CONTEÚDO

AOS LEITORES 03

20ª OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DE MAIO 04
Enunciados e resultado brasileiro

25ª OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL 07
Enunciados e resultado brasileiro

26ª OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL 09
Enunciados e resultado brasileiro

55ª OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA (IMO) 11
Enunciados e resultado brasileiro

56ª OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA (IMO) 13
Enunciados e resultado brasileiro

4ª OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DA COMUNIDADE DOS PAÍSES DE LÍNGUA PORTUGUESA 15
Enunciados e resultado brasileiro

5ª OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DA COMUNIDADE DOS PAÍSES DE LÍNGUA PORTUGUESA 17
Enunciados e resultado brasileiro

29ª OLIMPÍADA IBERO-AMERICANA DE MATEMÁTICA 19
Enunciados e resultado brasileiro

30ª OLIMPÍADA IBERO-AMERICANA DE MATEMÁTICA 21
Enunciados e resultado brasileiro

ARTIGOS

REDESCOBRINDO CEVA E MENELAUS EM DIMENSÃO TRÊS 31
Rui Eduardo Paiva, IFCE, Quixadá (CE)

PERMUTANDO ALGARISMOS DE NÚMEROS 44
Fernando Soares Carvalho e Eudes Antonio Costa

COMO É QUE FAZ?	54
SOLUÇÕES DE PROBLEMAS PROPOSTOS	57
PROBLEMAS PROPOSTOS	61
COORDENADORES REGIONAIS	62

AOS LEITORES

Dedicamos este número da *Eureka!* ao querido professor Antonio Luiz Santos, mais como conhecido como Gandhi, que nos deixou neste ano de 2015.

O professor Gandhi sempre foi entusiasmando por problemas de Matemática, em particular por problemas de Olimpíadas. Ele foi o criador de uma das seções de maior sucesso nesta revista, a *Olimpíadas ao Redor do Mundo*, que tem grande repercussão até hoje, como podemos ver neste número na seção "**Como é que faz?**", em que resolvemos, a pedido de um de nossos leitores, 4 problemas selecionados pelo Antonio Luiz, que também escreveu ótimos livros de problemas e durante muitos anos foi um professor destacado no Rio de Janeiro. A sua alegria e sua irreverência deixarão saudades.

INSTRUÇÕES PARA AUTORES

Serão publicados na revista *Eureka!* artigos relevantes na preparação dos estudantes para a Olimpíada Brasileira de Matemática em seus diversos níveis e para várias olimpíadas de caráter internacional das quais o Brasil participa.

Como para a grande maioria dos tópicos e técnicas explorados nas olimpíadas não existem publicações expositórias adequadas em língua portuguesa, nosso objetivo inicial é abordá-los todos em artigos auto-suficientes. Assim, daremos preferência àqueles que tratem de assuntos ainda não explorados nos números anteriores da *Eureka!*. Como a deficiência em artigos adequados para estudantes do Ensino Fundamental (Níveis 1 e 2 da OBM) é ainda mais grave, estes terão primazia na sua publicação. Vale a pena observar que, quando um tema é importante para os estudantes de diversos níveis, ele deve aparecer em artigos adequados para cada um desses níveis, separadamente.

É recomendável que os artigos tragam alguns problemas resolvidos detalhadamente e referências que o complementem ou aprofundem.

Os editores.

20ª OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DE MAIO

Enunciados e resultado brasileiro

PRIMEIRO NÍVEL

PROBLEMA 1

Um número natural N é *bom* se os seus dígitos são 1, 2 ou 3 e todos os números de 2 dígitos formados por dígitos localizados em posições consecutivas de N são números distintos. Existe algum número bom de 10 dígitos? E de 11 dígitos?

PROBLEMA 2

Beatriz tem três dados em cujas faces estão escritas letras diferentes. Ao lançar os três dados sobre uma mesa, e escolhendo cada vez somente as letras das faces voltadas para cima, formaram-se as palavras

OSA , VIA , OCA , ESA , SOL , GOL , FIA , REY , SUR , MIA , PIO , ATE , FIN , VID.

Determine as seis letras de cada dado.

PROBLEMA 3

Temos nove caixas. Na primeira caixa há 1 pedra, na segunda há 2 pedras, na terceira há 3 pedras, e assim sucessivamente, na oitava há 8 pedras e na nona há 9 pedras. A operação permitida é retirar o mesmo número de pedras de duas caixas distintas e colocá-las numa terceira caixa. O objetivo é que todas as pedras fiquem numa mesma caixa. Descreva como isto deve ser feito com um número mínimo de operações permitidas. Explicar por que isto é impossível de ser feito com menos operações.

PROBLEMA 4

Seja ABC um triângulo retângulo e isósceles, com $C = 90°$. Sejam M o ponto médio de AB e N o ponto médio de AC. Seja P tal que MNP é um triângulo equilátero com P no interior do quadrilátero $MBCN$. Calcule a medida do ângulo CAP.

PROBLEMA 5

Dadas 6 bolinhas: 2 brancas, 2 verdes, 2 vermelhas, sabemos que há uma branca, uma verde e uma vermelha que pesam 99 g cada uma e que as demais bolinhas pesam 101 g cada uma. Determine o peso de cada bolinha usando duas vezes uma balança de dois pratos.

Obs: Uma balança de dois pratos somente informa se o prato esquerdo pesa mais, igual ou menos do que o prato direito.

SEGUNDO NÍVEL

PROBLEMA 1

O caminho que vai desde o povoado até o refúgio na montanha tem 76 km. Um grupo de andinistas o percorreu em 10 dias, de forma tal que em dois dias consecutivos nunca caminharam mais de 16 km, porém em três dias consecutivos sempre caminharam por pelo menos 23 km. Determine a quantidade máxima de quilómetros que eles podem ter percorrido num dia.

PROBLEMA 2

Num quadrilátero convexo $ABCD$, sejam M, N, P e Q os pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA, respectivamente. Se os segmentos MP e NQ dividem $ABCD$ em quatro quadriláteros com a mesma área, demonstre que $ABCD$ é um paralelogramo.

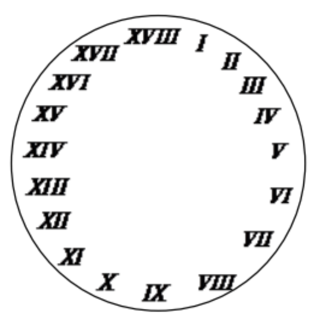
PROBLEMA 3

Ana e Luca jogam o seguinte jogo: Ana escreve uma lista de n números inteiros distintos. Luca vence o jogo se puder escolher quatro números distintos, a, b, c e d, de modo que o número $a + b - (c + d)$ seja múltiplo de 20.

Determine o valor mínimo de n para o qual, qualquer que seja a lista de Ana, Luca vence o jogo.

PROBLEMA 4

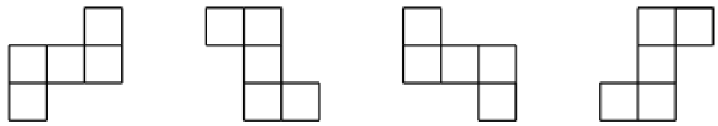
Numa escavação na antiga Roma foi encontrado um relógio bastante incomum com 18 divisões marcadas com números romanos (ver figura).



Infelizmente o relógio estava partido em 5 pedaços. A soma dos números em cada pedaço era a mesma. Mostre de que maneira o relógio pode estar partido.

PROBLEMA 5

Cada casa de um tabuleiro de $n \times n$, com $n \geq 3$, está pintada com uma cor dentre 8 cores diferentes. Para que valores de n podemos afirmar que alguma das seguintes figuras



incluídas no tabuleiro contém duas casas da mesma cor?

RESULTADO BRASILEIRO

2014: Nível 1 (até 13 anos)

Nome	Cidade – Estado	Prêmio
Catulo Axel Teixeira Vasconcelos Alves	Fortaleza – CE	Ouro
Felipe Bezerra de Menezes Benício de Sousa	Fortaleza – CE	Prata
Marcelo Hippólyto de Sandes Peixoto	Fortaleza – CE	Prata
Adrian Alexander Ticona Delgado	São Paulo – SP	Bronze
Débora Tami Yamato	São Paulo – SP	Bronze
João Vitor Baptista Moreira	Viçosa – MG	Bronze
Gustavo Farani de Farias	Aracaju – SE	Bronze
Yan Victor S. Guimarães	Fortaleza – CE	M. Honrosa
Giovanna de Sousa Oliveira	Fortaleza – CE	M. Honrosa
Caio César Barros Matos	Fortaleza – CE	M. Honrosa

2014: Nível 2 (até 15 anos)

Nome	Cidade – Estado	Prêmio
Andrey Jhen Shan Chen	São Paulo – SP	Ouro
Daniel Quintão de Moraes	Rio de Janeiro – RJ	Prata
Matheus Siqueira Thimóteo	Mogi das Cruzes – SP	Prata
Guilherme Goulart Kowalczuk	Porto Alegre – RS	Bronze
Vitor Augusto Carneiro Porto	Fortaleza – CE	Bronze
Bryan Borck	Porto Alegre – RS	Bronze
Alícia Fortes Machado	Teresina – PI	Bronze
Vinícius Trindade de Melo	Dores de Campos – MG	M. Honrosa
Ítalo Rennan Lima	Fortaleza – CE	M. Honrosa
Angelo Donizetti Lorençoni Junior	São Carlos – SP	M. Honrosa

25ª OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL

Enunciados e resultado brasileiro

Os estudantes brasileiros tiveram uma participação destacada na Olimpíada de Matemática do Cone Sul que foi realizada entre os dias 14 e 21 de agosto de 2014, na cidade de Atlántida, Uruguai. A equipe foi liderada pelos professores Régis Prado Barbosa, de São Paulo (SP), e Luzinalva Miranda de Amorim, de Salvador (BA).

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	**Pedro Henrique Sacramento de Oliveira**	**Medalha de Ouro**
BRA2	**Gabriel Toneatti Vercelli**	**Medalha de Ouro**
BRA3	**João César Campos Vargas**	**Medalha de Prata**
BRA4	**Andrey Jhen Shan Chen**	**Medalha de Bronze**

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Em uma lousa, estão escritos os números inteiros de 1 a 2014, inclusive. A operação válida é escolher dois números a e b, apagar eles e no seu lugar escrever o mínimo múltiplo comum do par (a,b) e o máximo divisor comum do par (a,b).

Mostre que, sem importar a quantidade de operações que sejam realizadas, a soma dos números que ficam escritos na lousa sempre é maior que $2014 \cdot \sqrt[2014]{2014!}$.

PROBLEMA 2

Um par de inteiros positivos (a,b) é chamado *charrúa* se existe um inteiro positivo c tal que $a+b+c$ e $a \cdot b \cdot c$ sejam ambos quadrados perfeitos; caso não exista tal número c, o par é chamado *não-charrúa*.

a) Mostre que existem infinitos pares não-charrúas.

b) Mostre que existem infinitos inteiros positivos n para os quais o par $(2,n)$ é charrúa.

PROBLEMA 3

Seja $ABCD$ um retângulo, P um ponto exterior tal que o ângulo $B\hat{P}C = 90^{\circ}$ e a área do pentágono $ABPCD$ é igual a AB^2.

Prove que é possível dividir o pentágono $ABPCD$ em três pedaços através de cortes retos de tal modo que com esses pedaços se pode construir um quadrado sem buracos e sem superposição.

Observação: Os pedaços podem girar e podem ser virados.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Mostre que o número $n^2 - 2^{2014} \cdot 2014n + 4^{2013}\left(2014^2 - 1\right)$, com n natural, não pode ser primo.

PROBLEMA 5

Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em uma circunferência de centro O. Este ponto O está no interior do quadrilátero de modo que os ângulos $B\hat{A}C = O\hat{D}A$ são iguais. As diagonais desse quadrilátero se cortam no ponto E. Por E são traçadas a reta r perpendicular a BC e a reta s perpendicular a AD. A reta r intersecta AD em P e a reta s intersecta BC em M. Seja N o ponto médio de EO.

Mostre que M, N e P são colineares.

PROBLEMA 6

Dada uma família F de subconjuntos de $S = \{1, 2, ..., n\}$ ($n \geq 2$), a jogada permitida é escolher dois conjuntos **disjuntos** A e B de F e adicionar $A \cup B$ a F (sem excluir nem A nem B).

Inicialmente, F possui exatamente todos os subconjuntos que contém apenas um elemento de S. O objetivo é que, através de jogadas permitidas, F possua todos os subconjuntos de $n-1$ elementos de S.

Determine o menor número de jogadas necessárias para alcançar o objetivo.

Observação: $A \cup B$ é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A, a B ou a ambos.

26ª OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL

Enunciados e resultado brasileiro

Os estudantes brasileiros tiveram uma excelente participação na Olimpíada de Matemática do Cone Sul que foi realizada entre os dias 11 e 18 de maio de 2015, na cidade de Temuco, Chile. A equipe foi liderada pelos professores Krerley Oliveira, de Maceió (AL), e José Armando Barbosa Filho, de Natal (RN). A equipe brasileira ficou em primeiro lugar na competição por equipes somando 201 pontos.

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	Pedro Henrique Sacramento de Oliveira	Medalha de Ouro
BRA2	André Yuji Hisatsuga	Medalha de Prata
BRA3	Guilherme Goulart Kowalczuk	Medalha de Prata
BRA4	Vitor Augusto Carneiro Porto	Medalha de Prata

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1
Demonstrar que para qualquer n inteiro, $n^3 - 9n + 27$ não é divisível por 81.

PROBLEMA 2
Considere $3n$ retas ($n > 1$) no plano, entre as quais não há duas que sejam paralelas e nem três que sejam concorrentes. Demonstar que se pintarmos $2n$ retas com a cor vermelha e n com a cor azul, há pelo menos duas regiões do plano com os bordos completamente vermelhos.

Observação: para cada região, seus bordos estão contidos nas retas dadas e nenhuma das retas dadas corta o interior da região.

PROBLEMA 3
Dados uma circunferência Γ de raio 1 e um ponto P pertencente a ela, sejam A_1 e B_1 dois pontos em Γ tais que o triângulo PA_1B_1 é acutângulo e a distância de P à reta A_1B_1 é $\sqrt{2}$. Para todo inteiro $n \geq 1$ se definem:

- C_n como o pé da perpendicular desde P ao segmento A_nB_n,
- O_n como o centro da circunferência circunscrita do triângulo PA_nB_n,
- A_{n+1} como o pé da perpendicular desde C_n ao segmento PA_n,
- B_{n+1} como a interseção entre PB_n e O_nA_{n+1}.

Achar o comprimento PO_{2015}.

Observação: a distância de P à reta A_1B_1 é o comprimento do segmento PC_1, onde C_1 é o pé da perpendicular desde P ao segmento A_1B_1.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que $\angle BAD = 90°$ e as diagonais AC e BD são perpendiculares. Seja M o ponto médio do segmento CD e seja E o ponto de interseção de BM com AC. Seja F o ponto do segmento AD tal que BM e EF são perpendiculares. Se $CE = AF\sqrt{2}$ e $FD = CE\sqrt{2}$, demonstrar que $ABCD$ é um quadrado.

PROBLEMA 5

Determinar se existem inteiros positivos a_1, a_2, a_3, ..., não necessariamente distitntos, com a seguinte propriedade: $a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n$ não é divisível por $a_1 + a_2 + \cdots + a_m$ para quaisquer m e n inteiros positivos com $1 \leq m < n$.

PROBLEMA 6

Seja $S = \{1,2,3, \ldots ,2046, 2047, 2048\}$. Se diz que dois subconjuntos A e B de S são *amigos* se satisfazem as seguintes condições:

- Não têm elementos em comum.
- Têm a mesma quantidade de elementos.
- O produto dos elementos de A é igual ao produto dos elementos de B.

Demonstrar que existem dois subconjuntos de S que são amigos e que contém pelo menos 738 elementos cada um.

55ª OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA (IMO)

Enunciados e resultado brasileiro

O Brasil obteve um ótimo resultado na 55ª Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), que aconteceu entre os dias 20 e 28 de julho na Cidade do Cabo na África do Sul, conquistando três medalhas de prata, duas de bronze e uma menção honrosa. A equipe foi liderada pelos professores Edmilson Motta, de São Paulo (SP) e Onofre Campos da Silva Farias, de Fortaleza (CE).

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	**Rodrigo Sanches Ângelo**	**Medalha de Prata**
BRA2	**Murilo Corato Zanarella**	**Medalha de Prata**
BRA3	**Daniel Lima Braga**	**Medalha de Prata**
BRA4	**Victor Oliveira Reis**	**Medalha de Bronze**
BRA5	**Alexandre Perozim de Faveri**	**Medalha de Bronze**
BRA6	**Alessandro de Oliveira Pacanowski**	**Menção Honrosa**

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Seja $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ uma sequência infinita de inteiros positivos. Prove que existe um único inteiro $n \geq 1$

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

PROBLEMA 2

Seja $n \geq 2$ um inteiro. Considere um tabuleiro de xadrez $n \times n$ dividido em n^2 quadrados unitários. Uma configuração de n torres neste tabuleiro é dita *pacífica* se cada linha e cada coluna contém exatamente uma torre. Encontre o maior inteiro positivo k tal que, para qualquer configuração pacífica de n torres, podemos encontrar um quadrado $k \times k$ sem torres em qualquer um de seus k^2 quadrados unitários.

PROBLEMA 3

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo com $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. O ponto H é o pé da perpendicular de A sobre BD. Os pontos S e T são escolhidos sobre os lados AB e AD, respectivamente, de modo que H esteja no interior do triângulo SCT e

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°, \qquad \angle THC - \angle DTC = 90°.$$

Prove que a reta BD é tangente à circunferência circunscrita ao triângulo TSH.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Os pontos P e Q encontram-se sobre o lado BC de um triângulo acutângulo ABC de modo que $\angle PAB = \angle BCA$ e $\angle CAQ = \angle ABC$. Os pontos M e N encontram-se sobre as retas AP e AQ, respectivamente, de modo que P é o ponto médio de AM e Q é o ponto médio de AN. Prove que as retas BM e CN se intersectam sobre a circunferência circunscrita ao triângulo ABC.

PROBLEMA 5

Para cada inteiro positivo n, o Banco da Cidade do Cabo emite moedas de valor $\frac{1}{n}$. Dada uma coleção finita de tais moedas (de valores não necessariamente distintos) com valor total de no máximo $99 + \frac{1}{2}$, prove que é possível dividir esta coleção em 100 ou menos grupos de moedas, cada um com valor total de no máximo 1.

PROBLEMA 6

Um conjunto de retas no plano está em *posição geral* se não há duas paralelas nem três concorrentes no mesmo ponto. Um conjunto de retas em posição geral corta o plano em regiões, algumas com área finita, chamadas *regiões finitas*. Prove que, para todo n suficientemente grande, em qualquer conjunto de n retas em posição geral é possível pintar de azul pelo menos $\sqrt{n}$ dessas retas, de modo que nenhuma das suas regiões finitas tenha uma fronteira completamente azul.

Nota: Para resultados em que $\sqrt{n}$ é substituído por $c\sqrt{n}$ serão atribuídos pontos conforme o valor da constante c.

56ª OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA (IMO)

Enunciados e resultado brasileiro

O Brasil obteve um ótimo resultado na 56ª Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), que aconteceu entre os dias 20 e 28 de julho na cidade de Chiang Mai, na Tailândia, conquistando três medalhas de prata e três de bronze. A equipe foi liderada pelos professores Luciano Guimarães Monteiro de Castro, do Rio de Janeiro (RJ) e Carlos Yuzo Shine, de São Paulo (SP).

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	**Pedro Henrique Sacramento de Oliveira**	**Medalha de Prata**
BRA2	**Murilo Corato Zanarella**	**Medalha de Prata**
BRA3	**Daniel Lima Braga**	**Medalha de Prata**
BRA4	**Gabriel Toneatti Vercelli**	**Medalha de Bronze**
BRA5	**João César Campos Vargas**	**Medalha de Bronze**
BRA6	**Rafael Filipe dos Santos**	**Medalha de Bronze**

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Dizemos que um conjunto finito S de pontos do plano é *equilibrado* se, para cada dois pontos diferentes A e B de S, existe um ponto C de S tal que $AC = BC$. Dizemos que S é *descentrado* se, para cada três pontos diferentes A, B e C de S, não existe um ponto P de S tal que $PA = PB = PC$.

(a) Prove que, para todos os inteiros $n \geq 3$, existe um conjunto equilibrado com exatamente n pontos.

(b) Determine todos os inteiros $n \geq 3$ para os quais existe um conjunto equilibrado e descentrado com exatamente n pontos.

PROBLEMA 2

Determine todos os ternos (a, b, c) de inteiros positivos tais que cada um dos números

$$ab - c, bc - a, ca - b$$

É uma potência de 2.

(Uma potência de 2 é um inteiro da forma 2^n, em que n é um inteiro não negativo.)

PROBLEMA 3

Seja ABC um triângulo acutângulo com $AB > AC$. Sejam Γ o seu circuncírculo, H o seu ortocentro e F o pé da perpendicular a partir de A. Seja M o ponto médio de BC. Seja Q o ponto de Γ tal que $\angle HQA = 90°$ e seja K o ponto de Γ tal que $\angle HKQ = 90°$. Admita que os pontos A, B, C, K e Q são todos diferentes e estão sobre Γ nesta ordem.

Prove que os circuncírculos dos triângulos KQH e FKM são tangentes.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

O triângulo ABC tem circuncírculo Ω e circuncentro O. Uma circunferência Γ de centro A intersecta o segmento BC nos pontos D e E, de modo que B, D, E e C são todos diferentes e estão na reta BC nesta ordem. Sejam F e G os pontos de interse;'ao de Γ e Ω, tais que A, F, B, C e G est'ao em Ω nesta ordem. Seja K o segundo ponto de interseção do circuncírculo do triângulo BDF com o segmento AB. Seja L o segundo ponto de interseção do circuncírculo CGE com o segmento CA.

Suponha que as retas FK e GL são diferentes e que se intersectam no ponto X. Prove que X pertence à reta AO.

PROBLEMA 5

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo a equação

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) = x + f(x+y) + yf(x)$$

para todos os números reais x e y.

PROBLEMA 6

A sequência a_1, a_2, ... de inteiros satisfaz as condições seguintes:

(i) $1 \leq a_j \leq 2015$ para qualquer j tal que $j \geq 1$;
(ii) $k + a_k \neq l + a_l$ para quaisquer k, l tais que $1 \leq k < l$.

Prove que existem dois inteiros positivos b e N tais que

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

para quaisquer inteiros m e n satisfazendo $n > m \geq N$.

4ª OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DA COMUNIDADE DOS PAÍSES DE LÍNGUA PORTUGUESA

Enunciados e resultado brasileiro

O Brasil conquistou uma medalha de ouro e três de prata na 4ª Olimpíada de Matemática da Comunidade dos Países de Língua Portuguesa, realizada de 5 a 10 de agosto, na cidade de Luanda, Angola. Com este resultado o país ficou pelo terceiro ano consecutivo com a primeira posição na classificação geral, seguido pela equipe de Portugal. A equipe foi liderada pelos professores Carlos Bahiano, de Salvador (BA) e Marcelo Xavier de Mendonça, do Rio de Janeiro (RJ).

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	**André Yuji Hisatsuga**	**Medalha de Ouro**
BRA2	**João Guilherme Madeira Araújo**	**Medalha de Prata**
BRA3	**Daniel Quintão de Moraes**	**Medalha de Prata**
BRA4	**Guilherme Goulart Kowalczuk**	**Medalha de Prata**

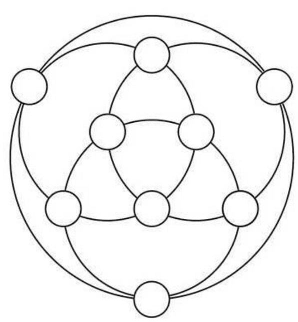
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Quatro irmãos têm conjuntamente quarenta e oito Kwanzas. Se ao dinheiro do primeiro se aumentasse três Kwanzas, ao do segundo se retirasse três Kwanzas, se o do terceiro triplicasse e o do quarto se reduzisse a um terço, passariam a ter todos a mesma importância. Quanto tem cada um dos quatro irmãos?

PROBLEMA 2

Na figura abaixo devem ser colocados em cada um dos pontos brancos um número inteiro de 1 a 9, sem repetição, de forma que a soma dos 3 números pertencentes à circunferência externa seja igual a cada uma das somas dos 4 números pertencentes a uma das circunferências internas e que não estão na circunferência externa.



a) Apresente uma solução.
b) Mostre que em qualquer solução o 9 estará na circunferência externa.

PROBLEMA 3

No quadrilátero convexo $ABCD$, sejam P e Q pontos dos lados BC e DC, respectivamente, tais que $\angle BAP = \angle DAQ$. Mostre que se a linha que une os ortocentros dos triângulos ABP e ADQ é ortogonal a AC, então as áreas desses triângulos são iguais.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Pelo ponto K de uma circunferência estão traçadas uma corda KA (o arco KA é maior que 90°) e uma reta tangente l. A reta que passa pelo centro da circunferência e é perpendicular ao raio OA, intersecta a corda KA no ponto B e a reta tangente l no ponto C.
Prove que os segmentos KC e BC têm o mesmo comprimento.

PROBLEMA 5

Determine todas as quádruplas de inteiros positivos (k, a, b, c) tais que $2^k = a! + b! + c!$, com $a \geq b \geq c$.

PROBLEMA 6

Kilua e Ndoti jogam o seguinte jogo num quadrado $ABCD$. Kilua escolhe um dos lados do quadrado e marca o ponto X nesse lado. Ndoti escolhe um dos outros três lados do quadrado e marca o ponto Y sobre ele. Kilua escolhe um dos dois lados que ainda não foi escolhido e marca o ponto Z sobre ele e, finalmente, Ndoti escolhe o lado que ainda não foi escolhido e marca o ponto W nesse lado. Cada um dos dois jogadores pode marcar um vértice do quadrado, mas ele deve primeiro escolher o lado do quadrado que será usado. Por exemplo, se Kilua escolher o lado AB ele pode marcar X no ponto B e isso não impede que o lado BC seja escolhido. Kilua vence se a área do quadrilátero convexo formado pelos pontos marcados for maior ou igual a metade da área de $ABCD$ e caso contrário Ndoti vence. Não se permite que um mesmo ponto seja escolhido duas vezes.

Quem possui estratégia vencedora, ou seja, pode garantir a vitória não importando as jogadas do adversário? Como esse jogador deve jogar?

5ª OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DA COMUNIDADE DOS PAÍSES DE LÍNGUA PORTUGUESA

Enunciados e resultado brasileiro

O Brasil conquistou uma medalha de ouro e três de prata na 5ª Olimpíada de Matemática da Comunidade dos Países de Língua Portuguesa, realizada de 5 a 10 de agosto, na cidade de Praia, Cabo Verde. Com este resultado o país ficou pelo terceiro ano consecutivo com a primeira posição na classificação geral, seguido pela equipe de Portugal. A equipe foi liderada pelos professores Carlos Gustavo Moreira, do Rio de Janeiro (RJ) e Emiliano Augusto Chagas, de São Paulo (SP).

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	**Mateus Siqueira Thimóteo**	**Medalha de Ouro**
BRA2	**Pedro Lucas Lanaro Sponchiado**	**Medalha de Ouro**
BRA3	**Bruno Brasil Meinhart**	**Medalha de Prata**
BRA4	**Andrey Jhen Shan Chen**	**Medalha de Prata**

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

No triângulo ABC, L e K são os pontos de interseção das bissetrizes dos ângulos $\angle ABC$ e $\angle CAB$ com os lados AC e BC, respetivamente. Sabendo que KL é, também, bissetriz do ângulo $\angle AKC$, determine o ângulo $\angle BAC$.

PROBLEMA 2

Determine todos os números de dez algarismos cuja representação no sistema decimal é dada por $\overline{a_0a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9}$ tais que, para cada inteiro j com $0 \leq j \leq 9$, a_j é igual ao número de algarismos iguais a j nessa representação. Isto é: o primeiro algarismo é igual à quantidade de "0" na escrita desse número; o segundo algarismo é igual à quantidade de "1" na escrita desse número; o terceiro é igual à quantidade de "2" na escrita desse número; ... ; o décimo algarismo é igual a quantidade de "9" na escrita desse número.

PROBLEMA 3

No centro de um quadrado encontra-se um coelho e em cada vértice desse mesmo quadrado, um lobo. Os lobos deslocam-se apenas ao longo dos lados do quadrado e o coelho desloca-se livremente no plano. Sabendo que o coelho se desloca a uma velocidade de 10 km/h e que os lobos se deslocam a uma velocidade máxima de 14 km/h, determine se existe uma estratégia para o coelho sair do quadrado sem ser apanhado pelos lobos.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Sejam a um número real, tal que $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \neq -1$ e m, n, p, q números naturais. Prove que se $a^m + a^n = a^p + a^q$ e $a^{3m} + a^{3n} = a^{3p} + a^{3q}$, então $m \cdot n = p \cdot q$.

PROBLEMA 5

Duas circunferências de raios R e r, com $R > r$, são tangentes entre si exteriormente. Os lados adjacentes à base de um triângulo isósceles são tangentes comuns a essas circunferências. A base do triângulo é tangente à circunferência de raio maior. Determine o comprimento da base do triângulo.

PROBLEMA 6

Considere a sequência (a_n) dada por $a_1 = 2$ e $a_{n+1} = a_n^3 - a_n + 1$, para todo $n \geq 1$. Assim, por exemplo, $a_2 = 2^3 - 2 + 1 = 7$ e $a_3 = 7^3 - 7 + 1 = 337$. Prove que se p é um divisor primo de a_n então $p > n$.

29ª OLIMPÍADA IBERO-AMERICANA DE MATEMÁTICA

Enunciados e resultado brasileiro

A equipe brasileira formada por quatro estudantes do ensino médio conquistou duas medalhas de ouro e duas de prata na 29ª Olimpíada Ibero-Americana de Matemática (OIM), realizada entre os dias 29 de setembro e 6 de outubro na cidade de San Pedro Sula, Honduras. A equipe foi liderada pelos professores Matheus Secco Torres da Silva e Hugo Fonseca, ambos do Rio de Janeiro (RJ).

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	**Murilo Corato Zanarella**	**Medalha de Ouro**
BRA2	**Alessandro de Oliveira Pacanowski**	**Medalha de Ouro**
BRA3	**Daniel Lima Braga**	**Medalha de Prata**
BRA4	**Ana Karoline Borges Carneiro**	**Medalha de Prata**

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Para cada inteiro positivo n, define-se $s(n)$ como a soma dos dígitos de n. Determine o menor inteiro positivo k tal que

$$s(k) = s(2k) = s(3k) = \cdots = s(2013k) = s(2014k).$$

PROBLEMA 2

Ache todos os polinômios $P(x)$ com coeficientes reais tais que $P(2014) = 1$ e, para algum inteiro c, se tem

$$xP(x-c) = (x-2014)P(x).$$

PROBLEMA 3

Sobre uma circunferência marcam-se 2014 pontos. Sobre cada um dos segmentos cujos extremos são dois dos 2014 pontos escreve-se um número real não negativo. Sabe-se que, para qualquer polígono convexo cujos vértices são alguns dos 2014 pontos, a soma dos números escritos nos seus lados é menor ou igual a 1. Determine o maior valor possível para a soma de todos os números escritos.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Tem-se N moedas, das quais $N - 1$ são autênticas de igual peso e uma é falsa, de peso diferente das demais. O objetivo é, utilizando exclusivamente uma balança de dois pratos, achar a moeda falsa e determinar se é mais pesada ou mais leve que as autênticas. Em cada vez que se possa deduzir que uma ou várias moedas são autênticas, todas estas moedas são imediatamente separadas e não podem ser usadas nas pesagens seguintes. Determine todos os N para os quais se pode garantir que o objetivo seja atingido. (Podem-se fazer tantas pesagens quantas se deseje).

PROBLEMA 5

Seja ABC um triângulo acutângulo e H o ponto de interseção de suas alturas. A altura relativa ao vértice A corta BC em D. Sejam M e N os pontos médios de BH e CH, respectivamente. DM e DN intersectam AB e AC em X e Y , respectivamente. Se XY intersecta BH em P e CH em Q, demonstre que H, P, D e Q estão numa mesma circunferência.

PROBLEMA 6

Dado um conjunto X e uma função $f: X \to X$, denotamos, para cada $x \in X$, $f^1(x) = f(x)$ e para cada $j \geq 1$, $f^{j+1}(x) = f(f^j(x))$. Dizemos que $a \in X$ é um ponto fixo de f se $f(a) = a$.
Para cada número real x, definimos $\pi(x)$ como o número de primos positivos menores ou iguais a x.
Dado um número inteiro positivo n, dizemos que $f: \{1,2, \dots, n\} \to \{1,2, \dots, n\}$ é *catracha* se $f^{f(k)}(k)$ para todo $k \in \{1,2, \dots, n\}$.

Prove que:

a) Se f é catracha, então f tem pelo menos $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ pontos fixos.
b) Se $n \geq 36$, então existe uma função catracha com exatamente $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ pontos fixos.

30ª OLIMPÍADA IBERO-AMERICANA DE MATEMÁTICA

Enunciados e resultado brasileiro

A 30ª Olimpíada Ibero-americana de Matemática foi realizada em Mayagüez, Porto Rico no período de 06 a 14 de novembro de 2015. A equipe brasileira foi liderada pelos professores Eduardo Wagner, do Rio de Janeiro (RJ) e Samuel Barbosa Feitosa, de Salvador (BA). Nesta oportunidade, a equipe brasileira obteve a segunda maior pontuação entre os países participantes.

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	**Pedro Henrique Sacramento de Oliveira**	**Ouro**
BRA2	**Daniel Lima Braga**	**Prata**
BRA3	**Gabriel Toneatti Vercelli**	**Prata**
BRA4	**João Campos Vargas**	**Prata**

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

O número 125 pode ser representado como soma de vários números naturais que são maiores que 1 e primos entre si dois a dois. Encontre o maior número de somandos que pode ter tal representação.

Nota: Dois números naturais são primos entre si se o seu máximo divisor comum é 1.

SOLUÇÃO DE DANIEL LIMA BRAGA (EUSÉBIO – CE)

O número máximo de parcelas é 8. Um exemplo com tal quantidade de parcelas é

$$125 = 3 + 5 + 7 + 11 + 16 + 17 + 23 + 43$$

Suponha que há uma representação com ao menos 10 parcelas e denotemos ela por

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 125,$$

com $n \geq 10$. Seja q_i o menor fator primo de a_i. Claramente $q_i \neq q_j$ se $i \neq j$, pois caso contrário teríamos $mdc(a_i, a_j) > 1$ e isso é um absurdo. Além disso, de $q_i \mid a_i$, temos $q_i \neq a_i$.

Portanto,

$$\begin{aligned}125 &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &\geq q_1 + q_2 + \cdots + q_n \\ &\geq 2 + 3 + 5 + \cdots + p_n \\ &\geq 2 + 3 + 5 + \cdots + p_{10} \\ &= 129,\end{aligned}$$

onde p_n denota o *n*-ésimo menor primo. Esse absurdo mostra que não existe representação com mais de 9 parcelas. Suponha agora que existe uma representação com 9 parcelas, isto é,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_9 = 125$$

Defina q_i como anteriormente. Se existe *i* tal que $q_i = 2$, então a_i é par e todas as demais parcelas devem ser ímpares. Como a soma de oito inteiros ímpares e um par é par, não podemos obter 125 como soma. Portanto, $q\_i \geq 3$ para todo *i*. Usando novamente que os primos q_i são distintos, temos

$$\begin{aligned}125 &= a_1 + a_2 + \cdots + a_9 \\ &\geq q_1 + q_2 + \cdots + q_9 \\ &\geq 3 + 5 + \cdots + 29 \\ &> 125.\end{aligned}$$

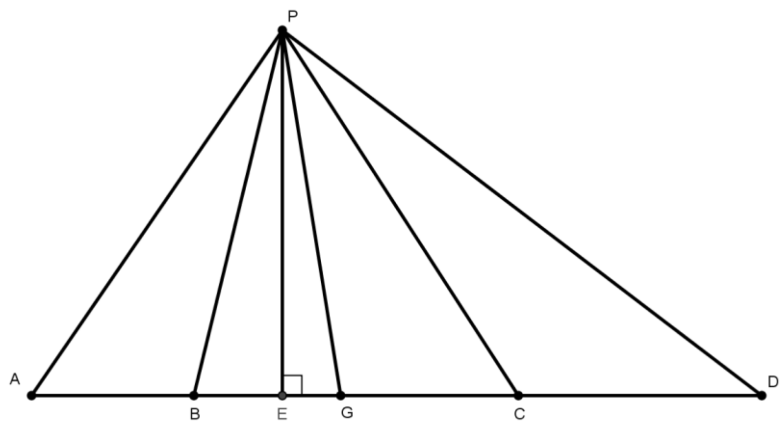
Este novo absurdo mostra que também não podemos escrever 125 como soma de 9 parcelas.

PROBLEMA 2

Uma reta *r* contém os pontos *A*, *B*, *C* e *D*, nessa ordem. Seja *P* um ponto fora de *r* tal que $\angle APB = \angle CPD$. Prove que a bissetriz de $\angle APD$ corta a reta r em um ponto G tal que

$$\frac{1}{GA} + \frac{1}{GC} = \frac{1}{GB} + \frac{1}{GD}$$

SOLUÇÃO DE PEDRO HENRIQUE SACRAMENTO DE OLIVEIRA (SÃO PAULO – SP)



Seja *E* o pé da altura do ponto *P* ao segmento *AD*. Considere uma inversão de polo G e raio de círculo de inversão igual a 1. Sejam A_1, B_1, C_1, D_1 e P_1 as imagens de *A*, *B*, *C*, *D* e P, respectivamente, por tal inversão. Então

$$\frac{1}{GA}+\frac{1}{GC}= GA_1+ GC_1 = A_1C_1 \text{ e } \frac{1}{GB}+\frac{1}{GD} = GB_1 + GD_1 = B_1D_1 \ (*)$$

Como os quadriláteros PAP_1A_1, PBP_1B_1, PCP_1C_1 e PDP_1D_1 são inscritíveis, segue que

$$\angle P_1C_1A_1 = \angle GPC = \angle GPB = \angle P_1B_1D_1$$

e

$$\angle P_1C_1A_1 = \angle GPC = \angle GPB = \angle P_1B_1D_1.$$

Portanto, os triângulos $P_1A_1C_1$ e $P_1B_1D_1$ são semelhantes. Como as distâncias do vértice P_1 aos segmentos correspondentes A_1C_1 e B_1D_1 são iguais, segue que estes triângulos são congruentes. Logo, $A_1C_1 = B_1D_1$ e segue o resultado em virtude de $(*)$.

Outra maneira de mostrar a igualdade entre os segmentos mencionados anteriormente é usar o Teorema da Bissetriz Interna e a fórmula de distância do inverso de um segmento:

$$\begin{aligned}\frac{A_1C_1}{B_1D_1} &= \frac{\frac{1^2\cdot AC}{GA\cdot GC}}{\frac{1^2\cdot BD}{GB\cdot GD}}\\ &= \frac{GB}{GC}\cdot\frac{AC}{BD}\cdot\frac{GD}{GA}\\ &= \frac{PB}{PC}\cdot\frac{AC}{BD}\cdot\frac{PD}{PA}\\ &= \frac{(PB\cdot PD\cdot \operatorname{sen}\angle BPD)}{(PC\cdot PA\cdot \operatorname{sen}\angle BPD)}\cdot\frac{(AC\cdot PE)}{(BD\cdot PE)}\\ &= \frac{[PBD]}{[PAC]}\cdot\frac{[PAC]}{[PBD]}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Observação: *[XYZ]* denota a área do triângulo *XYZ.*

PROBLEMA 3

Sejam α e β beta raízes do polinômio x^2-qx+1, onde q é um número racional maior que 2. Definimos $s_1 = \alpha+\beta$ e $t_1 = 1$ e, para cada inteiro maior que $n \geq 2$:

$$S_n = \alpha^n+\beta^n, t_n = s_{n-1}+2s_{n-2}+\cdots+(n-1)s_1+n$$

Demonstrar que, para todo *n* ímpar, t_n é um quadrado de um número natural.

SOLUÇÃO DE GABRIEL TONEATTI VERCELLI (OSASCO – SP)

Como α e β são raízes de $x^2-qx+1=0$, temos

$$\alpha^n - qa^{n-1} - \alpha^{n-2} = \alpha^{n-2}(\alpha^2-q\alpha+1)=0,$$
$$\beta^n - q\beta^{n-1} - \beta^{n-2} = \beta^{n-2}(\beta^2-q\beta+1)=0.$$

Portanto, somando as equações, podemos obter

$$s_n - qs_{n-1}+s_{n-2}=0$$

Assim,

$$qt_n - t_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} iqs_{n-i} + nq - \sum_{i=1}^{n-1} is_{n-i-1} - (n-1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} i(qs_{n-i} - s_{n-i-1}) + (n-1)(qs_1 - 1) + nq$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} is_{n-i-1} + (n-1)s_2 + ns_1 + n - 1$$
$$= t_{n+1} - 2.$$

Consequentemente $t_{n+1} = qt_n - t_{n-1} + 2$. Assim, como $q - 2 > 0$, segue que

$$t_{n+1} + \frac{2}{q-2} = q\left(t_n + \frac{2}{q-2}\right) - \left(t_{n-1} + \frac{2}{q-2}\right).$$

Definindo $b_n = t_n + \frac{2}{q-2}$, para $n \in \mathbb{N}$, obtemos em virtude da equação anterior a recorrência:

$$b_{n+1} = qb_n - b_{n-1}.$$

A equação característica de tal recorrência é $x^2 - qx + 1$ e, como suas raízes são α e β, podemos escrever:

$$b_n = A\alpha^n + B\beta^n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Usando os termos iniciais $b_1 = \frac{q}{q-2}$ e $b_2 = q + 2 + \frac{q}{q-2}$, podemos encontrar os valores de *A* e *B* obtendo:

$$b_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{q-2} = \frac{s_n}{q-2}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Agora vamos provar que dada a sequência $a_n = qa_{n-1} - a_{n-2}$, com $a_1 = 1$ e $a_2 = q + 1$, temos $t_{2n+1} = a_{n+1}^2$. Veja que isso terminará o problema, pois os primeiros elementos da sequência a_n são racionais bem como os coeficientes de sua fórmula de recorrência e assim todos os seus termos também serão racionais.

Suponha, por indução, que $a_i^2 = t_{2i-1}, \forall\, i \le n-1$. Como $\alpha\beta = 1$ e $\alpha + \beta = -q$, segue que

$$\begin{aligned} s_{2n-3} \cdot s_{2n-5} &= (\alpha^{2n-3} + \beta^{2n-3}) \cdot (\alpha^{2n-5} + \beta^{2n-5}) \\ &= \alpha^{4n-8} + \beta^{4n-8} + \alpha^2 + \beta^2 \\ &= s_{2n-4}^2 + q^2 - 4\ . \end{aligned}$$

Assim

$$
\begin{aligned}
t_{2n-1} &= (q-2)(s_{2n-1}-2)\\
&= (q-2)(qs_{2n-2}-s_{2n-3}-2)\\
&= (q-2)(q^2s_{2n-3}-qs_{2n-4}-s_{2n-3}-2)\\
&= (q-2)(\,q^2s_{2n-3}-s_{2n-3}-s_{2n-5}-s_{2n-3}-2)\\
&= (q-2)(q^2(s_{2n-3}-2)-(s_{2n-5}-2)-2s_{2n-3}+2q^2-4)\\
&= q^2a_{n-1}^2+a_{n-2}^2+(q-2)(2q^2-2s_{2n-5}-2s_{2n-3})\\
&= (qa_{n-1}-a_{n-2})^2+2qa_{n-1}a_{n-2}+(q-2)(2q^2-2qs_{2n-4})
\end{aligned}
$$

Veja agora que

$$
\begin{aligned}
2qa_{n-1}a_{n-2} &= 2q(q-2)\sqrt{(s_{2n-3}-2)(s_{2n-5}-2)}\\
&= 2q(q-2)\sqrt{s_{2n-4}^2+q^2-4-2qs_{2n-4}+4}\\
&= 2q(q-2)(s_{2n-4}-q)\\
&= -(q-2)(2q^2-2qs_{2n-4})
\end{aligned}
$$

Logo,

$$t_{2n-1}=(qa_{n-1}-a_{n-2})^2=a_n^2.$$

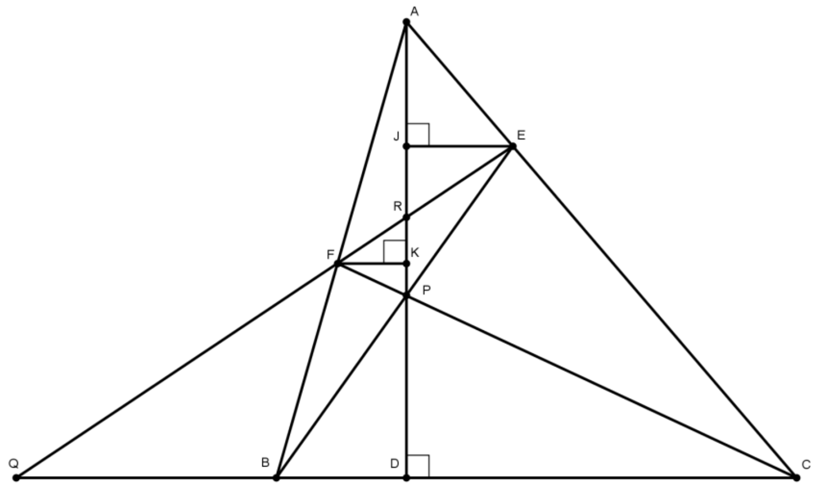
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

No triângulo acutângulo *ABC* o ponto *D* é o pé da perpendicular de *A* ao lado *BC*. Seja *P* um ponto no segmento *AD*. As retas *BP* e *CP* cortam os lados *AC* e *AB* em *E* e *F* respectivamente. Sejam *J* e *K* os pés das perpendiculares de *E* e *F* a *AD*, respectivamente. Demonstre que

$$\frac{FK}{KD}=\frac{EJ}{JD}$$

SOLUÇÃO DE JOÃO CÉSAR CAMPOS VARGAS (BELO HORIZONTE – MG)



Sejam $Q = EF \cap BC$ e $R = EF \cap AD$. Como *BE*, *CF* e *i* são concorrentes, aplicando o Teorema de Ceva no triângulo *ABC*, podemos concluir que:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{EA}{CE} \cdot \frac{FB}{AF}$$

Como *E*, *F* e *Q* são colineares, aplicando agora o Teorema de Menelaus no triângulo ABC, temos

$$\frac{BQ}{QC} = \frac{AE}{CE} \cdot \frac{BF}{AF}$$

Daí,

$$\frac{BD}{DC} : \frac{BQ}{CQ} = -1$$

e assim vale a relação $\mathcal{R}(B, C; D, Q) = -1$ (de fato, essa é construção de um conjugado harmônico). Consequentemente, considerando a projeção perspectiva por *A*, temos

$$BCDQ \overset{A}{\underset{\wedge}{=}} FERQ$$

Portanto, $\mathcal{R}(F, E; R, Q) = -1$ e

$$-1 = \frac{FR}{ER} : \frac{FQ}{QE}$$

$$= \frac{FD \ \cdot sen \angle FDR}{DE \ \cdot sen \angle RDE} : \frac{FD \ \cdot sen \angle FDQ}{DE \ \cdot sen \angle EDQ}$$
$$= \frac{sen \angle FDR}{sen \angle FDQ} : \frac{sen \angle RDE}{sen \angle EDQ}.$$

Se $\angle RDF = \alpha$ e $\angle RDE = \beta$, então $\angle FDQ = 90^{\circ} - \alpha$ e $\angle EDQ = 90^{\circ} + \beta$. Desconsiderando a orientação dos segmentos e ângulos, a série de igualdades anteriores nos permitem concluir que:

$$tg \ \alpha = tg \ \beta.$$

Isso acaba o problema, pois $tg \ \alpha = \frac{FK}{KD}$ e $tg \ \beta = \frac{EJ}{JD}$.

PROBLEMA 5

Determine todos os pares (a,b) de números inteiros que verificam

$$\left(b^2 + 7(a-b)\right)^2 = a^3 b.$$

SOLUÇÃO DE PEDRO HENRIQUE SACRAMENTO DE OLIVEIRA (SÃO PAULO – SP)

A equação do problema pode ser reescrita como

$$ba^3 - 49a^2 + (-14b^2 + 98b)a + (-b^4 + 14b^3 - 49b^2) = 0$$

ou, de forma fatorada, como

$$(a-b)(ba^2 + (b^2 - 49)a + b^3 - 14b^2 + 49b) = 0.$$

Se $a = b$, encontramos uma infinidade de soluções. Se $a \neq b$, devemos ter

$$ba^2 + (b^2 - 49)a + b^3 - 14b^2 + 49b = 0.$$

Se $b = 0$, então $-49a = 0$, ou seja, $a = 0$ e essa solução já foi encontrada. Supondo agora $b \neq 0$, para termos soluções inteiras, o discriminante da equação do segundo grau em a acima deve ser um quadrado perfeito e, com mais razão, um inteiro não negativo.

Daí

$$\Delta = (b^2 - 49)^2 - 4b^2(b-7)^2$$

$$= (b-7)^3(-3b-7)$$
$$\geq 0.$$

Fazendo o estudo do sinal das funções do primeiro grau $b-7$ e $-3b-7$, podemos concluir que

$$-\frac{7}{3} \leq b \leq 7.$$

Basta agora testarmos os valores de Δ para cada uma dessas possibilidades.

Se $b=-2$, então $\Delta = 3^6$ e assim $a = -13/7 \notin \mathbb{Z}$ ou $a = -18$.

Se $b=-1$, então $\Delta = 2^{11}$ e não temos uma solução inteira por não ser um quadrado perfeito.

Se $b=1$, então $\Delta = 2^4 3^3 5$ e não temos uma solução inteira por não ser um quadrado perfeito.

Se $b=2$, então $\Delta = 5^3 13$ e não temos uma solução inteira por não ser um quadrado perfeito.

Se $b=3$, então $\Delta = 2^{10}$ e assim $a = 8/6 \notin \mathbb{Z}$ ou $a = 12$.

Se $b=4$, então $\Delta = 3^3 19$ e não temos uma solução inteira por não ser um quadrado perfeito.

Se $b=5$, então $\Delta = 2^4 11$ e não temos uma solução inteira por não ser um quadrado perfeito.

Se $b=6$, então $\Delta = 5^2$ e assim $a = 18/12 \notin \mathbb{Z}$ ou $a = 8/12 \notin \mathbb{Z}$.

Se $b=7$, então $\Delta = 0$ e assim $a = 0$.

Logo, as soluções são $(a,a), \forall a \in \mathbb{Z}$, $(-18{,}2)$, $(12{,}3)$ e $(0{,}7)$.

PROBLEMA 6

Beto joga com o seu computador o seguinte jogo: inicialmente o computador escolhe ao acaso 30 inteiros de 1 a 2015 e Beto escreve-os num quadro (pode haver números repetidos); em cada passo, Beto escolhe um inteiro positivo k e alguns dos números escritos no quadro, e subtrai de cada um deles o número *k*, com a condição de que os números resultantes continuem sendo não negativos. O objetivo do jogo é conseguir que nalgum momento os 30 números resultantes sejam iguais a 0, e nesse caso o jogo termina. Determine o menor número *n* para que, independentemente dos números inicialmente escolhidos pelo computador, o Beto possa terminar o jogo no máximo em *n* passos.

SOLUÇÃO DE PEDRO HENRIQUE SACRAMENTO DE OLIVEIRA (SÃO PAULO – SP)

O menor *n* é 11. Para ver que é possível com tal quantidade de passos, escreva os 30 números em base binária. Como $2^{11} = 2048 > 2015$, esses números só podem ter dígitos não nulos até a décima primeira casa binária. Assim, basta subtrair o número 2^{k-1}, com k variando de 1 a 11, dos todos os números que apresentarem o dígito 1 na *k*-ésima posição. Para mostrar que não é possível com menos de 11 passos, considere o conjunto $A = \{2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{10}\}$ unido com outros 19 números quaisquer. Mostremos que, para cada elemento de *A*, existe um passo que apenas subtrai dele e de mais nenhum outro elemento de *A*. Considere o maior elemento 2^{10} de A e suponha que todo passo que o subtrai também altera outro elemento de A. Assim, podemos subtrair no máximo $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^9 < 2^{10}$. Um absurdo. Logo, existe um movimento que altera apenas 2^{10} e, como podemos deixar esse movimento por último, podemos repetir o argumento com o conjunto $A - \{2^{10}\}$. Concluiremos de forma análoga que existirá um passo que altera apenas 2^9 e todos os demais elementos de *A*. Como *A* possui 11 elementos, não podemos torna-los todos nulos com menos de 11 movimentos.

REDESCOBRINDO CEVA E MENELAUS EM DIMENSÃO TRÊS

Rui Eduardo Paiva, IFCE, Quixadá – CE

♦ Nível Avançado

Muitos teoremas importantes da geometria plana têm análogos em geometria espacial, por exemplo, o famoso teorema de Pitágoras. Outros teoremas menos conhecidos, mas também importantes têm análogos. Essa analogia entre teoremas no plano e no espaço não é apenas elegante, mas também bastante útil. Se um teorema no plano é essencial na resolução de problemas, então podemos inferir que o seu análogo no espaço pode ser utilizado para formular e resolver problemas semelhantes em dimensão três. Nessa perspectiva, nossa proposta é generalizar para o caso tridimensional dois teoremas significantes, o de Ceva e o de Menelaus, os quais estão intimamente relacionados e, em seguida, apresentar algumas aplicações em problemas olímpicos.

Vale ressaltar que no plano, enquanto o teorema de Ceva estabelece condições para que três cevianas de um triângulo sejam concorrentes, o teorema de Menelaus estabelece condições para que três pontos, um sobre cada lado de um triângulo, sejam colineares. Existe uma relação entre esses dois teoremas, chamada de dualidade. Em última análise, o principio da dualidade diz que qualquer afirmação verdadeira na geometria deve permanecer fiel quando as palavras ponto e reta são trocadas; assim como dois pontos estão em exatamente uma reta, duas retas se intersectam em exatamente um ponto, ou ainda, como três pontos podem ser colineares, três retas podem ser concorrentes.

No análogo do teorema de Menelaus para o caso tridimensional, os lados de um triângulo se tornam arestas de um tetraedro e a reta que intersecta o triângulo torna-se um plano que intersecta esse tetraedro (veja figura 1).

Teorema 1 (Menelaus – versão espacial). Seja $ABCD$ um tetraedro tal que $X \in \overline{AB}$, $Y \in \overline{BC}$, $Z \in \overline{CD}$ e $W \in \overline{DA}$. Os pontos X, Y, Z e W são coplanares se, e somente se,

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} \cdot \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZD}} \cdot \frac{\overline{DW}}{\overline{WA}} = 1. \qquad (1a)$$

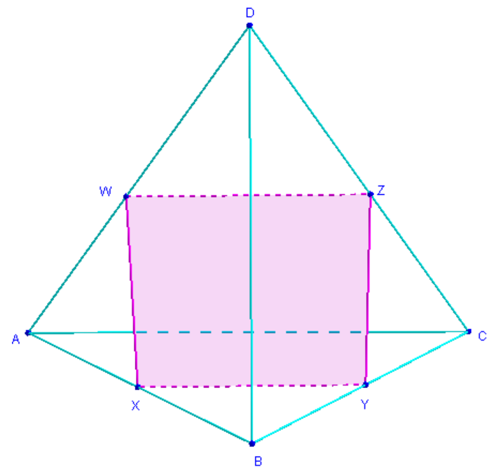


Figura 1. Tetraedro $ABCD$ intersectado pelo plano $XYZW$.

Demonstração: Supondo que X, Y, Z e W são coplanares, consideramos a reta s, passando pelo ponto W e perpendicular ao plano $XYZW$, tal que A' e D'são pontos de s e representam, respectivamente, as projeções ortogonais de A e D.

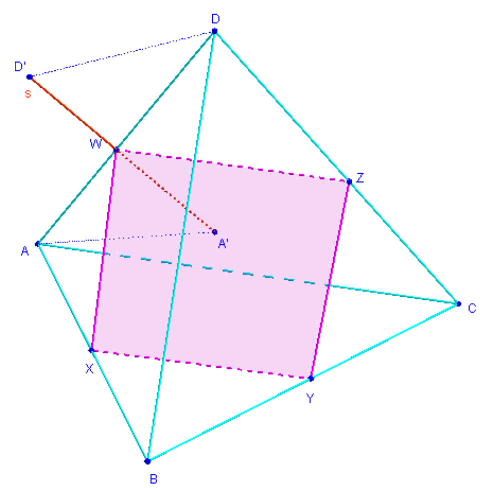


Figura 2. Reta s perpendicular ao plano $XYZW$ no ponto W.

Com isso, sendo k a área do quadrilátero $XYZW$, podemos estabelecer

$$\frac{\overline{DW}}{\overline{WA}} = \frac{\overline{D'W}}{\overline{WA'}} = \frac{\frac{1}{3}k \cdot \overline{D'W}}{\frac{1}{3}k \cdot \overline{WA'}} = \frac{V_{DXYZW}}{V_{AXYZW}},$$

em que V_{DXYZW} é o volume da pirâmide de vértice D e V_{AXYZW} o volume da pirâmide de vértice A. De modo análogo obtemos as seguintes razões

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} = \frac{V_{AXYZW}}{V_{BXYZW}}, \qquad \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} = \frac{V_{BXYZW}}{V_{CXYZW}}, \qquad \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZD}} = \frac{V_{CXYZW}}{V_{DXYZW}}.$$

Assim, multiplicando-se cada uma destas razões, vemos que $(1a)$ é verdadeiro. Reciprocamente, supondo que $(1a)$ é satisfeito, consideramos o plano determinado pelos pontos X, Y e Z intersectando $\overline{DA}$ em um ponto S. Então,

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} \cdot \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZD}} \cdot \frac{\overline{DS}}{\overline{SA}} = 1,$$

donde concluímos que $\frac{\overline{DW}}{\overline{WA}} = \frac{\overline{DS}}{\overline{SA}}$, então S e W são conjugados harmônicos interiores do segmento $\overline{AD}$. Isto implica que S coincide com W, já que conjugado harmônico interior a um segmento é único. Portanto, os pontos X, Y, Z e W são coplanares.

Uma vez que o teorema de Ceva no plano tem uma relação com o teorema de Menelaus, espera-se que exista também uma relação entre os análogos espaciais. Neste caso, em vez de um plano cortando as arestas de um tetraedro em quatro pontos, quatro planos são construídos a partir dos extremos de cada aresta até um ponto na aresta oposta (veja figura 3). Em ambos os casos, a equação é a mesma e muito semelhante à versão plana.

Teorema 2 (Ceva – versão espacial). Seja $ABCD$ um tetraedro tal que $X \in \overline{AB}$, $Y \in \overline{BC}$, $Z \in \overline{CD}$ e $W \in \overline{DA}$. Os planos AZB, BWC, CXD e DYA intersectam-se exatamente em um ponto se, e somente se,

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} \cdot \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZD}} \cdot \frac{\overline{DW}}{\overline{WA}} = 1. \qquad (1b)$$

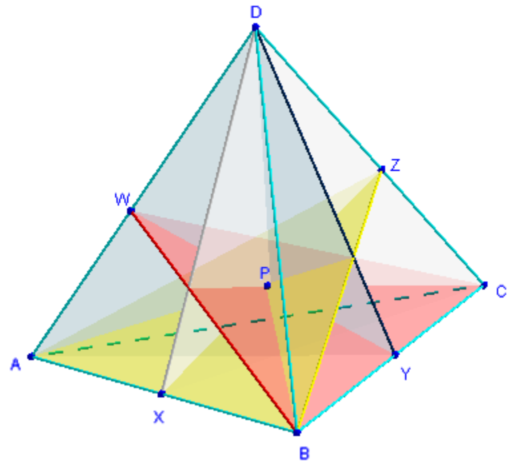


Figura 3. Interseção entre os planos AZB, BWC, CXD no tetraedro $ABCD$.

Demonstração: Seja P o ponto de interseção dos planos AZB, BWC, CXD e DYA. Desde que C' é o ponto de interseção dos segmentos $\overline{XD}$ e $\overline{WB}$ e também A' é a interseção dos segmentos $\overline{BZ}$ e $\overline{DY}$, os pontos P, A' e C' determinam um plano que intersecta o segmento $\overline{BD}$ no ponto T.

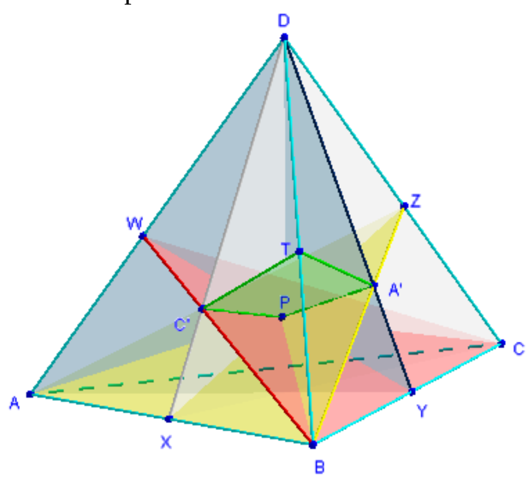


Figura 4. Plano $PA'C'$ intersectando o segmento $\overline{BD}$ no ponto T.

Aplicando o teorema de Ceva nos triângulos ΔABD e ΔBCD, obtemos as seguintes equações:

$$(2b) \quad \frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BT}}{\overline{TD}} \cdot \frac{\overline{DW}}{\overline{WA}} = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{\overline{TD}}{\overline{BT}} \cdot \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} \cdot \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZD}} = 1 \quad (3b)$$

Multiplicando-se as equações $(2b)$ e $(3b)$ o resultado é a equação desejada $(1b)$.

Reciprocamente, consideramos o segmento que liga os pontos de A até um ponto T em $\overline{BD}$ tal que $\overline{AT}$ passe pelo ponto C'. Pelo teorema de Ceva (versão plana) temos que a equação $(2b)$ é verdadeira. Além disso, por hipótese temos que $(1b)$ também é verdadeira e pode ser reescrita como

$$\frac{\overline{XB}}{\overline{AX}} \cdot \frac{\overline{YC}}{\overline{BY}} \cdot \frac{\overline{ZD}}{\overline{CZ}} \cdot \frac{\overline{WA}}{\overline{DW}} = 1. \qquad (4b)$$

Então multiplicando-se as equações $(2b)$ e $(4b)$ obtemos a equação $(3b)$, usando o teorema de Ceva no triângulo ΔBCD concluímos que $\overline{CT}$ passa pelo ponto A'.

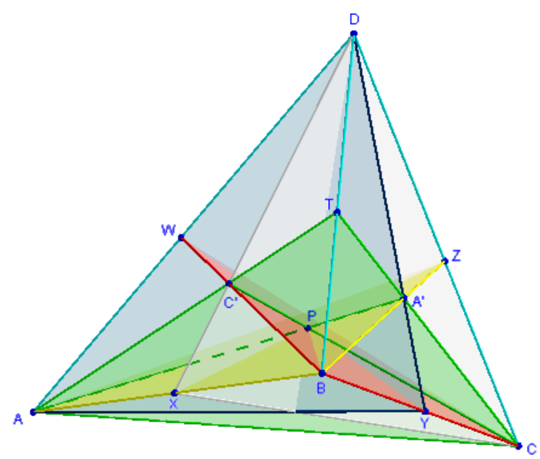


Figura 5. $\overline{AA'}$ como interseção entre os planos ADY e AZB e $\overline{CC'}$ como interseção entre os planos BWC e DCX.

Este resultado leva também à conclusão de que os segmentos $\overline{AA'}$ e $\overline{CC'}$ estão no plano ATC, porque os pontos das extremidades de cada segmento estão neste plano. Além disso, eles intersectam-se num ponto P, já que C está no semiplano oposto de C', tendo $\overline{AA'}$ como o segmento que separa o plano ATC em dois semiplanos. Finalmente, como $\overline{AA'}$ é a interseção entre os planos ADY e AZB, $\overline{CC'}$ é a interseção entre os planos BWC e DCX, segue-se que esses quatro planos se intersectam em P.

Apresentamos agora alguns problemas onde esses teoremas podem ser aplicados.

1) Seja $ABCD$ um quadrilátero no espaço de forma que AB, BC, CD e DA sejam tangentes a uma esfera ξ nos pontos X, Y, Z, W. Prove que estes pontos são coplanares.

Solução: De fato, pela figura 6, quando a esfera ξ intersecta o plano ACD determina um circulo do qual podemos concluir que $\overline{ZD} \equiv \overline{DW}$ (por serem segmentos tangentes ao círculo). Da mesma forma, esfera ξ intersecta o plano ABC em outro círculo tal que $\overline{XB} \equiv \overline{BY}$. Analogamente, os planos ABD e CBD também determinam círculos quando intersectam a esfera, portanto obtemos as seguintes congruências: $\overline{WA} \equiv \overline{AX}$ e $\overline{YC} \equiv \overline{CZ}$.

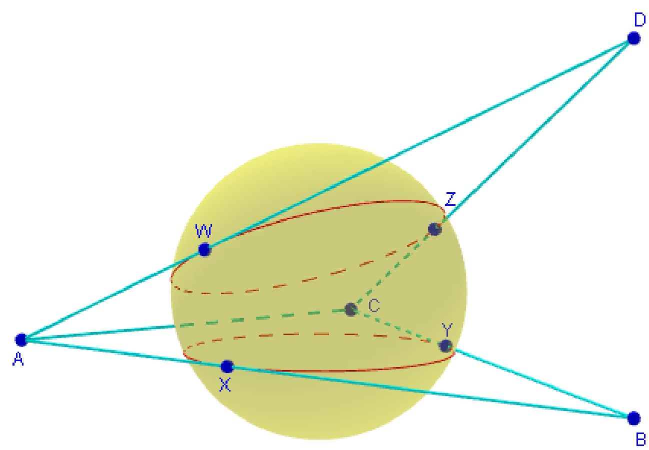


Figura 6. Quadrilátero espacial $ABCD$ e a esfera ξ.

Assim, podemos escrever:

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} \cdot \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZD}} \cdot \frac{\overline{DW}}{\overline{WA}} = 1,$$

o que mostra, pelo teorema 1 (Menelaus no espaço), que os pontos X, Y, Z, W são coplanares.

1) Seja $PABC$ um tetraedro e sejam A_1, B_1, C_1 os pontos médios das arestas BC, AC e AB respectivamente. Seja α um plano paralelo à face ABC que intercepta as arestas PA, PB, PC nos pontos A_2, B_2, C_2 respectivamente. Prove que A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 concorrem em um ponto D.

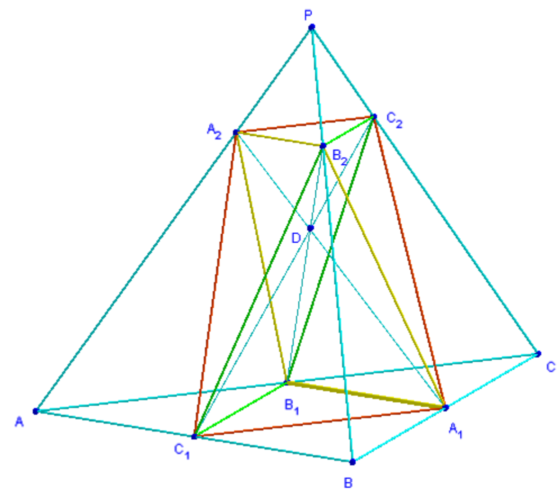


Figura 7. Tetraedro $PABC$.

Solução: Usando o fato de α ser um paralelo à face ABC, temos que os triângulos PA_2B_2 e PAB são semelhantes, logo podemos estabelecer a igualdade

$$\frac{\overline{PA_2}}{\overline{A_2A}} = \frac{\overline{PB_2}}{\overline{B_2B}},$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{\overline{PB_2}}{\overline{B_2B}} \cdot \frac{\overline{A_2A}}{\overline{A_2P}} = 1.$$

Além disso, como A_1 e B_1 são pontos médios dos segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$, respectivamente, podemos escrever

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} = 1.$$

Note que das duas últimas equações obtemos a expressão

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{A_2A}}{\overline{A_2P}} \cdot \frac{\overline{PB_2}}{\overline{B_2B}} = 1.$$

Com um raciocínio análogo para os triângulos semelhantes PB_2C_2 e PBC, chegamos à expressão

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CC_2}}{\overline{C_2P}} \cdot \frac{\overline{PA_2}}{\overline{A_2A}} = 1,$$

enquanto que para os triângulos semelhantes PC_2A_2 e PCA , teremos

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \cdot \frac{\overline{BB_2}}{\overline{B_2P}} \cdot \frac{\overline{PC_2}}{\overline{C_2C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} = 1.$$

Ante ao exposto, podemos concluir que:

- $C_1A_1C_2A_2$ e $C_1B_1C_2B_2$ são planos cuja interseção é o segmento $\overline{C_1C_2}$;
- $C_1B_1C_2B_2$ e $B_1A_1B_2A_2$ são planos cuja interseção é o segmento $\overline{B_1B_2}$;
- $C_1A_1C_2A_2$ e $B_1A_1B_2A_2$ são planos cuja interseção é o segmento $\overline{A_1A_2}$.

Isto é suficiente para que os segmentos A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 concorram no ponto D.

2) **(Romanian mathematical competitions 1999)** Um plano intersecta as arestas AB, BC, CD, DA de um tetraedro regular $ABCD$ nos pontos M, N, P, Q respectivamente. Provar que $MN \cdot NP \cdot PQ \cdot QM \geq AM \cdot BN \cdot CP \cdot DQ$.

Solução: Pela lei dos cossenos no ΔMBN temos

$$MN^2 \geq MB^2 + BN^2 - MB \cdot BN \geq MB \cdot BN$$

Similarmente, $NP^2 \geq CN \cdot CP$, $PQ^2 \geq DP \cdot DQ$ e $MQ^2 \geq AQ \cdot AM$. Multiplicando essas desigualdades obtemos

$$(MN \cdot NP \cdot PQ \cdot QM)^2 \geq (BM \cdot CN \cdot DP \cdot AQ) \cdot (AM \cdot BN \cdot CP \cdot DQ)$$

Mas o teorema 1 (de Menelaus no espaço) garante que

$$BM \cdot CN \cdot DP \cdot AQ = AM \cdot BN \cdot CP \cdot DQ$$

Combinando esta última igualdade com a desigualdade anterior,

$$(MN \cdot NP \cdot PQ \cdot QM)^2 \geq (AM \cdot BN \cdot CP \cdot DQ)^2,$$

que implica o resultado desejado.

Os dois problemas seguintes representam um corolário para o teorema 2 (de Ceva no espaço) e uma generalização para o Ponto de Gergonne*.

3) Em cada face de um tetraedro, existem três cevianas concorrentes e cada ceviana de uma face intersecta uma ceviana de outra face numa aresta comum. Mostre que os segmentos que ligam cada vértice do tetraedro com o ponto de interseção de cevianas na face oposta são concorrentes.

Solução: Este problema é semelhante à versão espacial do teorema de Ceva. De fato, basta notar que cevianas de faces adjacentes que se unem em uma aresta comum são, na verdade, interseções de planos com as faces do tetraedro (Figura 8).

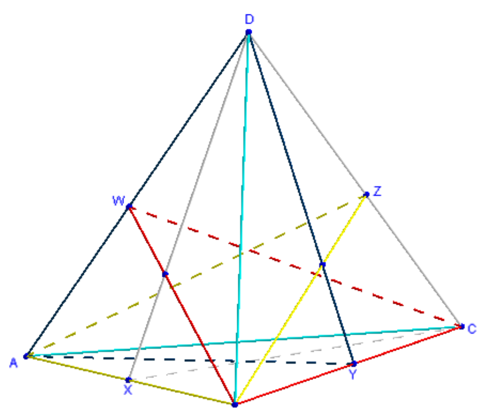


Figura 8. Interseção dos planos ADY, AZB, BWC e DCX com as faces do tetraedro $ABCD$.

---

* *As cevianas que unem cada vértice de um triângulo ABC ao lado oposto no ponto de tangência do círculo inscrito ao triângulo, intersectam-se num mesmo ponto chamado Ponto de Gergonne.*

Logo, considerando $ABCD$ um tetraedro tal que $X \in \overline{AB}$, Y $\in \overline{BC}$, $Z \in \overline{CD}$, $T \in \overline{BD}$, $U \in \overline{AC}$ e $W \in \overline{DA}$, a equação $(1b)$ vale e os planos ADY, AZB, BWC e DCX se intersectam no ponto P. Devemos mostrar que além desses planos, os planos DUB e ATC também se intersectam em P. Geometricamente, isto significa que devemos provar que $\overline{TU}$ é a interseção desses planos e tal que $P \in \overline{TU}$ (ver figura 9).

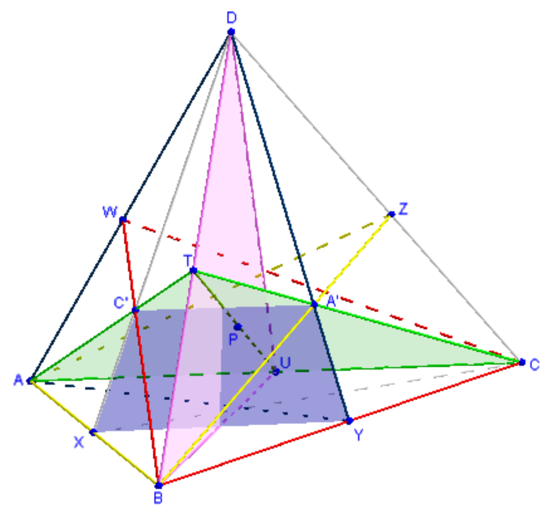


Figura 9. Interseção entre os planos DUB e ATC.

Mas o quadrilátero reverso $ABCT$ é cortado pelo plano XYD nos pontos C', X, Y, A', então temos:

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} \cdot \frac{\overline{CA'}}{\overline{A'T}} \cdot \frac{\overline{TC'}}{\overline{C'A}} = 1. \quad (*)$$

Por outro lado, utilizando o teorema de Ceva no ΔABC, obtemos à igualdade:

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} \cdot \frac{\overline{UC}}{\overline{AU}} = 1. \quad (**)$$

Portanto, dividindo a equação $(*)$ pela igualdade $(**)$ temos o seguinte resultado:

$$\frac{\overline{CA'}}{\overline{A'T}} \cdot \frac{\overline{TC'}}{\overline{C'A}} \cdot \frac{\overline{AU}}{\overline{UC}} = 1.$$

Isto mostra a concorrência dos segmentos $\overline{TU}, \overline{AA'}$ e $\overline{CC'}$ em P. Em outras palavras, o resultado é equivalente a dizer que todos os seis planos intersectam-se no ponto P.

4) Uma esfera intersecta um tetraedro de tal forma que ela é tangente a cada aresta. Em cada face, cevianas ligam cada vértice da face aos pontos de tangência com a esfera na aresta oposta. Mostre que os segmentos que ligam os pontos de interseção das cevianas em cada face com o vértice da face oposta são concorrentes.

Solução: Este problema é um análogo tridimensional do Ponto de Gergonne. Então, desde que a interseção da esfera com cada face é um círculo tangente às arestas (ver figura 10), os segmentos que ligam cada vértice de uma face com o ponto de tangência no lado oposto da face são concorrentes (verifique isso!). Além disso, como a esfera é tangente a cada aresta, cevianas de faces distintas e aresta comum intersectam-se no ponto de tangencia dessa aresta comum. Estas são as hipóteses do problema anterior, isto garante o resultado.

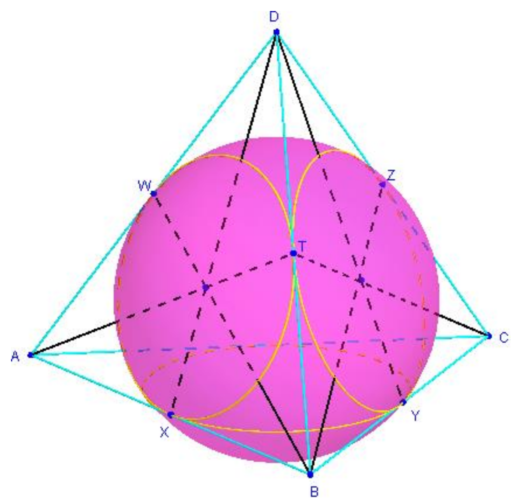


Figura 10. Análogo tridimensional do Ponto de Gergonne.

Problemas propostos

1) Seja *ABCD* um tetraedro regular com arestas de comprimento 4. Um plano passa pelas arestas AC, AD, BC e BD nos pontos W, X, Y e Z, respectivamente. Se $AW = 2$, $AX = 3$ e $BZ = 1$, determine o comprimento de BY.

2) Seja *ABCD* um tetraedro regular com arestas de comprimento 1001 e considere os pontos P, Q, R e S em AB, BC, CD e DA, respectivamente. Sabendo que os triângulos ABR, BCS, CDP e DAQ intersectam-se no ponto O e que $AP = 231$, $BQ = 455$ e $CR = 616$, determine o comprimento de DS.

3) Seja $ABCD$ um tetraedro regular e E, F, G, H os centróides das faces BCD, ACD, ABD e ABC, respectivamente. Prove que os quatro segmentos que unem cada vértice do tetraedro ao centróide da face oposta são concorrentes.

4) Em um tetraedro ortocentrico arestas opostas são perpendiculares. Prove que as alturas de um tetraedro são concorrentes se e somente se o tetraedro é ortocentrico.

5) **(Ponto de Monge)** Prove que os seis planos que passam pelos pontos médios das arestas de um tetraedro e perpendiculares às arestas opostas coincidem num ponto conhecido como o ponto de Monge.

6) **(Bulgarian Mathematical Olympiad 1964)** No tetraedro $ABCD$ todos os pares de arestas opostas são iguais. Prove que as linhas que passam por seus pontos médios são perpendiculares entre si e são eixos de simetria do tetraedro dado.

7) **(Torneio das cidades 2009)** Cada aresta de um tetraedro é tangente a uma determinada esfera. Provar que os três segmentos de reta que unem os pontos de tangência dos três pares de arestas opostas do tetraedro são concorrentes.

8) **(British Mathematical Olympiad 1984)** $ABCD$ é um tetraedro tal que $DA = DB = DC = d$ e $AB = BC = CA = e$. M e N são os pontos médios de AB e CD. Um plano variável através MN intersecta AD em P e BC em Q. Mostre que $\frac{AP}{AD} = \frac{BQ}{BC}$. Encontrar o valor desta razão em termos de x e y, que minimiza a área de MQNP.

9) Qual é a maior secção plana possível de um tetraedro regular?

10) Mostre que os semiplanos bissetores de um tetraedro se intersectam em um ponto que é o centro da esfera inscrita no tetraedro.

REFERÊNCIAS

[1] ANDREESCU, T.; ZUMING, F.; LEE JR., G**. Mathematical Olympiads 1999-2000:** Problems and Solutions From Around the World; MAA, 2003.

[2] ASSOCIACÓN FONDO DE INVESTIGADORES Y EDITORES. **Geometría, una visión de la planimetría**; Lumbreras editores S.R.L, Lima, 2009.

[3] ASSOCIACÓN FONDO DE INVESTIGADORES Y EDITORES. **Geometría, una visión de la estereometría**; Lumbreras editores S.R.L, Lima, 2009.

[4] CHOU, S. C.; GAO, X. S.; ZHANG, J. Z. **Machine proofs in geometry**: automated production of readable proofs for geometry theorems I, 1946.

[5] CARNEIRO, E.; GIRÃO, F.; Centro de massa e aplicações à geometria, **Revista Eureka!** 21.

[6] CASTRO, L., Introdução à Geometria Projetiva, **Revista Eureka!** 8.

[7] GOLDBERG, N. **Spatial Analogues of Ceva's Theorem and its Applications**. 2002. http://www.rose-hulman.edu/mathjournal/archives/2002/vol3-n2/goldberg/goldberg.doc. Acessado em 02/11/2013.

[8] MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; JORGE, M. **Geometria II**. Rio de Janeiro: F. C. Araújo da Silva, 2002.

PERMUTANDO ALGARISMOS DOS NÚMEROS

Fernando Soares Carvalho† e Eudes Antonio Costa‡

♦ Nível Iniciante

Introdução

Neste artigo, apresentaremos alguns problemas relacionados aos números n e n', sendo n' obtido de n por troca de posição, também chamada de permutação, de seus algarismos.

As questões aqui aprentadas foram usadas em encontros e oficinas de resolução de problemas com alunos medalhistas em olimpíadas de matemática e no fórum do Portal do PIC[§].

Exemplo 1: [OBMEP 2008, Banco de Questões] Um número inteiro positivo de três algarismos é equilibrado se um dos seus algarismos é a média aritmética dos outros. Por exemplo, 132 é equilibrado, pois $2 = \frac{1+3}{2}$. Veja ainda que 246 e 777 são números equilibrados. Quantos números equilibrados de 3 algarismos existem?

Solução: Consideremos um número equilibrado com os três algarismos distintos, diferentes de zero, permutando seus algarismos obtemos 6 números equilibrados. Por exemplo:

$$123;\ 132;\ 213;\ 231;\ 312;\ 321.$$

Se um dos 3 algarismos do número equilibrado é 0, então com esses algarismos obtemos apenas 4 números equilibrados, pois o 0 não pode estar na casa da centena. Por exemplo:

$$102;\ 120;\ 201;\ 210.$$

Além disso, note que se dois algarismos de um número equilibrado são iguais, o terceiro algarismo também deve ser igual a eles.

Assim, podemos organizar a busca por números equilibrados supondo que o algarismo das unidades é a média do algarismo das centenas e dezenas. Para obter os outros números equilibrados, bastará realizarmos as permutações dos

---

† fscarvalho@uft.edu.br

‡ eudes@uft.edu.br

§ http://www.obmep.org.br/pic.html

algarismos. Para que a divisão por 2 seja inteira, ou ambos os algarismos da dezena e centena são pares, ou ambos são ímpares.

Em cada item abaixo, listaremos todos os números equilibrados começados com um determinado algarismo e excetuaremos números com os mesmos algarismos de números já listados.

(1) Números equilibrados começados por 1:

$$111;\ 132;\ 153;\ 174;\ 195.$$

Associados a eles temos um total de $1 + (4 \times 6) = 25$ números equilibrados.

(2) Números equilibrados começados por 2:

$$201;\ 222;\ 243;\ 264;\ 285.$$

Associados a eles temos um total de $(4 + 1 + 3 \times 6) = 23$ números equilibrados.

(3) Números equilibrados começados por 3:

$$333;\ 354;\ 375;\ 396.$$

Associados a eles temos um total de $(1 + 3 \times 6) = 19$ números equilibrados.

(4) Números equilibrados começados por 4:

402; 444; 465; 486.

Associados a eles temos um total de $(4 + 1 + 2 \times 6) = 17$ números equilibrados.

(5) Números equilibrados começados por 5:

555; 576; 597.

Associados a eles temos um total de $(1 + 2 \times 6) = 13$ números equilibrados.

(6) Números equilibrados começados por 6:

603; 666; 687.

Associados a eles temos um total de $(4 + 1 + 6) = 11$ números equilibrados.

(7) Números equilibrados começados por 7:

777; 798.

Associados a eles temos um total de $(1 + 6) = 7$ números equilibrados.

(8) Números equilibrados começados por 8:

804; 888.

Associados a eles temos um total de $(4 + 1) = 5$ números equilibrados.

(9) Números equilibrados começados por 9: apenas o 999.

Logo, o número total de números equilibrados com três algarismos é

$$25 + 23 + 19 + 17 + 13 + 11 + 7 + 5 + 1 = 121.$$

Exemplo 2: Quantos números múltiplos de 3, de quatro algarismos distintos podem ser formados com os números 2,3,6,7 e 9?

Solução: Seja $n = a_3a_2a_1a_0$ um número com quatro algarismos distintos e múltiplo de 3. Pelo critério de divisibilidade por 3, a soma de dígitos $a_3 + a_2 + a_1 + a_0$ deve ser um múltiplo de três.

Veja que se $n = a_3a_2a_1a_0$ é múltiplo de 3, então qualquer número obtido pela permutação de seus dígitos também é múltiplo de 3. Como a soma $2 + 3 + 6 + 7 + 9 = 27$ é múltipla de 3, exatamente um dos múltiplos de 3 listados não deve figurar como um dos dígitos de n. Assim, temos quatro possíveis conjuntos de dígitos: $X_1 = \{2,6,7,9\}$, $X_2 = \{2,3,7,9\}$ e $X_3 = \{2,3,6,7\}$.

Associado a cada conjunto X_i, com $0 \leq i \leq 3$, temos 4! Elementos. Portanto, existem $3 \cdot 24 = 72$ números de quatro algarismos distintos e múltiplos de 2 com os dígitos mencionados.

Exemplo 3: Seja $n = a_2a_1a_0$ um número com 3 algarismos escrito na base 10. Considere o número n' obtido de *n* por uma permutação dos seus dígitos.

1) Se o número *n* é par, então n' também é par?
2) Se o número *n* é múltiplo de 3, então n' também é múltiplo de 3?
3) Se o número *n* é múltiplo de 5, então n' também é múltiplo de 5?
4) Se o número *n* é primo, então n' também é primo?

Solução:

1) É fácil ver que o número 342 é par, porém 243, que é uma de suas permutações, não é.
2) Se *n* é múltiplo de 3, então a soma de seus dígitos também é múltipla de 3. Consequentemente, pela recíproca do critério de divisibilidade por 3, o número n' também é um múltiplo de 3.
3) Veja que 125 é multiplo de 5, enquanto que 251 não é.
4) Veja que 211 é primo, enquanto que 112 não é.

Questões: Seja z_k um número inteiro com *k* algarismos (no sistema decimal) e $z_k{}'$ um número inteiro obtido de z_k pela permutação de seus dígitos.

1) Se o número z_k é um múltiplo de do número inteiro q ($q > 1$), então todo número $z_k{}'$ também é múltiplo de q?
2) Se o número z_k é primo, então todo número $z_k{}'$ também é primo?

Um número inteiro que satisfaz o segundo item da questão anterior é denominado *primo absoluto*. Este termo foi introduzido por Richert [4, 1951]. São exemplos de primos absolutos: 11, 13, 31, 337, 373 e 733 e todos os números primos menores que 10.

Inspirado na definição anterior, diremos que z_k é um *múltiplo absoluto* de um inteiro q ($q > 1$) se q é um divisor de toda permutação $z_k{}'$ de seus dígitos.

Por exemplo, 123 é um múltiplo absoluto de 3, pois as 6 permutações possíveis 123, 132, 213, 231, 312 e 321 são todas múltiplas de 3. O número 12468 não é um múltiplo absoluto de 2, pois a permutação 24681 não é par. A primeira caracterização de uma família simples de múltiplos absolutos é dada por:

Afirmação 1: Um inteiro positivo é um múltiplo absoluto de 2 se, e somente se, todos os seus dígitos são números pares.

Prova: Suponha que n é um múltiplo absoluto de 2 e x é um de seus dígitos. Considerando uma permutação dos dígitos de n em que x figura como dígito das unidades, podemos concluir que x é par, pois tal permutação é um múltiplo de 2 apenas quando o dígitos da unidades é par. Como isso vale para qualquer dígito de n, segue que todos os seus dígitos são números pares. Por outro lado, suponha agora que todos os dígitos de n são números pares. Isso quer dizer que qualquer permutação desses dígitos sempre vai possuir como dígito das unidades um número par e, consequentemente, a permutação em questão será um múltiplo de 2.
Como o critério de divisibilidade por 5 é semelhante ao critério de divisibilidade por 2, podemos concluir de modo análogo que:

Afirmação 2: Um inteiro positivo é um múltiplo absoluto de 5 se, e somente se, todos os seus dígitos são divisíveis por 5.

Vale a pena agora relembrarmos a demonstração do critério de divisibilidade por 3, que já foi usado anteriormente.

Critério de Divisibilidade por 3: Um inteiro é divisível por 3 se, e somente se, a soma dos seus dígitos é um múltiplo de 3.

Prova: Considere um inteiro qualquer de k dígitos:

$$n = a_k a_{k-1} a_{k-2} \ldots a_1 a_0$$

Podemos escrevê-lo como

$$\begin{aligned} n &= a_k a_{k-1} a_{k-2} \ldots a_1 a_0 \\ &= 10^{k-1} a_k + 10^{k-2} a_{k-1} + \cdots + a_0 \\ &= (10^{k-1} - 1) a_k + (10^{k-2} - 1) a_{k-1} + \cdots + (1-1) a_0 + (a_k + \cdots + a_0) \end{aligned}$$

Assim, como cada número da forma $10^i - 1$ é um múltiplo de 9, n é um múltiplo de 3 se, e somente se, a soma de dígitos $(a_k + \cdots + a_0)$ é um múltiplo de 3.

Como consequência do critério anterior, obtemos:

Afirmação 3: Um inteiro positivo é um múltiplo absoluto de 3 se, e somente se, a soma dos seus dígitos é um múltiplo de 3.

Observação: Vale a mesma afirmação trocando-se o 3 por 9.

Chameremos de *repunit* e denotaremos por R_k o número natural formado pela justaposição de *k* números iguais a 1. Esse termo foi utilizado pela primeira vez por Beiler [1, 1966] e significa nada mais que a repetição (repetition) da unitade (unit)

Considere a lista de repunits:

$$
\begin{aligned}
R_1 &= 1 &&= 0 \cdot 7 + 1 \\
R_2 &= 11 &&= 1 \cdot 7 + 4 \\
R_3 &= 111 &&= 15 \cdot 7 + 6 \\
R_4 &= 1111 &&= 158 \cdot 7 + 5 \\
R_5 &= 11111 &&= 1587 \cdot 7 + 2 \\
R_6 &= 111111 &&= 15873 \cdot 7 + 0 \\
R_7 &= 1111111 &&= 158730 \cdot 7 + 1 \\
R_8 &= 11111111 &&= 1587301 \cdot 7 + 4 \\
R_9 &= 111111111 &&= 15873015 \cdot 7 + 6 \\
R_{10} &= 1111111111 &&= 158730158 \cdot 7 + 5 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Assim os restos das divisões de R_1 , R_2, R_3, R_4, R_5, ... por 7 são respectivamente 1, 4, 6,5,2 , 0, 1, ... Como os restos se repetem de 6 em 6, podemos concluir que R_6, R_{12}, R_{18}, ... são todos múltiplos de 7.

Veja que 77, 707 e 77700 são múltiplos absolutos de 7 enquanto que 49 e 1680 não o são, pois 94 e 6180 não são múltiplos de 7.

Afirmação 4: Se um inteiro positivo é um múltiplo absoluto de 7, então ele possui no máximo dois dígitos distintos.

Prova: Seja

$$n = a_k a_{k-1} a_{k-2} \dots a_1 a_0$$

um múltiplo absoluto de 7 e considere a permutação de seus dígitos dada por

$$n' = a_k a_{k-1} a_{k-2} \dots a_0 a_1$$

Assim $n - n' = a_1 a_0 - a_0 a_1 = 9(a_1 - a_0)$ também é um múltiplo de 7. Como 7 não possui fatores primos em comum com 9, segue que 7 divide $a_1 - a_0$. Dados quaisquer dois dígitos em posições decimais distintas de *n*, podemos obter sempre duas permutações em que eles figuram entre as duas últimas casas decimais da direita e em posições trocadas. Seguindo o argumento anterior para tais permutações, podemos concluir que 7 divide $a - b$ para quaisquer que sejam os dígitos a e b de n. Se n possui pelo menos três dígitos distintos, digamos $a < b < c$, segue que $c - a = (c - b) + (b - a)$ é pelo menos 14, pois $c - b$ e $b - a$ são múltiplos positivos de 7. Isso é um absurdo, pois dois dígitos diferem em no máximo 9 unidades. Logo, n deve possuir no máximo dois dígitos distintos.

Exemplo 4: Dado qualquer número b no conjunto $\{0,1,2\}$, a soma:

$$b \cdot 111111 + a_5a_4a_3a_2a_1a_0,$$

onde cada a_i é 0 ou 7 sempre gera um múltiplo absoluto de 7.

Solução: Basta ver que qualquer permutação de seus dígitos também pode ser escrita na mesma forma e cada termo da soma é um múltiplo de 7.

Como não existem primos pares maiores que 2, nenhum primo absoluto pode conter um dígito par, pois sempre existirá uma permutação em que tal digito figurará como unidade e inevitavelmente ele será um múltiplo de 2 maior que 2. Portanto, um primo absoluto pode contar apenas os dígitos 1, 3, 7 e 9.

Observação:

a) Os primos absolutos maiores que 10 e menores que 100 são: 11, 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79 e 97

b) Os números primos absolutos maiores que 100 e menores que 1000 são: 113, 131, 199, 311, 337, 373, 733, 919 e 991.

Para o que segue, precisaremos do seguinte lema:

Lema 1. Os números $I_0 = 7931$, $I_1 = 1793$, $I_2 = 9137$, $I_3 = 7913$, $I_4 = 7193$, $I_5 = 1937$ e $I_0 = 7139$ possuem diferentes restos quando divididos por 7, mais precisamente, satisfazem a congruência

$$I_j \equiv j(mod\ 7), j = 0,1, \dots, 6.$$

Prova: O resultado segue das seguintes equações

$$7931 = 7 \cdot 1133 + 0;$$
$$1793 = 7 \cdot 256 + 1;$$

$$9137 = 7 \cdot 1305 + 2;$$
$$7913 = 7 \cdot 1130 + 3;$$
$$7193 = 7 \cdot 1027 + 4;$$
$$1937 = 7 \cdot 276 + 5;$$
$$7139 = 7 \cdot 1019 + 6.$$

Afirmação 6: Um número primo absoluto não contém simultaneamente em sua representação decimal todos os algarismos do conjunto $\{1,3,7,9\}$.

Prova: Suponha que $P = b_n b_{n-1} b_{n-2} \dots b_1 b_0$ é um número primo absoluto contendo os dígitos do conjunto $\{1,3,7,9\}$. Podemos permutar seus algarismos e supor que $\{b_3, b_2, b_1, b_0\} = \{1,3,7,9\}$. Agora, denotemos o bloco de dígitos restantes por L, isto é,

$$L = b_n b_{n-1} b_{n-2} \dots b_5 b_4.$$

Aproveitando a notação do exemplo anterior, veja agora que cada número da forma $L \cdot 10^4 + I_j$, para $j \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$, pode ser obtido de P através de uma permutação de seus quatro últimos dígitos. Como todos os números da forma I_j possuem restos distintos por 7, pelo menos uma das permutações listadas anteriormente será divisível por 7 e assim *P* não pode ser um primo absoluto.

Veja que um número repunit que é um primo também é um primo absoluto, pois todas as permutações de seus dígitos coincidem. Por exemplo, R_{11}, R_{19} e R_{23} são primos absolutos.

Afirmação 7: Não existe primo absoluto com dois algarismos iguais a a e dois algarismos iguais a b.

Prova: Basta ver que

$$\begin{aligned} n &= aabb \\ &= 11 \cdot a0b \\ n &= abab \\ &= 101 \cdot ab \\ n &= abba \\ &= 11 \cdot (91 \cdot a + 10 \cdot b) \end{aligned}$$

E assim, nos três casos possíveis de distribuições dos dígitos, sempre temos um número composto.

Afirmação 8: Nenhum número com $n \geq 5$ algarismos e que contém em sua representação decimal três algarismos iguais a a e dois algarismos iguais a b, com $a \neq b$, pode ser um primo absoluto.

Prova: Podemos permutar os dígitos de *n* e já supor que os seus cinco últimos dígitos são formados pelo número *aaabb.* Assim, podemos escrever *n* como

$$n = c_n c_{n-1} \dots c_6 c_5 \cdot 10^5 + aaabb.$$

Iremos permutar os últimos cincos dígitos de *n* colocando os dois dígitos *b* nas casas *i* e *j* obtendo o número n'. Veja que qualquer permutação dos últimos cinco dígitos pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} &aaaaa - 10^i a - 10^j a + 10^i b + 10^j b = \\ &aaaaa + (b-a)\left(10^i + 10^j\right). \end{aligned}$$

Observe as seguintes escolhas de *i* e *j*

$10^4 + 10^1$, $10^3 + 10^2$, $10^3 + 10^1$, $10^2 + 10^0$, $10^1 + 10^0$, $10^4 + 10^0$ e $10^4 + 10^2$

Estas 7 somas possuem restos diferentes na divisão por 7. Consequentemente, uma delas somada com $c_n c_{n-1} \dots c_6 c_5 \cdot 10^5$ irá produzir um múltiplo de 7 e assim *n* não pode ser um primo absoluto.

Para finalizar, em [3,1995], podemos encontrar algumas características adicionais para números primos absolutos (com mais de quatro algarismos em sua representação decimal), por exemplo, já se sabe a inexistência de tais números para $4 \leq n \leq 16$. Na verdade, conjectura-se que não existem números Primos Absolutos que não sejam repunits possuindo mais de 3 algarismos. Outra questão ainda em aberto é se o conjunto dos números primos absolutos é finito.

Exercícios Propostos

1) (OBMEP 2014, Banco de Questões) Um número inteiro positivo de quatro algarismos é equilibrado se um desses algarismos é igual à média aritmética des outros três. Por exemplo, o número 2631 é equilibrado, pois $3 = \frac{2+6+1}{3}$. Veja que 4444 também é equilibrado.

a) Encontre os três menores números equilibrados
b) Quantos são os números equilibrados menores que 2014?

2) a) Quantos são os números naturais de quatro algarismos distintos em que o algarismo 5 aparece?
b) Dentre os números contados no item a), quantos são pares? E pares absolutos?
c) Dentre os números contados no item a), quantos são múltiplos de 3? E múltiplos absolutos de 3?
d) Dentre os números contados no item a), quantos são múltiplos de 5? E múltiplos absolutos de 5?

3) Considere o conjunto dos números de três algarismos onde todos estão contidos no conjunto {0,1,2,3,4,5,6}.

a) Quantos desses números são pares? E quantos são pares absolutos?
b) Quantos são múltiplos de 3? E quantos são múltiplos de 3 absolutos?
c) Quantos números são múltiplos de 5? Quantos são múltiplos de 5 absolutos?

REFERÊNCIAS

[1] BEILER, A. H. 111 ... 111. Chapter 11 in Recreations in the Theory of Numbers: The Queen of Mathematics Entertains. New York: Dover, 1966.
[2] CARVALHO, F. S.; COSTA, E. A. Escrever o número 111...111 como Produto de dois Números. In: Revista do Professor de Matemática, no 87, 15-19, 2015.
[3] MAVLO, D. Absolute Prime Numbers. The Mathematical Gazette 485, 299-304, 1995.
[4] RICHERT, H. E. On Permutable Primtall. Morsk Matematiske Tiddskrift, 1951, vol.33, pp. 50-54.
[5] SILVA, V. V. Números: Construção e Propriedades. Editora UFG. Goiânia. 2003.

COMO É QUE FAZ?

91. (Rússia-2000) Os coeficientes a e b da equação $x^2+ax+b=0$ e suas raízes são quatro números distintos. É possível determinar a equação usando estes quatro números?

Solução: Sim. Digamos que os quatro números sejam a, b, c e d e uma das equações seja $x^2+ax+b=0$, com raízes c e d. Então $c + d = – a$ e $cd = b$. Se o conjunto $\{a, b, c, d\}$ não determina a equação, há outra equação do segundo grau com coeficiente líder 1 cujos outros coeficientes são dois números desse conjunto e cujas raízes são os outros dois números do conjunto. Temos duas possibilidades, com seus respectivos subcasos:

a) A nova equação é $x^2+bx+a=0$, e suas raízes são c e d. Nesse caso, $a = cd = b$, contradizendo a hipótese de os quatro números serem distintos.

b) Só uma das raízes, digamos c, aparece como coeficiente da equação.

a.i) A equação é $x^2+cx+b=0$. Nesse caso, $ad = b$ e $a + d = – c$. Como $a = – (c + d)$ e $b = cd$, $ad = cd$, donde $d = 0$ ou $a = c$. Se $d = 0$ então $b = cd = 0$. Em ambos os casos contradizemos a hipótese de os quatro números serem distintos.

a.ii) A equação é $x^2+cx+a=0$. Nesse caso, $bd = a$ e $b + d = – c$. Portanto $b = – (c + d) = a$, contradizendo a hipótese de os quatro números serem distintos.

a.iii) A equação é $x^2+ax+c=0$. Nesse caso, $bd = c$ e $b + d = – a$. Portanto $b + d = – a = c + d$, donde $b = c$, contradizendo a hipótese de os quatro números serem distintos.

a.iv) A equação é $x^2+bx+c=0$. Nesse caso, $ad = c$ e $a + d = – b$. Portanto $b + d = – a = c + d$, donde $b = c$, contradizendo a hipótese de os quatro números serem distintos.

c) As duas raízes c e d aparecem como coeficientes da equação. Podemos então supor que a equação é $x^2+cx+d=0.$ Temos então $ab = d$ e $a + b = – c$, donde $b = – c – a = – c + (c + d) = d$, contradizendo a hipótese de os quatro números serem distintos.

92. (Estônia-2000) Determine todos os restos possíveis da divisão do quadrado de um número primo com 120 por 120.

Solução: Temos que $1^2 = 1$ e $7^2 = 49$ deixam restos respectivamente 1 e 49 na divisão por 120. Vamos mostrar que 1 e 49 são os únicos restos possíveis. Se um número n é primo com 120 então em particular n é ímpar, donde $n = 2k + 1$ para algum k inteiro. Assim, $n^2 = 4k(k + 1) + 1$, e logo $n^2 - 1 = 4k(k + 1)$ é múltiplo de 8. Por outro lado, se n é primo com 120 então n não é divisível por 3, e deixa resto 1 ou 2 na divisão por 3. Em qualquer caso, n^2 deixa resto 1 na divisão por 3. Assim, se n é primo com 120, $n^2 - 1$ é múltiplo de 8 e de 3, e logo de 24. Note que nesse caso $n^2 - 49 = n^2 - 1 - 48$ também é múltiplo de 24. Finalmente, se n é primo com 120 então n não é divisível por 5, e deixa resto 1, 2, 3 ou 4 na divisão por 5. Se n deixa resto 1 ou 4 na divisão por 5, n^2 deixa resto 1 na divisão por 5. Nesse caso, n^2-1 é múltiplo de 5 e de 24, e logo de 120, donde n^2 deixa resto 1 na divisão por 120. Se n deixa resto 2 ou 3 na divisão por 5 então n^2 deixa resto 4 na divisão por 5, e nesse caso $n^2 - 49 = n^2 - 4 - 45$ é múltiplo de 5. Como $n^2 - 49$ também é múltiplo de 24, segue que $n^2 - 49$ é múltiplo de 120, e logo n^2 deixa resto 49 na divisão por 120.

93. (Inglaterra-2000) Quais os inteiros positivos a e b tais que

$$\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} - 1\right)^2 = 49 + 20\sqrt[3]{6}\ ?$$

Solução: Vamos procurar esses inteiros da forma $a=6x^3$ e $b=36y^3$, com x e y inteiros positivos. Teremos então:

$$\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} - 1\right)^2 = \left(x\sqrt[3]{6} + y\sqrt[3]{36} - 1\right)^2 = 12xy + 1 + (6y^2 - 2x)\sqrt[3]{6} + (x^2 - 2y)\sqrt[3]{36},$$

que é igual a $49 + 20\sqrt[3]{6}$ se $12xy + 1 = 49$, $6y^2 - 2x = 20$ e $x^2 - 2y = 0$. A primeira igualdade equivale a $xy = 4$ e, da última, $y = x^2/2$, donde $x^3/2 = 4$, e logo $x = 2$. Assim, $y = x^2/2 = 2$. Note que então $6y^2 - 2x = 24 - 4 = 20$, e a segunda igualdade também é satisfeita. Podemos então tomar $a = 6.2^3 = 48$ e $b = 36.2^3 = 288$.

94. (Alemanha-2000) Determine os números reais x tais que:

$$|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,x^2 - x - 1| - 3| - 5| - 7| - 9| - 11| - 13| = x^2 - 2x - 48$$

Solução: Como o lado esquerdo é não-negativo, devemos ter $x^2 - 2x - 48 \geq 0$, donde $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \geq 49$, o que equivale a $|x - 1| \geq 7$. Assim, $x \geq 8$ ou $x \leq -6$. Portanto,
$x^2 - x - 1 \geq (-6)^2 - (-6) - 1 = 41 > 35 = 3 + 5 + 7 + 9 + 11$. Além disso, se $x \geq 8$, temos $x^2 - x - 1 \geq 8^2 - 8 - 1 = 55 > 48 = 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$. Assim, em qualquer desses casos.

$||||||x^2-x-1|-3|-5|-7|-9|-11| = x^2-x-1-35 = x^2-x-36$, donde

$||||||||x^2-x-1|-3|-5|-7|-9|-11|-13| = |x^2-x-49|$ e, se $x \geq 8$,

$||||||||x^2-x-1|-3|-5|-7|-9|-11|-13| = x^2-x-49$;

Se $x \geq 8$, a equação fica $x^2-x-49 = x^2-2x-48$, donde $x=1<8$, absurdo.

Se $x \leq -6$, devemos considerar as equações $x^2-x-49 = x^2-2x-48$ e $-(x^2-x-49) = x^2-2x-48$. A solução da primeira é $x=1>-6$, absurdo. Já a segunda equivale à equação $2x^2-3x-97=0$, que tem uma raiz positiva, que não é solução e a raiz negativa $\alpha = \dfrac{3-\sqrt{785}}{4} < -6$, que é a única solução real para o problema. De fato, como $\alpha < -6$, temos $\alpha^2-2\alpha-48>0$, e, como $\alpha^2-2\alpha-48 = -(\alpha^2-\alpha-49)$, temos $-(\alpha^2-\alpha-49)>0$ e portanto $|\alpha^2-\alpha-49| = -(\alpha^2-\alpha-49) = \alpha^2-2\alpha-48$.

SOLUÇÕES DE PROBLEMAS PROPOSTOS

Publicamos aqui algumas das respostas enviadas por nossos leitores.

156) Denominamos Máquina de Conway o par $C = (e, S)$ formado por uma entrada $e = 2^{a_1}, a_1 \in \mathbb{N}$ e uma sequência finita $S = (s_i)_{1 \leq i \leq n}$ de racionais não nulos, com $s_n \in \mathbb{N}$. Dada uma máquina de Conway *C*, construímos a sequência p_i definida por:

(1) $p_1 = e$;
(2) $p_k = p_{k-1} \cdot s_i$, onde i é o menor inteiro positivo tal que $p_k \cdot s_1 \in \mathbb{N}$.

Dizemos que $a \in \mathbb{N}$ é uma saída de *C* se, e somente se, existe um inteiro positivo *k* tal que $p_k = 2^a$.

O conjunto de todas as saídas é denominado conjunto gerado por *C*.

Exemplo: A máquina de Conway formada pela entrada 2^2 e pela sequência

$$\frac{17}{91}, \frac{78}{85}, \frac{19}{51}, \frac{23}{38}, \frac{29}{33}, \frac{77}{29}, \frac{95}{23}, \frac{77}{19}, \frac{1}{17}, \frac{11}{13}, \frac{13}{11}, \frac{15}{14}, \frac{15}{2}, 55$$

gera os números primos.

Mostre que é possível construir uma Máquina de Conway que gere o conjunto dos quadrados perfeitos.

SOLUÇÃO ADAPTADA DE ANDERSON TORRES (SANTANA DE PARNAÍBA – SP)

Vamos mostrar que a máquina de Conway formada pela entrada $2^0 = 1$ e pela sequência

$$\frac{13}{17}, \frac{19}{23}, \frac{29}{31}, \frac{51}{22} = \frac{3}{2} \cdot \frac{17}{11}, \frac{62}{11} = \frac{2 \cdot 31}{11}, \frac{119}{260} = \frac{7}{2^2 \cdot 5} \cdot \frac{17}{13}, \frac{23}{13}, \frac{1035}{133} = \frac{3^2 \cdot 5}{7} \cdot \frac{23}{19},$$

$\frac{55}{19} = \frac{5 \cdot 11}{19}, \frac{124}{145} = \frac{2^2}{5} \cdot \frac{31}{29}, \frac{1}{29}, 11$ gera os quadrados perfeitos, em ordem crescente.

A ideia é que os primos maiores que *7* que dividem o numerador de um determinado termo de sequência (p_j) correspondente funcionam como marcadores

que caracterizam "estados da máquina", e determinam a próxima operação a ser feita.
Notemos que a sequência (p_j) começa com

$$1 = 2^0 \xrightarrow{11} 11 \xrightarrow{\frac{2\cdot 31}{11}} 2\cdot 31 \xrightarrow{\frac{29}{31}} 2\cdot 29 \xrightarrow{\frac{1}{29}} 2 = 2^1.$$

Vamos ver agora o que acontece imediatamente após uma saída, que, por hipótese de indução será da forma $n^2, n \geq 1$, os seja, após um termo $p_k = 2^{n^2}, n \geq 1$:

$$2^{n^2} \xrightarrow{11} 11\cdot 2^{n^2} \xrightarrow{\frac{3\cdot 17}{2\cdot 11}} 3\cdot 17\cdot 2^{n^2-1} \xrightarrow{\frac{13}{17}} 3\cdot 13\cdot 2^{n^2-1} \xrightarrow{\frac{23}{13}}$$
$$\xrightarrow{\frac{23}{13}} 3\cdot 23\cdot 2^{n^2-1} \xrightarrow{\frac{19}{23}} 3\cdot 19\cdot 2^{n^2-1} \xrightarrow{\frac{5\cdot 11}{19}} 3\cdot 5\cdot 11\cdot 2^{n^2-1}.$$

Agora vamos mostrar que se $n > k \geq 1$, um termo da forma $p_j = 3^{k^2}\cdot 5^k\cdot 11\cdot 2^{n^2-k^2}$ é transformado, depois de uma sucessão de operações, em $3^{(k+1)^2}\cdot 5^{k+1}\cdot 11\cdot 2^{n^2-(k+1)^2}$. Temos inicialmente a seguinte sucessão de operações:

$$3^{k^2}\cdot 5^k\cdot 11\cdot 2^{n^2-k^2} \xrightarrow{\frac{3\cdot 17}{2\cdot 11}} 3^{k^2+1}\cdot 5^k\cdot 17\cdot 2^{n^2-k^2-1} \xrightarrow{\frac{13}{17}}$$
$$\xrightarrow{\frac{13}{17}} 3^{k^2+1}\cdot 5^k\cdot 13\cdot 2^{n^2-k^2-1} \xrightarrow{\frac{7\cdot 17}{2^2\cdot 5\cdot 13}} 3^{k^2+1}\cdot 5^{k-1}\cdot 7\cdot 17\cdot 2^{n^2-k^2-3}.$$

A partir daí, vamos ver o que acontece com um termo da forma $p_j = 3^{k^2+1}\cdot 5^{k-r}\cdot 7^r\cdot 17\cdot 2^{n^2-k^2-2r-1}$ com $1 \leq r < k$:

$$3^{k^2+1}\cdot 5^{k-r}\cdot 7^r\cdot 17\cdot 2^{n^2-k^2-2r-1} \xrightarrow{\frac{13}{17}} 3^{k^2+1}\cdot 5^{k-r}\cdot 7^r\cdot 13\cdot 2^{n^2-k^2-2r-1} \xrightarrow{\frac{7\cdot 17}{2^2\cdot 5\cdot 13}}$$
$$\xrightarrow{\frac{7\cdot 17}{2^2\cdot 5\cdot 13}} 3^{k^2+1}\cdot 5^{k-r-1}\cdot 7^{r+1}\cdot 17\cdot 2^{n^2-k^2-2r-3}.$$

Assim, em algum momento, a partir de $3^{k^2+1}\cdot 5^{k-1}\cdot 7\cdot 17\cdot 2^{n^2-k^2-3}$ chegaremos em $3^{k^2+1}\cdot 5^{k-k}\cdot 7^k\cdot 17\cdot 2^{n^2-k^2-2k-1} = 3^{k^2+1}\cdot 7^k\cdot 17\cdot 2^{n^2-(k+1)^2}$.

Continuamos então com:

$$3^{k^2+1}\cdot 7^k\cdot 17\cdot 2^{n^2-(k+1)^2} \xrightarrow{\frac{13}{17}} 3^{k^2+1}\cdot 7^k\cdot 13\cdot 2^{n^2-(k+1)^2} \xrightarrow{\frac{23}{13}}$$

$$\xrightarrow{\frac{23}{13}} 3^{k^2+1}\cdot 7^k\cdot 23\cdot 2^{n^2-(k+1)^2} \xrightarrow{\frac{19}{23}} 3^{k^2+1}\cdot 7^k\cdot 19\cdot 2^{n^2-(k+1)^2}.$$

A partir daí, vamos ver o que acontece com um termo da forma $p_j = 3^{k^2+1+2r}\cdot 5^r\cdot 7^{k-r}\cdot 19\cdot 2^{n^2-(k+1)^2}$ com $0\le r<k$:

$$3^{k^2+1+2r}\cdot 5^r\cdot 7^{k-r}\cdot 19\cdot 2^{n^2-(k+1)^2} \xrightarrow{\frac{3^2\cdot 5\cdot 23}{7\cdot 19}} 3^{k^2+3+2r}\cdot 5^{r+1}\cdot 7^{k-r-1}\cdot 23\cdot 2^{n^2-(k+1)^2} \xrightarrow{\frac{19}{23}}$$
$$\xrightarrow{\frac{19}{23}} 3^{k^2+3+2r}\cdot 5^{r+1}\cdot 7^{k-r-1}\cdot 19\cdot 2^{n^2-(k+1)^2}.$$

Assim, em algum momento, a partir de $3^{k^2+1}\cdot 7^k\cdot 19\cdot 2^{n^2-(k+1)^2}$ chegaremos em $3^{k^2+1+2k}\cdot 5^k\cdot 7^{k-k}\cdot 19\cdot 2^{n^2-(k+1)^2} = 3^{(k+1)^2}\cdot 5^k\cdot 19\cdot 2^{n^2-(k+1)^2}$. Continuamos então com:

$$3^{(k+1)^2}\cdot 5^k\cdot 19\cdot 2^{n^2-(k+1)^2} \xrightarrow{\frac{5\cdot 11}{19}} 3^{(k+1)^2}\cdot 5^{k+1}\cdot 11\cdot 2^{n^2-(k+1)^2},$$

como queríamos mostrar.

Assim, em algum momento, a partir de 2^{n^2} chegaremos em $3^{n^2}\cdot 5^n\cdot 11$.

Vejamos como continua:

$$3^{n^2}\cdot 5^n\cdot 11 \xrightarrow{\frac{2\cdot 31}{11}} 2\cdot 3^{n^2}\cdot 5^n\cdot 31 \xrightarrow{\frac{29}{31}} 2\cdot 3^{n^2}\cdot 5^n\cdot 29.$$

A partir daí, vamos ver o que acontece com um termo da forma $p_j = 2^{r+1}\cdot 3^{n^2-r}\cdot 5^n\cdot 29$ com $0\le r<n^2$:

$$2^{r+1}\cdot 3^{n^2-r}\cdot 5^n\cdot 29 \xrightarrow{\frac{2\cdot 31}{3\cdot 29}} 2^{r+2}\cdot 3^{n^2-r-1}\cdot 5^n\cdot 31 \xrightarrow{\frac{29}{31}} 2^{r+2}\cdot 3^{n^2-r-1}\cdot 5^n\cdot 29.$$

Assim, em algum momento, a partir de $2\cdot 3^{n^2}\cdot 5^n\cdot 29$ chegaremos em $2^{n^2+1}\cdot 3^{n^2-n^2}\cdot 5^n\cdot 29 = 2^{n^2+1}\cdot 5^n\cdot 29$.

A partir daí, vamos ver o que acontece com um termo da forma $p_j = 2^{n^2+2r+1}\cdot 5^{n-r}\cdot 29$ com $0\le r<n$:

$$2^{n^2+2r+1}\cdot 5^{n-r}\cdot 29 \xrightarrow{\frac{2^2\cdot 31}{5\cdot 29}} 2^{n^2+2r+3}\cdot 5^{n-r-1}\cdot 31 \xrightarrow{\frac{29}{31}} 2^{n^2+2r+3}\cdot 5^{n-r-1}\cdot 29.$$

Assim, em algum momento, a partir de $2^{n^2+1}\cdot 5^{n}\cdot 29$ chegaremos em $2^{n^2+2n+1}\cdot 5^{n-n}\cdot 29 = 2^{(n+1)^2}\cdot 29$. O próximo movimento será então

$$2^{(n+1)^2}\cdot 29 \xrightarrow{\frac{1}{29}} 2^{(n+1)^2},$$

e logo a próxima saída será $(n+1)^2$, completando assim o argumento recursivo.

PROBLEMAS PROPOSTOS

✉ *Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e sugestões de novos problemas para próximos números.*

163) A equação quadrática $x^2 - 3x + q = 0$ possui duas raízes α e β. Sabendo que $\alpha^3 + \beta^3 = -81$, determine o valor de q.

164) Em um triângulo ABC sejam D e E pontos sobre os lados BC e AC, respectivamente, tais que $AB = BD = AE$. Se $\angle BAE = 60°$ e $DE = DC$, determine a medida do ângulo $\angle EDC$.

165) Seja A um subconjunto de 84 elementos do conjunto $\{1,2,3,\ldots,169\}$ tal que em A não existem dois elementos cuja soma é 169. Prove que A possui pelo menos um elemento quadrado perfeito.

166) É possível encontrar 2005 quadrados perfeitos diferentes tais que sua soma também é um quadrado perfeito?

167) Prove que $\dfrac{n^2+1}{\lfloor n \rfloor^2 + 2}$ não é inteiro para nenhum $n \in \mathbb{N}$.

168) Determine todas as funções $*: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ que são comutativas, associativas e satisfazem $0 * 0 = 0$ e $(x+c)*(y+c) = (x*y)+c, \forall x, y, c \in \mathbb{Q}$.

Problema 167 proposto por Fabiano Alberton de Alencar Nogueira (Rio de Janeiro – RJ); Problema 168 proposto por William Alvarado (San José, Costa Rica).

COORDENADORES REGIONAIS

Alberto Hassen Raad	(UFJF)	Juiz de Fora – MG
Américo López Gálvez	(USP)	Ribeirão Preto – SP
Antonio Carlos Nogueira	(UFU)	Uberlândia – MG
Carlos Alexandre Gomes da Silva	(UFRN)	Natal – RN
Fabrício Siqueira Benevides	(UFC)	Fortaleza – CE
Carmen Vieira Mathias	(UNIFRA)	Santa María – RS
Claus Haetinger	(UNIVATES)	Lajeado – RS
Cláudio de Lima Vidal	(UNESP)	S.J. do Rio Preto – SP
Denice Fontana Nisxota Menegais	(UNIPAMPA)	Bagé – RS
Débora de Jesús Bezerra	(Universidade Metodista de SP)	S.B. do Campo – SP
Disney Douglas Lima de Oliveira	(UFAM)	Manaus – AM
Edson Roberto Abe	(Colégio Objetivo de Campinas)	Campinas – SP
Edney Aparecido Santulo Jr.	(UEM)	Maringá – PR
Eduardo Leandro	(UFPE)	Recife – PE
Emiliano Chagas	(Grupo Educacional Etapa)	São Paulo – SP
Fabio Brochero Martínez	(UFMG)	Belo Horizonte – MG
Florêncio Ferreira Guimarães Filho	(UFES)	Vitória – ES
Francinildo Nobre Ferreira	(UFSJ)	São João del Rei – MG
Diego Marques	(UnB)	Brasília – DF
Herivelto Martins	(USP – São Carlos)	São Carlos – SP
Gisele Detomazi Almeida	(UFT)	Arraias – TO
Gilson Tumelero	(UTFPR)	Pato Branco – PR
Ivanilde Fernandes Saad	(UC. Dom Bosco)	Campo Grande – MS
João Benício de Melo Neto	(UFPI)	Teresina – PI
João Francisco Melo Libonati	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Diogo Diniz	(UFPB)	Campina Grande – PB
José Luiz Rosas Pinho	(UFSC)	Florianópolis – SC
José Vieira Alves	(UFPB)	Campina Grande – PB
José William Costa	(Instituto Pueri Domus)	Santo André – SP
Krerley Oliveira	(UFAL)	Maceió – AL
Licio Hernandes Bezerra	(UFSC)	Florianópolis – SC
Luciano G. Monteiro de Castro	(Sistema Elite de Ensino)	Rio de Janeiro – RJ
Luzinalva Miranda de Amorim	(UFBA)	Salvador – BA
Marcelo Antonio dos Santos	FACOS	Osório – RS
Marcelo Rufino de Oliveira	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Márcio Fialho Chaves	(UFLA)	Lavras – MG
Newman Simões	(Cursinho CLQ Objetivo)	Piracicaba – SP
Nivaldo Costa Muniz	(UFMA)	São Luis – MA
Uberlândio Batista Severo	(UFPB)	João Pessoa – PB
Raul Cintra de Negreiros Ribeiro	(Colégio Anglo)	Atibaia – SP
Reinaldo Gen Ichiro Arakaki	(UNIFESP)	SJ dos Campos – SP
Ricardo Amorim	(Centro Educacional Logos)	Nova Iguaçu – RJ
Ronaldo Alves Garcia	(UFGO)	Goiânia – GO
Rosangela Ramon	(UNOCHAPECÓ)	Chapecó – SC
Seme Gebara Neto	(UFMG)	Belo Horizonte – MG
Tadeu Ferreira Gomes	(UEBA)	Juazeiro – BA
Tomás Menéndez Rodrigues	(U. Federal de Rondônia)	Porto Velho – RO
Valdenberg Araújo da Silva	(U. Federal de Sergipe)	São Cristóvão – SE
Wanderson Breder	(CEFET – RJ)	Nova Friburgo – RJ