 2 - a_j$, e então temos de provar que

$$\frac{a_1}{2-a_1} + \frac{a_2}{2-a_2} + \ldots + \frac{a_n}{2-a_n} \geq \frac{n}{2n-1}$$

Afirmamos que a função $f : (-\infty, 2) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x}{2-x}$ é convexa. Para ver isso, basta escrever $f(x) = \frac{2}{2-x} - 1$, e esboçar o gráfico de *f*, como abaixo.



Portanto, temos pela desigualdade de Jensen que

$$\sum_{j=1}^{n} f\left(a_j\right) \geq n\, f\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{2n-1} \quad \square$$

***Exemplo* 6** : Utilizando a função logaritmo natural e a desigualdade de Jensen, vamos dar outra prova da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica.

Prova : Sejam $a_1, \ldots, a_n$ reais positivos. Existem reais $x_1, \ldots, x_n$ tais que $a_j = \ln x_j$ para todo *j*. Como $f(x) = \ln x$ é uma função côncava, vem que

$$\frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n} \leq f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right),$$

ou seja,

$$\ln \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq \ln\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)$$

Como *f* é crescente, chegamos ao resultado desejado. ❑

Vale notar, para quem tem familiaridade com derivadas, que é possível provar que, se f'' existe, então *f* é convexa se e só se $f''(x) \geq 0$ para todo *x* em *I* e *f* é côncava se e só se $f''(x) \leq 0$ para todo *x* em *I*.

Finalizamos este artigo com alguns problemas onde procuramos oferecer oportunidade de exercitar o que foi aprendido no texto, além de desenvolver um pouco mais a teoria. É bom salientar que em alguns deles mais de uma desigualdade pode ser usada.

Problemas onde não precisamos das desigualdades acima, mas de criatividade

1. (*Olimpíada Americana*): Prove que, para todos *a*, *b*, *c* reais positivos, temos

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}$$

2. (*Desigualdade de Abel*): Sejam $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ reais dados ($n > 1$), com $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq 0$. Se *M* e *m* são respectivamente o máximo e o mínimo do conjunto $\{b_1, b_1 + b_2, \ldots, b_1 + \ldots + b_n\}$, prove que

$$ma_1 \leq a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leq Ma_1,$$

com igualdade se e só se $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

3. (*Teste de Seleção de Singapura para IMO*): Prove que, quaisquer que sejam os reais positivos *a, b* e *c*, tem-se

$$c\sqrt{a^2 - ab + b^2} + a\sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq b\sqrt{a^2 + ac + c^2}.$$

4. (*Banco IMO*): Sejam $n > 1$ um inteiro dado. Determine o maior valor possível da soma $\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i + x_j)$ sobre todas as *n*-uplas $x_1, \ldots, x_n$ de reais não negativos cuja soma é 1.

Desigualdade entre as médias aritmética e geométrica

5. (*Torneio das Cidades*) Sejam a, b e c reais positivos dados. Prove que $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{a+b+c}{3}$

6. Dados os reais positivos $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, prove que

$$\sqrt[3]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)} \ge \sqrt[3]{a_1a_2a_3} + \sqrt[3]{b_1b_2b_3}$$

Desigualdades de Chebychev, Jensen e Cauchy

7. (*Olimpíada Turca*) Sejam $n > 1$ inteiro e $x_1, \ldots, x_n$ reais positivos tais que $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$. Determine o valor mínimo de $\frac{x_1^5}{x_2+x_3+\ldots+x_n}+\frac{x_2^5}{x_1+x_3+\ldots+x_n}+\ldots+\frac{x_n^5}{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}$.

8. (*Olimpíada Romena*): Seja h a altura de um tetraedro regular e h_1, h_2, h_3, h_4 as distâncias desde um ponto P em seu interior às faces do tetraedro. Prove que

$$\frac{h-h_1}{h+h_1}+\frac{h-h_2}{h+h_2}+\frac{h-h_3}{h+h_3}+\frac{h-h_4}{h+h_4}\ge\frac{12}{5}$$

9. (*Banco IMO*) : Sejam a, b, c, d reais não negativos tais que $ab+bc+cd+da=1$. Prove que

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}\ge\frac{1}{3}$$

10. Sejam $n > 1$ e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reais positivos cuja soma é 1. Prove que

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\ldots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}}\ge\sqrt{\frac{n}{n-1}}\ge\frac{\sqrt{x_1}+\ldots+\sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}}$$

11. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reais pertencentes ao intervalo [0, 1] e tais que $x_1+x_2+\ldots+x_n=a$, com $0<a<1$. Prove que

$$\frac{1-a}{1+a} \le \frac{1-x_1}{1+x_1}\frac{1-x_2}{1+x_2}\cdots\frac{1-x_n}{1+x_n} \le \left(\frac{n-a}{n+a}\right)^n$$

Outras Desigualdades

12. (*Desigualdade de Bernoulli*): Sejam *n* um inteiro positivo e $x \ge -1$ um real. Prove que $(1+x)^n \ge 1+nx$.

13. (*Desigualdade entre as Médias de Potências*): Sejam $\alpha < \beta$ reais positivos. Então, para todos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reais positivos, vale

$$\left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \le \left(\frac{a_1^\beta + a_2^\beta + \ldots + a_n^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

com igualdade se e só se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ forem todos iguais.

14. (*Desigualdade de Giroux*): Sejam $I_1, \ldots, I_n$ intervalos fechados da reta e considere a função $f : I_1 \times \ldots \times I_n \to \mathbb{R}$ de *n* variáveis, convexa separadamente em relação a cada variável. Então, se $I_j = [a_j, b_j]$, *f* atinge seu valor máximo em um dos 2^n pontos da forma $(c_1, \ldots, c_n)$, com $c_i = a_i$ ou b_i para cada *i*. Prove isto e enuncie um resultado análogo à desigualdade de Giroux para uma função de *n* variáveis *f*, côncava separadamente em relação a cada variável.

15. (*Olimpíada Búlgara*): Sejam $n \ge 2$ um inteiro e $0 \le x_i \le 1$ para $1 \le i \le n$. Prove que

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - (x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1) \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

16. Os três itens a seguir visam derivar uma desigualdade difícil.

i. (*Desigualdade de Young*): Sejam *p* e *q* reais positivos tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Prove que

$$xy \le \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}, \quad \forall\ x, y \ge 0$$

ii. (*Desigualdade de Holder*): Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ reais positivos e p, q reais positivos tais que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Prove que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$$

iii. (*Desigualdade de Minkowsky*): Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ reais positivos e p um real maior que 1. Prove que

$$\sqrt[p]{(a_1+b_1)^p+\ldots+(a_n+b_n)^p} \leq \sqrt[p]{a_1^p+\ldots+a_n^p}+\sqrt[p]{b_1^p+\ldots+b_n^p}$$

Sugestão: Faça $c_i=(a_i+b_i)^{p-1}$ e use o ítem anterior para (a_i) e (c_i) e para (b_i) e (c_i).

Referências:

[1] Shklarsky, D. O., Chentzov, N. N. e Yaglom, I. M. The USSR Olympiad Problem Book. Dover. Toronto, 1993.
[2] Rousseau, C. e Lozansky, E. Winning Solutions. Springer-Verlag, 1996.
[3] Lima, Elon L., Análise Real, vol. 1. IMPA, 1995.

40ª. OLIMPÍADA INTERNACIONAL E 14ª. OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA

Primeiro teste de Seleção

PROBLEMA 1

Determine todos os inteiros positivos $n > 1$ para os quais existem um inteiro positivo k inteiros $x_1, x_2, \ldots x_n$ dois a dois distintos tais que o conjunto

$$\{x_i + x_j;\ 1 \le i < j \le n\}$$

Seja um conjunto de potências distintas de k. Observação: $x_1, x_2, \ldots x_n$ não são necessariamente positivos.

PROBLEMA 2

Sejam a, b, c, d números reais tais que

$a = \sqrt{4-\sqrt{5-a}}, b = \sqrt{4+\sqrt{5-b}}, c = \sqrt{4-\sqrt{5+c}}$ e $d = \sqrt{4+\sqrt{5+d}}$. Calcule $abcd$.

PROBLEMA 3

Considere um triângulo ABC e BD e CE as bissetrizes dos ângulos B e C, respectivamente ($D \in AC$ e $E \in AB$). A circunferência circunscrita a ABC tem centro O e a circunferência ex-inscrita tangente ao lado BC tem centro I_a. Estas duas circunferências intersectam-se nos pontos P e Q.

(i) Mostre que PQ é paralelo a DE.

(ii) Prove que I_aO é perpendicular a DE.

PROBLEMA 4

Sejam $\mathbb{Q}^+$ e $\mathbb{Z}$ o conjunto dos racionais extritamente positivos e o conjunto dos inteiros. Determine todas as funções $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Z}$ satisfazendo as seguintes condições:

(1) $f(1999) = 1$

(2) $f(ab) = f(a) + f(b)$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Q}^+$.

(3) $f(a + b) \ge \min\{f(a), f(b)\}$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Q}^+$.

A notação $\min\{x, y\}$ denota o menor dentre os inteiros x e y. Por exemplo, $\min\{3, 4\} = 4$ e $\min\{3, 3\} = 3$.

PROBLEMA 5

(i) Se m, n são inteiros positivos tais que $2^n - 1$ divide $m^2 + 9$, prove que n é uma potência de 2.

(ii) Se n é uma potência de 2, prove que existe um inteiro positivo m tal que $2^n - 1$ divide $m^2 + 9$.

SOLUÇÕES DE PROBLEMAS PROPOSTOS

✎ *Publicamos aqui algumas das respostas enviadas por nossos leitores.*

21) **a)** Encontre todas as soluções inteiras da equação $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{c}$.
b) Encontre todas as soluções inteiras da equação $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{c}$.

Solução de Carlos Alberto da Silva Victor.

a) Vamos separar em 2 etapas:

i) Tomando $a=k^2$; $b=t^2$ teremos $c=(k+t)^2$ consequentemente $(k^2, t^2, (k+t)^2)$ é solução da equação para todo $k, t \in \mathbb{N}$.

ii) Suponha que a não seja um quadrado perfeito. Neste caso, a pode ser escrito na forma $a=k^2s$, onde s é um produto de primos distintos. Como $c=a+b+2\sqrt{ab}$, devemos ter $b=t^2 \,.\, s$ $(t \in \mathbb{N})$ já que ab deverá ser um quadrado perfeito (observe que se tomarmos s com exponente ímpar diferente de 1, podemos incluí-lo em t^2); Daí:
$c=a+b+2\sqrt{ab}=k^2s+t^2s+2kts$
$c=s\,(k^2+t^2+2kt)$
$c=s.(k+t)^2$ e neste caso $(k^2s,\ t^2s,\ s(k+t)^2)$ é solução da equação onde $k,\ s,\ t,\ \in\mathbb{N}$.

Nota: observe que o ítem (ii) representa a situação genérica e inclui as soluções de (i), fazendo $s=1$.

b) $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{c}$, logo $c=a+b+3(\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2})$. Vamos separar também em 3 etapas:

i) Tomando $a=k^3$; b $=t^3$ teremos $c=(k+t)^3$ com $k,\ t\in\mathbb{N}$ e consequentemente $(k^3, t^3, (k+t)^3)$ é solução da equação.

ii) Suponha que a não seja um cubo perfeito. Observe que a pode ser escrito na forma: $a=t^3.\alpha.\beta^2$ onde α e β são produtos de primos distintos. Já que $c=a+b+3(\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2})$, devemos tomar

$b = t^3 . \alpha . \beta^2$ pois $a^2 = k^6 . \alpha^2 \beta^4$ (de fato, $\sqrt[3]{a^2 b} + \sqrt[3]{ab^2}$ é racional, e, elevando ao quadrado, obtemos que $a\sqrt[3]{ab^2} + 2ab + b\sqrt[3]{a^2 b}$ (e logo $a\sqrt[3]{ab^2} + b\sqrt[3]{a^2 b}$) também é racional, donde, assumindo $a \neq b$, $\sqrt[3]{ab^2}$ e $\sqrt[3]{a^2 b}$ são racionais e inteiros). daí:

$c = k^3 . \alpha . \beta^2 + t^3 \alpha . \beta^2 + 3(k^2 t \cdot \alpha . \beta^2 + k . t^2 . \alpha . \beta^2) \therefore$

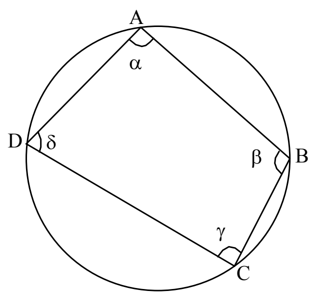
$c = \alpha . \beta^2 (k^3 + t^3 + 3k^2 t + 3kt^2)$

Logo $(k^3 . \alpha . \beta^2,\ t^3 \alpha . \beta^2,\ \alpha . \beta^2 (k+t)^3)$ é solução da equação dada.

(Novamente, as soluções em (i) são obtidas de (ii) com α = β = 1.

22) Sejam $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ os ângulos de um quadrilátero, nessa ordem. Prove que esse quadrilátero é inscritível se, e somente se, a relação $\alpha\beta + \alpha\delta + \gamma\beta + \gamma\delta = \pi^2$ ocorre.

Solução de André Luiz Arruda Marques.



1ª. parte: Hipótese: O quadrilátero é inscritível.

Tese: É válida a relação $\alpha\beta + \alpha\delta + \gamma\beta + \gamma\delta = \pi^2$

Sabe-se que : $\begin{cases} B\overset{\frown}{C}D + B\overset{\frown}{A}D = 360° \\ B\overset{\frown}{C}D = 2\alpha \\ B\overset{\frown}{A}D = 2\gamma \end{cases} \Rightarrow 2\alpha + 2\gamma = 360° = 2\pi \Rightarrow \alpha + \gamma = \pi \ (1)$

$$\begin{cases} \overset{\frown}{ABC} + \overset{\frown}{ADC} = 360° \\ \left.\begin{array}{l} \overset{\frown}{ABC} = 2\alpha \\ \overset{\frown}{ADC} = 2\beta \end{array}\right| \Rightarrow 2\gamma + 2\beta = 360° = 2\pi \Rightarrow \delta + \beta = \pi \ (2) \end{cases}$$

de (1) e (2) $\Rightarrow (\alpha + \gamma)(\beta + \delta) = \pi^2 \Rightarrow \alpha\beta + \alpha\delta + \gamma\beta + \gamma\delta = \pi^2$ (c.q.d)

2ª. parte: Hipótese: É válida a relação $\alpha\beta + \alpha\delta + \gamma\beta + \gamma\delta = \pi^2$
Tese: O quadrilátero é inscritível

Têm-se a relação: $\alpha\beta + \alpha\delta + \gamma\beta + \gamma\delta = \pi^2$
Fatorando vem: $(\alpha + \gamma)(\beta + \delta) = \pi^2 = \pi \cdot \pi$
Sabe-se que: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360° = 2\pi$

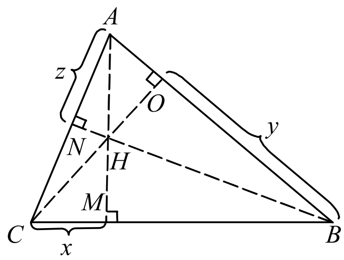
Seja: $\alpha + \gamma = x$ e $\beta + \delta = y \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} xy = \pi^2 \\ x + y = 2\pi \end{array}\right| \Rightarrow x = y = \pi$

Logo: $\begin{cases} \alpha + \gamma = \pi \\ \beta + \delta = \pi \end{cases} \therefore$ o quadrilátero é inscritível (c.q.d.).

23) Seja ABC um triângulo qualquer de ortocentro H e sejam h_a, h_b, h_c os comprimentos das alturas relativas a A, B, C respectivamente. Prove que

$$h_a.\overline{AH} + h_b.\overline{BH} + h_c\,\overline{CH} = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Solução de Maria Ivete Caetano Rodrigues.



Notações:

$h_a = \overline{AM}$ $\quad \overline{CM} = x$ $\quad \overline{AB} = c$

$h_b = \overline{BN}$ $\quad \overline{BO} = y$ $\quad \overline{BC} = a$

$h_c = \overline{CO}$ $\quad \overline{AN} = z$ $\quad \overline{AC} = b$

Temos que : ΔCMH é retângulo $\Rightarrow (\overline{CH})^2 = (h_a - \overline{AH})^2 + x^2$ **I**

ΔACM é retângulo $\Rightarrow b^2 = h_a^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = b^2 - h_a^2$ **II**

substituindo **II** em **I**, temos $(\overline{CH})^2 = h_a^2 - 2h_a\,\overline{AH} + (\overline{AH})^2 + b^2 - h_a^2$

$\underline{(\overline{CH})^2 = b^2 + (\overline{AH})^2 - 2h_a\,\overline{AH}}$ (1)

Analogamente temos: $\underline{(\overline{BH})^2 = (\overline{CH})^2 + a^2 - 2h_c\,\overline{CH}}$ (2) e

$\underline{(\overline{AH})^2 = (\overline{BH})^2 + c^2 - 2h_b\,\overline{BH}}$ (3)

somando (1), (2) e (3), obtemos:

$$2h_a\,\overline{AH} + 2h_c\,\overline{CH} + 2h_b\,\overline{BH} = a^2 + b^2 + c^2$$

$$2(h_a\,\overline{AH} + 2h_b\,\overline{BH} + h_c\,\overline{CH}) = a^2 + b^2 + c^2$$

$$h_a\,\overline{AH} + h_b\,\overline{BH} + h_c\,\overline{CH} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \quad \text{(c.q.d.)}$$

25) Durante o ano de 1998, uma pequena livraria, que abria nos sete dias da semana, vendeu no mínimo um livro por dia e um total de 600 livros no ano todo. Diga, justificando, se existiu, obrigatoriamente, um período de dias consecutivos onde foram vendidos exatamente 129 livros.

Solução de Marcelo Rufino de Oliveira.

Seja a_i o total acumulado de livros vendidos até o final do i-ésimo dia.
Por exemplo: a_5 = total vendidos até o quinto dia $a_{35} - a_{31}$ = total de livros vendidos entre os dias 35 e 32 (inclusive).
Então: $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{364} < a_{365} = 600$ (1)

Resta agora analisar se existem a_i, a_j ($i, j \in \mathbb{N}$ menores que 365, $j > i$) tais que $a_j - a_i = 129$

Somemos agora a cada termo de (1) o valor 129:

$a_1 + 129 < a_2 + 129 < a_3 + 129 < \ldots < a_{364} + 129 < a_{365} + 129 = 729$

Chamemos estes termos de b_i ($b_i = a_i + 129$): $b_1 < b_2 < b_3 < \ldots < b_{364} < b_{365} = 729$

Temos então 730 termos, 365 termos a_i e 365 termos b_i, com $a_i \neq a_j$ ($i \neq j$) e $b_p \neq b_k$ ($p \neq k$).

Notemos que estes 730 termos naturais estão entre 1 e 729, ou seja, existem dois valores iguais (princípios das casa dos pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichet) entre estes 730 termos. Como cada a_i é distinto e cada b_i é distinto, então existe um a_m que é igual a um b_n:

$a_m = b_n$ => $a_m = a_n + 129$ => $a_m - a_n = 129$

Que prova que existe um período de dias consecutivos ($m - n$ dias) onde foram vendidos exatamente 129 livros.

PROBLEMA N°. 9 DO VISITANTE MATEMÁTICO (Revista EUREKA! N°. 2)

Um vaso de vinho está suspenso sobre outro, de igual capacidade (digamos 1 litro), cheio de água. Por um orifício no fundo de cada vaso, o vinho escorre sobre o vaso de água e a mistura se esvai na mesma velocidade. Quando o vaso de vinho estiver vazio, qual é o volume de água no vaso inferior?

Solução de Carlos Frederico Borges Palmeira.

Aqui está uma solução, que usa apenas a noção de limite e o fato que $\lim(1 - \frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}$.

Vamos discretizar o problema, supondo que primeiro deixamos passar uma fração $\frac{1}{n}$ de um vaso para o outro, a água e o vinho se misturam, e depois retiramos $\frac{1}{n}$ do novo volume do segundo vaso. Após n passos o primeiro vaso estará vazio.

Seja $v(k+1)$ a quantidade de vinho no segundo vaso após o k-ésimo passo.

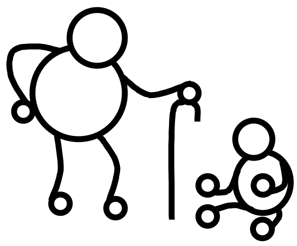
Temos $v(k+1) = (1 - \frac{1}{n})\ (v(k) + \frac{1}{n})$, sendo $v(0) = 0$.

Agora, a equação de diferenças $v(k+1) = av(k) + b$ tem solução $v(k) = a^n \cdot v(0) + (\frac{1-a^n}{1-a}) \cdot b$ (nada além de progressões geométricas aqui).

Segue que $v(n) = (1-\frac{1}{n})^n \cdot v(0) + (\frac{(1-(1-\frac{1}{n})^n}{\frac{1}{n}}) \cdot \frac{1}{n}(1-\frac{1}{n}),$ e como $v\ (0) = 0$,

temos apenas o segundo termo, que fica $(1-\frac{1}{n})(1-(1-\frac{1}{n})^n)$, e passando ao limite quando n tende ao infinito, obtemos $1-(\frac{1}{e})$. Esta é a fração de vinho que resta no segundo vaso quando o primeiro fica vazio.

Você sabia… que todo poliedro convexo (com as faces rígidas) é rígido (isto é, não pode ser deformado) mas existem poliedros não - convexos flexíveis?



Errata: No **Você sabia…** da EUREKA! N°. 4, página 21, sobre um polinômio que assume apenas valores negativos ou primos, há um erro tipográfico na terceira linha da expressão do polinômio: onde está "…[e^3 . (e + 2) . (a +1)2 + …" leia-se "…[e^3 . (e + 2) . (a + 1)^2 + …".

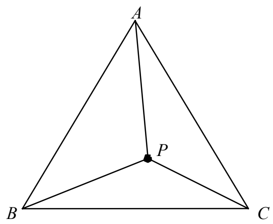
Agradecemos também o envio das soluções da EUREKA! Nº.4 a: Osvaldo Ribeiro da Silva Júnior, Robério Bacelar da Silva, Manuel João de Jesus Almeida, Vicente Wilson Moura Gaeta, Rubens Henriques, Raul Rabello Mesquita, Otávio Braga, Antonio Caminha Neto, Alexandre Celestino Leite de Almeida, Luciana Rocha Pedro, Francisco Dutenhefner, Seme Gebara Neto. Continuamos esperando as soluções dos problemas 10, 16, 17, 20 e 24.

PROBLEMAS PROPOSTOS

✉ *Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e sugestões de novos problemas para os próximos números.*

26) Sejam as funções $f_0(x) = x^n$ e $f_i(x) = f_{i-1}(x+1) - f_{i-1}(x)$ onde x, n e i são inteiros positivos. Prove que, para todo x, $f_n(x) = n!$

27) O triângulo equilátero ABC possui um ponto interno P tal que em P chegam três segmentos de reta (PA, PB, PC) onde $PA = 6$, $PB = 8$ e $PC = 7$. Com esses dados descubra qual é a área do triângulo.



28) Seja $n \geq 2$ um número inteiro. Prove que n e $n + 2$ são ambos primos se e somente se $\dfrac{4((n-1)!+1)+n}{n(n+2)}$ é inteiro.

29) Seja $n > 1$ um número inteiro. Existem n lâmpadas $L_0, L_1, \ldots, L_{n-1}$ colocadas em um círculo. Cada lâmpada está ACESA ou APAGADA. Uma seqüência de passos $S_0, S_1, \ldots, S_i, \ldots$ é executada. O passo S_j afeta apenas o estado da lâmpada L_j (deixando o estado de todas as outras inalterado) da seguinte forma:

Se L_{j-1} está ACESA, S_j muda o estado de L_j de ACESA para APAGADA, ou de APAGADA para ACESA;

Se L_{j-1} está APAGADA, S_j deixa o estado de L_j inalterado.

As lâmpadas são rotuladas *mod n*, ou seja,

$L_{-1} = L_{n-1}, L_0 = L_n, \ L_1 = L_{n+1}$, etc.

Inicialmente todas as lâmpadas estão ACESAS. Mostre que:

a. Existe um inteiro positivo $M(n)$ tal que depois de $M(n)$ passos todas as lâmpadas estão ACESAS de novo;

b. Se n é da forma 2^k então todas as lâmpadas estão ACESAS depois de $n^2 - 1$ passos;

c. Se n tem a forma $2^k + 1$ então todas as lâmpadas estão ACESAS depois de $n^2 - n + 1$ passos.

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

O problema 6 da Olimpíada Internacional de Matemática de 1994 pedia que fosse mostrada a existência de um conjunto A de inteiros positivos com a seguinte propriedade: para todo conjunto infinito de números primos S existem um inteiro positivo $k \geq 2$ e dois inteiros positivos $m \in A$ e $n \notin A$, cada um dos quais é um produto de k elementos distintos de S.

Os leitores que enviarem soluções corretas (até o dia 15 de novembro de 1999) para o seguinte problema concorrerão a um exemplar do livro **"10 Olimpíadas Iberoamericanas de Matemática"**.

PROBLEMA "CUÁTICO":

Prove que no problema acima k não pode ser escolhido independentemente do conjunto S. Mais precisamente:

Prove que para qualquer conjunto de inteiros positivos A e para todo inteiro positivo k existe um conjunto infinito de números primos S tal que o produto de k elementos distintos de S está sempre em A ou o produto de k elementos distintos de S nunca pertence a A.

Nota: Os problemas 26 e 27 foram propostos por Christian Lyoiti Watanabe e Roberto Gomides respectivamente.

COMO ASSINAR A EUREKA!

Se você é fanático por Matemática e deseja receber na sua casa a revista EUREKA!, faça o seu pedido escrevendo para: **Secretaria da Olimpíada Brasileira de Matemática**, Estrada Dona Castorina, 110 Jardim Botânico - Rio de Janeiro, RJ - CEP: 22460-320. O custo de cada exemplar avulso ou atrasado é de R$4,00. Você pode fazer uma assinatura anual o que dará direito a receber as publicações do ano (mínimo 3 exemplares) por um valor promocional de R$10,00. Para isso, faça um depósito no Banco do Brasil - Agência 0598-3 - Conta N°52208-2 em nome do professor Eduardo Wagner. Envie-nos a fotocopia do depósito e faça referência aos números desejados. Não esqueça de colocar seu nome e endereço completos e nós remeteremos a(s) revista(s) pelo correio. Pedidos podem ser feitos também por e-mail e comprovantes de depósito poderão ser enviados pelo fax.

Se tiver qualquer dúvida entre em contato conosco.
Telefone: 021-5295077 / Fax: 021-5295023
e-mail: obm@impa.br
Home-Page: http//www.obm.org.br/

AGENDA OLÍMPICA

21ª. OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase – 12 de junho (sábado)
Segunda Fase – 28 de agosto (sábado)
Terceira Fase – 23 de outubro (sábado) e 24 de outubro (domingo)

♦

14ª. OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA
12 a 19 de setembro
La Habana, Cuba.

♦

2ª. OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
16 de setembro

Você sabia…

Que se $a^n + 1$ é primo (com a e n naturais) então $n = 2^k$ para algum k natural? Tente provar isso!, (primos desta forma são conhecidos como primos de Fermat generalizados.) E que se $a = 2$ só se conhecem 5 primos desta forma (3, 5, 17, 257 e 65537), os chamados primos de Fermat? E que, por outro lado, se conhecem muitos primos de Fermat generalizados grandes (como $101830^{16384} + 1$ e $67234^{16384} + 1$, respectivamente o 16° e 18°. maiores primos conhecidos em 27/7/99)?

COORDENADORES REGIONAIS

Amarisio da Silva Araújo	*(UFV)*	*Viçosa - MG*
Alberto Hassen Raad	*(UFJF)*	*Juiz de Fora - MG*
Antônio C. Rodrigues Monteiro	*(UFPE)*	*Recife - PE*
Angela Camargo	*(Centro de Educação de Adultos - CEA)*	*Blumenau - SC*
Benedito T. Vasconcelos Freire	*(UFRN)*	*Natal - RN*
Claudio Arconcher	*(Col. Leonardo da Vinci)*	*Jundiaí - SP*
Élio Mega	*(Col. ETAPA)*	*São Paulo - SP*
Florêncio F. Guimarães F.	*(UFES)*	*Vitória - ES*
Francisco Dutenhefner	*(UFMG)*	*Belo Horizonte - MG*
Gisele de A. Prateado G.	*(UFGO)*	*Goiânia - GO*
Ivanilde H. Fernandes Saad	*(U. Católica Dom Bosco)*	*Campo Grande - MS*
João B. de Melo Neto	*(UFPI)*	*Teresina - PI*
João F. Melo Libonati	*(Grupo Educ. IDEAL)*	*Belém - PA*
Jorge Ferreira	*(UEM)*	*Maringá - PR*
José Carlos Pinto Leivas	*(UFRG)*	*Rio Grande - RS*
José Clovis Saraiba	*(UFMA)*	*São Luis - MA*
José Luis Rosas Pinho	*(UFSC)*	*Florianópolis - SC*
José Paulo Carneiro	*(USU)*	*Rio de Janeiro - RJ*
José Vieira Alves	*(UFPB)*	*Campina Grande - PB*
Leonardo Matteo D'orio	*(Sistema Titular de Ensino)*	*Belém - PA*
Licio Hernandes Bezerra	*(UFSC)*	*Florianópolis - SC*
Luzinalva M. de Amorim	*(UFBA)*	*Salvador - BA*
Marco Polo	*(Colégio Singular)*	*Santo André - SP*
Marcondes Cavalcante França	*(UF Ceará)*	*Fortaleza - CE*
Pablo Rodrigo Ganassim	*(L. Albert Einstein)*	*Piracicaba - SP*
Paulo H. Cruz Neiva de L. Jr.	*(Esc. Tec.Everardo Passos)*	*SJ dos Campos - SP*
Reinaldo Gen Ichiro Arakaki	*(INPE)*	*SJ dos Campos - SP*
Ricardo Amorim	*(Centro Educ. Logos)*	*Nova Iguaçu - RJ*
Roberto Vizeu Barros	*(Colégio ACAE)*	*Volta Redonda - RJ*
Sergio Claudio Ramos	*(IM-UFRGS)*	*Porto Alegre - RS*
Seme Gebara Neto	*(UFMG)*	*Belo Horizonte - MG*
Tadeu Ferreira Gomes	*(U. do Estado da Bahia)*	*Juazeiro - BA*
Tomás Menéndez Rodrigues	*(U. Federal de Rondonia)*	*Porto Velho - RO*
Valdenberg Araújo da Silva	*(U. Federal de Sergipe)*	*São Cristovão - SE*
Wagner Pereira Lopes	*(Esc. Tec. Fed. de Goiás)*	*Jataí - GO*
Waldemar M. Canalli	*(P.M. S. João de Meriti)*	*S. João de Meriti - RJ*