CONTEÚDO

AOS LEITORES

Iniciamos este segundo ano da revista EUREKA! transmitindo nossa satisfação pela acolhida no primeiro ano de vida da revista, de toda a comunidade estudantil e dos diretores e professores dos colégios envolvidos. Agradecemos a todos os que têm apoiado esta iniciativa e esperamos continuar apoiando, através desta publicação, o trabalho dos professores.

Nesta nova edição da revista EUREKA! aproveitamos para registrar a XX Olimpíada Brasileira de Matemática, da qual publicamos as provas da primeira, segunda e terceira fases com soluções (que, esperamos, serão úteis para a preparação para a XXI OBM), bem como as listas de premiados nos três níveis. Nesta edição, também publicamos artigos de dificuldade intermediária e material enviado por numerosos professores e alunos. Esperamos seguir recebendo colaborações dos nossos leitores: soluções dos problemas propostos, pequenos artigos e curiosidades matemáticas.

Devido ao interesse manifestado por diversas pessoas, criamos recentemente as assinaturas individuais da revista EUREKA!. Para maiores informações, veja página 59 desta edição. Por outro lado, estamos planejando criar, nos próximos números, um pequeno espaço publicitário ligado ao ensino da matemática, para o qual aguardamos propostas de leitores, editoras e instituições de ensino. Desta forma, estaremos gerando recursos que ajudarão a manter a publicação da revista.

Aproveitamos, por fim, para registrar que foi realizada em janeiro de 1999 a segunda Semana Olímpica, que reuniu premiados na XX Olimpíada Brasileira de Matemática nos 3 níveis e professores de vários estados. A atividade foi realizada em Maracanaú, Ceará, no centro de treinamento do Colégio 7 de Setembro, ao qual gostaríamos de agradecer pelo apoio.

Comitê Editorial.

XX Olimpíada Brasileira de Matemática

Primeira Fase - Nível 1

01. Qual dos números a seguir é o maior?

A) 3^{45} B) 9^{20} C) 27^{14} D) 243^{9} E) 81^{12}

02. Um menino joga três dados e soma os números que aparecem nas faces voltadas para cima. O número dos diferentes resultados dessa adição é:

A)12 B) 18 C) 216 D) 16 E) 15

03. Renata digitou um número em sua calculadora, multiplicou-o por 3, somou 12, dividiu o resultado por 7 e obteve o número 15. O número digitado foi:

A) 31 B) 7 C) 39 D) 279 E) 27

04. Numa competição de ciclismo, Carlinhos dá uma volta completa na pista em 30 segundos, enquanto que Paulinho leva 32 segundos para completar uma volta. Quando Carlinhos completar a volta número 80, Paulinho estará completando a volta número:

A) 79 B) 78 C) 76 D) 77 E) 75

05. Elevei um número positivo ao quadrado, subtrai do resultado o mesmo número e o que restou dividi ainda pelo mesmo número. O resultado que achei foi igual:

A) Ao próprio número B) Ao dobro do número

C) Ao número mais 1 D) À raiz quadrada do número

E) Ao número menos 1

06. Quantos números de 3 algarismos existem cuja soma dos algarismos é 25 ?

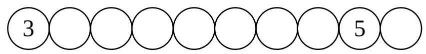
A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

07. João é mais velho que Pedro, que é mais novo que Carlos; Antônio é mais velho do que Carlos, que é mais novo do que João. Antônio não é mais novo do que João e todos os quatro meninos têm idades diferentes. O mais jovem deles é:

A) João B) Antônio C) Pedro D) Carlos

E) impossível de ser identificado a partir dos dados apresentados

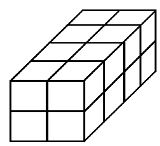
08. Escreva um número em cada círculo da fila abaixo, de modo que a soma de três números quaisquer vizinhos (consecutivos) seja 12.



No último círculo à direita deve estar escrito o número:

A) 3 B) 2 C) 1 D) 4 E) 7

09. Dezesseis cubos de 1cm de lado são colocados juntos, formando o paralelepípedo representado abaixo.



A superfície do mesmo foi pintada de verde e, em seguida, os cubos foram separados. O número de cubos com exatamente duas faces verdes é:

A) 2 B) 6 C) 4 D) 8 E) 10

10. Uma fazenda retangular que possui 10 km de largura por 20 km de comprimento foi desapropriada para reforma agrária. Se a fazenda deve ser dividida para 200 famílias de modo que todas as famílias recebam a mesma área, então cada família deve receber:

A) 1.000.000 m^2 B) 100.000 m^2 C) 5.000 m^2 D) 1.000 m^2
E) 10.000 m^2

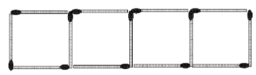
11. Um estacionamento para carros cobra 1 real pela primeira hora e 75 centavos a cada hora ou fração de hora seguinte. André estacionou seu carro às 11h 20min e saiu às 15h 40min. Quantos reais ele deve pagar pelo estacionamento?

A) 2,50 B) 4,00 C) 5,00 D) 4,75 E) 3,75

12. Para fazer 12 bolinhos, preciso exatamente de 100g de açúcar, 50g de manteiga, meio litro de leite e 400g de farinha. A maior quantidade desses bolinhos que serei capaz de fazer com 500g de açúcar, 300g de manteiga, 4 litros de leite e 5 quilogramas de farinha é:

A) 48 B) 60 C) 72 D) 54 E) 42

13. Joãozinho brinca de formar quadrados com palitos de fósforo como na figura a seguir.



A quantidade de palitos necessária para fazer 100 quadrados é:
A) 296 B) 293 C) 297 D) 301 E) 28

14. A soma de todos os números ímpares de dois algarismos menos a soma de todos os números pares de dois algarismos é:
A) 50 B) 46 C) 45 D) 49 E) 48

15. O número que devemos somar ao numerador e subtrair do denominador da fração $\frac{1478}{5394}$ para transformá-la na sua inversa é:
A) 3.916 B) 3.913 C) 3.915 D) 3.912 E) 3.917

16. O alfabeto usado no planeta X tem somente duas letras: X e *x*. O sobrenome (nome de família) de cada um de seus habitantes é uma seqüência formada por 4 letras. Por exemplo, *x*X*xx* é um possível sobrenome utilizado nesse planeta. O maior número de sobrenomes diferentes que podem ser dados no planeta X é:
A) 12 B) 14 C) 15 D) 16 E) 18

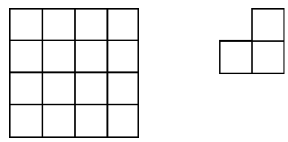
17. João quer desfazer-se de sua coleção de 1.000 bolinhas. Para tanto escolhe dez garotos da rua onde mora. Dá ao primeiro garoto x bolinhas, ao segundo $x + 1$ bolinhas. Assim faz até chegar ao décimo garoto. Sempre dá uma bolinha a mais para o próximo garoto. No final, João ainda fica com um resto de bolinhas. Sendo x o número que deixa João com o menor resto possível, x é igual a:
A) 94 B) 95 C) 96 D) 97 E) 98

18. No planeta Z todos os habitantes possuem 3 pernas e cada carro possui 5 rodas. Em uma pequena cidade desse planeta, existem ao todo 97 pernas e rodas. Então podemos afirmar:

A) É possível que existam 19 carros nessa cidade
B) Existem no máximo 16 carros nessa cidade

C) Essa cidade tem 9 habitantes e 14 carros
D) Essa cidade possui no máximo 17 carros
E) Nessa cidade existem mais carros do que pessoas

19. São dados um tabuleiro e uma peça, como mostra a figura.



De quantas maneiras diferentes podemos colocar a peça no tabuleiro, de modo que cubra completamente 3 casas?
A) 16 B) 24 C) 36 D) 48 E) 60

20. Pedro e Maria formam um estranho casal. Pedro mente às quartas, quintas e sextas-feiras, dizendo a verdade no resto da semana. Maria mente aos domingos, segundas e terças-feiras, dizendo a verdade no resto da semana. Certo dia, ambos dizem: "Amanhã é dia de mentir". O dia em que foi feita essa afirmação era:
A) segunda-feira B) terça-feira C) sexta-feira D) sábado
E) domingo

Nível 2

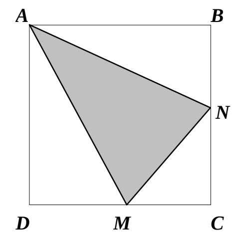
01. Quantos são os números inteiros x que satisfazem à inequação $3 < \sqrt{x} < 7$?
A) 13 B) 26 C) 38 D) 39 E) 40

02. Hoje é sábado. Que dia da semana será daqui a 99 dias?
A) segunda-feira B) sábado C) domingo
D) sexta-feira E) quinta feira

03. Anulada.

04. Um pai tem 33 anos e seu filho, 7 anos. Depois de quantos anos a idade do pai será o triplo da idade do filho?
A) 3 B) 7 C) 6 D) 9 E) 13

05. O quadrilátero *ABCD* é um quadrado de área 4m^2. Os pontos *M* e *N* estão no meio dos lados a que pertencem. Podemos afirmar que a área do triângulo em destaque é, em m^2,



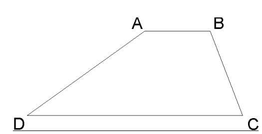
A) 2 B) 1,5 C) 2,5 D) 3 E) 3,5

06. Qual é o dígito das unidades do número 3^{1998}?
A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

07. Num código secreto, as 10 primeiras letras do nosso alfabeto representam os algarismos de 0 a 9, sendo que a cada letra corresponde um único algarismo e vice-versa. Sabe-se que $d + d = f$, $d \,.\, d = f$, $c + c = d$, $c + d = a$ e $a - a = b$. Podemos concluir que $a + b + c + d$ é igual a:
A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

08. O número 1234*a*6 é divisível por 7. O algarismo *a* vale:
A) 0 B) 2 C) 5 D) 6 E) 8

09. No trapézio abaixo, têm-se: *AB* paralelo a *CD*, *AD* = 10 cm e *CD* = 15 cm. O ângulo C mede 75º e o ângulo D, 30º . Quanto mede o lado *AB*, em centímetros?



A) 5 B) 7,5 C) 10 D) 12,5 E) $5\sqrt{3}$

10. No quadrado mágico abaixo, a soma dos números em cada linha, coluna e diagonal é sempre a mesma. Por isso, no lugar do X devemos colocar o número:

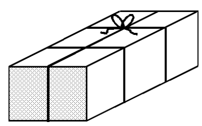
15		35
50		
25	X	

A)30 B) 20 C) 35 D) 45 E) 40

11. Passarinhos brincam em volta de uma velha árvore. Se dois passarinhos pousam em cada galho, um passarinho fica voando. Se todos os passarinhos pousam, com três em um mesmo galho, um galho fica vazio. Quantos são os passarinhos?

A) 6 B) 9 C) 10 D) 12 E) 15

12. Pelo menos quantos metros de barbante são necessários para amarrar 15 pacotes, conforme a figura, sabendo que cada pacote mede 10cm × 20cm × 40cm, sendo reservados 20cm para o laço?



A) 39 B) 36 C) 48 D) 56 E) 42

13. Para assistir ao filme *Central do Brasil*, cada um dos x alunos de uma turma deveria pagar y reais pelo frete do ônibus. Como faltaram 3 alunos, cada um dos alunos presentes teve que pagar 2 reais a mais para cobrir o preço do frete. Qual foi esse preço?

A) $(x + 3)(y – 2)$ B) $(x – 3)\, y + 2$ C) $x(y + 2) – 3$
D) $xy – 6$ E) $(x – 3)(y + 2)$

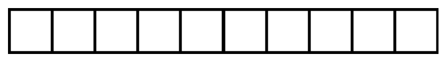
14. Seu Horácio resolveu incrementar a venda de CDs em sua loja e anunciou uma liquidação para um certo dia, com descontos de 30% sobre o preço das etiquetas. Acontece que, no dia anterior à liquidação, seu Horário aumentou o preço marcado nas etiquetas, de forma que o desconto verdadeiro fosse de apenas 9%. De quanto foi o aumento aplicado por seu Horácio?

A) 30% B) 39% C) 21% D) 40% E) 31%

15. Um fabricante de brinquedos embala bolas de pingue-pongue em dois tipos de caixas. Num dos tipos ele coloca 10 bolas e no outro coloca 24 bolas. Num certo dia foram embaladas 198 bolas e usadas mais de 10 caixas. Quantas caixas foram feitas nesse dia?

A)14 B) 16 C) 15 D) 17 E) 11

16. Coloque em cada quadradinho, no desenho a seguir, os algarismos 1, 2, 3, 4 ou 5, de forma que cada um deles apareça pelo menos uma vez e que o número formado seja o maior possível e múltiplo de 9.



No número que você construiu, o algarismo mais repetido apareceu:

A) 6 vezes B) 5 vezes C) 4 vezes D) 3 vezes E) 2 vezes

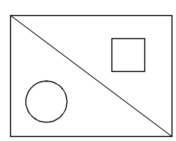
17. Observe as igualdades a seguir:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$5^2 + 12^2 = 13^2$$
$$7^2 + 24^2 = 25^2$$
$$9^2 + 40^2 = 41^2$$
$$\ldots$$

Considere a igualdade $17^2 + x^2 = y^2$ com base nos exemplos anteriores, procure determinar os números naturais x e y. Podemos concluir que $x + y$ é igual a:

A) 289 B) 121 C) 81 D) 144 E) 196

18. Você vai pintar a bandeira abaixo utilizando 4 cores: azul, verde, amarelo e vermelho, uma em cada região.



Se o vermelho e o amarelo não podem ficar juntos, de quantas maneiras pode ser pintada a bandeira?

A) 12 B) 4 C) 18 D) 20 E) 16

19. Um crime é cometido por uma pessoa e há quatro suspeitos: André, Eduardo, Rafael e João. Interrogados, eles fazem as seguintes declarações:

•André: Eduardo é o culpado.
•Eduardo: João é o culpado.
•Rafael: Eu não sou culpado.
•João: Eduardo mente quando diz que eu sou culpado.

Sabendo que apenas um dos quatro disse a verdade, quem é o culpado?
A) André. B) Eduardo. C) Rafael. D) João.
E) Não se pode saber.

20. Anulada.

Nível 3

01. Veja Problema 1 Nível 2.
02. Veja Problema 2 do Nível 2.
03. Veja Problema 5 do Nível 2.
04. Veja Problema 6 do Nível 2.
05. Veja Problema 15 do Nível 2.

06.- $\sqrt{0,4444...} =$
A) 0,2222… B) 0,3333… C) 0,4444… D) 0,5555… E) 0,6666…

07.- Veja Problema 8 do Nível 2.

08.- Todos os ângulos internos de um polígono convexo são menores que (*não podendo ser iguais a*) 160°. O número de lados desse polígono é, no máximo, igual a:
A) 12 B) 14 C) 15 D) 17 E) 18

09.- A média aritmética de seis números é 4. Quando acrescentamos um sétimo número, a nova média é 5. O número que foi acrescentado é:
A) 5 B) 6 C) 8 D) 10 E) 11

10. Veja Problema 19 do Nível 2.

11.- Em uma calculadora, a tecla A transforma o número *x* que está no visor em $\frac{1}{x}$ e a tecla B multiplica por 2 o número que está no visor. Se o número 2 está no visor e digitamos a seqüência ABABABAB...AB (total de digitações: 998), obteremos no visor um número que é igual a:
A) 1 B) 2^{-498} C) 2^{-500} D) 2^{499} E) 2^{500}

12.- Um número inteiro n é bom quando $4n + 1$ é um múltiplo de 5. Quantos números bons há entre 500 e 1.000?

A) 50 B) 51 C)100 D) 101 E) 102

13.- Em um conjunto de pontos do espaço, a distância entre dois pontos diferentes quaisquer é igual a 1. O número máximo de pontos que pode haver nesse conjunto é:

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

14.- Se x homens fazem x embrulhos em x segundos, em quantos segundos y homens farão y embrulhos?

A) y B) x C) $\frac{x^2}{y}$ D) $\frac{y^2}{x}$ E) $\frac{y}{x}$

15.- Você entra em um restaurante para comer pizza e espera pagar uma quantia proporcional à quantidade de comida pedida. Se uma pizza com 20 cm de diâmetro custa R$ 3,60, quanto você espera pagar por uma outra do mesmo sabor com 30cm de diâmetro?

A) R$ 5,40 B) R$ 5,80 C) R$ 6,60 D) R$ 7,50 E) R$ 8,10

16.- A função f associa a cada real x o menor elemento do conjunto $\left\{x+1, \frac{15-x}{2}\right\}$. O valor máximo de $f(x)$ é:

A) 4 B) 5 C) 11/2 D) 16/3 E) 19/4

17.- Vendi dois rádios por preços iguais. Em um deles tive lucro de 25% sobre o preço de compra e no outro tive prejuízo de 25%. Em relação ao capital investido:

A) não tive lucro nem prejuízo B) lucrei 6,25%
C) lucrei 16% D) tive prejuízo de 6,25%
E) tive prejuízo de 16%

18.- A respeito da resposta de um problema, Maurício, Paulo, Eduardo e Carlos fizeram as seguintes afirmações:

– Maurício: É maior que 5. – Paulo: É menor que 10.
– Eduardo: É um número primo. – Carlos: É maior que 12.

Entre as afirmações acima, quantas, no máximo, podem ser verdadeiras?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

19.- Os valores reais de x que satisfazem a inequação $\sqrt{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}\le 2$ são:

A) $-1 \le x \le 1$ B) $x = 1$ C) $x \le 1$ D) $x \ge 1$
E) $x \le 2$

20.- De quantos modos se pode colocar na tabela abaixo duas letras *A*, duas letras *B* e duas letras *C*, uma em cada casa, de modo que não haja duas letras iguais na mesma coluna?

A) 12 B) 24 C) 36 D) 48 E) 64

21.- Um viajante deveria caminhar durante uma hora num sentido entre o norte e o leste, fazendo 30^0 com o norte. Atrapalhou-se e caminhou uma hora num sentido entre o norte e o oeste, formando 30^0 com o norte. Para chegar ao seu destino, ele deve agora tomar um rumo que faça com o norte um ângulo de:
A) 0^0 B) 30^0 C) 45^0 D) 60^0 E) 90^0

22.- Barcas vão do Rio a Niterói em 25 minutos e lanchas fazem a viagem em 15 minutos. A que horas a barca que partiu do Rio às 10h 01min é alcançada pela lancha que saiu do Rio às 10h 07min?

A) 10h 15min B) 10h 16min C) 10h 17min D) 10h 18min
E)10h 20min

23.- Veja Problema 17 do Nível 2.

24.- A soma das raízes reais de $x^3+3x^2+3x-1=0$ é:
A) –3 B) $1-\sqrt[3]{2}$ C) 1 D) $\sqrt[3]{2}-1$ E) 3

25.- Dado um cubo, considere o conjunto de 27 pontos formado pelos vértices desse cubo, pelos pontos médios de suas arestas, pelos centros de suas faces e pelo centro do cubo. Quantas são as retas que passam por três desses pontos?
A) 49 B) 54 C) 63 D) 81 E) 108

Respostas Nível 1:

01.- E	06.- C	11.- B	16.- D
02.- D	07.- C	12.- B	17.- B
03.- A	08.- A	13.- D	18.- D
04.- E	09.- D	14.- C	19.- C
05.- E	10.- A	15.- A	20.- B

Respostas Nível 2:

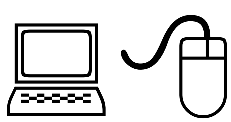
01.- D	06.- E	11.- B	16.- B
02.- C	07.- D	12.- B	17.- A
03.- Anulada	08.- D	13.- E	18.- A
04.- C	09.- A	14.- A	19.- C
05.- B	10.- B	15.- D	20.- Anulada

Respostas Nível 3:

01.- D	06.- E	11.- A	16.- D	21.- E
02.- C	07.- D	12.- C	17.- D	22.- B
03.- B	08.- D	13.- C	18.- D	23.- A
04.- E	09.- E	14.- B	19.- B	24.- D
05.- D	10.- C	15.- E	20.- D	25.- A

Você sabi@…

Que a Olimpíada Brasileira de Matemática tem uma lista eletrônica de discussão de problemas de Matemática, aberta a todos os alunos e professores interessados? Entre em contato conosco!!!



e-mail:obm@impa.br

XX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Segunda Fase - Nível 1

PROBLEMA 1

João comprou um livro e reparou que ele tinha 200 páginas. Seu irmão mais novo arrancou ao acaso 25 folhas e somou os números das 50 páginas.
Explique porque o resultado desta soma não pode ser igual a 1998.
Atenção: cada folha tem duas páginas. A primeira folha tem as páginas 1 e 2, a segunda folha tem as páginas 3 e 4, e assim por diante.

Solução

Como cada folha contém duas páginas tais que a soma dos seus respectivos números é ímpar, ao adicionarmos todos esses 25 números, obteremos necessariamente uma soma ímpar que, portanto, não pode ser igual a 1998.

PROBLEMA 2

Que frações devem ser retiradas da soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$ para que a soma das restantes seja igual a 1?

Solução

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}=\frac{60}{120}+\frac{30}{120}+\frac{20}{120}+\frac{15}{120}+\frac{12}{120}+\frac{10}{120}\ (*)$$

Uma vez que 60 + 30 + 20 + 10 = 120, é claro que podemos remover $\frac{15}{120}=\frac{1}{8}$ e $\frac{12}{120}=\frac{1}{10}$. (além disso, vê-se claramente no lado direito da igualdade (*) que não existem outros termos cuja soma seja igual a $\frac{27}{120}$)

Assim, devemos remover $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{10}$.

PROBLEMA 3

Encontre dois números de três algarismos cada um, usando cada um dos dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 exatamente uma vez, de forma que a diferença entre eles (o maior menos o menor) seja a menor possível.

Solução

Para que a diferença seja a menor possível, os números devem ser os mais próximos possíveis. Assim, os algarismos das centenas devem ser consecutivos. A melhor escolha é aquela em que as dezenas formadas pelos algarismos restantes tenham a maior diferença possível, o que ocorre para as dezenas 65 e 12. Assim, os algarismos das centenas devem ser 3 e 4. O menor número começado por 4 é 412 e o maior começado por 3 é 365, cuja diferença é 47.

PROBLEMA 4

Existem casas em volta de uma praça. João e Pedro dão uma volta na praça, caminhando no mesmo sentido e contando as casas. Como não começaram a contar da mesma casa, a 5ª. casa de João é a 12ª. de Pedro e a 5ª. casa de Pedro é a 30ª. de João. Quantas casas existem em volta da praça?

Solução

Sejam J_n e P_n respectivamente as n-ésimas casas de João e Pedro. De J_5 a J_{30} exclusive, existem 30 – 5 – 1 = 24 casas. De P_5 a P_{12} exclusive existem 12 – 5 – 1 = 6. Logo, no total existem 24 + 6 + 2 = 32 casas.

PROBLEMA 5

Existem 20 balas sobre uma mesa e duas crianças começam a comê-las, uma criança de cada vez. Em cada vez, cada criança deve comer pelo menos uma bala e está proibida de comer mais que a metade das balas que existem sobre a mesa. Nesta brincadeira, ganha a criança que deixar apenas uma bala sobre a mesa. Qual das duas crianças pode sempre ganhar na brincadeira: a primeira ou a segunda a jogar? Como deve fazer para ganhar?

Solução

Ganha a primeira criança. No início ele deve comer 5 balas, deixando 15 balas sobre a mesa. A segunda criança deve comer no mínimo uma e no máximo 7 balas, sobrando entre 8 e 14 balas sobre a mesa. Em qualquer caso a primeira criança pode comer algumas balas, deixando exatamente 7 sobre a mesa. A segunda criança agora deve comer entre uma e três balas, deixando de 4 a 6 balas sobre a mesa. A primeira criança agora come algumas delas, deixando exatamente 3 balas, forçando a segunda criança a comer uma. Comendo mais uma após isso, a primeira criança acaba deixando apenas uma bala no final e ganhando o jogo. De um modo mais geral, a estratégia ganhadora consiste em deixar o adversário com $2^k – 1$ balas, para algum $k \in \mathbb{N}$. O adversário é obrigado a comer de 1 a $(2^{k-1} - 1)$ balas, deixando sobre a mesa um número de balas que está sempre entre 2^{k-1} e $2^k - 2$. O primeiro jogador pode, então, jogar novamente de modo a deixar o adversário com $2^{k-1} - 1$ balas. O processo prossegue até o adversário ser reduzido a $2^1 - 1 = 1$ bala.

PROBLEMA 6

Pintam-se de preto todas as faces de um cubo de madeira cujas arestas medem 10 centímetros. Por cortes paralelos às faces, o cubo é dividido em 1.000 cubos pequenos, cada um com arestas medindo 1 centímetro. Determine:

a) O número de cubos que não possuem nenhuma face pintada de preto.
b) O número de cubos que possuem uma única face pintada de preto.
c) O número de cubos que possuem exatamente duas faces pintadas de preto.
d) O número de cubos que possuem três faces pintadas de preto.

Solução

Estão sem nenhuma face pintada, os cubos interiores ao cubo maior. Portanto devem ser retiradas uma fila de cima e uma fila de baixo, uma da frente e outra de trás, e uma de cada lado, ficando assim com um cubo de aresta 8 que contém $8^3 = 512$ cubos pequenos.

a) Estão com uma face pintada aqueles que pertencem a uma face mas não possuem lado comum com a aresta do cubo maior, isto é, $8^2 = 64$ em cada face. Como são seis faces, temos $6 \times 64 = 384$ cubos pequenos.

b) Estão com duas faces pintadas aqueles que estão ao longo de uma aresta mas não no vértice do cubo maior, isto é, 8 cubos em cada aresta. Como são 12 arestas, temos $8 \times 12 = 96$ cubos pequenos.

c) Estão com 3 faces pintadas aqueles que estão nos vértices do cubo maior, ou seja, 8 cubos pequenos.

Nível 2

PROBLEMA 1

Que frações devem ser retiradas da soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$ para que a soma das restantes seja igual a 1? Dê todas as soluções.

Solução

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}=\frac{60}{120}+\frac{40}{120}+\frac{30}{120}+\frac{20}{120}+\frac{15}{120}+\frac{12}{120}+\frac{10}{120}\ (*)$$

Devemos escrever 120 como soma de algumas parcelas 60, 40, 30, 20, 15, 12, 10. As soluções possíveis são 60 + 40 + 20 = 120
60 + 30 + 20 + 10 = 120.

Assim, podemos remover $\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{12}$ ou $\frac{1}{3},\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{10}$.

Evidentemente 15 e 12 não podem aparecer, pois a soma não seria múltipla de 10 nesse caso.

PROBLEMA 2

Veja Problema 3 do Nível 1.

PROBLEMA 3

Cinco cartões numerados com 3, 4, 5, 6 e 7, respectivamente, são colocados em uma caixa. Os cartões são retirados da caixa, um de cada vez e colocados sobre a mesa. Se o número de um cartão retirado é menor do que o número do cartão imediatamente anterior, então este cartão imediatamente anterior é colocado de volta na caixa. O procedimento continua até que todos os cartões estejam sobre a mesa. Qual é o número máximo de vezes que retiramos cartões da caixa?

Solução

O número máximo de vezes que retiramos cartões da caixa é 15, o que corresponde à seqüência de cartões retirados 7, 6, 5, 4, 3, 7, 6, 5, 4, 7, 6, 5, 7, 6, 7. De fato, dentre os primeiros 5 cartões há necessariamente um que é menor que o cartão seguinte, e que portanto não voltará mais para a caixa, o mesmo acontecendo para pelo menos um cartão dentre os 4 seguintes, depois para pelo menos um dentre os 3 seguintes, depois para pelo menos um dentre os dois seguintes, sobrando no máximo um cartão, que será o último a ser retirado da caixa.

PROBLEMA 4

Em um triângulo acutângulo ABC o ângulo interno de vértice A mede 30^0. Os pontos B_1 e C_1 são os pés das alturas traçadas por B e C, respectivamente e os pontos B_2 e C_2 são médios dos lados AC e AB, respectivamente. Mostre que os segmentos B_1C_2 e B_2C_1 são perpendiculares.

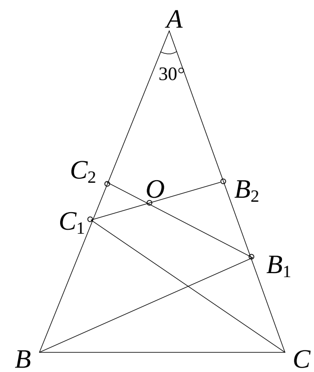
Solução

O segmento B_1C_2 é uma mediana do triângulo AB_1B e portanto $AC_2 = B_1C_2$ e $C_2\hat{B}_1A = B\hat{A}C = 30°$.

Daí $B\hat{C}_2B_1 = C_2\hat{B}_1A + B\hat{A}C = 60°$.

Analogamente, $A\hat{C}_1B_2 = 30°$. Finalmente

$C_1\hat{O}C_2 = 180° - B\hat{C}_2B_1 - A\hat{C}_1B_2 = 90°$



PROBLEMA 5

Veja Problema 5 do Nível 1.

PROBLEMA 6

Pintam-se de preto todas as faces de um cubo de madeira cujas arestas medem n centímetros onde $n \geq 3$. Por cortes paralelos às faces, o cubo é dividido em n^3 cubos pequenos, cada um com arestas medindo 1 centímetro. Sabendo que o número total de cubos pequenos com exatamente uma face pintada de preto é igual ao número de cubos pequenos apresentando todas as faces sem pintura, determine o valor de n.

Solução

Um cubo pequeno que não possui qualquer face pintada provém do interior do cubo grande. Isto significa que esse cubo pequeno é parte de um cubo de lado $n - 2$, obtido quando retiramos uma unidade de cada face do cubo original. Assim, existem $(n - 2)^3$ cubos pequenos não pintados. Por outro lado, um cubo pequeno com uma face pintada provém da face do cubo original, mas não tendo qualquer parte da aresta deste cubo. Assim, existem $6(n - 2)^2$ cubos pequenos com face pintada. Portanto, $(n - 2)^3 = 6(n - 2)^2$, com $n > 2$. Logo, $n - 2 = 6$, ou seja, $n = 8$.

Nível 3

PROBLEMA 1

Veja Problema 3 do Nível 2.

PROBLEMA 2

Veja problema 5 do Nível 1.

PROBLEMA 3

Uma reta que passa pelos pontos médios de dois lados opostos de um quadrilátero convexo forma ângulos iguais com ambas as diagonais. Mostre que as duas diagonais têm o mesmo comprimento.

Solução

Sejam $ABCD$ o quadrilátero, M,N,P e Q os pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA, respectivamente. MN e PQ são paralelos à diagonal AC e medem a metade de seu comprimento, enquanto NP e QM são paralelos à diagonal BD e medem a metade de seu comprimento. Assim, $MNPQ$ é um paralelogramo. As condições do problema dizem que a reta que passa pelos pontos médios de dois lados opostos de $ABCD$ (digamos $\overline{MP}$, sem perda de generalidade) formam ângulos iguais com $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, portanto com $\overline{PQ}$ e $\overline{NP}$, donde MP é bissetriz de $N\hat{P}Q$. Logo $MNPQ$ deve ser um losango, donde $\overline{MN} = \overline{NP}$, e portanto $\overline{AC} = \overline{BD}$ (pois $\overline{MN} = \overline{AC}/2$ e $\overline{NP} = \overline{BD}/2$).

PROBLEMA 4

Sobre os lados AB e AC de um triângulo acutângulo ABC são construídos, exteriormente ao triângulo, semicírculos tendo estes lados como diâmetros. As retas contendo as alturas relativas aos lados AB e AC cortam esses semicírculos nos pontos P e Q. Prove que $AP = AQ$.

Solução

Sejam M o pé da altura relativa ao lado AB. Como o triângulo APB é retângulo em P, e PM é a altura de P em relação a AB temos $\overline{AP}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AM} = \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos B\hat{A}C$. Analogamente mostra-se que $\overline{AQ}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AB} \cdot \cos B\hat{A}C$. Portanto, $\overline{AP} = \overline{AQ}$.

PROBLEMA 5

Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ uma função tal que

$f(1) = 999$ e $f(1) + f(2) + ... + f(n) = n^2 \cdot f(n)$ para todo n inteiro positivo.

Determine o valor de $f(1998)$.

Solução

Calculemos alguns valores de $f(n)$:

$f(1) = 999;\ f(1) + f(2) = 2^2 \cdot f(2) \Rightarrow 3f(2) = 999 \Rightarrow f(2) = 333$

$f(1) + f(2) + f(3) = 3^2 \cdot f(3) \Rightarrow 8f(3) = 999 + 333 \Rightarrow f(3) = \dfrac{333}{2}$

$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 4^2 \cdot f(4) \Rightarrow 15f(4) = 999 + 333 + \dfrac{333}{2} \Rightarrow f(4) = \dfrac{999}{10}$

Assim, temos $f(1) = \dfrac{999}{1}$, $f(2) = \dfrac{999}{3}$, $f(3) = \dfrac{999}{6}$, $f(4) = \dfrac{999}{10}$, e é razoável conjecturar que $f(n) = \dfrac{999}{1 + 2 + ... + n} = \dfrac{1998}{n(n+1)}$ Para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos provar esse fato: Para $n \geq 2$ temos

$f(1) + f(2) + ... + f(n) = n^2 f(n) \Rightarrow (n^2 - 1) f(n) = f(1) + f(2) + ... + f(n-1) \Rightarrow$

$f(n) = \dfrac{f(1) + f(2) + ... + f(n-1)}{n^2 - 1}$.

Por hipótese de indução,

$f(k) = \dfrac{1998}{k(k+1)} = \dfrac{1998}{k} - \dfrac{1998}{k+1}$, para $k = 1, 2, \ldots, n - 1$, e portanto

$f(1) + f(2) + ... f(n-1) = \dfrac{1998}{1} - \dfrac{1998}{2} + \dfrac{1998}{2} - \dfrac{1998}{3} + ... + \dfrac{1998}{n-1} - \dfrac{1998}{n} = \dfrac{1998}{1} -$

$\dfrac{1998}{n} = \dfrac{1998(n-1)}{n} \Rightarrow f(n) = \dfrac{1998(n-1)}{n(n^2-1)} = \dfrac{1998}{n(n+1)}$ pois $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$),

como queríamos demonstrar.

Fazendo $n = 1998$ temos $f(1998) = \dfrac{1998}{1998 \cdot 1999} = \dfrac{1}{1999}$.

PROBLEMA 6

O menor múltiplo de 1998 que possui apenas os algarismos 0 e 9 é 9990. Qual é o menor múltiplo de 1998 que possui apenas os algarismos 0 e 3?

Solução

$1998 = 2 \times 999 = 2 \times 3^3 \times 37$. Um número formado apenas pelos algarismos 0 e 3 é múltiplo de 3^3 se e somente se o número de algarismos 3 é múltiplo de 9 (pois ao dividi-lo por 3 obtemos um número que possui apenas os algarismos 0 e 1 que deve ser múltiplo de 9, o que ocorre se e só se o número de algarismos 1 é múltiplo de 9). Assim, o número desejado deve ter pelo menos 9 algarismos 3, e deve terminar por 0, por ser par. O menor número com essas propriedades é 3333333330, que é múltiplo de 1998 pois é par, é múltiplo de 3^3 e é múltiplo de 37 por ser múltiplo de 111 (é igual a 111×30030030)).

Você sabia...

Que é possível (teoricamente) dividir uma bolinha de gude num número finito de pedaços, remontá-los com movimentos rígidos e obter uma bola (sem buracos) do tamanho da terra com uma manada de elefantes em cima **?** Isso é conseqüência do chamado ***Paradoxo de Banach-Tarski***.

Você sabia...

Que o conjunto de valores positivos assumidos pelo polinômio

$$
\begin{aligned}
&(k + 2)\{1-([wz + h + j - q]^2 + [(gk + 2g + k + 1) \cdot (h + j) + h - z]^2 + \\
&[16(k + 1)^3 \cdot (k + 2)\,(n + 1)^2 + 1 - f^{\,2}]^2 + [2n + p + q + z - e]^2 + \\
&[e^3 \cdot (e + 2) \cdot (a + 1)2 + 1 - o^2]^2 + [(a^2 - 1)\, y^2 + 1 - x^2]^2 + \\
&[16r^2y^4 \cdot (a^2- 1) + 1 - u^2]^2 + [((a + u^2 \cdot (u^2 - a))^2 - 1) \cdot (n + 4dy)^2 + \\
&1 - (x + cu)^2]^2 + [(a^2 - 1)\ell^{\,2} + 1 - m^2]^2 +[ai + k + 1 - \ell - \mathrm{i}]^2 + [n + \ell + v - y]^2 + \\
&[p + \ell\,(a - n - 1) + b\,(2an +2a - n^2 - 2n - 2) - m]^2 + [q + y\,(a - p - 1) + \\
&s \cdot (2ap + 2a - p^2 - 2p - 2) - x]^2 + [z +p\ell\,(a - p) + t\,(2ap - p^2 - 1) - pm]^2)\}
\end{aligned}
$$

quando as variáveis *a, b, c, ..., z* assumem valores naturais é o conjunto dos números primos **?**

XX OLIMPIADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e melhores soluções da Terceira Fase

Nível 1

PROBLEMA 1

Considere a tabela 3 × 3 abaixo, onde todas as casas, inicialmente, contém zeros:

0	0	0
0	0	0
0	0	0

Para alterar os números da tabela, é permitida a seguinte operação: escolher uma sub-tabela 2 × 2 formada por casas adjacentes, e somar 1 a todos os seus números.

a) Diga se é possível, após uma seqüência de operações permitidas, chegar à tabela abaixo:

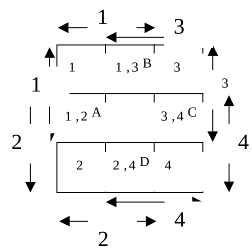
7	9	2
15	25	12
8	18	10

b) Complete o quadro abaixo, sabendo que foi obtido por uma seqüência de operações permitidas:

14		
19	36	
	14	

Solução de Fábio Dias Moreira.

Antes de resolver o problema, é preciso notar que existem quatro quadrados 2 × 2 no quadrado 3 × 3. Analisando-os, percebemos que os quadrados do canto são afetados por apenas um deles. Com isso, deduzimos que cada número nos quadradinhos do canto indica o número de vezes que a operação permitida foi utilizada com o quadrado 2 × 2 que continha o quadradinho do canto. Os quadradinhos do lado são afetados por dois quadrados diferentes, assim como no diagrama abaixo.



Como a cada utilização da operação permitida, se for utilizada uma das sub-tabelas escritas em um dos quadrados laterais, o quadradinho lateral aumentará em um, concluímos que o valor do quadradinho lateral é igual à soma dos dois quadradinhos da ponta adjacentes. O quadradinho central, como é afetado por todos os quatro quadrados, é fácil deduzir que ele nada mais é que o número de operações aplicados na tabela.

a) Como os números dos quadradinhos do canto representam quantas vezes a sub-tabela que contém aquele quadradinho foi utilizada para fazer uma operação e o quadradinho central o número de operações feitas, podemos concluir que de acordo com o diagrama, $A + B + C + D = E$*. Mas no nosso caso, temos 7 + 2 + 8 + 10 = 25, ou 27 = 25. Absurdo. Concluímos então que é impossível obter esta tabela. Outra prova é que a cada operação, aumentamos em um o valor de quatro casos, mantendo o resultado divisível por quatro. No nosso caso, a soma dos números é 106, que não é divisível por 4.

A	F	B
G	E	I
C	H	D

b) No diagrama acima, com os raciocínios antes do problema, temos: $G = A + C$, $F = A + B$, $I = B + D$ e $H = C + D$. Portanto, no problema, 19 = 14 + C, onde C = 5. Com isso, 14 = 5 + D, onde D = 9. Prosseguindo com base em *, 36 = 5 + 9 + 14 + B, onde B = 8. F = 8 + 14 $\Rightarrow$ F = 22. Finalizando, 1 = 8 + 9 = 17. A tabela é

14	22	8
19	36	17
5	14	9

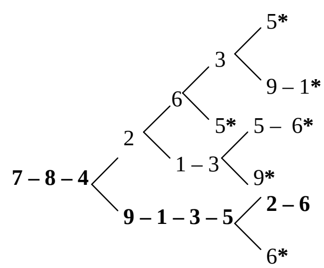
PROBLEMA 2

Encontre uma maneira de se escrever os algarismos de 1 a 9 em seqüência, de forma que os números determinados por quaisquer dois algarismos consecutivos sejam divisíveis ou por 7 ou por 13.

Solução de Andressa Rissetti Paim.

Múltiplos de 7 : 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98.
Múltiplos de 13 : 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91.

Como nenhum dos múltiplos de 7 e 13, a não ser 77, terminava em 7, na seqüência, 7 deveria ser o 1°. número, então, o número formado foi **784913526.**



Nota do editor: * significa que não dá para continuar sem repetir um número já usado.

PROBLEMA 3

Em um jogo existem 20 buracos vazios em fila e o jogador deve colocar um pino em cada buraco de acordo com as seguintes regras:

a) Se colocar um pino em um buraco e se os dois buracos vizinhos estiverem vazios, o pino permanece.
b) Se colocar um pino em um buraco e se um dos buracos vizinhos estiver ocupado, o pino deste buraco vizinho deve ser retirado.
c) Se colocar um pino em um buraco e se os dois buracos vizinhos estiverem ocupados, então um dos pinos vizinhos deve ser retirado.

Determine qual é o número máximo de pinos que podem ser colocados.

Solução de Caio Magno Castro.
O número máximo é 19. Veja a explicação abaixo:
Começo colocando um pino no primeiro buraco da esquerda, pulo um buraco e coloco outro pino. Depois eu coloco um pino no buraco que está entre os dois e retiro o da direita. Depois pulo uma casa do segundo pino e coloco um terceiro pino. Depois coloco um pino entre o terceiro e o segundo pino e retiro o terceiro pino, o da direita. E faço essa operação sucessivamente até chegar ao último pino.

PROBLEMA 4
Sete números naturais são escritos em círculo. Sabe-se que, em cada par de números vizinhos, um deles divide o outro. Mostre que há dois números não vizinhos com a mesma propriedade (isto é: um deles divide o outro).

Solução de Márcio Jun Hisamoto.

b ***a***
g
c
f
d ***e***

Em cada dois números adjacentes pelo menos um é múltiplo do outro; desse modo é impossível fechar o círculo sem que algum número divida um outro número que não seja adjacente a ele, pois se ***a*** for múltiplo de ***b*** e ***b*** for múltiplo de ***c***, então ***c*** divide ***a*** e já haverá dois números não vizinhos com a propriedade. Se ***a*** for múltiplo de ***b*** e ***c*** for múltiplo de ***b*** e ***d***, ***e*** for múltiplo de ***d*** e ***q*** e o ***g*** não existisse, poderia não haver dois números não vizinhos com a mesma propriedade mas como o ***g*** existe ele terá de ser múltiplo de ***f*** e divisor de ***a***. Desse modo ***f*** terá de ser divisor de ***a***, sendo que com isso haverá a propriedade.

Nível 2

PROBLEMA 1
Prove que em qualquer pentágono convexo existem dois ângulos internos consecutivos cuja soma é maior ou igual a 216°.

Solução de Thiago Barros Rodrigues Costa.
Considere *A, B, C, D* e *E* os vértices do pentágono.

Suponha que não existam dois ângulos consecutivos cuja soma seja maior ou igual a 216°. Assim:

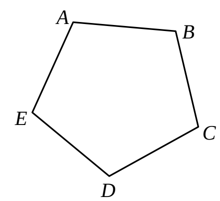
$\hat{A} + \hat{B} < 216°$

$\hat{B} + \hat{C} < 216°$

$\hat{C} + \hat{D} < 216°$

$\hat{D} + \hat{E} < 216°$

$\hat{E} + \hat{A} < 216°$



Somando membro a membro: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{D} + \hat{E} + \hat{E} + \hat{A} < 5216°$

$2(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E}) < 1080° \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} < 540°$, mas a soma dos ângulos internos de um pentágono é 540°*. Logo $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = 540°$ é absurdo. Então pelo menos 2 ângulos consecutivos tem soma maior ou igual a 216°.

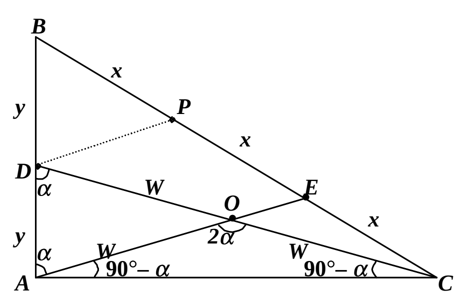
***Lema**: A soma dos ângulos de um pentágono é 540°.

Prova: Seja *P* um ponto interior a *ABCDE*, logo *P* vai formar 5 triângulos no pentágono, a soma de todos os ângulos *P* dos triângulos é 360°. E a soma dos ângulos que restam é justamente a soma dos ângulos de *ABCDE*. A soma dos ângulos do pentágono é 5180° – 360° = 540°.

PROBLEMA 2

No triângulo *ABC*, *D* é o ponto médio de *AB* e *E* o ponto do lado *BC* tal que $BE = 2 \cdot EC$. Dado que os ângulos $A\hat{D}C$ e $B\hat{A}E$ são iguais, encontre o ângulo $B\hat{A}C$.

Solução de Daniel Pinheiro Sobreira.



Chamarei de P o ponto médio de $\overline{BE}$. E chamarei $BP = PE = EC = X$. e $BD = DA = y$.

A interseção de $\overline{AE}$ com $\overline{DC}$, chamarei de O. O triângulo DOA é isósceles, portanto $\overline{AO} = \overline{DO}$. Chamarei $\overline{AO}$ de W.

O segmento DP é a base média do triângulo ABE, pois D é o ponto médio de $\overline{AB}$ e P é o ponto médio de $\overline{BE}$, então DP // AE. Conseqüentemente os triângulos OCE e DCP são semelhantes, na razão de 1/2. Então temos

$$\frac{\overline{CO}}{\overline{CO}+W} = 1/2 = D, \quad 2\overline{CO} = \overline{CO} + W = D, \quad W = \overline{CO}.$$

Chamarei o ângulo $O\hat{A}D$ de α, $\angle ADO$, também será α, e o $\angle ADC$, será 2α, pois é externo ao triângulo DOA. Como $\overline{AO} = W$ e $OC = W$ o triângulo ADC é isósceles e o ângulo da base é $90° - \alpha$.

O ângulo $BAC = \alpha + 90° - \alpha$, $B\hat{A}C = 90°$.

PROBLEMA 3

Veja problema 3 do Nível 1.

PROBLEMA 4

São dados 15 números naturais maiores que 1 e menores que 1998 tais que dois quaisquer são primos entre si. Mostre que pelo menos um desses 15 números é primo.

Solução de Humberto Silva Naves.

Teorema: Dado um número n, composto, então ele possui um fator ($\neq 1$) menor ou igual à raiz quadrada deste número.

Prova: Se $n = a \cdot b$, podemos ter ou $a < \sqrt{n}$, $a = \sqrt{n}$ ou $a > \sqrt{n}$:

1.- $a = \sqrt{n}$

2.- $a < \sqrt{n}$

3.- $a > \sqrt{n} \Rightarrow b = \dfrac{n}{a} < \dfrac{n}{\sqrt{n}} < \sqrt{n}$

Em qualquer caso, temos um fator menor ou igual a $\sqrt{n}$ e diferente de 1.

Resposta: Dado $1 < n < 1998$, se ele não for primo, ele tem que ter um fator primo menor que $\sqrt{1998}$, ou seja, um fator primo, menor que 45. Como só existem 14 primos menores que 45, e são 15 números, então um desses não terá fator primo menor que 45, logo será primo. (Pelo Corolário do teorema anterior.)

Nível 3

Primeira Prova.

PROBLEMA 1

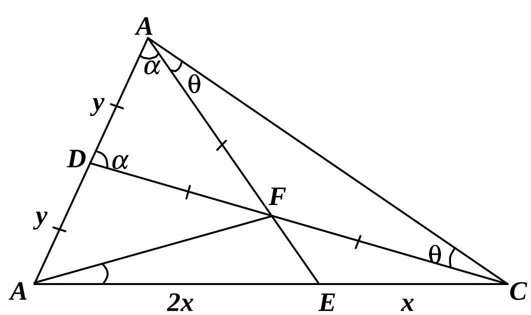
Veja Problema 4 do Nível 2.

PROBLEMA 2

No triângulo ABC, D é o ponto médio de AB e E o ponto do lado BC tal que $BE = 2 \, . \, EC$. Dado que os ângulos $A\hat{D}C$ e $B\hat{A}E$ são iguais, encontre o ângulo $B\hat{A}C$.

Veja a solução do Problema 2 do Nível 2.

Solução alternativa de Fabricio Siqueira Benevides.



Seja $F = AE \cap CD$. Denotamos por $[XYZ]$ a área do triângulo XYZ.
Veja que $[ABE] = 2 \cdot [ACE]$ pois possuem a mesma altura relativa a BE e EC respectivamente e $DE = 2 \cdot EC$. Analogamente $[BFE] = 2 \cdot [FEC]$. Temos:
$[ABE] = 2 \cdot [ACE]$ (**I**)
$[BFE] = 2 \cdot [FEC]$ (**II**)

I – II $\Rightarrow [ABE] - [BFE] = 2 \cdot ([ACE] - [FEC]) \Rightarrow [ABF] = 2 \cdot [AFC]$.
Só que: $[ABF] = 2 \cdot [ADF]$ (mesma altura relativa a BA e DA respectivamente e $BA = 2 \cdot DA$) Donde $2 \cdot [ADF] = 2 \cdot [AFC] \Rightarrow [ADF] = [AFC]$.
Como esses possuem a mesma altura relativa a DF e FC respectivamente,

temos: $DF = FC \Rightarrow F\hat{A}C = A\hat{C}F = \theta$

Mas $\alpha = A\hat{D}C = B\hat{A}E \Rightarrow DF = AF$. Daí, $DF = AF = FC$ e CDA é retângulo em $\hat{A}$.

Prova: $\Delta ADC : \alpha + \alpha + \theta + \theta + \theta = 180° \Rightarrow \alpha + \theta = 90° \Rightarrow D\hat{A}C = 90°$
Logo $B\hat{A}C = 90°$ é o que queríamos achar.

PROBLEMA 3

Duas pessoas disputam um jogo da maneira descrita a seguir.
Inicialmente escolhem dois números naturais: $n \geq 2$ (o número de rodadas) e $t \geq 1$ (o incremento máximo).
Na primeira rodada o jogador A escolhe um natural $m_1 > 0$ e, posteriormente, o jogador B escolhe um natural positivo $n_1 \neq m_1$.
Para $2 \leq k \leq n$, na rodada k o jogador A escolhe um natural m_k com $m_{k-1} < m_k \leq m_{k-1} + t$ e posteriormente o jogador B escolhe um natural n_k com $n_{k-1} < n_k \leq n_{k-1} + t$. Após essas escolhas, nessa k-ésima rodada, o jogador A ganha mdc (m_k, n_{k-1}) pontos e o jogador B ganha mdc (m_k, n_k) pontos. Ganha o jogo o jogador com maior pontuação total ao fim das n rodadas. Em caso de pontuações totais iguais, o jogador A é considerado vencedor.
Para cada escolha de n e t, determine qual dos jogadores possui estratégia vencedora.

Solução de Rui Lopes Viana Filho.

Nota: A solução usa a notação abreviada $(m, n) = mcd(m,n)$.
Seja S um super-número. Esse super-número é divisível por todos os naturais.
Para B ganhar sempre, basta fazer $n_k = S + m_k$. Pois, na rodada k, B ganha $(n_k, m_k) = m_k$ pontos e A ganha $(S + m_{k-1}, m_k)$ pontos. Assim A ganha no máximo m_k pontos, temos que $m_k \mid S + m_{k-1} \Rightarrow m_k \mid m_{k-1}$, mas $m_k > m_{k-1}$. Assim A nunca ganhará m_k pontos. Ganhará sempre menos que m_k. Portanto

B no total ficará com mais pontos que A, já que ganha mais em todas as rodadas.

Obs. É claro que não existe um super-número, mais para cada n, t e m_1, B pode criar um número, que não chega a ser super, mas também serve. Basta fazer:

$S = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot p_\theta)^M$, com θ e M suficientemente grandes!, Assim B sempre ganha!

Explicando melhor:

Após A escolher m_1, B sabe que o maior número que A pode escolher é

$m_1 + (n - 1)\,t$

B só precisa fazer

$$S = \mathop{\pi}_{j=m_1}^{m_1+(n-1)t} j \ \text{ e } \ n_k = S + m_k$$

Justificativa:

$m_1 < m_i \le m_1 + (n - 1)\,t \Rightarrow m_i \mid S$

Na rodada *k:*

- B ganha $(m_k, n_k) = m_k$, já que $m_k \mid S + m_k$

- A ganha $(m_k, n_{k-1}) = (m_k, S + m_{k-1})$

Como

$$\begin{cases} m_k > m_{k-1} \\ \\ m_k \mid S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_k \ \text{ não divide } m_{k-1} \\ \\ m_k \mid S \end{cases} \Rightarrow \ m_k \ \text{ não divide } (m_{k-1} + S) \Rightarrow m_k > (m_k, n_{k-1})$$

Portanto, a cada rodada B ganha mais pontos que A, e portanto B ganha o jogo.

Obs. $m_{k-1} < m_k \le m_{k-1} + t \Rightarrow S + m_{k-1} < S + m_k \le S + m_{k-1} + t \Rightarrow$

$\Rightarrow n_{k-1} < n_k \le n_{k-1} + t$

Resposta: B sempre ganha (se for esperto)!!!

Nível 3

Segunda Prova.

PROBLEMA 4

Dois meninos jogam o seguinte jogo. O primeiro escolhe dois números inteiros diferentes de zero e o segundo monta uma equação do segundo grau usando como coeficientes os dois números escolhidos pelo primeiro jogador

e 1998, na ordem que quiser (ou seja, se o primeiro jogador escolhe a e b o segundo jogador pode montar a equação $1998x^2 + ax + b = 0$, ou $bx^2 + 1998x + a = 0$, etc.) O primeiro jogador é considerado vencedor se a equação tiver duas raízes racionais diferentes.
Mostre que o primeiro jogador pode ganhar sempre.

Solução de Fabricio Siqueira Benevides.
Inicialmente veja que, se num polinômio $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, tivermos $a_n + \ldots a_1 + a_0 = 0$, teremos $p(1) = 0$ e 1 é raiz de p. Dessa forma se o primeiro jogador escolhe $b = -(1998 + a)$, 1 será raiz da equação do segundo grau que o seu oponente irá montar.
Se um polinômio tem coeficientes inteiros (na verdade vale para coeficientes racionais) e possui uma raiz irracional do tipo $a + b\sqrt{r}$ (r não é quadrado perfeito), então $a - b\sqrt{r}$ também é raiz. Ou seja, as raizes irracionais vêm aos pares. No caso de uma equação de segundo grau, e coeficientes inteiros, ambas as raizes são irracionais, ou ambas são racionais.
No nosso caso, como 1 já é raiz, a outra raiz será racional. Basta ver então, apenas se 1 não é raiz multipla (pois queremos que as raizes sejam distintas). Para isso basta escolher a adequadamente.
Se o primeiro jogador escolher os números $a = n \cdot 1998$, e $b = -(n + 1)\,1998$, $n \geq 2 \in \mathbb{N}$, ele ganha. (1 não será raiz múltipla e a equação terá duas raizes racionais distintas.)

Obs. É possivel obter soluções com $a + b + 1998 \neq 0$, por exemplo com $\{a, b\} = \{2040, -5478\}$ (solução obtida com o auxílio de um computador.)

PROBLEMA 5
Determine todas as funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que satisfazem
$f(2f(x)) = x + 1998$ para todo $x \in \mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$.

Solução de Emanuel Augusto de Souza Carneiro.

1° Passo. f é injetiva.
Prova: Suponha que exista $k \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) = f(y) = k$ para $x, y \in \mathbb{N}$ e $x \neq y$. Daí $f(x) = f(y) \Rightarrow 2f(x) = 2f(y) \Rightarrow f(2f(x)) = f(2f(y)) \Rightarrow x + 1998 = y + 1998 \Rightarrow x = y$. Absurdo! Logo f é injetiva.

2° Passo. f e sobrejetiva no contradomínio$\{k\in \mathbb{N} \mid k \geq 1998\}$, isto é, para todo $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1998\ \exists\ \alpha \in \mathbb{N}$ tal que $f(\alpha) = k$.

Prova: Se $k \geq 1998$ faça $k = x + 1998$ para $x \geq 0$ e $x \in \mathbb{N}$, logo
$f(2f(x)) = x + 1998 = k$
Tome então $2f(x) = \alpha \in \mathbb{N}$.
Logo f é sobrejetiva no contradomínio acima.

3° Passo. Então para todo $k \in A = \{k\in \mathbb{N} \mid k \geq 1998\}$ existe um único natural x (que chamaremos $f'(k) = x$) tal que $f(x) = k$.

Obviamente existe um natural i ímpar tal que $f(i) = w \geq 1998$ pois não podemos ter $0 \leq f(i) \leq 1997$ para todos os naturais ímpares porque a função f é injetiva e de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ (princípio de casa de pombos). Para esse w teremos $f'(w) = i$, pois $f(i) = w$. Por outro lado faça $w = a + 1998$ com $a \in \mathbb{N}$ Pela definição: $f(2f(a)) = a + 1998 = w$. Logo $f'(w) = 2f(a)$.

Como $f'(w)$ é único, pela conclusão 1 $\Rightarrow i = 2f(a)$ como $f(a) \in \mathbb{N} \Rightarrow i$ é par, absurdo!

Conclusão 2. Não existe função desse tipo.

PROBLEMA 6

Dois matemáticos, perdidos em Berlim, chegam à esquina da rua Barbarossa com a rua Martin Luther, e precisam chegar à esquina da rua Meininger com a rua Martin Luther. Infelizmente eles não sabem para que lado fica a rua Meininger, nem a que distância ela está, logo são obrigados a ir e voltar ao longo da rua Martin Luther até chegaram à esquina desejada.

Qual é o menor valor para o número positivo K tal que eles podem ter certeza de que se há N quarteirões (ou quadras) entre as ruas Barbarossa e Meininger então eles conseguem chegar ao destino andando no máximo KN quarteirões (ou quadras)?

Solução (dos matemáticos perdidos em Berlim)

Este problema é baseado numa situação real, ocorrida com os matemáticos *Nicolau Saldanha* e *Carlos Gustavo Moreira*, que se encontravam em Berlim por ocasião do Congresso Internacional de Matemática de 1998. Era de noite, não havia ninguém na Martin-Luther-Strasse a quem pedir informações e eles queriam chegar rápido ao destino. A idéia do problema era que eles andassem juntos. Apareceram soluções em que os matemáticos se separavam (o que não havia sido previsto), as quais foram avaliadas caso a caso. Como os matemáticos não sabiam para que lado nem a que distância estava a Meiningerstrasse, deviam adotar uma estratégia do seguinte tipo:

andar a_1 quarteirões para um lado (digamos o direito), depois voltar ao ponto inicial e andar a_2 quarteirões para a esquerda, depois a_3 para a direita, depois a_4 para a esquerda e assim sucessivamente, onde a_1, a_2, a_7…são números inteiros positivos com $a_1 < a_3 < a_5 < \dots$ e $a_2 < a_4 < a_6 <\dots$ até encontrar a Meiningerstrasse. Os piores casos são quando a Meininger está a $a_{2k+1} + 1$ quarteirões à direita ou $a_{2k} + 1$ à esquerda da Barbarossastrasse, com k natural (convencionamos $a_0 = 0$).

Nesses casos, temos que entre o ponto inicial e o destino há $a_n + 1$ quarteirões, e os matemáticos andam no total $2a_1 + 2a_2 + \dots + 2a_n + 2a_{n+1} + a_n + 1$ quarteirões até chegarem ao destino (com $n = 2k+1$ ou $n = 2k$). Assim, devemos ter $2a_1 + 2a_2 + \dots + 2a_n + 2a_{n+1} + a_n + 1 \le k\,(a_n + 1)$, ou seja, $S_{n+1} \le \left(\frac{k-1}{2}\right)(a_n + 1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Para $k = 9$ existem estratégias que satisfazem as condições do problema, por exemplo tomando $a_m = 2^m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. De fato, teremos $S_n + 1 = 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 2 < 4\ (2^n + 1) = \frac{k-1}{2}(a_n + 1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Mostraremos que 9 é o menor k possível. Seja $k < 9$. Então $c = \frac{k-1}{2}$ é menor que 4. Se k satisfaz as condições do problema, deve haver uma sequência (a_n) como acima com $S_{n+1} \le c\,(a_n + 1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $a_n = S_n - S_{n-1}$ teremos $S_{n+1} \le c\,(S_n - S_{n-1} + 1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definimos $U_n = S_n - c$, temos $U_{n+1} \le c\,(U_n - U_{n-1})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $c < 4$, $U_n > 0$ para todo $n \ge 3$, e, definindo $V_n = U_{n+1}/U_n$ para todo $n \ge 3$, teremos $V_n \le c\,(1 - 1/V_{n-1})$ para todo $n \ge 4$, onde $V_n > 0$ para todo $n \ge 3$. Entretanto, $V_n \le c\,(1 - 1/V_{n-1})$ implica $V_n - V_{n-1} \le c\,(1 - 1/V_{n-1}) - V_{n-1} =$

$$\frac{cV_{n-1} - c - V_n^{\,2} - 1}{V_{n-1}} = \frac{\frac{c^2}{4} - c - \left(\frac{c}{2} - V_{n-1}\right)^2}{V_{n-1}} \le \frac{c(c-4)}{4V_{n-1}} < 0 \Rightarrow V_n < V_{n-1}$$

para todo $n \ge 4$. Por outro lado, para todo $n \ge 4$ temos $V_n - V_{n-1} \le \frac{c(c-4)}{4V_{n-1}} \Rightarrow V_n - V_{n-1} \le \frac{c(c-4)}{4V_3}$ para todo $n \ge 4$, donde $V_n \le V_3 + \frac{(n-3)\ c(c-4)}{4V_3}$ para todo $n \ge 4$, absurdo, pois o lado direito é negativo para $n > 3 + \frac{4V_3^{\,2}}{c(4-c)}$ ❑

XX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Resultado - Primeiro Nível (5ª. e 6ª. Séries)

Nome	Cidade - Estado	Prêmio
Márcio Jun Hisamoto	**São Paulo - SP**	**Ouro**
Fábio Dias Moreira	**R. de Janeiro - RJ**	**Ouro**
Andressa Rissetti Paim	**Santa Maria - RS**	**Prata**
Henry Wei Cheng Hsu	**São Paulo - SP**	**Prata**
Natália Argene Lovate Pereira	**Jundiaí - SP**	**Prata**
Daniel Cherobini	**Santa Maria - RS**	**Prata**
Luis Eduardo de Godoi	**SJ dos Campos - SP**	**Prata**
Milton Eiji Kato	**São Paulo - SP**	**Prata**
Fabrício Henrique de Faria	**São Paulo - SP**	**Prata**
Davi Máximo Alexandrino Nogueira	**Fortaleza - CE**	**Prata**
Caio Magno Castro de Paula	**Fortaleza - CE**	**Prata**
Bruno Moreira de Souza Días	**SJ dos Campos - SP**	**Prata**
Patrícia Akemi Komura	**São Paulo - SP**	**Bronze**
Marcelo Li Koga	**São Paulo - SP**	**Bronze**
Alberto Hikaru Shintani	**São Paulo - SP**	**Bronze**
Diego Gomes Gripp	**Vitória - ES**	**Bronze**
Renato Mendes Coutinho	**Americana - SP**	**Bronze**
Antônio Monteiro Guimarães Jr.	**Campina G - PB**	**Bronze**
Leonardo Luis Desideri Freitas	**Vitória - ES**	**Bronze**
Helder Seiji Kato	**São Paulo - SP**	**Bronze**
Aline Galvão	**São Paulo - SP**	**Bronze**
Rodrigo Miyashiro Nunes dos Santos	**São Paulo - SP**	**Bronze**
João Marcos da Cunha Silva	**Fortaleza - CE**	**Bronze**
Thiago Mizuta	**São Paulo - SP**	**Bronze**
Oliveiro Ribeiro Barbosa Jr.	**Teresina - PI**	**Bronze**
Jorge Peixoto	**Goiânia - GO**	**Menção Honrosa**
Andréia Lúcio de Castro	**Goiânia - GO**	**Menção Honrosa**
Léo Jaime Zandonai	**BentoGonçalves - RS**	**Menção Honrosa**
Pedro Junqueira de Barros	**São Paulo - SP**	**Menção Honrosa**
Lucas Ikeda França	**São Paulo - SP**	**Menção Honrosa**
Paulo Roberto Sampaio Santiago	**Salvador - BA**	**Menção Honrosa**
Rafael Marini Silva	**Vila Velha - ES**	**Menção Honrosa**
Eduardo Souza Cruz	**Vitória - ES**	**Menção Honrosa**
Breno Ignácio da Silva	**Sertãozinho - SP**	**Menção Honrosa**
Diogo dos Santos Suyama	**Belo H. - MG**	**Menção Honrosa**
Flavio Schiavini Abe	**Vitória - ES**	**Menção Honrosa**

Resultado - Segundo Nível (7ª. e 8ª. Séries)

Nome	Cidade - Estado	Prêmio
Thiago Barros Rodrigues Costa	**Fortaleza - CE**	**Ouro**
Humberto Silva Naves	**Goiânia - GO**	**Ouro**
Daniel Pinheiro Sobreira	**Fortaleza - CE**	**Ouro**
Afonso de Paula Pinheiro Rocha	**Fortaleza - CE**	**Prata**
Hugo Pinto Iwata	**SJ de Rio Preto - SP**	**Prata**
Thiago da Silva Sobral	**Fortaleza - CE**	**Prata**
João Alfredo Castellani Fajardo Freire	**Salvador - BA**	**Prata**
Artur Duarte Nehmi	**São Paulo - SP**	**Prata**
Einstein do Nascimento Jr.	**Fortaleza - CE**	**Prata**
Daniel Pessôa Martins Cunha	**Fortaleza - CE**	**Prata**
Gustavo Alonso Daud Patavino	**Santos - SP**	**Prata**
Rafael de Holanda Barroso	**Fortaleza - CE**	**Bronze**
Eduardo Kunio Kuroda Abe	**São Paulo - SP**	**Bronze**
Renata Lourenção Delamanha	**Jundiaí - SP**	**Bronze**
Ricardo de Castro Palácio	**Fortaleza - CE**	**Bronze**
Helen Wei Ling Hsu	**São Paulo - SP**	**Bronze**
Frederico Pinto	**São Paulo - SP**	**Bronze**
Eduardo Famini Silva	**Salvador - BA**	**Bronze**
Victor Marchesini Ferreira	**Salvador - BA**	**Bronze**
Thalita Basso	**Jundiaí - SP**	**Bronze**
Eduardo Suaiden Klein	**R. de Janeiro - RJ**	**Menção Honrosa**
Mauricio Massao Soares Matsumoto	**São Paulo - SP**	**Menção Honrosa**
Claudia Giacomin Bof	**Aracruz - ES**	**Menção Honrosa**
Guilherme Silveira Barrozo Netto	**R. de Janeiro - RJ**	**Menção Honrosa**
Thiago Araújo Fiorio	**Fortaleza - CE**	**Menção Honrosa**
Pedro Fernando Almeida Di Donato	**SJ dos Campos - SP**	**Menção Honrosa**
Gustavo Modenesi	**São Paulo - SP**	**Menção Honrosa**
Jaquellyne Gurgel Penaforte	**Fortaleza - CE**	**Menção Honrosa**
Jordan Guimarães Lombardi	**SJ dos Campos - SP**	**Menção Honrosa**
Tiago Monteiro Fernandes	**Piracicaba - SP**	**Menção Honrosa**
Marcelo Loula Novais de Paula	**Salvador - BA**	**Menção Honrosa**

Resultado - Terceiro Nível (Ensino Médio)

Nome	Cidade - Estado	Prêmio
Emanuel Augusto de Souza Carneiro	**Fortaleza - CE**	**Ouro Prêmio especial**
Mauricio Pereira Carrari	**São Paulo - SP**	**Ouro**
Rui Lopes Viana Filho	**São Paulo - SP**	**Ouro**
Fernando Paz Cardoso	**São Paulo - SP**	**Ouro**
Fabricio Siqueira Benevides	**Fortaleza - CE**	**Ouro**
Tony Calleri França	**Fortaleza - CE**	**Prata**
Jônathas Diógenes Castello Branco	**Fortaleza - CE**	**Prata**
Glauf Sidney Duarte Moreira Jr.	**Fortaleza - CE**	**Prata**
Sergio Alvarez Araújo Correia	**Fortaleza - CE**	**Prata**
Sérgio Tadao Martins	**São Paulo - SP**	**Prata**
Lucas Heitzmann Gabrielli	**São Paulo - SP**	**Bronze**
Christian Iveson	**São Paulo - SP**	**Bronze**
Bruno Gurgel Fernandes Távora	**Fortaleza - CE**	**Bronze**
Mila Lopes Viana	**São Paulo - SP**	**Bronze**
Daniel Massaki Yamamoto	**São Paulo - SP**	**Bronze**
Daniele Véras de Andrade	**Fortaleza - CE**	**Bronze**
Mauricio Masayuki Honda	**São Paulo - SP**	**Bronze**
Leonardo Cardoso Souza	**Angra dos Reis - RJ**	**Bronze**
Daniel Nobuo Uno	**São Paulo - SP**	**Bronze**
Daniel Mourão Martins	**Fortaleza - CE**	**Bronze**
João Paulo de Tarso Ferreira	**Angra dos Reis - RJ**	**Bronze**
Evandro Makiyama de Melo	**São Paulo - SP**	**Bronze**
Christian Lyoiti Watanabe	**Angra dos Reis - RJ**	**Bronze**
Fred Olavo A. Carneiro	**Fortaleza - CE**	**Menção Honrosa**
Bruno Da Cunha Raymundo	**Rio de Janeiro - RJ**	**Menção Honrosa**
Pedro Paulo de Simoni Gouveia	**Fortaleza - CE**	**Menção Honrosa**
Carlos Alexandre Rolim Fernandes	**Fortaleza - CE**	**Menção Honrosa**
Márcio Afonso Assad Cohen	**Rio de Janeiro - RJ**	**Menção Honrosa**
Matheus de Lima Faheina	**Fortaleza - CE**	**Menção Honrosa**
Rodrigo M. Gorgoll	**São Paulo - SP**	**Menção Honrosa**
Vítor Menezes Santana	**Goiânia - GO**	**Menção Honrosa**
Alexandre Ferreira Terezan	**Rio de Janeiro - RJ**	**Menção Honrosa**
Ricardo Sallai Viciana	**São Paulo - SP**	**Menção Honrosa**
Remo H. de M. Furtado	**Fortaleza - CE**	**Menção Honrosa**
Wayne Leonardo Silva de Paula	**Belém - PA**	**Menção Honrosa**
Thiago Steiner Alfeu	**Fortaleza - CE**	**Menção Honrosa**
Márcio Reis Lopes	**Salvador - BA**	**Menção Honrosa**
Seong Ho Lee	**Santo André-SP**	**Menção Honrosa**

PROBLEMAS ANTIGOS

Eduardo Wagner

♦ Nível Intermediário.

Você sabe quando foi realizada a primeira Olimpíada de Matemática?

Foi no ano de 1894, na Hungria. Neste ano, a Sociedade de Matemática e Física da Hungria promoveu uma competição de Matemática, envolvendo todos os alunos dos últimos anos das escolas, para homenagear seu presidente Loránd Eötvös, eleito ministro da educação do país. O evento foi um sucesso, e passou a ser realizado todos os anos.

Vamos mostrar neste artigo alguns problemas dessas competições com suas soluções resumidas. Os problemas escolhidos não são muito difíceis, mas são bastante interessantes. Recomendo aos leitores pensar um pouco em cada um deles antes de ver a solução. As ferramentas exigidas são elementares (apenas no problema 2 a noção de congruência é adequada) mas as soluções necessitam de uma certa dose de criatividade.

Aproveitem!

PROBLEMA 1 – *Olimpíada de 1894*

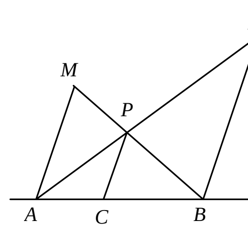
Prove que as expressões $2x + 3y$ e $9x + 5y$ são divisíveis por 17 para os mesmos pares de valores dos inteiros x e y.

PROBLEMA 2 – *Olimpíada de 1898*

Determine todos os valores do natural n, para os quais $2^n + 1$ é múltiplo de 3.

PROBLEMA 3 – *Olimpíada de 1905*

Na figura a seguir, AM, BN e CP são paralelos.



Prove que

$$\frac{1}{AM}+\frac{1}{BN}=\frac{1}{CP}$$

PROBLEMA 4 – *Olimpíada de 1906*
A seqüência a_1, a_2, a_3, …, a_n representa uma arrumação arbitrária dos números 1, 2, 3, …, n. Prove que se n é um número ímpar o produto

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3)\ \dots\ (a_n - n)$$

é um número par.

PROBLEMA 5 – *Olimpíada de 1910*
Se a, b, c são números reais tais que $a^2+b^2+c^2=1$, prove que

$$-\frac{1}{2}\le ab+bc+ca\le 1$$

PROBLEMA 6 – *Olimpíada de 1913*
Prove que para todo natural $n > 2$, tem-se $(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)^2 > n^n$.

PROBLEMA 7 – *Olimpíada de 1916*
No triângulo ABC, AD é a bissetriz do ângulo A. Prove que $AD<\sqrt{AB\cdot AC}$.

PROBLEMA 8 – *Olimpíada de 1916*
Divida os números 1, 2, 3, 4, 5 em dois conjuntos quaisquer. Prove que um dos conjuntos contém dois números e sua diferença.

SOLUÇÕES

PROBLEMA 1
Observe que $4(2x + 3y) + (9x + 5y) = 17(x + y)$. Portanto, se $2x + 3y$ for múltiplo de 17, então $9x + 5y$ também será, e vice versa.

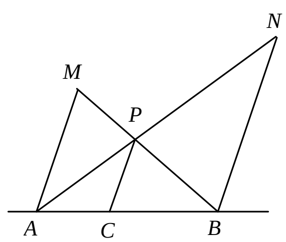
OBS: Esta aparente "mágica" não é a única forma de resolver este problema. Os leitores que conseguirem outra solução (para este ou para qualquer problema deste artigo) podem enviar suas descobertas para publicação nos próximos números da EUREKA!

PROBLEMA 2

A solução mais natural para este problema utiliza congruências. Observe que $2 \equiv (-1)$ *mód*.3. Logo, $2^n \equiv (-1)^n$ *mód*.3 e, portanto, $2^n + 1 \equiv (-1)^n + 1$ *mód*.3. Concluimos então que , $2^n + 1 \equiv 0$ *mód*.3 se, e somente se, n é ímpar.

OBS: O leitor familiarizado com indução pode conseguir outra solução.

PROBLEMA 3



Utilizando semelhança de triângulos na figura acima temos:

$$\frac{CP}{AM} = \frac{CB}{AB}$$

$$\frac{CP}{BN} = \frac{AC}{AB}$$

Somando temos:

$$\frac{CP}{AM} + \frac{CP}{BN} = \frac{AC + CB}{AB} = 1$$

Daí,

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} = \frac{1}{CP}$$

PROBLEMA 4

O produto $(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3) \ldots (a_n - n)$ possui um número ímpar de termos porque n é ímpar. Mas, a soma desses termos é zero, que é par. Como a soma de uma quantidade ímpar de números ímpares não pode ser par, concluímos que um dos termos é par e, conseqüentemente, o produto é um número par.

PROBLEMA 5

Primeira parte:

$$(a+b+c)^2 \geq 0$$
$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac \geq 0$$
$$1+2(ab+bc+ca) \geq 0$$
$$ab+bc+ca \geq -\frac{1}{2}$$

Segunda parte:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$$
$$2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca) \geq 0$$
$$1-(ab+bc+ca) \geq 0$$
$$ab+bc+ca \leq 1$$

PROBLEMA 6

A expressão do lado esquerdo da desigualdade pode ser escrita assim:

$1.n.2.(n-1).3.(n-2).\ \ldots\ .(n-2).3.(n-1).2.n.1$

Considere agora separadamente os produtos:

$1.n$, $2.(n-1)$, $3.(n-2)$, $\ldots$, $(n-2).3$, $(n-1).2$, $n.1$

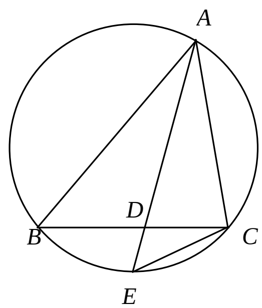
O primeiro e o último são iguais a n, mas afirmamos que qualquer um dos outros é maior que n. De fato, os produtos "do meio" são da forma $(k+1)(n-k)$ onde k assume os valores: 0, 1, 2, …, $n-1$. Como para eles, $n-k$ é maior que 1, temos que

$$(k+1)(n-k) = k(n-k) + (n-k) > k.1 + (n-k) = n$$

Logo, como n é maior que 2, o produto do lado esquerdo é maior que $n.n.n.\ \ldots\ .n = n^n$.

PROBLEMA 7

Considere a circunferência circunscrita ao triângulo *ABC*.



A bissetriz *AD* encontra a circunferência em *E*, ponto médio do arco *BC*. Como os ângulos *ABC* e *AEC* são iguais (cada um deles vale a metade do arco *AC*) e como os ângulos *BAE* e *EAC* são também iguais (porque *AD* é uma bissetriz), concluimos que os triângulos *ABD* e *AEC* são semelhantes. Daí,

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC}$$

ou seja,

$$AD \cdot AE = AB \cdot AC$$

Como *AD* é menor que *AE* temos que

$$AD \cdot AD < AB \cdot AC$$

ou seja,

$$AD < \sqrt{AB \cdot AC}$$

PROBLEMA 8

Vamos tentar dividir 1, 2, 3, 4, 5, em dois conjuntos tais que nenhum deles contém a diferença de dois de seus elementos. O 2 não pode estar no mesmo conjunto que o 1 ou o 4 porque 2 – 1 = 1 e 4 – 2 = 2. Portanto, vamos colocar o 2 em um conjunto e o 1 e o 4 no outro. O 3 não pode ficar no segundo conjunto porque 4 – 3 = 1. Logo, o 3 deve ficar no primeiro conjunto, junto com o 2. Agora, o 5 não pode ficar no primeiro conjunto porque 5 – 3 = 2, e nem pode ficar no segundo porque 5 – 4 = 1.
A divisão proposta é portanto impossível.

O LOGOTIPO DA OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Paulo Cezar Pinto Carvalho
IMPA

♦ Nível Intermediário.

Você já prestou atenção ao logotipo da Olimpíada Brasileira de Matemática, presente na capa da EUREKA! e (em sua versão animada) na página da Internet da OBM? Os círculos coloridos são uma referência ao símbolo dos Jogos Olímpicos, que é formado por 5 anéis entrelaçados representando os continentes. No logotipo da OBM, porém, estes anéis estão dispostos de um modo tal que conhecimentos matemáticos são essenciais para sua construção. O que existe de difícil em dispor cinco anéis de modo que cada um seja tangente a dois outros e, além disso, tangente a dois círculos adicionais, um interior e outro exterior? Vejamos.

Tomemos dois círculos arbitrários, um contido no outro e posicionemos um novo círculo, de modo a ser tangente a ambos. A partir daí, os demais círculos estão definidos e a Fig. 1 mostra o que ocorre no caso geral: quando tentamos colocar o último círculo, vemos que a figura não fecha, ou seja, não é possível colocar um quinto círculo tangente a dois dos quatro círculos já colocados e aos dois iniciais.

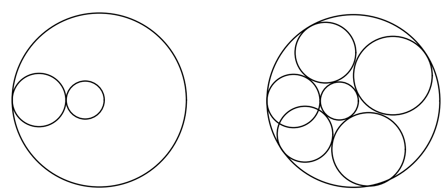


Fig. 1 - O quinto círculo não se encaixa

Será que é possível colocar o primeiro círculo colorido em outra posição, de modo a fazer com que a figura se feche exatamente? Pode-se ter uma idéia da resposta a esta pergunta observando a versão animada do logotipo. Observe que os círculos interno e externo são fixos, mas os coloridos assumem tamanhos e posições variáveis e parecem girar em torno deles (veja a Fig. 2 a seguir). Ou seja, a animação sugere que o fechamento da figura não depende da posição ou tamanho do primeiro círculo colorido, dependendo somente do tamanho e posição relativas dos círculos interno e externo!

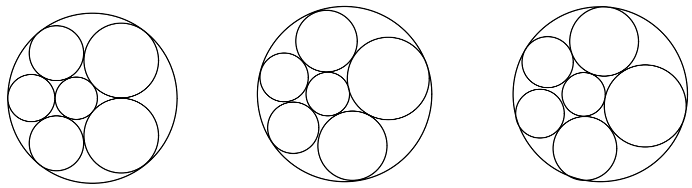


Fig. 2 - Os cinco círculos se encaixam para qualquer posição do primeiro

A explicação para estes fatos está em uma transformação geométrica dos pontos do plano chamada de **inversão** e definida do seguinte modo.

Definição: Seja O um ponto do plano e k um número real positivo. A inversão de centro O e constante k associa a cada ponto P do plano, distinto de O, o ponto P' (chamado de inverso de P) sobre a semi-reta OP tal que $OP.\ OP' = k$.

A Fig. 3 a seguir ilustra o resultado de se aplicar uma transformação de inversão a um conjunto de pontos do plano. Como o produto $OP.\ OP'$ deve ser constante, quanto mais próximo um ponto estiver de O, mais distante o seu inverso estará.

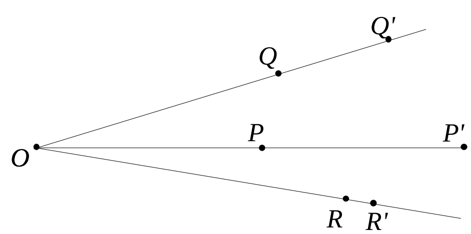


Fig. 3 - Inversão

O logotipo da OBM é construído com o auxílio deste tipo de transformação, explorando dois fatos fundamentais.

a) **Inversões são tranformações injetivas** (isto é, pontos distintos possuem inversos distintos).

Para verificar este fato, basta observar que o ponto P cujo inverso é um certo ponto P' está univocamente determinado e é justamente o inverso de P' (ou seja, a transformação inversa de uma inversão é ela mesma).

b) **O inverso de um círculo que não passa pelo centro de inversão é um outro círculo**.

Consideremos uma inversão de centro O e constante k e tomemos um círculo C que não passa por O. Seja P um ponto de C, P' o seu inverso e Q o outro ponto em que a reta OP corta C.

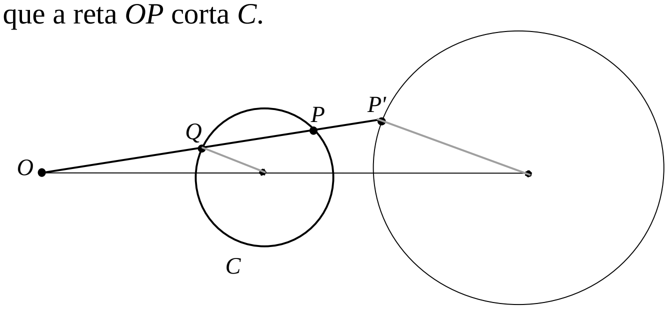


Fig. 4 - O inverso de um círculo

Uma propriedade fundamental do círculo é que o produto OP. OQ é igual a uma constante p (a *potência* de O em relação a C) para qualquer posição de P. Assim,

$$\frac{OP'}{OQ} = \frac{OP.OP'}{OP.OQ} = \frac{k}{p}$$

Portanto, o inverso de C pode ser obtido assim: para cada ponto Q de C, tomamos o ponto P' sobre a semi-reta OQ tal que $OP' = (k/p)\ OQ$. Este tipo de transformação é chamado de *homotetia* e sempre transforma uma figura em outra semelhante (ela faz uma ampliação ou redução da figura, conforme k/p seja maior ou menor que 1). Em particular, o transformado de um círculo por homotetia é sempre um outro círculo. Em resumo: o inverso de um círculo (que não passa pelo centro de inversão O) é um outro círculo, obtido através de uma homotetia de centro O (para você pensar: como será o inverso de um círculo que passa por O?).

Agora estamos em condições de entender como é construído o logotipo da OBM. O ponto de partida é a figura abaixo: dois círculos concêntricos, com cinco círculos de raios iguais encaixados entre eles.

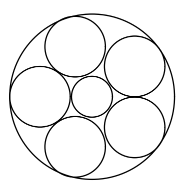


Fig. 5 – O ponto de partida: cinco círculos iguais entre círculos concêntricos

Só é possível encaixar estes 5 círculos para um determinado valor da razão R/r entre os raios dos círculos externo e interno. De modo mais geral, vejamos qual deve ser esta razão para que n círculos possam ser encaixados entre os dois círculos concêntricos. O diâmetro de cada um dos círculos iguais é a diferença $R-r$ entre os raios dos círculos concêntricos. Por outro lado, seus centros formam um polígono regular de n lados, inscrito em um círculo de raio $\frac{R+r}{2}$ concêntrico aos dois círculos iniciais, como mostra a figura abaixo.

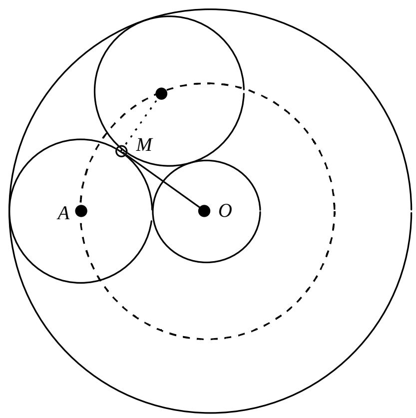


Fig. 6 - Quando é possível encaixar *n* círculos entre círculos concêntricos?

No triângulo retângulo OAM, a hipotenusa OA mede $\frac{R+r}{2}$ e o cateto AM mede $\frac{R-r}{2}$ e é oposto a um ângulo igual a $180^\circ/n$. Assim:

$$\frac{R-r}{2}=\frac{R+r}{2}\operatorname{sen}(180^\circ/n)$$

ou, desenvolvendo:

$$\frac{R}{r}=\frac{1+\operatorname{sen}(180^\circ/n)}{1-\operatorname{sen}(180^\circ/n)}$$

No nosso caso, em que n = 5, devemos ter

$$\frac{R}{r}=\frac{1+\operatorname{sen}(36^\circ)}{1-\operatorname{sen}(36^\circ)}$$

Quando os raios R e r estão nessa proporção, é possível encaixar cinco círculos iguais entre os dois círculos concêntricos.

Para terminar de formar o logotipo, tomamos o conjunto formado pelos dois círculos concêntricos e pelos cinco círculos de raios iguais encaixados entre eles e aplicamos uma transformação de inversão.

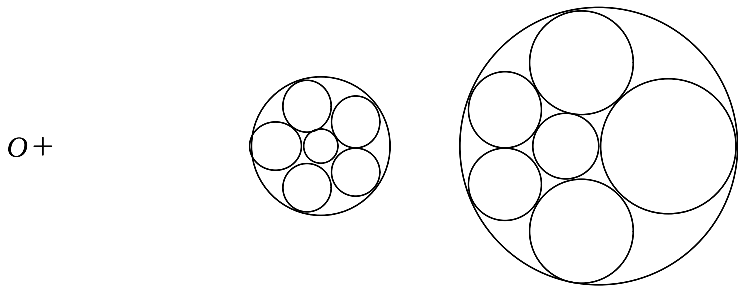


Fig. 7 – O logotipo da OBM, obtido por inversão

A menos que o centro de inversão seja o seu centro comum, os inversos dos círculos concêntricos não são concêntricos. Além disso, os inversos dos cinco círculos iguais não tem mais raios iguais, dando o aspecto irregular do logotipo. Os raios dos círculos tornam-se mais desiguais quanto mais o centro de inversão se afasta do centro dos círculos concêntricos. Note, no entanto, que as propriedades de tangência são preservadas, em virtude da injetividade da inversão, que faz com que o número de pontos de interseção de figuras seja preservado através da transformação. Para produzir a animação do logotipo, basta girar o conjunto de cinco círculos de raios iguais na figura original: seus transformados por inversão mudarão de tamanho e posição à medida que isto ocorre.

Se você quiser, pode experimentar com as propriedades dessa transformação visitando a página da OBM na Internet. Basta clicar sobre o símbolo animado da OBM, ou ir diretamente ao seguinte endereço: `http: //www.obm.org.br/logotipo.htm`. Você encontrará uma página interativa que permite variar as proporções do símbolo através da escolha do centro de inversão. Você até poderá criar símbolos diferentes mudando o número de anéis! Na verdade, os "designers" que criaram o logotipo da OBM utilizaram um programa parecido, para ajustar o tamanho e posição relativa dos anéis de modo a produzir uma figura agradável do ponto de vista visual. Este é um bom exemplo do emprego da Matemática em artes visuais. Há casos notáveis de artistas, como Escher, que usaram a Matemática como ferramenta essencial em seu processo criativo.

Em futuros números da EUREKA! voltaremos a falar de inversão, estudando suas propriedades em mais detalhe e mostrando outras aplicações. Aguardem!

SOLUÇÕES DE PROBLEMAS PROPOSTOS

✐ *Publicamos aqui algumas das respostas enviadas por nossos leitores.*

11) Determine todas as soluções de $x^y = y^x$ com x e y racionais positivos.

Solução de Carlos Alberto da Silva Victor:

i) É evidente que $x = y \in \mathbb{Q}_+$ satisfaz a equação.

ii) Suponha $x \neq y$, seja então $\dfrac{x}{y} = a$ $(a \in \mathbb{Q}_+)$, logo:

$ay = y^a \to y = a^{\frac{1}{a-1}}$ e, fazendo $a - 1 = \dfrac{p}{q}, a = \dfrac{p+q}{q}$, temos:

$$\begin{cases} y = \left(\dfrac{p+q}{q}\right)^{\frac{q}{p}} \\ x = \left(\dfrac{p+q}{q}\right)^{\frac{q+p}{p}} \end{cases}$$

Já que p e q são primos entre si, $p + q$ e q também são primos entre si, e portanto devemos garantir que $\sqrt[p]{p+q}$ e $\sqrt[p]{q}$ sejam inteiros. Necessariamente devemos ter $p = 1$; se não vejamos: suponha que $p \geq 2$ e que $q = s^p$ para algum inteiro positivo s; daí $s^p < p + q < (s+1)^p$ (pois $(s + 1)^p - s^p > p \,.\, s^{p-1} \geq p$) e não teremos $\sqrt[p]{p+q}$ sendo um inteiro, o que nos obriga fazer $p = 1$.

Conclusão:

Para $x \neq y$, teremos: $\begin{cases} x = \left(\dfrac{1+q}{q}\right)^{q+1} \\ y = \left(\dfrac{1+q}{q}\right)^{q} \end{cases}$

onde q é um inteiro maior do que ou igual a 1. É fácil verificar que tais x e y são racionais e são soluções do problema, para todo $q \geq 1$ natural.

13) Dado $n \in \mathbb{N}$ determine determine o maior $k \in \mathbb{N}$ tal que existam conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ contidos em $\{1, 2, \ldots, n\}$ de forma que $A_i \not\subset A_j$ para todo $i \neq j$.

Solução de Zoroastro Azambuja Neto:

Observemos inicialmente que $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \leq C_n^{[n/2]}$ para todo k com $0 \leq k \leq n$ (onde $[n/2]$ é o único inteiro tal que $[n/2] \leq n/2 \leq [n/2] + 1$). De fato, se $k < n/2$, $\dfrac{C_n^{k+1}}{C_n^k} = \dfrac{n-k}{k+1} \geq 1$ pois $n > 2k$ e portanto $n \geq 2k + 1$, ou seja $n - k \geq k + 1$. Portanto, se $k < n/2$, $C_n^k \leq C_n^{[n/2]}$ e se $k > n/2$, $C_n^k = C_n^{n-k} \leq C_n^{[n/2]}$, pois $n - k < n/2$. Seja $A \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ e $P = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ uma permutação de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dizemos que P passa por A se existe $m \leq n$ com $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Se A tem m elementos existem exatamente $m!\,(n-m)!$ permutações que passam por A. Como $\dfrac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m \leq C_n^{[n/2]} = \dfrac{n!}{[n/2]!(n-[n/2])!}$, donde $m!\,(n-m)! \geq [n/2]!(n-[n/2])!$ para todo $m \leq n$.

Note agora que se $A_1, A_2, \ldots, A_k \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ são tais que, para todo $i \neq j$ $A_i \not\subset A_j$, então, se $i \neq j$, nenhuma permutação passa por A_i e A_j ao mesmo tempo.

Se m_i é o número de elementos do conjunto A_i $(1 \leq i \leq k)$, podemos concluir que $\sum_{i=1}^{k} m_i!(n-m)! \leq n! \Rightarrow k.[n/2]!\ (n-[n/2])! \leq n! \Rightarrow k \leq C_n^{[n/2]}$.

Por outro lado, há $C_n^{[n/2]}$ subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ com exatamente $[n/2]$ elementos e, obviamente, se A e B são dois subconjuntos distintos de $[n/2]$ elementos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ então $A \not\subset B$, de modo que o maior k que satisfaz as condições do enunciado é $C_n^{[n/2]}$.

15) Considere uma seqüência de triângulos retângulos $A_nB_nC_n$ no plano cuja hipotenusa seja B_nC_n, com as seguintes condições:

i) $A_1B_1 = A_1C_1 = 1$;
ii) $B_{n+1} = B_n$ e $A_{n+1} = C_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
iii) $A_{n+1}C_{n+1}$ é congruente à altura de A_n em relação a B_nC_n.

Mostre que qualquer ponto do plano pertence a infinitos triângulos $A_nB_nC_n$.

Adaptada de uma solução enviada por Onofre Campos da Silva Farias:

Sejam a_n, b_n e c_n os comprimentos dos lados B_nC_n, A_nC_n e A_nB_n do triângulo $A_nB_nC_n$ e α_n o ângulo $A_n\hat{B}_nC_n$.
É suficiente mostrarmos que as hipotenusas dos triângulos crescem infinitamente e que os triângulos dão infinitas voltas em torno do ponto B_1. Em outras palavras, devemos mostrar que a seqüência (a_n) é ilimitada e que $S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ também cresce ilimitadamente.
Seja h_n a altura relativa à hipotenusa B_nC_n. É imediato que

$$a_nh_n = b_nc_n.$$

Além disso, pelas condições (ii) e (iii), segue que

$$a_n = c_{n+1} \text{ e } b_{n+1} = h_n,$$

donde concluímos que

$$b_{n+1}c_{n+1} = b_nc_n = ... = b_1c_1 = 1.$$

Daí, $a_nh_n = 1$, para todo natural n, e como $a_{n+1}^2 = b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2$, vem

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + \frac{1}{a_n^2},\ a_1^2 = 2.$$

Seja $p_n = a_n^2$. Então, para mostrar que a_n é ilimitada, é suficiente mostrarmos que (p_n) é ilimitada. Note que $a_{n+1} > a_n$, para todo natural n, de modo que (p_n) é crescente. Temos

$$p_{n+1} = p_n + \frac{1}{p_n},\ \ p_1 = 2.$$

Vamos mostrar por indução que sempre temos $P_n \geq \sqrt{n+1}.$ De fato, $P_1 = 2 \geq \sqrt{2}$, e $P_n \geq \sqrt{n+1}$ implica $P_{n+1} = P_n + \frac{1}{P_n} \geq \sqrt{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{n+2}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+2}.$
Assim, P_n (e portanto a_n) é ilimitada. Vamos agora provar que (S_n) é

ilimitada. Temos $\alpha_n > sen\alpha_n = \dfrac{b_n}{a_n} = b_n\, b_{n+1} > b_{n+1}^2$ (pois $b_n = \dfrac{1}{c_n}$ decresce quando *n* cresce). Como

$b_{n+1}^2 = a_{n+1}^2 - a_n^2, \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n > (a_2^2 - a_1^2) + (a_3^2 - a_2^2) + ... + (a_{n+1}^2 - a_n^2) =$

$a_{n+1}^2 - a_1^2 \geq \sqrt{n+2} - 2$, e portanto $S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ é ilimitado.

18) Seja α a maior raiz real da equação $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$.
Prove que $[\alpha^{2004}]$ é divisível por 17.
Obs: $[y]$ é o único inteiro tal que $[y] \leq y < [y] + 1$.

Solução de Luiz Antonio Ponce Alonso:

Considere α, β e γ as raízes de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, α a maior delas, e $S(n) = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$.
(**Obs**. É fácil de se ver que todas as raízes são reais. De fato, $f(-1) < 0 < f(0)$, e $f(1) < 0 < f(3)$).
<u>*Com estas considerações e as relações de Girard para f(x)= 0, tem-se que:*</u>

(I) $S(0) = \alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 = 3$, $S(1) = \alpha^1 + \beta^1 + \gamma^1 = 3$ e
$S(2) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha^1 + \beta^1 + \gamma^1)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = 9 - 0 = 9$

(II) $f(x) = x^2 \cdot (x - 3) + 1 > 0$ para todo $x \geq 3$.
Como f é contínua e $f(2{,}87) \cong -0{,}07 < 0$, segue-se que
$2{,}87 < \alpha < 3$.
Por outro lado, de (I) tem-se $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 9$.
Assim, $\beta^2 + \gamma^2 < 9 - (2{,}87)^2 < 1$.
Sendo $f(0) = 1$, conclui-se que α e β são não nulas . Logo,
$0 < \beta^2 + \gamma^2 < 1$ e conseqüentemente ,

$$\mathbf{0 < \beta^2 < 1 \quad e \quad 0 < \gamma^2 < 1.}$$

(III) $P(x) = x^{n-3} \cdot f(x) = x^n - 3x^{n-1} + x^{n-3}$ ($n \geq 3$) é um polinômio, tal que:

$$\begin{cases} P(\alpha) = \alpha^n - 3\alpha^{n-1} + \alpha^{n-3} = 0 \\ P(\beta) = \beta^n - 3\beta^{n-1} + \beta^{n-3} = 0 \\ P(\gamma) = \gamma^n - 3\gamma^{n-1} + \gamma^{n-3} = 0 \end{cases}$$

Adicionando-se membro a membro , obtém-se para $n \geq 3$, a seguinte relação de recorrência:

$S(n) - 3.S(n-1) + S(n-3) = 0$, *ou, melhor ainda*

$$\boldsymbol{S(n) = 3.S(n-1) - S(n-3) \quad (n \geq 3)}$$

(IV) Sendo $S(0)$, $S(1)$ e $S(2)$ inteiros por (I), podemos concluir, através da relação de recorrência acima e indução sobre n, que $S(n)$ *será um inteiro para qualquer natural n*.

Assim,

$$\boldsymbol{S(2004) = \alpha^{2004} + \beta^{2004} + \gamma^{2004}} \quad \textbf{é um inteiro.}$$

Como $0 < \beta^2 < 1$ e $0 < \gamma^2 < 1$ .... por (II), segue-se que
$0 < \beta^{2004} + \gamma^{2004} = (\beta^2)^{1002} + (\gamma^2)^{1002} < \beta^2 + \gamma^2 < 1$.
Logo, $S(2004) - 1 < \alpha^{2004} < S(2004)$, ou seja,

$$\boldsymbol{\lfloor \alpha^{2004} \rfloor = S(2004) - 1.}$$

(V) A relação de recorrência obtida em (III) implica em particular que $S(n) = 3S(n-1) - S(n-3) \pmod{17}$ para todo $n \geq 3$, o que permite construir a tabela seguinte de $S(n)$ (*mod* 17):
$S(0) \equiv 3 \pmod{17}$, $S(1) \equiv 3 \pmod{17}$, $S(2) \equiv 9 \pmod{17}$,
$S(3) \equiv 7 \pmod{17}$, $S(4) \equiv 1 \pmod{17}$, $S(5) \equiv 11 \pmod{17}$,
$S(6) \equiv 9 \pmod{17}$, $S(7) \equiv 9 \pmod{17}$, $S(8) \equiv 16 \pmod{17}$,
$S(9) \equiv 5 \pmod{17}$, $S(10) \equiv 6 \pmod{17}$, $S(11) \equiv 2 \pmod{17}$,
$S(12) \equiv 1 \pmod{17}$, $S(13) \equiv 14 \pmod{17}$, $S(14) \equiv 6 \pmod{17}$,
$S(15) \equiv 0 \pmod{17}$, $S(16) \equiv 3 \pmod{17}$, $S(17) \equiv 3 \pmod{17}$,
$S(18) \equiv 9 \pmod{17}$.

(VI) Note que $S(16) \equiv S(0) \pmod{17}$, $S(17) \equiv S(1) \pmod{17}$ e $S(18) \equiv S(2) \pmod{17}$. Isso permite mostrar que $S(n+16) \equiv S(n) \pmod{17}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, por indução, $S(n+16) = 3S(n+15) - S(n+13) \equiv 3S(n-1) - S(n-3) \pmod{17} = S(n) \pmod{17}$, se $n \geq 3$ (usamos como base de indução os casos

$n = 0$, $n = 1$ e $n = 2$). Como conseqüência, concluimos que
$\boldsymbol{S(n) \equiv S(n + 16p)\ (mod\ 17)}$**, para todo** $\boldsymbol{p \in \mathbb{N}}$**.**

(VII) Como $2004 = 4 + 16.p$, com $p = 125$, temos de (IV), (V) e (VI):
$S(2004) \equiv S(4) \equiv 1\ (mod\ 17)$.
Portanto,

$$\lfloor \alpha^{2004} \rfloor = \boldsymbol{S(2004) - 1 \text{ é divisível por } 17.}$$

Nota: A demonstração acima foi baseada na resolução de um problema de enunciado similar a este, proposto pela França e não utilizado na IMO de 1988.

19) a) Determine o número máximo de regiões em que n retas podem dividir o plano.
b) Determine o número máximo de regiões em que n planos podem dividir o espaço.

Solução de Carlos Alberto da Silva Victor:

a) Observe inicialmente os casos abaixo:

i) Uma reta divide o plano em duas regiões: 1 + 1.

ii) Uma segunda reta é dividida pela anterior no máximo em duas partes e mais duas regiões são acrescentadas, ou seja: com 2 retas temos: (1 + 1 + 2) regiões (no máximo.)

iii) Uma terceira reta é dividida pelas duas retas anteriores no máximo em três partes e acrescentando então mais três regiões, ou seja: com 3 retas temos: (1 +1 +2 +3) regiões (no máximo.)

iv) Suponha agora que tenhamos n retas; a n-ésima reta é dividida pelas $(n - 1)$ outras retas no máximo em n partes e evidentemente acrescentando n regiões, o que nos dará: $(1 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n)$ regiões ou $\frac{n^2 + n}{2} + 1$ regiões.

Obs: Se as retas estão em posição geral todas as desigualdades acima são igualdades.

b) Observe que:

i) Quando temos dois planos, o segundo plano intersecta o primeiro plano no máximo através de uma reta e o segundo plano é dividido em duas partes.

ii) Um terceiro plano intersecta os planos anteriores em no máximo duas retas e o terceiro plano é dividido em 4 partes.

iii) Um quarto plano intersecta os planos anteriores em no máximo 3 retas e o quarto plano é dividido em 7 partes.

Em geral, o k-ésimo plano intersecta os anteriores em no máximo k – 1 retas, que o dividem em no máximo $\frac{(k-1)^2+(k-1)}{2}+1=\frac{k^2-k+2}{2}$ regiões (pelo ítem *a*), ou seja, ao ser acrescentado o k-ésimo plano são criadas no máximo $\frac{k^2-k+2}{2}$ novas regiões do espaço.

Como um plano divide o espaço em duas regiões temos no máximo $2+\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2-k+2}{2}$ regiões em que k planos dividem o espaço.

Sabendo que $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, temos um total de $\frac{n^3+5n+6}{6}$ regiões (no máximo).

Obs: Se os planos estão em posição geral todas as desigualdades acima são igualdades.

Continuamos esperando as soluções dos problemas 10, 16 e 17 das edições anteriores.

Problemas Propostos no Cartaz

Nível Iniciante

Maria convidou 9 garotos e 8 garotas para sua festa de aniversário. Ela preparou camisetas com os números de 1 a 18 e ficou com a de número 1 e distribuiu as demais para seus convidados. Em determinado momento, em que todos estavam dançando, a soma dos números de cada casal era um quadrado perfeito. Quais pares estavam dançando?

Solução:

A maior soma possível dos números de um casal é 18 + 17, que é menor que 6^2. Assim, os valores das somas dos números de cada casal devem valer 4, 9, 16 ou 25, de modo que os pares de 18, 17 e 16 devem ser 7, 8 e 9, respectivamente. Portanto o par de 2 deve ser 14 (pois não pode ser o próprio 2 e o 7 já é par do 18), o do 11 deve ser 5 (pois 14 já é par de 2), o de 4 deve deve ser 12 (pois 5 já é par de 11), o de 13 deve ser 3 (pois 12 já é par de 4), o de 1 deve ser 15 (pois 3 já é par de 13 e 8 já é par de 17) e o de 10 deve ser 6 (pois 15 já é par de 1). Assim, os pares são 18 e 7, 17 e 8, 16 e 9, 15 e 1, 14 e 2, 13 e 3, 12 e 4, 11 e 5, 10 e 6.

Nota: Ana Maria B. Guimarães e Karina de F. M. Silva da Escola Estadual Professor Fábregas enviaram soluções corretas deste problema.

Nível Intermediário

AD é a bissetriz interna do ângulo *A* do triângulo *ABC*, com *D* sobre o lado *BC*. As bissetrizes dos ângulos *ADB* e *ACB* concorrem em *E*, com *E* sobre o lado *AB*. Determine a medida do ângulo *BAC*.

O problema é equivalente ao problema 5 da página 3 da EUREKA! N^{o}.3, resolvido na página 6 da mesma.

Nível Avançado

São dadas 13 moedas, das quais 12 têm o mesmo peso. Não se sabe se a décima terceira moeda é mais leve ou mais pesada que as demais. Mostre que é possível determinar a moeda diferente empregando três pesagens em uma balança de braços. Isto ainda seria possível com 14 moedas?

Solução:

Das 13 moedas selecionaremos dois grupos de 4 moedas A_1, A_2, A_3, A_4 e B_1, B_2, B_3, B_4 e as pesamos. Sobram 5 moedas, C_1, C_2, C_3, C_4 e C_5. Temos duas possibilidades:

i) A balança fica equilibrada. Neste caso a moeda diferente está entre as 5 restantes. Pesamos agora A_1, A_2, A_3 e C_1, C_2, C_3 (A_1, A_2 e A_3 são padrão). Temos mais duas possibilidades

i.1) Equilíbrio. A moeda diferente é C_4 ou C_5. Pesamos A_1 e C_4. Se der diferente a moeda diferente é C_4, e se houver equilíbrio é C_5.

i.2) Desequilíbrio. Vamos supor sem perda de generalidade que o grupo $C_1C_2C_3$ é mais pesado que $A_1A_2A_3$. Nesse caso a moeda diferente é C_1, C_2 ou C_3 e é mais pesada que as outras. Pesamos C_1 e C_2. Se houver desequilíbrio a mais pesada é a diferente. Se houver equilíbrio é a C_3.

ii) Desequilíbrio. Vamos supor sem perda de generalidade que o grupo $A_1A_2A_3A_4$ é mais pesado que $B_1B_2B_3B_4$. Pesamos agora $A_1A_2B_1$ e $A_3B_2C_1$. Temos três possibilidades:

ii.1) Equilíbrio. Nesse caso a moeda diferente é A_4, B_3 ou B_4. Se for A_4 é mais pesada e se for B_3 ou B_4 é mais leve. Pesamos B_3 e B_4. Se houver equilíbrio a diferente é A_4. Se não a mais leve das duas é a diferente.

ii.2) O grupo $A_1A_2B_1$ é mais pesado. Nesse caso a moeda diferente é A_1, A_2 ou B_2. Pesamos A_1 e A_2. Se houver equilíbrio a diferente é B_2, se não é a mais pesada das duas.

ii.3) O grupo $A_1A_2B_1$ é mais leve. Nesse caso a moeda diferente é B_1 ou A_3. Pesamos B_1 e C_1. Se houver equilíbrio a moeda diferente é A_3, se não é B_1.

Se tivermos 14 moedas não é possível determinar sempre a moeda diferente. Se na primeira pesagem pesamos dois grupos de 5 ou mais moedas e não houver equilíbrio, a moeda diferente pode ser qualquer uma das pelo menos 10 envolvidas na pesagem. Como cada pesagem tem apenas 3 resultados possíveis, as duas últimas pesagens dão no total no máximo 9 resultados diferentes, que não permitem distinguir todas as (pelo menos 10) possibilidades de moeda diferente.

Se pesarmos dois grupos de 4 ou menos moedas na primeira pesagem e houver equilíbrio sobram pelo menos 6 moedas para análise. Se na segunda pesagem usarmos 4 ou mais dessas moedas de situação desconhecida e não houver equilíbrio, qualquer uma delas pode ser a diferente e a última pesagem (que só tem 3 resultados possíveis) não pode determiná-la com segurança.

Se na pesagem usamos 3 ou menos das moedas de situação desconhecida sobram pelo menos 3 em situação desconhecida. Se na terceira pesagem usamos duas delas ou todas as 3 e houver desequilibrio qualquer uma dessas moedas pode ser a diferente, e não concluímos nossa tarefa. Se usamos uma ou nemhuma e houver equilíbrio sobram pelo menos duas de situação desconhecida, e em qualquer caso não é sempre possível determinar a moeda diferente.

Nota: O problema 10, proposto na página 59 da EUREKA! N°. 2 generaliza este problema. Tente resolvê-lo agora, adaptando para a situação geral os argumentos desta solução!

PROBLEMAS PROPOSTOS

✉ *Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e sugestões de novos problemas para os próximos números.*

20) Diga se existe uma função polinomial de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ cuja imagem seja o intervalo $(0,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

21) **a)** Encontre todas as soluções inteiras da equação $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$.
b) Encontre todas as soluções inteiras da equação $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{c}$.

22) Sejam $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ os ângulos de um quadrilátero, nessa ordem. Prove que esse quadrilátero é inscritível se, e somente se, a relação $\alpha\beta + \alpha\delta + \gamma\beta + \gamma\delta = \pi^2$ ocorre.

23) Seja *ABC* um triângulo qualquer de ortocentro *H* e sejam h_a, h_b, h_c os comprimentos das alturas relativas a *A*, *B*, *C* respectivamente. Prove que $h_a . \overline{AH} + h_b . \overline{BH} + h_c \, \overline{CH} = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$.

24) Na loteria de ***Truchilândia***, cada bilhete tem um número de três algarismos que usa somente os algarismos 1, 2, 3, 4 (é permitido repetir os dígitos). Um bilhete é ***ganhador*** se coincide em pelo menos duas posições com o número sorteado.
Um apostador quer compar vários bilhetes, de maneira que um deles ganhe com certeza, mas gastando o mínimo possível. Determinar quantos bilhetes deve comprar e quais bilhetes deve comprar.

Obs. Se o bilhete sorteado for o 423 então 123 é um bilhete ganhador, mas 243 não é.

25) Durante o ano de 1998, uma pequena livraria, que abria nos sete dias da semana, vendeu no mínimo um livro por dia e um total de 600 livros no ano todo. Diga, justificando, se existiu, obrigatóriamente, um período de dias consecutivos onde foram vendidos exatamente 129 livros.

Nota: Os problemas 21, 22, 23 e 24 foram propostos na 1ª. lista de preparação para a X Olimpíada de Matemática do Cone Sul. O problema 25 foi proposto na IX Olimpíada de Matemática do Rio Grande do Norte.

ERRATA

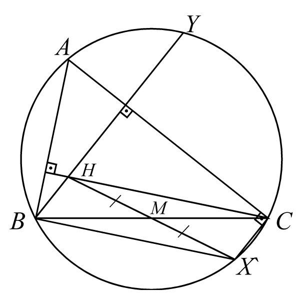
A solução do problema 2 da 9ª. Olimpíada de Matemática do Cone Sul, (cujo enunciado está na página 22 da EUREKA! Nº.2) está errada. Na verdade publicamos a solução de outro problema do banco, cujo enunciado era:

> Sejam H o ortocentro do triângulo ABC , não retângulo, e M o ponto médio do lado BC. A circunferência circunscrita em P. Mostre que P, H, M são colineares.

A solução correta do problema 2 da 9ª. Olimpíada de Matemática do Cone Sul é como segue:

PROBLEMA 2:
Sejam H o ortocentro (interseção das alturas) do triângulo acutângulo ABC e M o ponto médio do lado BC. Seja X o ponto em que a reta HM intersecta o arco BC (que não contém A) da circunsferência circunscrita a ABC. Seja Y o ponto de interseção da reta BH com a circunsferência, distinto de B. Demonstre que $XY = BC$.

Solução:



Seja X' o simétrico de H em relação ao ponto M. Vamos mostrar que $X \equiv X'$. O quadrilátero $HBX'C$ é um paralelogramo, pois os pontos médios de suas diagonais coincidem. Então

$$\angle BX'C = \angle BHC = 180° - \angle BAC.$$

Segue que X' deve pertencer ao arco BC que não contém A, donde $X \equiv X'$. Observe agora que o quadrilátero $BYCX$ é um trapézio inscritível (pois $BY \,\|\, X'C = XC$), donde $BC = XY$.

CARTAS DOS LEITORES

✉ *Publicamos aqui algumas cartas enviadas por nossos leitores.*

UMA ESCOLA PÚBLICA NA EUREKA!

Eureka! Lembrei-me de Arquimedes quando tive a luz para a idéia que mexeu comigo e um punhado de alunos que até então estavam inertes face à necessidade de aprender Matemática.

Descobri! Diria Arquimedes, radiante de felicidade, no bom português. E tal foi a emoção que vivi quando atinei para a solução que revolucionaria o ensino da Matemática numa tão carente escola pública. Tal luz, que me veio à mente, iluminou alguns alunos que poderiam hoje estar mergulhados, como muitos, nas trevas do descaso e do abandono do ensino público.

Descobri! Que o saber dos números independe das classes sociais. É democrático! E nasce no espirito daqueles a quem seja dada a fagulha e uma palavra de confiança, de incentivo.

A função da Matemática é profunda, é humanística, pois o bem estar da coletividade é o fim de tudo. Cabe, à Matemática a criação de espíritos disciplinados, mentes sadias e aprimoradas. E esse é o nosso escopo: estimulando, propiciando e melhorando o ensino dessa matéria nas Escolas Brasileiras.

Prof. Paulo Araripe
Fortaleza-CE

COMO ASSINAR A EUREKA!

Se você é fanático por Matemática e deseja receber na sua casa a revista EUREKA!, faça o seu pedido escrevendo para: **Secretaria da Olimpíada Brasileira de Matemática**, Estrada Dona Castorina, 110 Jardim Botânico - Rio de Janeiro, RJ - CEP: 22460-320. O custo de cada exemplar avulso ou atrasado é de R$4,00. Você pode fazer uma assinatura anual o que dará direito a receber as publicações do referido ano (mínimo 3 exemplares) por um valor promocional de R$10,00. Para isso, faça um depósito no Banco do Brasil - Agência 0598-3 - Conta N°52208-2 em nome do professor Eduardo Wagner. Envie-nos a fotocopia do depósito e faça referência aos números desejados. Não esqueça de colocar seu nome e endereço completos e nós remeteremos a(s) revista(s) pelo correio. Pedidos podem ser feitos também por e-mail e comprovantes de depósito poderão ser enviados pelo fax.

Se tiver qualquer dúvida entre em contato conosco.
Telefone: 021-5295077 / Fax: 021-5295023
e-mail: obm@impa.br
Home-Page: http//www.obm.org.br/

Você sabia…
Que o livro **10 Olimpíadas Iberoamericanas de Matemática** (em espanhol) já pode ser adquirido na Secretaria da Olimpíada Brasileira de Matemática **?**
Entre em contato conosco.

AGENDA OLÍMPICA

5ª. OLIMPÍADA DE MAIO
8 de maio (sábado)
♦

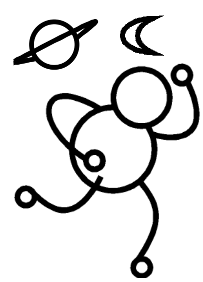
10ª. OLIMPÍADA DO CONE SUL
17 a 24 de maio
Argentina
♦

21ª. OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase – 12 de junho (sábado)
Segunda Fase – 28 de agosto (sábado)
Terceira Fase – 23 de outubro (sábado) e 24 de outubro (domingo)
♦

40ª. OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA
10 a 22 de julho
Bucharest, Romênia.
♦

14ª. OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA
setembro
Cuba.

Você sabia... Que a **II Olimpíada Brasileira de Astronomia** deverá realizar-se em junho próximo entre alunos do ensino fundamental e médio de todo o Brasil **?**
Mais esclarecimentos podem ser obtidos através do seguinte endereço:



Prof. João Batista Garcia Canalle
Coordenador da II OBA
Instituto de Física - UERJ
Tel/Fax: 021-5877150 e 5877447
e-mail: canalle@uerj.br

COORDENADORES REGIONAIS

Amarisio da Silva Araújo	*(UFV)*	*Viçosa - MG*
Alberto Hassen Raad	*(UFJF)*	*Juiz de Fora - MG*
Antônio C. Rodrigues Monteiro	*(UFPE)*	*Recife - PE*
Angela Camargo	*(Centro de Educação de Adultos CEA)*	*Blumenau - SC*
Ariosto de Oliveira Lima	*(UFPI)*	*Parnaíba - PI*
Benedito T. Vasconcelos Freire	*(UFRN)*	*Natal - RN*
Claudio Arconcher	*(Col. Leonardo da Vinci)*	*Jundiaí - SP*
Egnilson Miranda de Moura	*(Col. Agrícola do Bom Jesus)*	*Bom Jesus - PI*
Élio Mega	*(Col. ETAPA)*	*São Paulo - SP*
Florêncio F. Guimarães F.	*(UFES)*	*Vitória - ES*
Francisco Dutenhefner	*(UFMG)*	*Belo Horizonte - MG*
Gisele de A. Prateado G.	*(UFGO)*	*Goiânia - GO*
Ivanilde H. Fernandes Saad	*(U. Católica Dom Bosco)*	*Campo Grande - MS*
João B. de Melo Neto	*(UFPI)*	*Teresina - PI*
João F. Melo Libonati	*(Grupo Educ. IDEAL)*	*Belém - PA*
Jorge Ferreira	*(UEM)*	*Maringá - PR*
José Carlos Pinto Leivas	*(URG)*	*Rio Grande - RS*
José Luis Rosas Pinho	*(UFSC)*	*Florianópolis - SC*
José Paulo Carneiro	*(USU)*	*Rio de Janeiro - RJ*
José Vieira Alves	*(UFPB)*	*Campina Grande - PB*
Leonardo Matteo D'orio	*(Parque de Material Aeronáutico de Belém)*	*Belém - PA*
Licio Hernandes Bezerra	*(UFSC)*	*Florianópolis - SC*
Luzinalva M. de Amorim	*(UFBA)*	*Salvador - BA*
Marco Polo	*(Colégio Singular)*	*Santo André - SP*
Marcondes Cavalcante França	*(UF Ceará)*	*Fortaleza - CE*
Mario Jorge Dias Carneiro	*(UFMG)*	*Belo Horizonte - MG*
Pablo Rodrigo Ganassim	*(L. Albert Einstein)*	*Piracicaba - SP*
Paulo H. Cruz Neiva de L. Jr.	*(Esc. Tec.Everardo Passos)*	*SJ dos Campos - SP*
Reinaldo Gen Ichiro Arakaki	*(INPE)*	*SJ dos Campos - SP*
Ricardo Amorim	*(Centro Educ. Logos)*	*Nova Iguaçu - RJ*
Roberto Vizeu Barros	*(Colégio ACAE)*	*Volta Redonda - RJ*
Sergio Claudio Ramos	*(IM-UFRGS)*	*Porto Alegre - RS*
Seme Gebara Neto	*(UFMG)*	*Belo Horizonte - MG*
Tadeu Ferreira Gomes	*(U. do Estado da Bahia)*	*Juazeiro - BA*
Valdenberg Araújo da Silva	*(U. Federal de Sergipe)*	*São Cristovão - SE*
Wagner Pereira Lopes	*(Esc. Tec. Fed. de Goiás)*	*Jataí - GO*
Waldemar M. Canalli	*(P.M. S. João de Meriti)*	*S. João de Meriti - RJ*