CONTEÚDO

34ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e soluções da Primeira Fase

PROBLEMAS – NÍVEL 1

1) Laurinha tinha em sua carteira somente notas de 10 reais e moedas de 10 centavos. Ela pagou uma conta de 23 reais com a menor quantidade possível de moedas. Quantas moedas ela usou?

A) 3 **B)** 6 **C)** 10 **D)** 23 **E)** 30

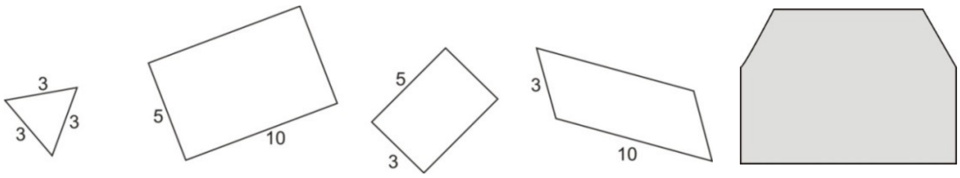
2) Podemos afirmar que $0,1^2 + 0,2^2$ é igual a:

A) $\frac{1}{20}$ **B)** $\frac{1}{10}$ **C)** $\frac{1}{5}$ **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{1}{2}$

3) Quantos números inteiros positivos têm o número 9 como seu maior divisor, diferente do próprio número?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 9 **E)** infinitos

4) Carla recortou o hexágono representado ao lado nas quatro partes abaixo: um triângulo, dois retângulos e um paralelogramo.



As medidas dessas figuras são dadas em centímetros. Qual é o perímetro do hexágono? *Nota: perímetro de uma figura é a medida do comprimento da linha que contorna a figura.*

A) 15 cm **B)** 18 cm **C)** 26 cm **D)** 39 cm **E)** 81 cm

5) Paulinho e sua irmã saem ao mesmo tempo de casa para a escola. Paulinho vai de bicicleta, a uma velocidade média de 18 quilômetros por hora e sua irmã vai com uma moto. Ela chega 20 minutos antes de Paulinho. Neste momento, quantos quilômetros ainda faltam para Paulinho chegar?

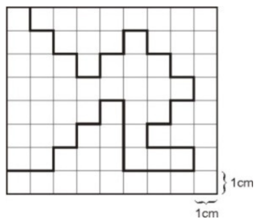
A) 6 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 15 **E)** 18

6) Ricardo toma um comprimido às segundas, quartas e sextas-feiras, toda semana. O comprimido é vendido em caixas de 20 unidades cada. Pelo menos quantas caixas desse remédio ele deverá comprar num ano?

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

7) Juliana cortou a folha quadriculada, representada ao lado, ao longo da linha mais grossa. Ela obteve dois pedaços com diferentes perímetros. Qual é a diferença entre esses perímetros?

A) 8 cm **B)** 9 cm **C)** 18 cm **D)** 34 cm
E) 36 cm



8) Esmeralda está caminhando numa pista ao redor de um lago. Faltam 300 metros para chegar à metade do comprimento da pista e 200 metros atrás ela havia andado um terço do comprimento da pista. Cada volta nessa pista corresponde a quantos quilômetros?

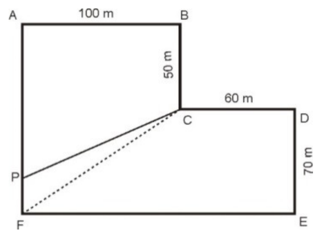
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 8

9) No tabuleiro 2×3 ao lado escrevemos um número inteiro positivo em cada casa vazia de modo que o produto desses números seja igual ao número já escrito na sexta casa. Sendo os números todos diferentes, de quantas maneiras isto pode ser feito?

		210

A) 6 **B)** 12 **C)** 20 **D)** 60 **E)** 120

10) João e Maria herdaram um terreno, representado pelo polígono ABCDEF. Havia uma cerca reta separando o terreno em duas partes, mas como as áreas eram diferentes, João e Maria resolveram deslocá-la, mantendo-a reta, de forma que a extremidade em F fosse para o ponto P. Com isso, as duas áreas tornaram-se iguais. Supondo que os ângulos em A, B, D, E e F são retos, de quantos metros foi o deslocamento FP?



A) 5 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 20

11) Numa loja de ferragens, vários produtos são vendidos pelo peso. Um prego, três parafusos e dois ganchos pesam 24 g. Dois pregos, cinco parafusos e quatro ganchos pesam 44 g. Juquinha comprou 12 pregos, 32 parafusos e 24 ganchos. Quanto pesou sua compra?

A) 200 g **B)** 208 g **C)** 256 g **D)** 272 g **E)** 280 g

12) Suzana fez um bolo na forma de um retângulo e o repartiu em pedaços menores, fazendo 7 cortes retos paralelos aos lados do retângulo. Somente depois dos cortes ela separou os pedaços, um para ela e um para cada um de seus amigos. No máximo, quantos amigos ganharam um pedaço do bolo?

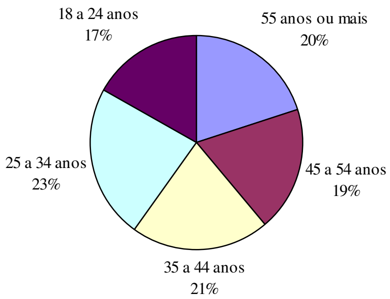
A) 9 **B)** 11 **C)** 13 **D)** 17 **E)** 19

13) Usuários da Internet com 18 anos de idade ou mais foram entrevistados sobre a utilização de 4 redes sociais. Eles foram divididos em grupos de faixa etária e a porcentagem de utilização de cada rede social dentro de cada grupo pode ser vista na tabela a seguir:

Faixa etária \ Serviço	Facebook	Twitter	Linkedin	Google+	Não usam essa redes
55 anos ou mais	20%	12%	32%	16%	20%
45 a 54 anos	19%	17%	25%	17%	22%
35 a 44 anos	21%	19%	17%	20%	23%
25 a 34 anos	23%	22%	13%	19%	23%
18 a 24 anos	17%	30%	13%	28%	12%

Sabe-se ainda que as porcentagens de usuários da Internet com 18 anos de idade ou mais estão divididas conforme o gráfico abaixo:

Usuários da Internet com 18 ou mais anos de idade



Entre os usuários da Internet com 18 anos de idade ou mais, qual é a porcentagem daqueles que têm 55 anos ou mais e que usam o Linkedin?

A) $32\% + 20\%$ **B)** $32\% - 20\%$ **C)** $32\% \times 20\%$ **D)** $32\% \div 20\%$

E) $\dfrac{32\% + 20\%}{2}$

14) Na expressão $\frac{M\times A\times T\times E\times M}{A\times T\times I\times C\times A}$, letras diferentes representam dígitos diferentes e letras iguais representam dígitos iguais. Qual é o maior valor possível desta expressão?

A) 38 **B)** 96 **C)** 108 **D)** 576 **E)** 648

15) Para Mariazinha, existem somente quatro números que ela considera *atraentes* : 1, 3, 13 e 31. Qualquer outro número será *quase atraente* somente se puder ser expresso como soma de pelo menos um de cada um dos quatro números atraentes. Por exemplo, 1 + 3 + 3 + 3 + 13 + 31 = 54 é quase atraente. No mínimo, quantos números atraentes devem ser somados para mostrarmos que 2012 é um número quase atraente?

A) 68 **B)** 70 **C)** 72 **D)** 100 **E)** 2012

16) Em Cajumirim, 20% das famílias que têm gatos (pelo menos um) também têm cachorros e 25% das famílias que têm cachorros também têm gatos. Como 20% das famílias não têm nem gato nem cachorro, qual é o percentual de famílias que possuem as duas espécies de bichos de estimação?

A) 5 **B)** 10 **C)** 20 **D)** 25 **E)** 50

17) Rosinha ganhou vários morangos e jabuticabas, pelo menos 5 de cada tipo. Ela quer comer 5 dessas frutas, uma de cada vez, sem comer duas jabuticabas seguidamente. Ela forma uma fileira com as frutas, antes de comê-las. Quantas fileiras diferentes ela pode fazer?

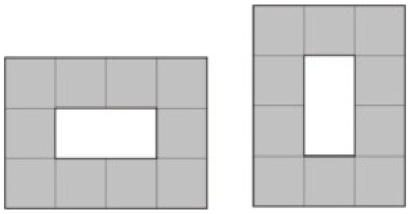
A) 13 **B)** 14 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 20

18) Na reta numerada abaixo, os pontos indicados com balõezinhos representam números inteiros maiores do que 93 e menores do que 112. Exatamente três dos números marcados são múltiplos de 4.

Qual é o maior dos números indicados?

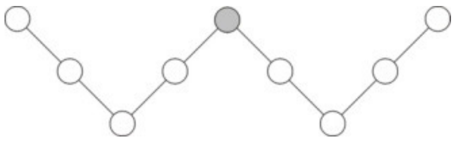
A) 100 **B)** 102 **C)** 104 **D)** 106 **E)** 108

19) Numa sala de aula, a professora resolveu arrumar as mesinhas de modo a formar uma mesa maior, com um buraco no meio. O exemplo ao lado mostra duas mesas iguais em que 10 alunos podem sentar-se, um em cada mesinha. De quantas maneiras diferentes a professora pode arrumar as 30 mesinhas da sala de forma que os 30 alunos possam sentar-se, um em cada mesinha?



A) 3 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 15

20) Na figura, cada um dos 4 segmentos contém três círculos. Os círculos devem ser numerados de 1 a 9, de modo que a soma dos números nos três círculos de cada segmento seja igual para todos os segmentos. Qual é o menor número que pode ser escrito no círculo cinza?



A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

PROBLEMAS – NÍVEL 2

1) Na fase final da OBM, participaram 600 alunos de todo o Brasil. Seguindo a tradição das olimpíadas internacionais, na premiação são distribuidas medalhas de ouro, prata e bronze na proporção 1:2:3, respectivamente. Sabe-se que 60% do total de estudantes ganhou alguma das 3 medalhas. Quantos alunos ganharam medalha de prata?

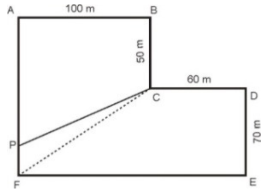
A) 60 **B)**120 **C)**180 **D)** 240 **E)** 300

2) Quantas vogais têm a resposta correta desse problema? Não conte a letra A ou E das alternativas A e E.

A) Seis **B)** Cinco **C)** Quatro **D)** Três **E)** Duas

3) Um número é chamado de bacana se ele é um número inteiro ou é a metade de um número inteiro. Por exemplo, 3,5 e 7 são bacanas. Quantos números bacanas existem entre $2{,}1$ e $33{,}3$?

A) 61 **B)** 62 **C)** 60 **D)** 66 **E)** 31



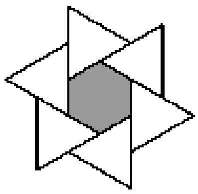
4) João e Maria herdaram um terreno, representado pelo polígono ABCDEF. Havia uma cerca reta separando o terreno em duas partes, mas como as áreas eram diferentes, João e Maria resolveram deslocá-la, mantendo-a reta, de forma que a extremidade em F fosse para o ponto P. Com isso, as duas áreas tornaram-se iguais. Supondo que os ângulos em A, B, D, E e F são retos, de quantos metros foi o deslocamento FP?

A) 5 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 20

5) Na expressão $\frac{M \times A \times T \times E \times M}{A \times T \times I \times C \times A}$, letras diferentes representam dígitos diferentes e letras iguais representam dígitos iguais. Qual é o maior valor possível desta expressão?

A) 38 **B)** 96 **C)** 108 **D)** 576 **E)** 648

6) A figura mostra seis triângulos equiláteros com lados de comprimento 2 e um hexágono regular de lados de comprimento 1. Qual é a fração da área total que está pintada?



A) $\frac{1}{8}$ **B)** $\frac{1}{7}$ **C)** $\frac{1}{6}$ **D)** $\frac{1}{5}$ **E)** $\frac{1}{4}$

7) Se x e y são números reais tais que $x^3 + y^3 = 5(x+y)$, $x^2 + y^2 = 4$ e $x + y \neq 0$, determine o valor de xy.

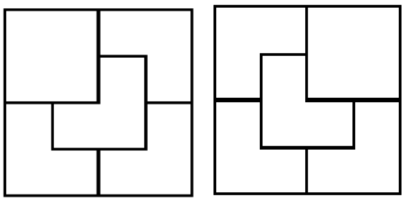
A) 4 **B)** 3 **C)** 1 **D)** 0 **E)** –1

8) Para homenagear a Copa do Mundo e as Olimpíadas no Brasil, Esmeralda, a prefeita da cidade Gugulândia, decidiu que seria feriado em sua cidade no dia x do mês de número y, onde x é o último algarismo do número 2016^{2014} e y é o resto de 2014^{2016} na divisão por 11. Assim, esse feriado será no dia:
Observação: O mês de janeiro corresponde ao mês de número 1 e assim por diante.

A) 8 de março **B)** 6 de janeiro **C)** 4 de janeiro **D)** 6 de abril **E)** 6 de março

9) Fernando escreveu uma sequência de números 123456123456123456... Quantas vezes no mínimo ele deve repetir o 123456 de modo que o número se torne múltiplo de 77?
A) 7 **B)** 11 **C)** 18 **D)** 49 **E)** 77

10) De quantas maneiras podemos cobrir um tabuleiro 4×4 com um quadrado de lado 2 e quatro peças idênticas no formato de L que ocupam três casinhas do tabuleiro? O tabuleiro não pode ser rotacionado, ou seja, as duas possibilidades a seguir devem ser consideradas distintas:



A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

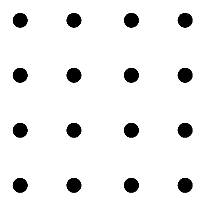
11) Qual é o menor número ímpar que possui exatamente 10 divisores positivos incluindo o 1 e o próprio número?
A) 1875 **B)** 405 **C)** 390 **D)** 330 **E)** 105

12) Quantos números inteiros positivos têm o número 9 como seu maior divisor, diferente do próprio número?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 9 **E)** infinitos

13) As massas de todos os pares possíveis formados com 5 estudantes são 90 kg, 92 kg, 93 kg, 94 kg, 95 kg, 96 kg, 97 kg, 98 kg, 100 kg e 101 kg. Qual é a massa do estudante de massa intermediária?
A) 52 kg **B)** 51 kg **C)** 49 kg **D)** 48 kg **E)** 46 kg

14) O grande artilheiro Tornado está prestes a fazer o gol mais bonito de sua carreira. Ele está de frente para o gol e apenas o goleiro está entre ele e a trave. Ele está a x metros do goleiro que, por sua vez, se encontra a 2 metros da linha do gol, onde Tornado deseja que a bola caia após passar por cima do goleiro.
Em um gol dessa magnitude, a trajetória da bola deve ser uma semicircunferência. Tornado sabe que a bola deve passar a exatamente 3 metros de altura do solo quando ela estiver acima do goleiro. Qual a distância de Tornado até o goleiro, ou seja, x, em metros?
A) 3 **B)** 3,5 **C)** 4 **D)** 4,5 **E)** 5

15) Quantas são as possíveis distâncias entre dois pontos distintos do reticulado 4×4 a seguir? Os pontinhos estão distribuidos em linhas e colunas igualmente espaçadas entre si por uma unidade.

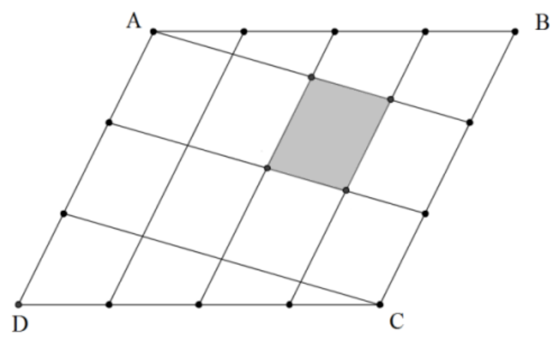


A) 4 **B)** 6 **C)** 9 **D)** 11 **E)** 16

16) Esmeralda está organizando sua festa de aniversário e por um erro na distribuição dos convites, ela não sabe se a festa terá 4 ou 6 pessoas. Entretanto, ela planeja já deixar o bolo cortado em alguns pedaços não necessariamente iguais de tal forma que se vierem 4 ou 6 pessoas, cada delas receberá a mesma quantidade de bolo (o bolo inteiro deve ser distribuido em qualquer uma das duas situações). Qual o número mínimo de pedaços para ela atingir esse objetivo?

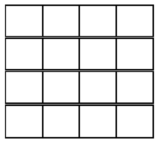
A) 24 **B)** 10 **C)** 8 **D)** 7 **E)** 6

17) Os lados AB e DC do paralelogramo $ABCD$ foram divididos em 4 segmentos iguais. Os lados AD e BC foram divididos em 3 segmentos iguais. Os pontos de divisão foram conectados como indica a figura abaixo. Se a área de $ABCD$ é 84, determine a área sombreada.



A) 1 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 7 **E)**12

18) Renan desenhou um tabuleiro 4×4, como mostra a figura abaixo, e contou todos os quadrados com lados paralelos aos lados do tabuleiro com vértices escolhidos dentre os vértices dos quadradinhos do tabuleiro e obteve 30 quadrados.

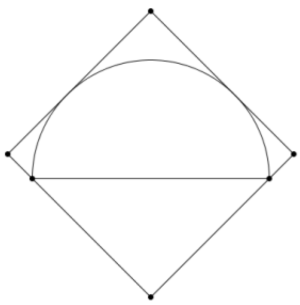


Que número Renan teria obtido se ele tivesse feito o mesmo com um tabuleiro 4×2012?
A) 30180 **B)** 30115 **C)** 20110 **D)** 15090 **E)** 8048

19) Ao calcular as raízes da equação do segundo grau $x^2 - mx + m + 5 = 0$, Samuca percebeu que elas eram os catetos de um triângulo retângulo com hipotenusa de comprimento 5. A soma dos possíveis valores de *m* é:
A) 2 **B)** 12 **C)** 7 **D)** 10 **E)** 8

20) Quantos números existem entre 23456 e 65432 tais que o produto de seus algarismos é um número ímpar que não é um múltiplo de 7?
A) 128 **B)** 256 **C)** 512 **D)** 1024 **E)** 2048

21) Na figura abaixo temos um semicírculo de raio 1 inscrito em um quadrado de modo que seu centro passe por uma das diagonais do quadrado. Qual é a área do quadrado?

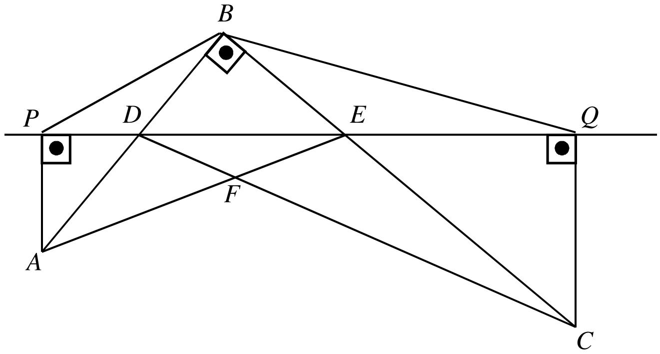


A) $\frac{3}{2} + \sqrt{2}$ **B)** $1 + 2\sqrt{2}$ **C)** $5 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ **D)** 4 **E)** $\frac{2}{3} + \sqrt{2}$

22) Qual é a maior potência de 2 que divide $2011^{2012} - 1$?
A) 2 **B)** 4 **C)** 8 **D)** 16 **E)** 32

23) Em 2012 estamos realizando a edição 34 da OBM, e mdc(2012, 34) = 2. Supondo que a OBM sempre será realizada todo ano, qual é o maior valor possível para o mdc do ano e da edição da OBM realizada no ano?
A) 12 **B)** 28 **C)** 38 **D)** 1978 **E)** 2012

24) Na figura a seguir, o ângulo $A\hat{B}C$ é reto; a reta r corta os segmentos AB e BC em D e E, respectivamente; as retas CD e AE se cortam em F; P e Q são as projeções ortogonais de A e C sobre a reta r, respectivamente.



Sendo o ângulo entre as retas CD e AE igual a $m(A\hat{F}D) = 40^\circ$, a medida de $P\hat{B}Q$, em graus, é
A) 110 **B)** 120 **C)** 130 **D)** 140 **E)** 160

25) Quantos elementos tem o maior subconjunto de $\{1,2,3,\ldots,25\}$ que não contém dois números distintos cujo produto é um quadrado perfeito?
A) 15 **B)** 16 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 19

PROBLEMAS – NÍVEL 3

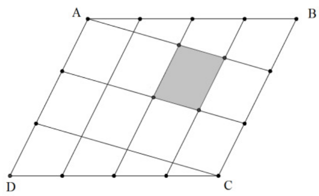
1) Quantas vogais têm a resposta correta desse problema? Não conte a letra A ou E das alternativas A e E.
A) Seis **B)** Cinco **C)** Quatro **D)** Três **E)** Duas

2) Na expressão $\dfrac{M \times A \times T \times E \times M}{A \times T \times I \times C \times A}$, letras diferentes representam dígitos diferentes e letras iguais representam dígitos iguais. Qual é o maior valor possível desta expressão?
A) 38 **B)** 96 **C)** 108 **D)** 576 **E)** 648

3) Em uma pesquisa de rua, cada entrevistado respondeu a quatro perguntas, podendo sua resposta ser *sim* ou *não*, para cada uma das perguntas. Qual o número mínimo de entrevistados para garantirmos que duas pessoas responderam igualmente a todas as perguntas?

A) 16 **B)** 17 **C)** 9 **D)** 5 **E)** 33

4) Os lados AB e DC do paralelogramo $ABCD$ foram divididos em 4 segmentos iguais. Os lados AD e BC foram divididos em 3 segmentos iguais. Os pontos de divisão foram conectados como indica a figura abaixo. Se a área de $ABCD$ é 84, determine a área sombreada.



A) 1 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 7 **E)** 12

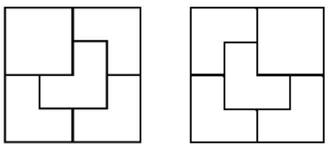
5) Em 2012 estamos realizando a edição 34 da OBM, e mdc(2012, 34) = 2. Supondo que a OBM sempre será realizada todo ano, qual é o maior valor possível para o mdc do ano e da edição da OBM realizada no ano?

A) 12 **B)** 28 **C)** 38 **D)** 1978 **E)** 2012

6) Os algarismos não nulos A, B e C formam os números ABC, BCA e CAB tais que $ABC + BCA + CAB = AAA \times 10$. Quantos números ABC desse tipo existem?

A) 6 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 15 **E)** nenhum

7) De quantas maneiras podemos cobrir um tabuleiro 4×4 com um quadrado de lado 2 e quatro peças idênticas no formato de L que ocupam três casinhas do tabuleiro? O tabuleiro não pode ser rotacionado, ou seja, as duas possibilidades a seguir devem ser consideradas distintas:



A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

8) Se $x^2 = 2x + 4$, então $(x + 1)^{-1}$ é igual a:

A) $x + 2$ **B)** $x - 3$ **C)** $x - 1$ **D)** $2x + 5$ **E)** $3x + 5$

9) Seja *ABCD* um quadrilátero convexo tal que *AB* = *BC* = *CD* = 1 e $m(A\hat{B}D) = m(A\hat{C}B)$. Sabendo que as medidas, em graus, dos ângulos $A\hat{B}D$ e $A\hat{C}D$ são inteiras, determine quantos quadriláteros *ABCD* podem ser construídos satisfazendo as condições acima.

A) 20 **B)** 21 **C)** 22 **D)** 23 **E)** 24

10) As massas de todos os pares possíveis formados com 5 estudantes são 90 kg, 92 kg, 93 kg, 94 kg, 95 kg, 96 kg, 97 kg, 98 kg, 100 kg e 101 kg. Qual é a massa do estudante de massa intermediária?

A) 52 kg **B)** 51 kg **C)** 49 kg **D)** 48 kg **E)** 46 kg

11) Seja $N = \{0,1,2,\dots\}$ e considere a função $f\colon N \to N$ tal que $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 0$ e, para todo natural $n \geq 1$, satisfaz as seguintes condições:

i) $f(3n) = 3\cdot f(n) + 1$;

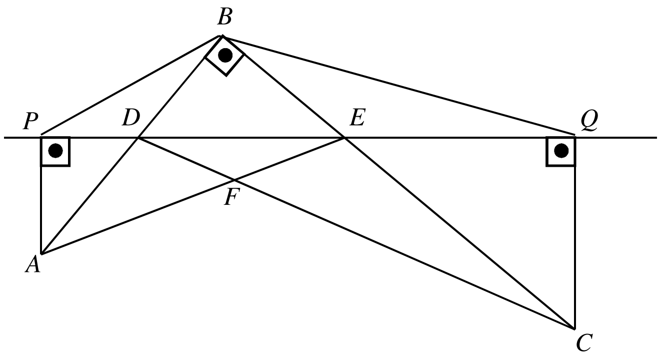
ii) $f(3n + 1) = 3\cdot f(n) + 2$;

iii) $f(3n + 2) = 3\cdot f(n)$;

Então $f(2012)$ é igual a:

A) 101 **B)** 102 **C)** 103 **D)** 104 **E)** 105

12) Na figura a seguir, o ângulo $A\hat{B}C$ é reto; a reta *r* corta os segmentos *AB* e *BC* em *D* e *E*, respectivamente; as retas *CD* e *AE* se cortam em *F*; *P* e *Q* são as projeções ortogonais de *A* e *C* sobre a reta *r*, respectivamente.

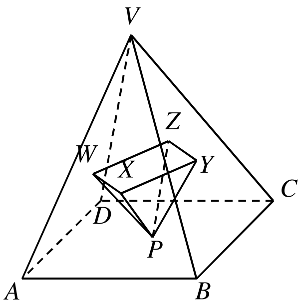


Sendo o ângulo entre as retas *CD* e *AE* igual a $m(A\hat{F}D) = 40^\circ$, a medida de $P\hat{B}Q$, em graus, é:

A) 110 **B)** 120 **C)** 130 **D)** 140 **E)** 160

13) Anos bissextos têm um dia a mais, 29 de fevereiro, que os demais anos e ocorrem a cada 4 anos. Esmeralda nasceu no dia 29 de fevereiro, em um domingo. Sabendo que 29 de fevereiro de 2012 caiu em uma quarta-feira, em qual ano Esmeralda pode ter nascido?
A) 1972 **B)** 1976 **C)** 1980 **D)** 1984 **E)** 1988

14) Considere uma pirâmide *VABCD* de base quadrada. Seja *P* o centro da base *ABCD* e *X*, *Y*, *Z* e *W* pontos sobre as faces laterais tais que *PXYWZ* é uma pirâmide semelhante a *VABCD*, com as diagonais da base *XZ* e *YW* paralelos a *BC* e *CD*, respectivamente.



A razão de semelhança entre as duas pirâmides é
A) $1:(\sqrt{2}+1)$ **B)** 1:3 **C)** 1:2 **D)** $1:\sqrt{2}$ **E)** $1:(2\sqrt{2}+3)$

15) Um painel luminoso é formado por 10 círculos grandes. Dentro de cada círculo há quatro lâmpadas: uma amarela, uma verde, uma vermelha e uma azul. De quantos modos podemos acender o painel de modo que pelo menos uma lâmpada de cada cor fique acesa? Cada círculo pode ter de zero a quatro lâmpadas acesas, ou seja, é permitido duas lâmpadas acesas no mesmo círculo.
A) $(2^{10}-1)^4$ **B)** $(2^4-1)^{10}$ **C)** $2^{10}-1$ **D)** 2^4-1 **E)** $2^{10}-2^4$

16) A soma de dois inteiros positivos é 2012. A diferença entre o maior e o menor valores possíveis do produto dos dois números é:
A) 1006^2 **B)** 1005^2 **C)** $1005\cdot 1007$
D) $1005\cdot 1006$ **E)** $1006\cdot 1007$

17) O triângulo *ABC* tem lados *AB* = 6, *AC* = 8 e *BC* = 10. Escolhe-se um ponto *X* ao acaso no interior do triângulo *ABC*. Sejam p_A, p_B e p_C as probabilidades de que o vértice do triângulo *ABC* mais próximo de *X* seja *A*, *B* e *C*, respectivamente. Então
A) $p_A > p_B = p_C$ **B)** $p_A > p_B > p_C$ **C)** $p_A > p_C > p_B$
D) $p_A < p_B < p_C$ **E)** $p_A = p_B = p_C$

18) Numa festa de criança, o palhaço *Macaxeira* irá distribuir 21 balas para 5 crianças que participam de uma brincadeira. Macaxeira quer fazer a distribuição satisfazendo às seguintes condições:
1) Cada criança deve receber pelo menos uma bala;
2) Cada criança recebe um número diferente de balas;
3) O número de balas é feito em ordem decrescente, de acordo com sua altura (a menor criança recebe mais balas e a maior recebe menos balas).

Supondo que todas as crianças tem alturas diferentes, de quantos modos ele pode fazer essa distribuição?

A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

19) Quantos elementos tem o maior subconjunto de $\{1,2,3,\ldots,25\}$ que não contém dois números distintos cujo produto é um quadrado perfeito?

A) 15 **B)** 16 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 19

20) O número e, uma das constantes mais importantes da Matemática, pode ser definido por:

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

em que $0! = 1$ e $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ para $n > 0$.

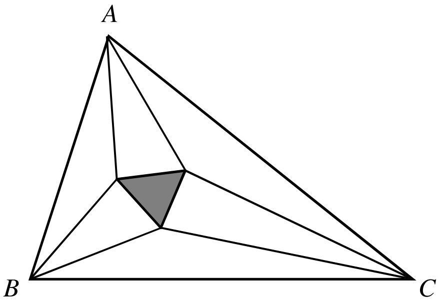
Então o número $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}=\frac{1^2}{0!}+\frac{2^2}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{4^2}{3!}+\cdots$ é igual a:

A) $2e$ **B)** $4e$ **C)** $5e$ **D)** e^2 **E)** $(e+1)^2$

21) Qual é a maior potência de 2 que divide $2011^{2012} - 1$?

A) 2 **B)** 4 **C)** 8 **D)** 16 **E)** 32

22) O *teorema de Morley* diz que, ao traçarmos as retas que dividem cada ângulo interno de um triângulo *ABC* em três ângulos iguais, obtemos um triângulo equilátero chamado *triângulo de Morley de ABC*, como o que está destacado na figura a seguir:



Qual é a medida do lado do triângulo de Morley de um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 2?

A) $2\sqrt{2}-\sqrt{6}$

B) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

C) $\sqrt{6}-2$

D) $2-\sqrt{3}$

E) $2\sqrt{3}-\sqrt{6}$

23) Para Mariazinha, existem somente quatro números que ela considera *atraentes* : 1, 3, 13 e 31. Um outro número será *quase atraente* somente se puder ser expresso como soma de pelo menos um de cada um dos quatro números atraentes. Por exemplo, 1 + 3 + 3 + 3 + 13 + 31 = 54 é quase atraente. No mínimo, quantos números atraentes devem ser somados para mostrar que 2012 é um número quase atraente?

A) 68 **B)** 70 **C)** 71 **D)** 99 **E)** 2011

24) Quantas soluções reais têm o sistema

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{1}{z^2} \\ y+z=\dfrac{1}{x^2} \\ z+x=\dfrac{1}{y^2} \end{cases}?$$

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 4 **E)** infinitas

25) Esmeralda desenhou uma tabela com 100 linhas e 100 colunas e escreveu, na linha i e coluna j da tabela, mdc(i, j) se $i < j$ e mmc(i, j) se $i \geq j$. Por exemplo, na linha 4, coluna 6 ela escreveu mdc(4,6) = 2 e na linha 15, coluna 10 ela escreveu mmc(15,10) = 30. Qual é o produto de todos os 100^2 números da tabela?

A) $100!^{99}$
B) $100!^{100}$
C) $100!^{101}$
D) $\text{mmc}(1,2,3,\ldots,100)^{100}$
E) $\text{mdc}(1,2,3,\ldots,100)^{100}$

GABARITO

NÍVEL 1 (6º ou 7º anos do Ensino Fundamental)

1) E	6) D	11) D	16) B
2) A	7) C	12) E	17) A
3) B	8) A	13) C	18) E
4) D	9) E	14) C	19) B
5) A	10) B	15) B	20) A

NÍVEL 2 (8º ou 9º anos do Ensino Fundamental)

1) B	6) D	11) B	16) C	21) A
2) E	7) E	12) B	17) D	22) D
3) B	8) B	13) D	18) C	23) D
4) B	9) E	14) D	19) C	24) C
5) C	10) D	15) C	20) C	25) B

NÍVEL 3 (Ensino Médio)

1) E	6) C	11) E	16) B	21) D
2) C	7) D	12) C	17) A	22) A
3) B	8) B	13) B	18) A	23) B
4) D	9) D	14) A	19) B	24) E
5) D	10) D	15) A	20) C	25) B

34ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e soluções da Segunda Fase

PROBLEMAS – NÍVEL 1 – PARTE A
(Cada problema vale 5 pontos)

01. Áurea faz de moto, com velocidade constante, o trajeto que liga o terminal de ônibus A ao terminal B, seguindo a linha regular de ônibus que liga os dois terminais. Ela partiu do terminal A em direção ao outro e percebeu que a cada 3 minutos passava por um ponto de ônibus. Ela levou 45 minutos para chegar no terminal B. Sabe-se que a distância entre o terminal e o ponto de ônibus mais próximo a ele ou entre dois pontos consecutivos é 2 km. Qual é a distância entre os dois terminais?

02. Na adição a seguir de três números de quatro algarismos cada um, as diferentes letras representam diferentes algarismos.
Qual é o número ZYX?

$$\begin{array}{r} X\,X\,X\,X \\ +\ Y\,Y\,Y\,Y \\ Z\,Z\,Z\,Z \\ \hline Y\,X\,X\,X\,Z \end{array}$$

03. Um triângulo equilátero tem o mesmo perímetro que um hexágono regular, cuja área é 240 cm^2. Qual é a área do triângulo, em cm^2?

04. Jade quer cortar uma folha retangular de papel de 24 cm por 13 cm em quadrados menores, não necessariamente do mesmo tamanho. No mínimo, quantos quadrados ela irá obter?

05. Colocando apenas parêntesis, tantos quantos necessários, mas usando apenas as adições e subtrações já indicadas, podemos fazer com que a expressão $1-2+3-4+5-6+7-8+9-10$ represente o maior número possível. Qual é este número?

06. Na escola de Esmeralda, neste ano, o aumento do número de alunos em relação ao ano passado foi de 10% para os meninos e 20 % para as meninas. Há atualmente 230 alunos, exatamente 30 a mais do que no ano passado. Quantas meninas há na escola?

PROBLEMAS – NÍVEL 1 – PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1

Ana, Beto e Carlos inventaram um jogo em que cada um deles joga um dado e

registra como ganho (pontos positivos) o dobro dos pontos obtidos no lançamento, ao mesmo tempo em que os outros dois anotam, cada um, esses pontos como dívidas (pontos negativos). O saldo é revisto a cada jogada.
Na tabela a seguir foram anotados os lançamentos e pontos de Ana, Beto e Carlos, nesta ordem, e os saldos de seus pontos após cada lançamento, em uma partida de três jogadas. Na última linha vê-se o saldo final de cada um. Em cada nova partida, todos começam com zero ponto.

	Saldo de A	Saldo de B	Saldo de C
A tira 5	10	–5	–5
B tira 1	9	–3	–6
C tira 3	6	–6	0

a) Complete a tabela a seguir com os resultados de uma outra partida em que Beto jogou primeiro, Carlos em seguida e Ana por último.

Saldo de A	Saldo de B	Saldo de C
	6	
		5
5		

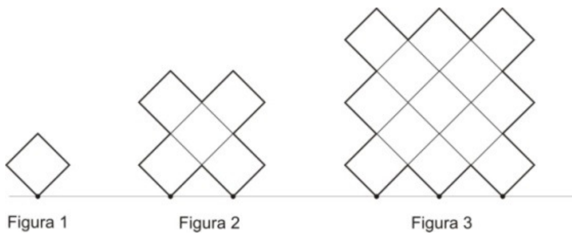
b) Na tabela ao lado foram registradas apenas as pontuações dos dados numa partida de seis jogadas. Escreva na tabela abaixo o saldo final de pontos de cada um.

A tira	B tira	C tira
		2
3		
	1	
		4
5		
	6	

Saldo de A	
Saldo de B	
Saldo de C	

PROBLEMA 2

Rubinho constrói uma sequência de 10 figuras, cada uma delas formadas por quadradinhos de 1 cm de lado, conforme indicado ao lado. A figura 2, por exemplo, tem área



igual a 5 cm^2 e perímetro igual a 12 cm.
a) Qual é área da figura 5?
b) Qual é o perímetro da figura 10?

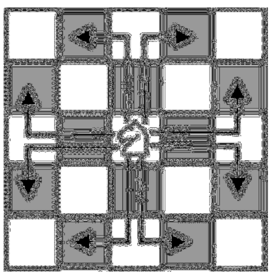
PROBLEMA 3
Diamantino brinca com números de dois ou mais algarismos, transformando-os em números de um único algarismo da seguinte maneira: ele soma os dois algarismos da direita e coloca o número obtido no lugar desses dois algarismos, repetindo o processo até obter o que quer. Por exemplo, partindo do número 367 ele escreve 313, depois escreve 34 e termina escrevendo 7.

a) Começando com o número 2012, qual será o número obtido por Diamantino?
b) Qual é o maior número de três algarismos que Diamantino pode transformar em 1?
c) Diamantino escreveu todos os números menores do que 2012, de dois ou mais algarismos, que podem ser transformados em 9. Quantos números ele escreveu?

PROBLEMAS – NÍVEL 2 – PARTE A
(Cada problema vale 4 pontos)

01. João gosta de verificar propriedades do jogo de xadrez em um tabuleiro 5 × 5. Num de seus experimentos, João coloca um cavalo na casa inferior esquerda do tabuleiro 5 × 5. Qual o número mínimo de movimentos do cavalo para que ele possa chegar a qualquer casa do tabuleiro 5 × 5?

Observação: O cavalo movimenta-se em *L*, isto é, anda duas casas em uma direção e, logo em seguida, uma casa na direção perpedicular, como ilustrado na figura abaixo:

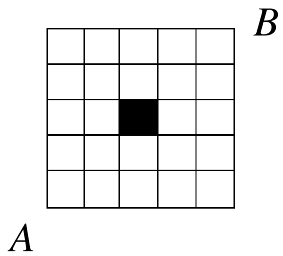


02. Dados os reais não-nulos *a* e *b*, sabe-se que:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a-4}{2012} \text{ e } ab=4024.$$

Qual o valor de $a-b$?

03. Zoroastro escreveu os números 1, 2,...,100 em um quadro negro. Ele irá executar algumas operações que reduzirão a quantidade de números até que reste apenas um único número no quadro. A primeira operação consiste em escolher dois números quaisquer *a* e *b* e trocá-los por *a* + *b* – 1. A segunda operação consiste em novamente escolher dois números quaisquer *a* e *b* e trocá-los por *a* + *b* – 2. Em geral, depois de executar *k* operações, a nova operação será escolher dois números quaisquer *a* e *b* e substituí-los por *a* + *b* – (*k* + 1). Determine qual o número que restará no final.



04. Qual o menor valor de *n* para que um polígono com *n* lados tenha a soma de seus ângulos internos maior que 2012 graus?

05. Uma formiga deve caminhar ao longo das linhas pretas do desenho abaixo do vértice *A* até o vértice *B* deslocando-se apenas um quadradinho para a esquerda ou para cima. Sabendo que a formiga não pode passar pelos vértices do quadrado preto, determine o número de caminhos diferentes que a formiga pode percorrer.

PROBLEMAS – NÍVEL 2 – PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1

Um número é palíndromo quando a sequência de dígitos que obtemos ao lê-lo da esquerda para a direita é a mesma que obtemos ao lê-lo da direita para a esquerda. Por exemplo, 12321 é palíndromo. Determine todos os números de dois algarismos *ab* tais que *ab* + *ba* e *ab* × *ba* são palíndromos. Por exemplo, 12 + 21 = 33 e 12 × 21 = 252 mostram que o número 12 satisfaz essas condições.

PROBLEMA 2

Seja *ABCD* um retângulo tal que $AD = 6$ e $DC = 8$. Construa um triângulo equilátero *CED* tal que *E*, *A* e *B* estão no mesmo semi-plano determinado pela reta *CD*. Determine a área do triângulo *AEC*.

PROBLEMA 3

No planeta *Hexaterra*, a base mais usada é a hexadecimal, base 16, ao invés da base decimal, mais usada na terra. Para compensar a diferença de dígitos entre a base 10 e a base 16, usamos letras como dígitos: *A*, *B*, *C*, *D*, *E* e *F* (escritas em ordem crescente). Assim, por exemplo, $(10)_{16}$ é na verdade $(16)_{10}$, $(AB)_{16} = 10 \times 16 + 11 \times 1 = 176$ e $(F0E)_{16} = 15 \times 16^2 + 0 \times 16 + 14 \times 1 = 3854$. Determine o valor da soma:

$$(1)_{16} + (2)_{16} + \ldots + (D)_{16} + (E)_{16} + (F)_{16} + (10)_{16} + \ldots + (100)_{16}.$$

na base 10.

PROBLEMA 4

Existem 20 cidades marcadas em uma circunferência. Um comerciante deseja percorrer as 20 cidades através de um caminho que passe por cada cidade apenas uma vez, que sempre una duas cidades através de um segmento de reta e que esses segmentos de reta percorridos entre as cidades nunca se cruzem. De quantas formas esse comerciante pode estabelecer sua rota?

PROBLEMAS – NÍVEL 3 – PARTE A
(Cada problema vale 4 pontos)

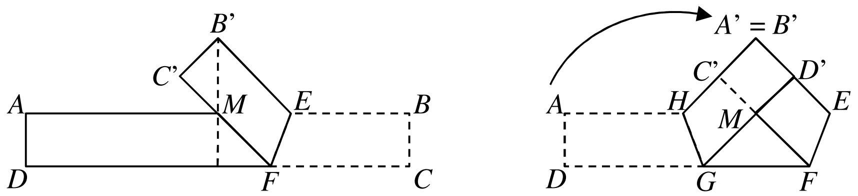
01. Arnaldo pensou em um número de quatro dígitos e desafiou Bernardo a descobrir qual era o número. Para tanto, passou as seguintes três dicas para Bernardo, sendo que exatamente uma das dicas é falsa.

- *Dica* 1: O número é um cubo perfeito;
- *Dica* 2: O número é o menor número de quatro dígitos que possui quatro divisores positivos;
- *Dica* 3: O número é múltiplo de 59.

Qual o número pensado por Arnaldo?

02. Sendo *a*, *b*, *c* reais tais que $ab(a + b + c) = 1001$, $bc(a + b + c) = 2002$ e $ca(a + b + c) = 3003$, encontre *abc*.

03. Uma tira retangular de papel $ABCD$ é dobrada ao longo das linhas EF e HG de forma tal que os vértices A e B são levados para um mesmo ponto A' da mediatriz do segmento AB e o ângulo $\angle HA'E$ é reto. Obtém-se assim o pentágono $A'EFGH$.



Sabe-se que as bordas inferiores da tira (segmentos FC' e GD' na figura) se cortam no ponto médio M do lado AB. O lado menor da tira mede 1 e a medida do lado maior mede $a+\sqrt{b}$, com a e b inteiros positivos. Quanto é $a + b$?

04. Os dois menores números primos da forma $n^2 + 5$ são $6^2 + 5 = 41$ e $12^2 + 5 = 149$. Qual é o terceiro menor primo dessa forma?

05. Dois círculos se cortam em dois pontos A e B. Seja X um ponto sobre o segmento AB. Dez retas, todas passando por X, cortam os círculos em um total de quarenta pontos, quatro para cada reta. Qual é a quantidade mínima de quadriláteros cíclicos cujos quatro vértices estão entre esses quarenta pontos?

Observação: um quadrilátero é cíclico se, e somente se, existe um círculo que passa por seus quatro vértices.

PROBLEMAS – NÍVEL 3 – PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1
Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são reais e $a > 0$. Suponha que esta equação tenha duas raízes reais r e s tais que $0 < r < 1$ e $0 < s < 1$. Mostre que $b + c < 0$.

PROBLEMA 2
No triângulo ABC, seja AD a altura relativa a BC. Quantos triângulos não congruentes satisfazem $\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{1}{AD^2}$ com $AD = 2012$ e BD e CD ambos inteiros? Note que AB e AC não precisam ser inteiros.

PROBLEMA 3

Sejam *ABCD* um quadrado, *E* o ponto médio do lado *BC*, *F* o ponto médio do lado *CD*. Constroem-se os triângulos equiláteros *ABG* e *BEH* de forma que *G* está no interior do quadrado, e *H* no seu exterior. Determine o ângulo agudo entre as retas *BF* e *GH*.

PROBLEMA 4

Esmeralda e Jade, secretárias da OBM, jogam *Destrua os triângulos*. Esse jogo é disputado da seguinte forma: tem-se uma esfera e 2012 pontos sobre a esfera. Em princípio todos os pares de pontos estão ligados por um segmento. Esmeralda e Jade apagam, alternadamente, um segmento. A secretária que eliminar o último triângulo da esfera vence o jogo. Note que podem sobrar segmentos no final do jogo; eles só não formam triângulo.

Se Esmeralda começa o jogo, qual das secretárias tem estratégia vencedora, ou seja, vence o jogo não importando como o oponente jogue? Justifique sua resposta, exibindo uma estratégia que funcione sempre.

SOLUÇÕES NÍVEL 1 – SEGUNDA FASE – PARTE A

Problema	01	02	03	04	05	06
Resposta	0030	0819	0160	0007	0045	0120

01. [Resposta: 0030]

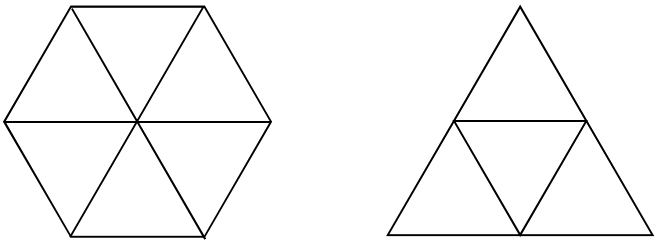
Solução: Áurea levou 45 min entre A e B, passando por um ponto a cada 3 min. Assim o número de pontos em que o ônibus parou após sair do terminal A é $\frac{45}{3}=15$, e a distância entre os terminais é $15\times 2 = 30$ km.

02. [Resposta: 0819]

Solução: Os números somados são XXXX = 1000X + 100X + 10X + X = 1111X, YYYY = 1111Y e ZZZZ = 1111Z, e o resultado da soma é YXXXZ = 10000Y + 1110X + Z. Logo 1111X + 1111Y + 1111Z = 10000Y + 1110X + Z $\Leftrightarrow$ 8889Y = 1110Z + X = ZZZX. O número ZZZX tem quatro algarismos, logo Y só pode ser igual a 1, Z = 8 e X = 9. Assim ZYX = 819.

03. [Resposta: 0160]

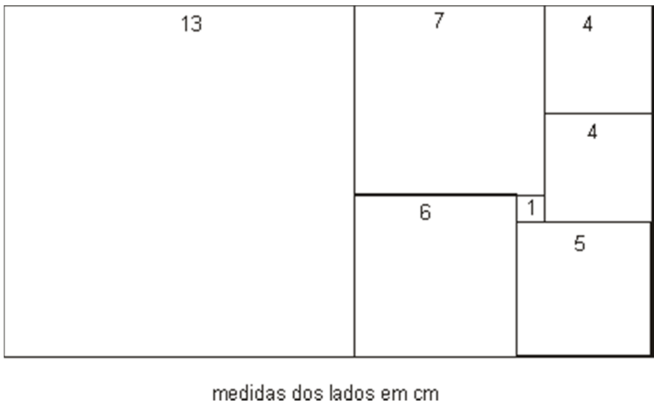
Solução: Sendo a e b os lados do triângulo e do hexágono, respectivamente, temos $3a = 6b \Leftrightarrow a = 2b$. O hexágono pode ser dividido em 6 triângulos equiláteros de lado b e o triângulo equilátero de lado $a = 2b$ pode ser dividido em 4 triângulos equiláteros de lado b.



A área do triângulo equilátero de lado *a* é, então, $\frac{4}{6}$ da área do hexágono, ou seja, $\frac{2}{3} \times 240 = 160 \text{ cm}^2$.

04. [Resposta: 0007]

Solução: Podemos dividir o retângulo em 7 quadrados como mostra a figura abaixo:



Pode-se verificar que não é possível fazer uma divisão em 6 ou menos quadrados.

05. [Resposta: 0045]

Solução: Primeiro note que só vale colocar parênteses logo depois de sinais de –, já que se o fizermos em frente ao sinal de + não alteramos o resultado.

Ao efetuarmos os parênteses, o 2 terá sinal de – necessariamente. Suponha que não colocamos parênteses depois do sinal de – do 2. Então o 4 também deve ter sinal de – quando efetuamos os parênteses, e a soma é no máximo 1 – 2 + 3 – 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 43.

Então é mais vantajoso colocar parênteses entre o – e o 2. Ao fazermos isso, ao efetuarmos os parênteses o 3 deve ter necessariamente sinal de –, e a soma é no máximo $1 - 2 - 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 45$. Podemos obter esse resultado: $1 - (2 + 3 - (4 + 5) - (6 + 7) - (8 + 9) - 10) = 45$.
Então a maior soma possível é 45.

06. [Resposta: 0120]
Solução: Seja x a quantidade de meninas no ano passado. Então havia $200 - x$ meninos. Assim, como o aumento foi de 10% para meninos, 20% para meninas e 30 no total, temos

$$0{,}10(200 - x) + 0{,}20x = 30 \Leftrightarrow x = 100$$

Logo, após o aumento de 20%, existem $100 \cdot 1{,}20 = 120$ meninas na escola.

SOLUÇÕES NÍVEL 1 – SEGUNDA FASE – PARTE B

PROBLEMA 1

a) Como Beto foi o primeiro a jogar e somou 6 pontos ele tirou 3 no dado. Assim, os outros dois somaram –3 pontos cada. Após a jogada de Carlos, para que tenha ficado com 5 pontos, deve ter somado 8, ou seja tirou 4 no dado, somando –4 pontos para cada adversário. Na última jogada para passar de –7 para 5 pontos Ana tem que ter tirado 6 no dado, fazendo cada um dos outros descontar 6 de seus pontos. A tabela completa fica:

Saldo de A	Saldo de B	Saldo de C
–3	**6**	–3
–7	2	**5**
5	–4	–1

b) Completando a tabela como no item a) temos:

Saldo de A	Saldo de B	Saldo de C
–2	–2	4
4	–5	1
3	–3	0
–1	–7	8
9	–12	3
3	0	–3

PROBLEMA 2

a) Vemos que para passar da figura k para figura $k + 1$ acrescentamos $k + 1$ quadradinhos em cada lado da figura, sendo que os dos vértices estamos contando duas vezes. Assim, estamos acrescentando $4k$ quadradinhos.

Logo, na figura 5 teremos $1 + 4 + 8 + 12 + 16 = 41$ quadradinhos de lado unitário, totalizando uma área de 41 cm².

b) Na figura 10, teremos em cada lado 10 quadradinhos com algum lado para fora da figura. Desses 10, 8 não estão nos cantos da figura e logo possuem apenas 2 lados participando do perímetro. Os 4 que estão no vértice possuem 3 lados que participam do perímetro.
Logo, o perímetro da figura 10 é $2 \times 4 \times 8 + 4 \times 3 = 76$.

PROBLEMA 3

a) A sequência de números obtidos é 2012, 203, 23 e 5.
b) Vamos pensar no caminho contrário, para terminarmos em 1 o número anterior tinha que ser 10, para se transformar em 10 o número anterior poderia ser: 100, 91, 82, 73, 64, 55, 46, 37, 28, 19. Vemos que agora, fazendo a transformação contrária com qualquer um desses números, o primeiro algarismo não se alterará mais. Logo, para obter o maior número precisamos que o primeiro algarismo seja o maior possível. Fazendo a transformação contrária com o número 91, concluímos que ele só pode ter vindo do 910 ou do 901. O 910 ainda pode ser formado pelos números 919, 928, 937, 946, 955, 964, 973, 982, 991. Logo, o maior é o 991.
c) Sendo a e b os algarismos da dezena e da unidade de um número $N = 100k + 10a + b$, ao realizarmos a operação trocamos N por $10k + a + b$ (caso $a + b$ tenha um só dígito) ou por $100k + a + b$ (caso $a + b$ tenha dois dígitos). A diferença entre o N e o número obtido é $90k + 9a$ no primeiro caso e $9a$ no segundo caso, ou seja, sempre um múltiplo de 9. Desta forma, o resto da divisão dos números obtidos na divisão por 9 nunca muda.
Logo os números que podem ser transformados em 9 são os que deixam o mesmo resto na divisão por 9 do que o 9, ou seja, os múltiplos de 9. Como todos os números após alguma quantidade de operações ficam com 1 algarismo, qualquer número divisível por 9 se transformará em 9.
Como 2012 dividido por 9 dá quociente 223 e resto 5, descontando o 9 há 222 números de dois ou mais algarismos menores do que 2012 que podem ser transformados no número 9.

SOLUÇÕES NÍVEL 2 – SEGUNDA FASE – PARTE A

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**
Resposta	04	08	100	14	52 ou 0

1. [Resposta 04]
Na figura a seguir, os números representam o número mínimo de movimentos que o cavalo deve fazer para chegar na respectiva casa. Portanto, é possível verificar que o número mínimo de movimentos para se chegar em qualquer casa do tabuleiro é 04.

2	3	2	3	4
3	2	3	2	3
2	1	4	3	2
3	4	1	2	3
	3	2	3	2

2. [Resposta 08]

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a-4}{2012} \Rightarrow \frac{a+b}{ab}=\frac{a-4}{2012} \Rightarrow a+b=2(a-4)$$

Pois $ab = 4024$. Assim,

$$8 = a - b$$

3. [Resposta 100]
O cálculo total de quanto a soma de todos os números decresce após todas as operações é:

$$1+2+3+...+99$$

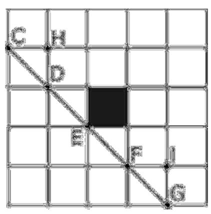
A diferença entre esse número e a soma total é 100.

4. [Resposta 14]
Devemos ter:

$$180(n-2) > 2012 \Leftrightarrow n > \frac{2012}{180} + 2 > 13{,}1$$

Sendo assim, o menor *n* é 14.

5. [Resposta 52]
Considere a diagonal formada pelos pontos *C*, *D*, *E*, *F* e *G*. Observe que qualquer caminho partindo do ponto A deve passar por um destes pontos (e por apenas um deles).



- Há uma única forma para ir de A até C. E a partir deste ponto, há 6 formas de chegar no ponto B;
- Há 4 formas para ir de A até D. Chegando ao ponto D, a formiga deve subir para o ponto H e a partir deste ponto há 5 formas de chegar no ponto B;
- A formiga não deve ir ao ponto E.
- Há 4 formas para ir de A até F. Chegando ao ponto F, a formiga deve seguir para o ponto I e a partir deste ponto há 5 formas de chegar no ponto B;
- Há uma única forma para ir de A até G. E a partir deste ponto, há 6 formas de chegar no ponto B;

Logo, existe um total de $6+4\times5+4\times5+6=52$ caminhos possíveis de A até B.

Observação: No enunciado da prova, a palavra "esquerda" apareceu incorretamente no lugar da palavra "direita". Assim, a formiga teria 0 possibilidade para chegar ao vértice B. Para corrigir esse equívoco, as duas respostas 0 e 52 devem ser consideradas corretas.

SOLUÇÕES NÍVEL 2 – SEGUNDA FASE – PARTE B

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1

Vejamos primeiro a propriedade da soma.

$$ab + ba = (10a + b) + (10b + a) = 11(a + b)$$

Sabemos que $1 \le a,b \le 9 \Rightarrow 2 \le a+b \le 18$. Assim, teremos múltiplos de 11 que são palíndromos entre 11.2 = 22 e 11.18 = 198. Observa-se que os únicos que servem são os de dois dígitos 22, 33, ..., 99 e 121. Para todos os outros observa-se que o dígito das unidades difere do dígitos das dezenas que é 1. Assim, $2 \le a+b \le 9$ ou $a+b=11$.

Agora exploremos a propriedade do produto.

$$ab \times ba = (10a + b)(10b + a) = 100ab + 10a^2 + 10b^2 + ab = 101ab + 10(a^2+b^2)$$

Vejamos duas possibilidades para a quantidade de dígitos do produto.

Se o produto possui 4 dígitos, será $xyyx = 1001x + 110y$ será múltiplo de 11. Como 11 é primo, se ele dividir o produto, então dividirá um dos fatores, implicando uma das possibilidades:

$\Rightarrow$

$$11 \mid 10a + b \Rightarrow a = b$$

$$11 \mid 10b + a \Rightarrow a = b$$

Acarretando $a = b$ em ambos os casos. Assim, teríamos aa e sabemos que o produto deve ter 4 dígitos, logo $a \geq 3$ e $a + b = 2a$ deve satisfazer $2 \leq 2a \leq 9 \Rightarrow 1 \leq a \leq 4$ ou $2a = 11$ esta última sem solução pois 11 é ímpar. Juntando todas as condições tem-se a = 3 ou 4. Entretanto, 33 e 44 não são soluções.

Se, por outro lado, o produto possuir 3 dígitos, será $xyx = 101x + 10y$, igualando:

$$101ab + 10\left(a^2 + b^2\right) = 101x + 10y \Rightarrow 101(ab - x) = 10\left(y - a^2 - b^2\right)$$

Como $mdc(101,10) = 1$, sabemos que $101|(y - a^2 - b^2)$ e $10|(ab - x)$. Vejamos que os limites para o múltiplo de 101 são:

$$-2.101 < 0 - 9^2 - 9^2 \leq y - a^2 - b^2 \leq 9 - 1 - 1 < 101$$

Assim, $y - a^2 - b^2 = 0 \; ou - 101$, vejamos agora cada subcaso.

Se $y - a^2 - b^2 = 0$ então teremos $ab - x = 0$. Basta verificar os pares de dígitos cuja soma dos quadrados e o produto são menores que 10. São eles:

$$(a, b) = (1,1); (1,2); (2,1); (2,2)$$

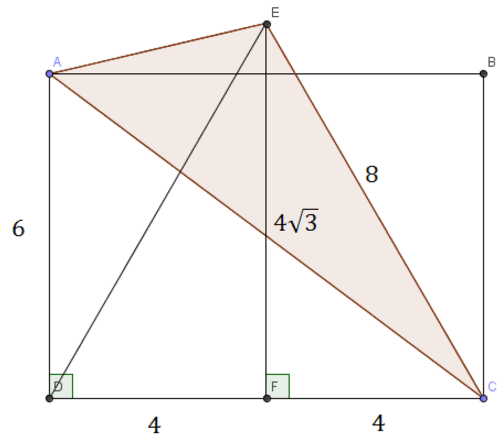
Basta ver que o um dígito maior ou igual a 3 já superaria soma dos quadrados 9. Como a condição anterior para a soma é claramente satisfeita, temos os números 11, 12, 21 e 22.

Se $y - a^2 - b^2 = -101$ então $ab - x = -10$, mas $ab - x \geq 1 - 9 = -8$, então não há soluções nesse caso.

Os números são: 11, 12, 21 e 22.

PRIMEIRA SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2

A figura que usaremos será:



Comecemos traçando a altura de EF relativa ao DC. Como o triângulo é equilátero, essa também será a mediana, logo $DF = FC = 4$. Usando o teorema de Pitágoras (ou o seno de 60º):

$$EF^2 + CF^2 = EC^2 \rightarrow EF^2 = 64 - 16 \rightarrow EF = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

Agora para achar a área do AEC, teremos:

$$\underline{Area(AEC) = Area(AECD) - Area(ACD)}$$

$$Area(AEC) = Area(AEFD) + Area(ECF) - Area(ACD)$$

$$Area(AEC) = \frac{(6+4\sqrt{3}).4}{2} + \frac{4.4\sqrt{3}}{2} - \frac{6.8}{2} = (6+4\sqrt{3}).2 + 2.4\sqrt{3} - 3.8$$

$$Area(AEC) = 12 + 8\sqrt{3} + 8\sqrt{3} - 24 \rightarrow Area(AEC) = 16\sqrt{3} - 12$$

SEGUNDA SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2

Sabemos que:

$$AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \rightarrow AC = 10$$

Seja $\angle ACD = \alpha$. Como $\angle ECD = 60° \rightarrow \angle ECA = 60° - \alpha$

Observando o triângulo ACD:

$$sen\ \alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$cos\ \alpha = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

Para calcular a área do AEC podemos usar a fórmula:

$$Area(AEC) = \frac{EC.CA.sen\angle ECA}{2} = \frac{8.10.sen(60° - \alpha)}{2}$$
$$Area(AEC) = 40.(sen60°.cos\,\alpha - cos60°.sen\,\alpha)$$

$$Area(AEC) = 40.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{4}{5} - \frac{1}{2}.\frac{3}{5}\right) = 40.\frac{4\sqrt{3} - 3}{10} \rightarrow Area(AEC) = 16\sqrt{3} - 12.$$

PRIMEIRA SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3

Escrevendo a soma na ordem inversa e somando com a expressão original, obtemos:

$$(1)_{16} + (2)_{16} + ...(FF)_{16} + (100)_{16} = S$$
$$(100)_{16} + (FF)_{16} + ... + (2)_{16} + (1)_{16} = S$$

$$[(100)_{16} + (1)_{16}] + [(FF)_{16} + (2)_{16}] + ... + [(FF)_{16} + (2)_{16}] + [(100)_{16} + (1)_{16}] = 2S$$

A soma dos termos em cada colchete é a mesma e vale $[(100)_{16} + (1)_{16}] = 256 + 1 = 257$. Além disso, existem $(100)_{16} = 256$ tais colchetes. Sendo assim,

$$256 \cdot 257 = 2S \Rightarrow S = 32896$$

SEGUNDA SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3

Somando todos os números da forma $(XY)_{16}$ com X e Y variando no conjunto $\{0,1,2,...,\ E,\ F\}$ obtemos a soma $(1)_{16} + (2)_{16} + ...(FF)_{16} + (FF)_{16}$. Cada dígito é somado 16 vezes na posição do *X* e 16 vezes na posição do *Y*. O aparecimento do dígito *X* corresponde ao valor 16*X* na base 10. Sendo assim, essa soma vale:

$$16 \cdot 16 \cdot (0 + 1 + ... + E + F) + 16 \cdot (0 + 1 + ... + E + F) =$$
$$272 \cdot (0 + 1 + ... + E + F) =$$
$$272 \cdot \frac{15 \cdot 16}{2} = 32640$$

Como $(100)_{16} = 256$, a soma total vale $32640 + 256 = 32896$.

TERCEIRA SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3

Convertendo todos os números para a base 10, a soma se transforma em:

$$1+2+3+..+256 = \frac{256\cdot 257}{2} = 32896$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4

Em qualquer momento do trajeto, o comerciante não pode percorrer um segmento de reta que deixe duas cidades não visitadas em semi-planos opostos determinados pela reta suporte do segmento, pois, nesse caso, eventualmente tal segmento seria cruzado pelo caminho do comerciante. Sendo assim, em cada vértice do trajeto, o comerciante possui duas opções: ou anda em direção ao vértice mais à esquerda ainda não visitado ou anda em direção ao vértice mais à direita ainda não visitado. No início, o comerciante possui 20 opções para escolher o primeiro vértice e, em cada um dos vértices subsequentes, existem duas opções de escolhas. O número total de tais escolhas é $20\cdot 2^{19}$. Nessa contagem, cada linha poligonal que representa o trajeto do comerciante foi contada duas vezes, um para cada um de seus extremos. Sendo assim, o total de trajetos é $20\cdot 2^{18}$.

Observação: Não ficou claro no enunciado se os trajetos do comerciante levavam em conta a ordem em que as cidades eram percorridas ou apenas seu traçado. Sendo assim, ambas as respostas $20\cdot 2^{19}$ e $20\cdot 2^{18}$ devem ser consideradas corretas.

SOLUÇÕES NÍVEL 3 – SEGUNDA FASE – PARTE A

Problema	01	02	03	04	05
Resposta	1003	0546	0012	1301	9780

01. [Resposta: 1003]

Solução: Suponha que as dicas 1 e 3 sejam ambas verdadeiras. Então número é cubo perfeito e múltiplo de 59. Mas 59 é primo, de modo que é múltiplo de $59^3 > 10000$, o que não é possível. Assim, a dica 2 está correta.

Utilizaremos o fato de que um número cuja fatoração em primos é $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ tem $(a_1 + 1)(a_2 + 1)\dots(a_k + 1)$ divisores positivos. Um número tem quatro divisores positivos se, e somente se, é da forma pq ou p^3, p,q primos. Note que $1000 = 2^3\cdot 5^3$ tem $4\cdot 4 = 16$ divisores positivos; $1001 = 7\cdot 11\cdot 13$ tem $2\cdot 2\cdot 2 = 8$ divisores positivos;

$1002 = 2\cdot 3\cdot 167$ tem 8 divisores positivos; $1003 = 17\cdot 59$ tem $2\cdot 2 = 4$ divisores positivos. Assim, o número pensado por Arnaldo é 1003.

02. [Resposta: 0546]

Solução: Temos $abc(a + b + c) = 1001c = 2002a = 3003b$, de modo que $c = 2a = 3b$. Assim, $a = c/2$ e $b = c/3$, de modo que $ab(a + b + c) = 1001 \Leftrightarrow ab(c/2 + c/3 + c) = 1001 \Leftrightarrow abc = 546$.

03. [Resposta: 0012]

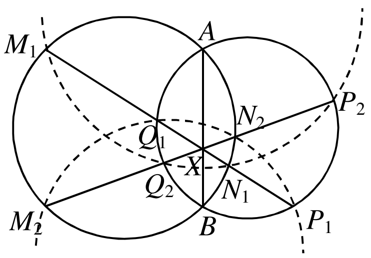
Solução: Veja que $B'M = MF = \sqrt{2}$. Se N denota o ponto médio do lado DC, ainda temos $NF = 1$. Daí, $CD = DN + NF + FM + MC' = 2\cdot(NF + FM + MC') = 2\cdot(1 + \sqrt{2} + 1) = 4 + 2\sqrt{2} = 4 + \sqrt{8}$, e $a = 4$ e $b = 8$.

04. [Resposta: 1301]

Solução: Primeiro note que se n é ímpar então $n^2 + 5$ é par e maior do que 2, ou seja, não é primo. Logo n é par. Além disso, se $n = 3k \pm 1$, $n^2 + 5 = 9k^2 \pm 6k + 6$ é múltiplo de 3 e maior do que 3, ou seja, não é primo. Logo n é múltiplo de 3, e portanto é múltiplo de 6. Assim, os próximos candidatos a primo são $18^2 + 5 = 18^2 - 3^2 + 14 = (18 - 3)(18 + 3) + 14 = 15\cdot 21 + 14$ e $24^2 + 5 = 24^2 - 3^2 + 14 = (24 - 3)(24 + 3) + 14 = 21\cdot 27 + 14$, mas ambos são múltiplos de 7. O número $30^2 + 5$ é múltiplo de 5. O próximo número a ser testado é $36^2 + 5 = 1301$. Verifica-se que esse número é primo (basta verificar todos os primos até 36, ou seja, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31; vendo módulo cada um desses primos, obtemos 5, 5, 1, $1^2 + 5 = 6$, $3^2 + 5 = 14$, $(-3)^2 + 5 = 14$, $2^2 + 5 = 9$, $(-2)^2 + 5 = 9$, $(-10)^2 + 5 = 105$, $7^2 + 5 = 54$ e $5^2 + 5 = 30$).

05. [Resposta: 9780]

Solução: Considere duas das dez retas r_1 e r_2. Cada reta r_i corta um círculo em M_i e N_i e o outro em P_i e Q_i.



A potência de X em relação aos círculos é $XM_1 \cdot XN_1 = XP_1 \cdot XQ_1 = XA \cdot XB$ e $XM_2 \cdot XN_2 = XP_2 \cdot XQ_2 = XA \cdot XB$, respectivamente. Logo temos $XM_1 \cdot XN_1 = XP_2 \cdot XQ_2$ e $XM_2 \cdot XN_2 = XP_1 \cdot XQ_1$, de modo que os quadriláteros $M_1Q_2N_1P_2$ e $M_2Q_1N_2P_1$ são cíclicos. Logo qualquer par de retas determina pelo menos dois quadriláteros cíclicos que não estão inscritos em nenhuma das duas circunferências. Contando com os quadriláteros inscritos na circunferência, temos como total no mínimo $2\binom{20}{4} + 2\binom{10}{2} = 2\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4!} + 2\frac{10 \cdot 9}{2} = 9780$ quadriláteros cíclicos. Além disso, pode-se exibir exemplos com exatamente 9780 quadriláteros cíclicos.

SOLUÇÕES NÍVEL 3 – SEGUNDA FASE – PARTE B

PROBLEMA 1

Temos $r + s = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow b = -a(r+s)$ e $rs = \frac{c}{a} \Leftrightarrow c = ars$, logo $b + c = a(rs - r - s) = a((1 - r)(1 - s) - 1) < 0$, pois $0 < 1 - r < 1$ e $0 < 1 - s < 1$, de modo que $(1 - r)(1 - s) < 1$.

Outra maneira de provar que $rs - r - s < 0$ é notar que $rs - r - s = -r(1 - s) - s < 0$ pois $1 - s > 0$ e $-s < 0$.

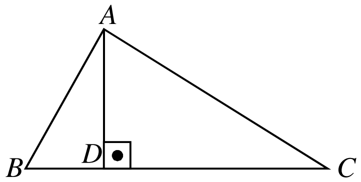
PROBLEMA 2

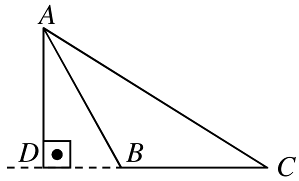
Temos $AB^2 = BD^2 + AD^2$ e $AC^2 = CD^2 + AD^2$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $BD \le CD$. Substituindo na equação, temos

$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AD^2} \Leftrightarrow \frac{1}{BD^2 + AD^2} = \frac{1}{AD^2} - \frac{1}{CD^2 + AD^2} \Leftrightarrow \frac{1}{BD^2 + AD^2} = \frac{CD^2}{AD^2(CD^2 + AD^2)}$$

$$\Leftrightarrow AD^2(CD^2 + AD^2) = CD^2(BD^2 + AD^2) \Leftrightarrow AD^2 = BD \cdot CD$$

Ou seja, $BD \cdot CD = 2012^2$. Como $BD \le CD$ e $2012^2 = 2^4 \cdot 503^2$ tem $(4 + 1)(2 + 1) = 15$ divisores positivos, BD tem 8 possíveis valores, sendo que em um deles, $BD = CD = 2012$. Com exceção desse caso, há dois triângulos que satisfazem essa condição, um com $BC = BD + CD$ e ângulo $m(A\hat{B}C)$ agudo (de fato, nesse caso ABC é retângulo em A) e outro com $BC = CD - BD$ e $m(A\hat{B}C)$ obtuso.

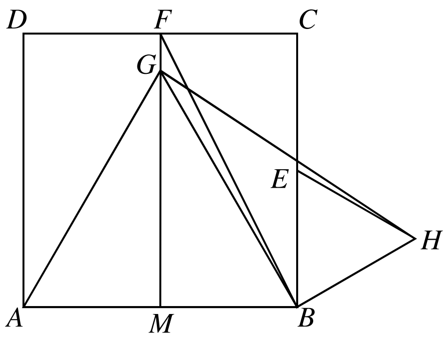




Com isso, o total de triângulos pedido é 7·2 + 1 = 15.

PROBLEMA 3

Seja M o ponto médio do lado AB.

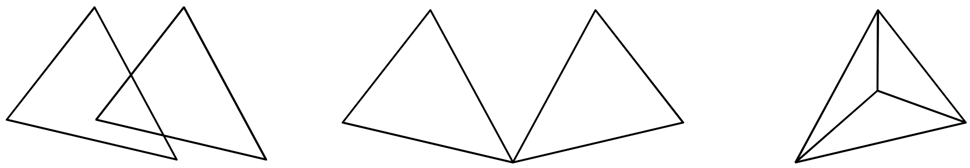


Note que $m(G\hat{B}H) = m(G\hat{B}E) + m(E\hat{B}H) = (90^\circ - m(G\hat{B}A)) + 60^\circ = 90^\circ - 60^\circ + 60^\circ = 90^\circ$ e $BG = AB = BC = 2 \cdot BE = 2 \cdot BH$. Além disso, no triângulo BMF, $m(B\hat{M}F) = 90^\circ$ e $MF = 2 \cdot MB$. Logo os triângulos GBH e FMB são semelhantes pelo caso LAL, com a mesma orientação. Portanto o ângulo entre as retas BF e GH é o mesmo que o ângulo entre as retas BG e MF, que é $m(B\hat{G}M) = 30^\circ$.

PROBLEMA 4

Antes da última jogada, há somente um triângulo ou vários triângulos com um segmento em comum, além de possivelmente outros segmentos que não participam de triângulos. Chamemos essas configurações de *vencedoras*.

Se o jogador recebe uma configuração que contém uma das configurações a seguir e mais segmentos, o jogador pode retirar algum desses segmentos e devolver outra configuração que contém a mesma configuração. Essas configurações têm pelo menos dois triângulos e não são vencedoras. Note que todas as configurações têm exatamente seis segmentos.



Considere então a configuração imediatamente anterior à *penúltima* jogada da partida. Todas tais configurações devem ter pelo menos dois triângulos; dois triângulos têm as seguintes possibilidades: sem lados nem vértices em comum; exatamente um vértice em comum; ou um lado em comum. Os dois primeiros casos correspondem às duas primeiras figuras acima; o segundo caso; caso não existam dois triângulos em uma dessas duas condições, todo par de triângulos tem um lado em comum; isso só ocorre se todos têm um lado em comum (o que é uma configuração vencedora, que não pode aparecer na penúltima jogada) ou aparece a configuração da direita (se um triângulo não tem o mesmo lado comum com os outros então tem dois lados diferentes em comum com dois outros triângulos, que têm um lado em comum). Logo toda configuração não vencedora contém pelo menos uma das configurações acima, de modo que a configuração imediatamente anterior à penúltima jogada é uma das três configurações acima.
Todas essas configurações têm 6 segmentos. Com isso, o jogador que tem a estratégia vencedora depende da paridade da quantidade de segmentos retirados até então, que é $\binom{2012}{2}-6$. Ou seja, se $\binom{2012}{2}$ é par Jade vence e se $\binom{2012}{2}$ é ímpar Esmeralda vence. Como $\binom{2012}{2}=\frac{2012\cdot 2011}{2}=1006\cdot 2011$ é par, Jade vence.

Observação: generalizando o jogo para n vértices, temos que Jade jogador vence se $n = 4k$ ou $n = 4k + 1$ e que Esmeralda vence se $n = 4k + 2$ ou $n = 4k + 3$.

34ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Problemas e soluções da Terceira Fase

TERCEIRA FASE – NÍVEL 1

PROBLEMA 1
Elaine usa cada um dos algarismos de 1 a 8 para escrever dois números de quatro algarismos cada.

a) Se a diferença entre os dois números é a maior possível, qual é a soma desses números?
b) Se a soma desses dois números é a menor possível, qual é a menor diferença possível entre eles?

PROBLEMA 2
Ana desenhou dois hexágonos diferentes com ângulos internos de 120º cada um. Um deles é o hexágono $ABCDEF$ e o outro é o hexágono $PQRSTU$.

a) Se $AB = CD = 5$, $BC = 8$ e $EF = 3$, qual é o perímetro do hexágono $ABCDEF$?
b) Se $PQ = 3$, $QR = 4$, $RS = 5$ e $TU = 1$, qual é o valor de $ST + PU$?

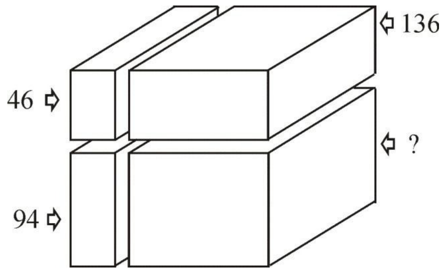
PROBLEMA 3
Cristina mostrou uma pilha de cartões numerados de 1 a 25 e pediu para sua amiga Doroti escolher seis desses cartões. Cristina anotou os números e devolveu os cartões à pilha. Em seguida, pediu para Doroti fazer mais uma escolha de seis cartões e anotou novamente os números.

a) Na primeira escolha de Doroti, a diferença entre os números de dois cartões quaisquer era um múltiplo de quatro e somente um dos seis números não era primo. Quais eram os seis números?

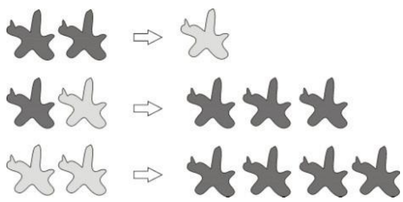
b) Na segunda vez, Doroti escolheu seis cartões de forma tal que para cada par desses cartões, um dos dois números era divisível pelo outro, exceto para um dos pares, em que nenhum dos dois números era divisível pelo outro. Qual era o maior desses números?

PROBLEMA 4
Beto serrou um cubo de madeira de aresta 7 cm em quatro blocos retangulares por meio de cortes paralelos às faces, conforme indicado na figura. Os números da figura indicam, em cm^2, a área total da superfície de três desses blocos.

a) Qual era a área total da superfície do cubo antes de ser serrado?
b) Qual é a área total da superfície do quarto bloco retangular?



PROBLEMA 5
Quando duas amebas vermelhas se juntam, elas se transformam em uma única ameba azul; quando uma ameba vermelha se junta com uma ameba azul, as duas se transformam em três amebas vermelhas e quando duas amebas azuis se juntam, elas se transformam em quatro amebas vermelhas. Fernando observa um tubo de ensaio que contém inicialmente 19 amebas azuis e 95 amebas vermelhas.



a) Ele observa que todas as amebas se juntam em pares, originando as amebas de geração seguinte. Esta geração tem no máximo quantas amebas?

b) A partir da situação inicial, se em algum instante houver 100 amebas, quantas serão as azuis?

TERCEIRA FASE – NÍVEL 2

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1
Quando duas amebas vermelhas se juntam, se transformam em uma única ameba azul; quando uma ameba vermelha se junta com uma ameba azul, as duas se transformam em três amebas vermelhas; quando duas amebas azuis se juntam, elas se transformam em quatro amebas vermelhas. Um tubo de ensaio tem inicialmente 201 amebas azuis e 112 amebas vermelhas.

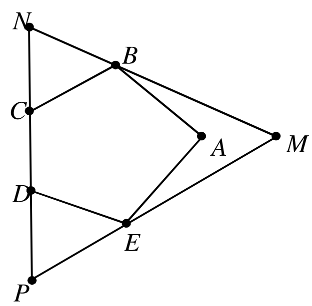
a) É possível que após algumas transformações o tubo contenha 100 amebas azuis e 314 amebas vermelhas?
b) É possível que após algumas transformações o tubo contenha 99 amebas azuis e 314 amebas vermelhas?

PROBLEMA 2
Muitas pessoas conhecem a famosa sequência de Fibonacci, mas o que muita gente não sabe é que na mesma época um matemático brasileiro criou as sequências de Somanacci. Essas sequências são geradas a partir de três termos iniciais inteiros positivos menores que 2012. Diferente do que acontece na sequência de Fibonacci, cada termo de uma sequência de Somanacci é a soma de todos os termos anteriores. Quantas sequências de Somanacci distintas possuem o número 2012 em alguma posição?

PROBLEMA 3
Seja ABC um triângulo, M o ponto médio do lado AC e N o ponto médio do lado AB. Sejam r e s as reflexões das retas BM e CN sobre a reta BC, respectivamente. Defina também D e E como a interseção das retas r e s com a reta MN, respectivamente. Sejam X e Y os pontos de interseção entre os circuncírculos dos triângulos BDM e CEN, Z a interseção das retas BE e CD e W a interseção entre as retas r e s. Prove que XY, WZ e BC são concorrentes.

TERCEIRA FASE – NÍVEL 2
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4
A figura abaixo mostra um pentágono regular $ABCDE$ inscrito em um triângulo equilátero MNP. Determine a medida do ângulo CMD.

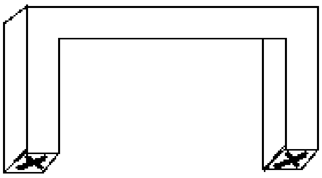


PROBLEMA 5

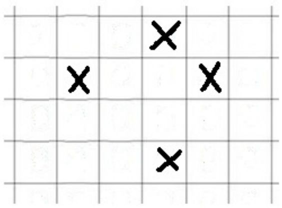
Considere os números reais a e b tais que $(a+b)(a+1)(b+1)=2$ e $a^3+b^3=1$. Encontre o valor de $a+b$.

PROBLEMA 6

Maria possui uma barra de chocolate $m \times n$ dividida em quadradinhos 1×1. Ela deseja marcar cada uma das casinhas usando o seguinte instrumento de marcação:



A peça pode ser usada na horizontal ou na vertical. Ela marca duas casas deixando entre elas duas casas com distância $d-1$ sem serem alteradas e não é permitido marcar um quadradinho mais que uma vez. Para que valores de m, n e d é possível fazer a marcação de todos os quadradinhos seguindo estas condições?
Obs: Exemplo de marcação com $d=3$, usando uma vez na vertical e uma na horizontal.



TERCEIRA FASE – NÍVEL 3
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Quando duas amebas vermelhas se juntam, se transformam em uma única ameba azul; quando uma ameba vermelha se junta com uma ameba azul, as duas se transformam em três amebas vermelhas; quando duas amebas azuis se juntam, elas se transformam em quatro amebas vermelhas. Um tubo de ensaio tem inicialmente *a* amebas azuis e *v* amebas vermelhas.
Determine, em função de *a* e *v*, todas as quantidades de amebas possíveis no tubo de ensaio e, para cada quantidade de amebas, as possibilidades de quantidades de amebas de cada cor.

PROBLEMA 2

Dado um triângulo ABC, o *exincentro* relativo ao vértice A é o ponto de interseção das bissetrizes externas de $\angle B$ e $\angle C$. Sejam I_A, I_B e I_C os exincentros do triângulo escaleno ABC relativos a A, B e C, respectivamente, e X, Y e Z os pontos médios de I_BI_C, I_CI_A e I_AI_B, respectivamente. O incírculo do triângulo ABC toca os lados BC, CA e AB nos pontos D, E e F, respectivamente. Prove que as retas DX, EY e FZ têm um ponto em comum pertencente à reta IO, sendo I e O o incentro e o circuncentro do triângulo ABC, respectivamente.

PROBLEMA 3

Qual é o menor natural n para o qual existe k natural de modo que os 2012 últimos dígitos na representação decimal de n^k são iguais a 1?

TERCEIRA FASE – NÍVEL 3
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Determine se existem inteiros positivos n, a_1, a_2, …, a_{2012}, todos maiores ou iguais a 2, tais que

$$n^2 = a_1^2 + a_2^3 + a_3^5 + \cdots + a_i^{p_i} + \cdots + a_{2012}^{p_{2012}},$$

em que p_i é o i-ésimo primo (ou seja, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, …).

PROBLEMA 5

De quantas maneiras podemos pintar as casas de um tabuleiro $n \times n$ com 4 cores de modo que casas com um lado em comum não tenham a mesma cor e em cada quadrado 2×2 formado por quatro casas em linhas e colunas consecutivas apareçam as quatro cores?

PROBLEMA 6

Encontre todas as funções sobrejetoras f dos reais positivos nos reais positivos tais que

$$2x \cdot f(f(x)) = (f(f(x)) + x) \cdot f(x)$$

para todo x real positivo.

Obs.: uma função f de A em B é *sobrejetora* quando a imagem de f é B, ou seja, para todo $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

SOLUÇÕES – NÍVEL 1

PROBLEMA 1:
SOLUÇÃO DE ADRIAN ALEXANDER TICONA DELGADO (SÃO PAULO – SP)

a) Se a diferença de 2 números é a maior possível, então tem na diferença o maior e o menor número:

$$\begin{array}{r} -\ \text{maior número} \\ \underline{\text{menor número}} \\ \text{maior dif.} \end{array}$$

O maior número é 8765 e o menor é 1234.

$$\begin{array}{r} -\,8765 \\ \underline{1234} \\ 7531 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} +\,8765 \\ \underline{1234} \\ 9999 \end{array}$$

R: A soma é 9999.

b) Primeiro, vamos descobrir quais são os números. Soma menor:

Os 1ºs algarismos das parcelas têm que ser os menores possíveis, que são 1 e 2 ⇒ soma 3.

$$\begin{array}{l} \quad 1x\,y\,z \\ + \\ \quad \underline{2x'y'z'} \\ \quad 3 \end{array}$$

Agora restam os números 3, 4, 5, 6, 7 e 8 ⇒ a menor soma é $3 + 4 = 7$.

$$\begin{array}{l} \quad 13yz \\ + \\ \quad \underline{24y'z'} \\ \quad 37 \end{array}$$

Porém, 7 NÃO é o 2º algarismo da soma, pois restam 5, 6, 7, 8 (qualquer soma de 2 desses números é mais que 10). Portando o valor é 8.

$$\begin{array}{l} \quad 13yz \\ + \\ \quad \underline{24y'z'} \\ \quad 38 \end{array} \qquad y + y' > 10$$

A menor soma é $5 + 6 = 11$.

$$\begin{array}{l} \quad 135z \\ \quad \underline{246z'} \\ \quad 38 \end{array}$$

E por fim 7 e 8:

$$\begin{array}{r} 1357 \\ 2468 \\ \hline 3825 \end{array}$$

A gente pode mudar os valores dessa forma para encontrar números novos sem alterar a soma:

$$\begin{array}{r} 1457 \\ 2368 \\ \hline 3825 \end{array}$$

Há 8 possibilidades (o $2-1$ permanece fixo):

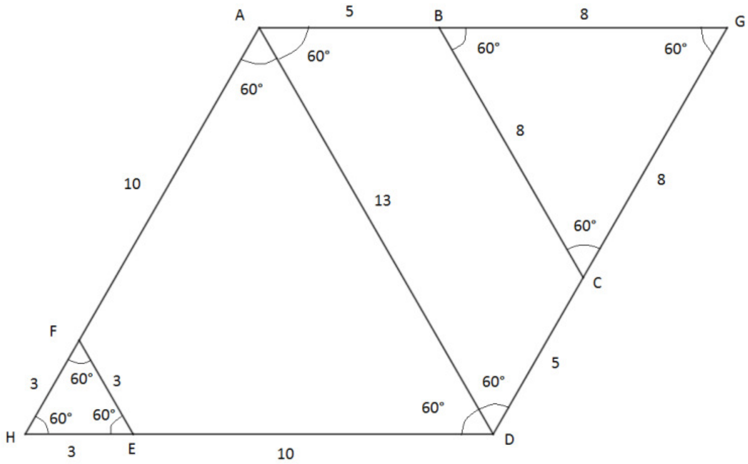
$$\begin{array}{r} 2468 \\ -\,1357 \\ \hline 1111 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2368 \\ -\,1457 \\ \hline 0911 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2458 \\ -\,1367 \\ \hline 1091 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2467 \\ -\,1358 \\ \hline 1109 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2358 \\ -\,1467 \\ \hline 0891 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2387 \\ -\,1458 \\ \hline 0909 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2357 \\ -\,1368 \\ \hline 1089 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2357 \\ -\,1468 \\ \hline 0889 \end{array}$$

R: A menor diferença é 889.

PROBLEMA 2: SOLUÇÃO DE ANDRÉ YUJI HISATSUGA (SÃO PAULO – SP)

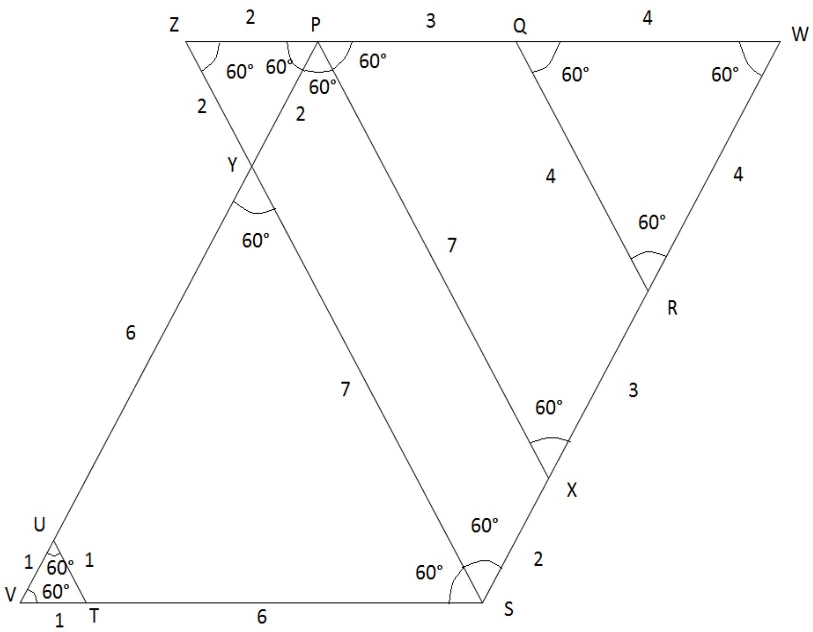
a)



Primeiro prolongamos AB, CD, ED e AF como na figura.

Seja G o cruzamento de AB com CD e H o cruzamento de AF com DE.
Como $A\hat{B}C = 120°, G\hat{B}C = 60°$.
$D\hat{C}B = 120° \Rightarrow B\hat{C}G = 60°$.
Logo, $B\hat{C}G = 60°$ e ΔBCG é equilátero.
$BC = 8 \Rightarrow BG = CG = 8$.
Fazemos a mesma coisa com o ΔEFH e obtemos:
$E\hat{F}H = F\hat{E}H = F\hat{H}E = 60° \Rightarrow \Delta EFH$ é equilátero.
$EF = FH = EH = 3$.
Traçamos AD.
No ΔADG: $AG = DG = 5 + 8 = 13$ e o ângulo do vértice G é $60°$, logo o ΔADG é equilátero e $AD = 13$.
No ΔADH: $H\hat{A}D = 120° - 60° = 60°$ e $A\hat{D}H = 120° - 60° = 60°$, logo ΔADH é equilátero de lado 13, pois AD=13.
Logo, $AF = 13 - 3 = 10$ e $DE = 13 - 3 = 10$.
Perímetro: $5 + 8 + 5 + 10 + 3 + 10 = 41$.

b)



Prolongamos PQ, RS, PU e ST. PQ cruza RS em W e PU cruza ST em V. Traçamos PX paralela a QR e SY paralela a TU.

Pelo item a), o ΔQRW e o ΔTUV são equiláteros. Como $PX \parallel QR$ e $SY \parallel TU$, $U\hat{Y}S = Y\hat{S}T = Q\hat{P}X = P\hat{X}R = 60°$ (teorema das paralelas cortadas por uma transversal). Logo ΔYVS e ΔPXW são equiláteros. Temos então:
$PX = 7, RX = 7 - 4 = 3, SX = 5 - 3 = 2.$
Prolongamos SY e PQ que se cruzam em Z, $W\hat{S}Z = 120° - 60° = 60°$, logo $S\hat{Z}W = 60°$ e ΔSZW é equilátero de lado $4 + 5 = 9$.
$ZP = 9 - 3 - 4 = 2.$
$Y\hat{P}X = 120° - 60° = 60°$ e $Z\hat{P}Y = 120° - 60° = 60°.$
$Z\hat{Y}P = 60°$ (OPV). Logo ΔYZP é equilátero de lado 2.
$SY = 9 - 2 = 7, ST = 7 - 1 = 6$ e $PU = 7 - 1 + 2 = 8.$
$ST + PU = 6 + 8 = 14.$

PROBLEMA 3: SOLUÇÃO DA BANCA

a) Como as diferenças entre os pares de números escolhidos por Doroti é sempre um múltiplo de 4, então todos os números escolhidos por ela deixam o mesmo resto na divisão por 4.

Se o resto for 0, então os números serão todos múltiplos de 4, portanto nenhum deles é primo, o que contradiz o enunciado.

Se o resto for 1, há 7 opções: 1, 5, 9, 13, 17, 21 e 25. Como 4 desses números (1, 9, 21 e 25) não são primos, quando escolhermos 6 deles, pegaremos pelo menos 2 não-primos, o que também contradiz o enunciado.

Se o resto for 2, todos são pares, e no máximo um deles (o 2) é primo, contradição.

Se o resto for 3, há 6 opções: 3, 7, 11, 15, 19 e 23. Esses números funcionam, já que o único que não é primo é o 15.

Portanto, a resposta é 3, 7, 11, 15, 19 e 23.

b) Provaremos que o maior número era 24.

Perceba que ele não poderia ser 25, pois se fosse, pelo menos quatro outros números (dentre os cinco outros escolhidos) teriam que dividi-lo, o que é um absurdo, já que os únicos divisores positivos de 25 menores que ele próprio são 1 e 5.

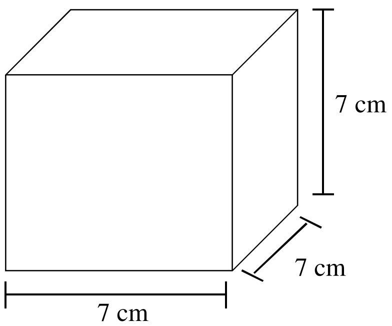
Agora provaremos que o maior número não pode ser menor que 24. Dentre os seis números escolhidos, há cinco tais que, para todo par deles, um divide o outro. Sejam eles
$1 \leq a < b < c < d < e \leq 25.$
É claro que $a|b, b|c, c|d$ e $d|e$. Assim, como eles são todos diferentes, temos $b \geq 2a, c \geq 2b, d \geq 2c$ e $e \geq 2d$, ou seja, $e \geq 16a$. Como $e \leq 25$, obtemos $a = 1$. Além disso, pelas mesmas desigualdades conseguimos que $e \geq 8b$. Se $b \geq 3$, obtemos $e \geq 24$, como queríamos. Assim, como $b > a = 1$, caso $e < 24$ devemos ter $b = 2$. Usando a mesma ideia, temos $e \geq 4c$. Assim, $c \leq 5$, pois se for pelo menos 6, já conseguiriamos que $e \geq 24$. Como c é múltiplo de b (que é 2), ele deve ser 4.

Finalmente, temos $e \geq 2d$, e portanto $d \leq 11$, pois se ele fosse pelo menos 12, conseguiríamos novamente que $e \geq 24$. Como d é múltiplo de c (que é 4), ele deve ser 8. Além disso, e é múltiplo de d (que é 8), portanto será igual a 16 ou 24. Se for 24, conseguimos o que queríamos, portanto falta analizar o caso em que ele é 16.

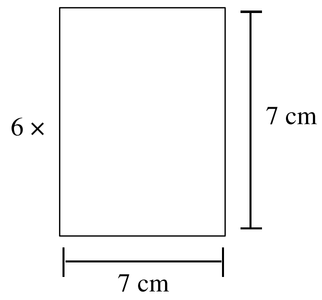
Sendo f o outro número escolhido por Doroti, então f não divide nem é múltiplo de exatamente um dentre os números 1, 2, 4, 8 e 16. Como esses números são todos potências de 2, se f dividir algum deles, então também será uma potência de 2, absurdo pois não há nenhuma outra potência de dois entre 1 e 25, além dessas 5. Assim, f é divisível por quatro desses números, e não é divisível pelo outro. Se esse outro não for o 16, chegamos num absurdo, já que o 16 dividiria f, mas aí todos os outros também o dividiriam, já que todos dividem 16. Portanto, f não é múltiplo de 16, e é múltiplo de todos os outros, em particular do 8. Isso implica que f é igual a 24, ou seja, provamos que o maior dos números sempre é pelo menos 24. Um exemplo em que o maior é 24 seria 1, 2, 4, 8, 16, 24.

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DE BRENDON DINIZ BORCK (PORTO ALEGRE – RS)

a) Primeiramente, precisamos saber que o cubo tem aresta 7, como diz o enunciado da questão:



Precisamos saber também que um cubo é composto por 6 faces:

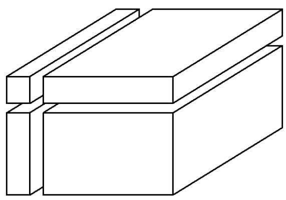


Como vemos na figura, cada face mede $7\ cm$ de lado, logo, a área de cada face é $49\ cm^2 = 7\ cm \times 7\ cm$.
Como já vimos, existem 6 faces, então é só multiplicar essa área por 6:

$$\begin{array}{r} 49 \\ \underline{\times 6} \\ 294 \end{array} \qquad 294\ cm^2 \Rightarrow \text{área total da superfície do cubo.}$$

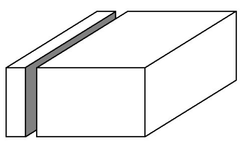
b) Com base no item anterior, já sabemos a superfície total do cubo antes de ser serrado = <u>294 cm²</u>.

Agora analisaremos o cubo serrado:

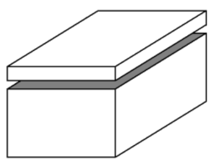


Obs.: Figura sem escalas

Lembrando que os cortes foram paralelos às faces, notamos que além da superfície total do cubo, que contém 6 faces, temos a superfície total do corte do cubo, que como é paralelo às faces do cubo, podemos interpretar como "novas faces" do cubo, pois medem a mesma área



+ 2 "faces novas"

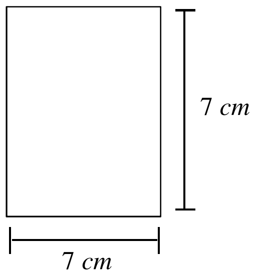


+ 2 "faces novas"

* Temos que contar que cada corte origina 2 "faces novas".

Logo a superfície total de todo cubo com seus devidos cortes é:

$\boxed{6+2+2} \quad \Rightarrow 10 \times$



E novamente como no item anterior, sabemos que cada "face" mede $49\ cm^2 = 7\ cm\ \times\ 7\ cm.$
Como são 10 "faces", precisamos multiplicar por 10.

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times\, 10 \\ \hline 490 \end{array} \qquad 490\ cm^2 \ \Rightarrow \text{ toda superfície contando os cortes}$$

Agora só precisamos subtrair o valor que já temos, pois assim acharemos a superfície do quarto bloco retangular.

$$\begin{array}{r} 94 \\ +46 \\ \hline 140 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 140 \\ +\,136 \\ \hline 276 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 490 - (46 + 94 + 136) = x \\ 490 - 276 = x \\ 214 = x \end{array}$$

Área total da superfície do quarto bloco retangular =

$$\boxed{214\ cm^2}$$

PROBLEMA 5: SOLUÇÃO DE ANDRÉ YUJI HISATSUGA (SÃO PAULO – SP)

a) Note que uma ameba vermelha pode se juntar a uma azul ou se juntar a uma vermelha. Como são apenas 19 azuis, pelo menos $95 - 19 = 76$ amebas vermelhas se juntarão a outras vermelhas e sobrarão $76 \div 2 = 38$ amebas (azuis).
Falta analisar: 19 amebas azuis e 19 vermelhas.
Como 19 é ímpar, pelo menos uma ameba azul se juntará a uma vermelha e resultará em 3 amebas (vermelhas).
Ainda temos que ver: 18 de cada.

Quando transformamos um par de azuis, sobrará um par de vermelhas para transformar também, e fica:

$2A + 2V \rightarrow 4 + 1 = 5$ amebas.

Mas é melhor assim:

$2A + 2V = (A + V) + (A + V) \rightarrow 3 + 3 = 6$ amebas

Então fica:
$18A + 18V \rightarrow 18 \cdot 3 = 54$ amebas

Total: $38 + 3 + 54 = 95$ amebas.

Vamos ver inicialmente que é possível que haja 33 azuis. Por exemplo, se 14 pares de amebas vermelhas se juntarem, teremos
Ex: 19 azuis + 67 vermelhas + 14 azuis = 33 azuis + 67 vermelhas.

Note:
$2V \equiv A$, isto é, em cada transformação, duas arestas vermelhas equivalem a uma azul. $V + A \equiv V + (2V) = 3V$
$2A \equiv 2 \cdot (2V) = 4V$

Todas essas igualdades são semelhantes às transformações, então é como se cada ameba azul tivesse o valor de 2 vermelhas. Se começamos com valor $38 + 95 = 133$ vermelhas, isso é igual em valor a 67 vermelhas e 33 azuis. Se houvesse mais azuis e 100 amebas no total, o valor em vermelhas seria maior, e se houvesse menos azuis e 100 amebas no total, o valor em vermelhas seria menor. Assim, a solução é única.

SOLUÇÕES – NÍVEL 2

PROBLEMA 1: SOLUÇÃO DE VICTOR AGNEZ LIMA (NATAL – RN)

a) Se 101 amebas vermelhas se juntarem com 101 amebas azuis, teremos $3.101 = 303$ amebas vermelhas resultantes.
Adicionando com as $112 - 101 = 11$ amebas vermelhas que não participaram das transformações, teremos $303 + 11 = 314$ amebas vermelhas.
Teremos também $201 - 101 = 100$ amebas azuis.

Logo, é possível, após algumas transformações, ter 314 amebas vermelhas e 100 amebas azuis.

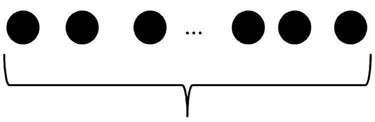
b) Considerando que uma ameba azul pode ser formada por duas vermelhas, e quando uma terceira se juntar, as três se separam, ou quando outra azul (formada por duas vermelhas) se juntam, as quatro se separam, podemos concluir que a quantidade de vermelhas, mais o dobro da quantidade de azuis (pois cada azul é formada por duas vermelhas) é constante e neste tubo de ensaio, será sempre $2 \cdot 201 + 112 = 514$. No item anterior, o resultado é o mesmo, pois $2 \cdot 100 + 314 = 514$, logo 201 amebas azuis e 112 vermelhas podem se transformar em 100 azuis e 314 vermelhas. Porém, a fórmula $2 \cdot$ (número de amebas azuis) $+$ (número de amebas vermelhas) deve dar sempre resultado 514, mas temos $99 \cdot 2 + 314 = 512$, logo não será possível que as amebas do tubo de ensaio se transformem e acabem resultando em 99 azuis e 314 vermelhas.

PROBLEMA 2: SOLUÇÃO DE DANIEL LIMA BRAGA (FORTALEZA – CE)

Vamos admitir que a condição de que cada termo seja a soma dos anteriores vale a partir do quarto termo da sequência (para que os três primeiros termos possam ser escolhidos livremente).

Vejamos de quantos modos podemos escolher $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}_+^*$ tais que $a_1 + a_2 + a_3 = n$, com $n \in \mathbb{Z}_+^*$ fixo.

Imagine que temos n bolinhas lado a lado



n bolinhas.

Imagine que pusemos duas barras entre as bolinhas, com ao menos uma bolinha entre elas, e da esquerda para a direita, há ao menos 1 bolinha antes da primeira barra e ao menos uma depois da última barra.

Essa ilustração clássica nos dá uma bijeção entre os modos de escolher a_1, a_2, a_3 e as maneiras de pôr as barras, pois para cada maneira de dispor as barras, seja a_1 a quantidade de bolinhas antes da 1ª barra (analise as coisas da esquerda para a direita), a_2 o número de bolinhas entre as duas barras e a_3 a quantidade de bolinhas que ainda não foram contadas (as que estão depois da 2ª barra). E também, escolhidos a_1, a_2, a_3, podemos por a 1ª barra após a_1–ésima bolinha e a 2ª barra de modo que haja a_2 bolinhas entre as barras. E como $a_1 + a_2 + a_3 = n \Rightarrow$ o número de bolinhas após a 2ª barra será a_3.

$\Rightarrow$ Temos uma bijeção.

Como temos $(n-1)$ espaços para dispor as duas barras

$\Rightarrow$ O total de modos de dispor as barras é $\binom{n-1}{2}$

$\Rightarrow$ O número de escolher a_1, a_2, a_3 também é $\binom{n-1}{2}$

Veja que, para $n \geq 5 \Rightarrow$ sendo os termos da nossa sequência de Somanacci denotados por $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots$

$\Rightarrow a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1 \quad (*)$

$a_{n-1} = a_{n-2} + a_{n-3} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1 \; (**)$

$\Rightarrow$ Substituindo $(**)$ em $(*)$ $\Rightarrow a_n = a_{n-1} + \underbrace{a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2}_{a_{n-1}} + a_1$

$\Rightarrow \; a_n = a_{n-1} \cdot 2 \;\; (***)$

Aplicando $(***)$ $\Rightarrow$ Para um termo genérico a_k, com $k \geq 5$

$a_k = 2 \cdot a_{k-1} = 2^2 \cdot a_{k-2} = \cdots = 2^{k-4} \cdot a_4 \Rightarrow a_k = 2^{k-4} \cdot a_4 \quad (1)$

Veja que se 2012 for um termo a_p da sequência, com $p \geq 7$

$\Rightarrow 2012 = a_p = 2^{p-4} \cdot a_4$, com $p \geq 7 \Rightarrow p - 4 \geq 3 \Rightarrow \; 8 \mid 2^{p-4} \cdot a_4$

$\Rightarrow \; 8 \mid 2012 \rightarrow ABSURDO! \Rightarrow p \leq 6.$

(1ºcaso) Se $p = 4$:

$\Rightarrow 2012 = a_1 + a_2 + \; a_3.$

Como a_1, a_2, a_3 são escolhidos livremente, porém menores que 2012 e inteiros positivos, pelo nosso resultado anterior, o número de maneiras de escolher a_1, a_2, a_3 é igual a:

$$\binom{2011}{2} = \frac{2011.2010}{2} = 1005.2011 \quad (1)$$

(2º caso) Se $p = 5$:

$\Rightarrow 2012 = a_5 = 2.a_4 \Rightarrow a_4 = 1006.$

Novamente, o número de maneiras de escolher a_1, a_2, a_3 é:

$\binom{1005}{2} = \dfrac{1005.1004}{2} = 1005 \cdot 502$ (2)

(3º caso) Se $p = 6$:

$2012 = a_6 = 4.a_4 \Rightarrow a_4 = 503.$

De novo, as maneiras de escolhermos a_1, a_2, a_3 serão:

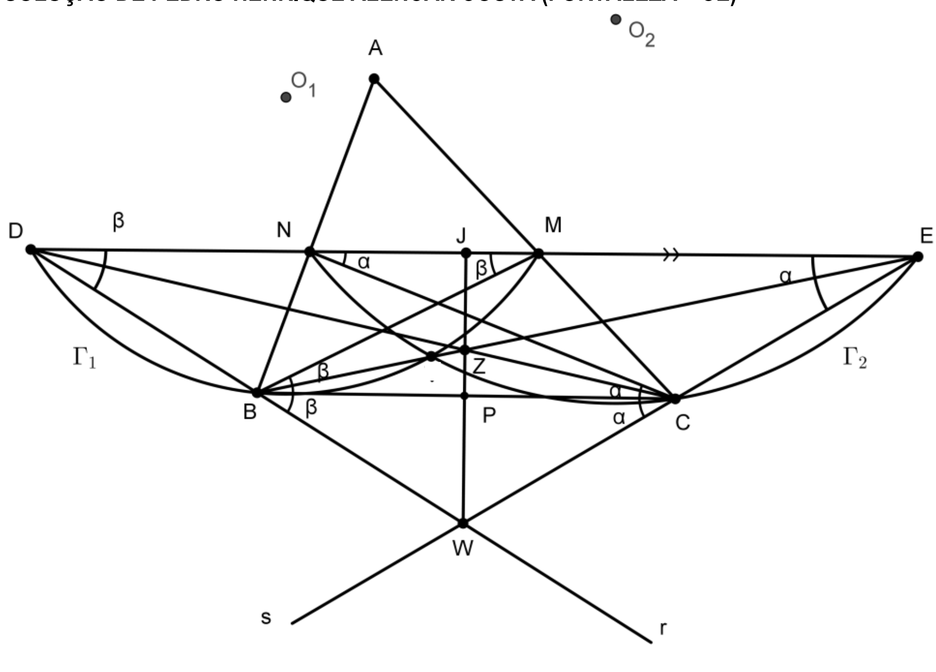
$$\binom{502}{2} = \frac{502.501}{2} = 251.501 \ \ (3)$$

$\Rightarrow$ Somando o total de sequências em cada caso, o número total de sequências com o 2012 sendo um de seus termos é:

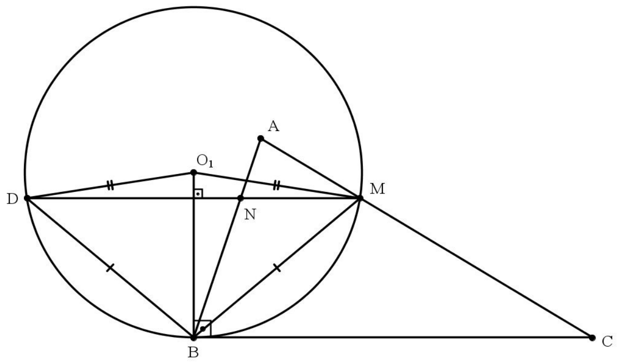
$$(1) + (2) + (3): \ \ 1005.2011 + 502.1005 + 251.501$$
$$= 2021055 + 504510 + 125751 = 2651316.$$

(Lembrando que uma sequência de Somanacci com $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2010$ é diferente de uma sequência de Somanacci com $a_1 = 1$, $a_2 = 2010, a_3 = 1$).

PROBLEMA 3:
SOLUÇÃO DE PEDRO HENRIQUE ALENCAR COSTA (FORTALEZA – CE)



Seja $N\hat{C}B = \alpha$ e $M\hat{B}C = \beta$. Como r é a reflexão de BM sobre BC $\Rightarrow$ os ângulos entre elas e BC são iguais a β. Analogamente, $W\hat{C}B = \alpha$. Como NM é base média, $\overleftrightarrow{NM} \parallel \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow M\hat{E}C = B\hat{C}W = \alpha, N\hat{D}B = C\hat{B}W = \beta, N\hat{M}B = M\hat{B}C =$
β e $M\hat{N}C = N\hat{C}B = \alpha.$
Logo, ΔNCE e ΔDBM são isósceles. Sejam O_1 e O_2 os centros dos circuncírculos de ΔDBM e ΔCEN, respectivamente. Temos o seguinte:



Como $DO_1 = O_1M$ e $BD = BM$, $BO_1 \perp DM$, mas $\overleftrightarrow{DM} \parallel \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow \overleftrightarrow{BO_1} \perp \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow$ BC é tangente à circunferência de centro O_1 e raio O_1B.
Analogamente, BC é tangente à outra circunferência (de centro O_2 e raio O_2C).
Sejam J a interseção de $\overleftrightarrow{NM}$ e $\overleftrightarrow{WZ}$ e P a interseção de $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{WZ}$. Veja que por Tales:

$$\frac{\text{DB}}{\text{BW}} = \frac{\text{CE}}{\text{CW}} \Rightarrow \frac{\text{DB}}{\text{BW}} \cdot \frac{\text{CW}}{\text{CE}} = 1$$

Por Ceva em ΔDWE e o ponto interior Z:

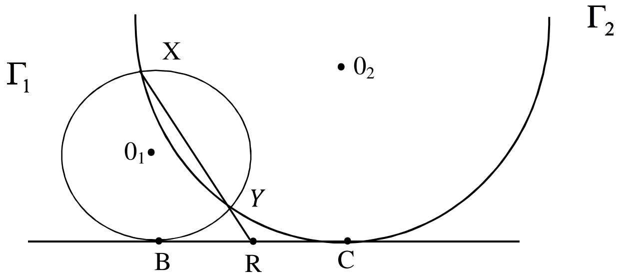
$$\frac{\text{DB}}{\text{BW}} \cdot \frac{\text{WC}}{\text{CE}} \cdot \frac{\text{EJ}}{\text{DJ}} = 1 \Rightarrow \frac{\text{EJ}}{\text{DJ}} = 1 \Rightarrow \text{EJ=DJ}$$

Como $\overleftrightarrow{BP} \parallel \overleftrightarrow{DJ}$, $\Delta DJW \sim \Delta BPW \Rightarrow \frac{\text{DJ}}{\text{BP}} = \frac{\text{WJ}}{\text{WP}}$.

Como $\overleftrightarrow{PC} \parallel \overleftrightarrow{JE}$, $\Delta\text{JEW} \sim \Delta\text{PCW} \Rightarrow \frac{\text{JE}}{\text{PC}} = \frac{\text{WJ}}{WP}$.

Assim $\frac{DJ}{BP} = \frac{JE}{PC}$, e como $DJ = JE$, $BP = PC$.

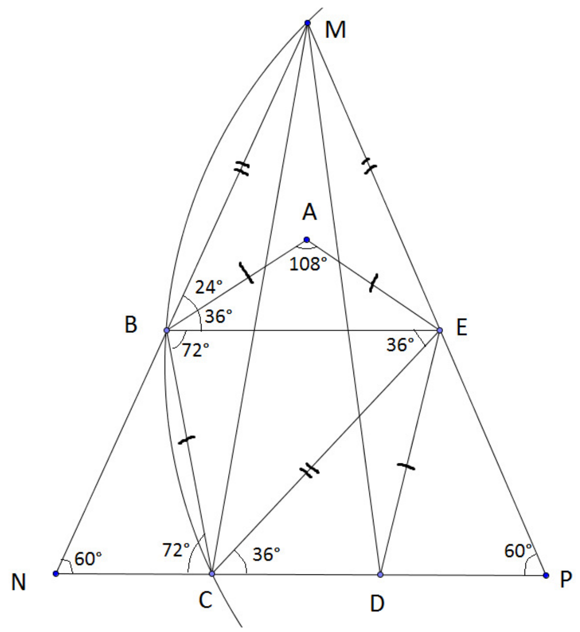
Logo, P é o ponto médio de BC.
Temos o seguinte:



sendo $R = \overleftrightarrow{XY} \cap \overleftrightarrow{BC}$

Pela potência do ponto R em $\Gamma_1 \Rightarrow RB^2 = RY \cdot RX$
Pela potência do ponto R em $\Gamma_2 \Rightarrow RC^2 = RY \cdot RX$
Logo, $RC^2 = RB^2 \Rightarrow RC = RB \Rightarrow \overleftrightarrow{XY}$ intersecta $\overleftrightarrow{BC}$ no seu ponto médio, ou seja, $R = P$. Assim, $\overleftrightarrow{XY}$,$\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{WZ}$ passam por P.

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DE GABRIEL TONEATTI VERCELLI (SÃO PAULO – SP)



$M\hat{B}E = M\hat{E}B = 60° \Rightarrow \overline{ME} = \overline{BE} = \overline{CE}$.

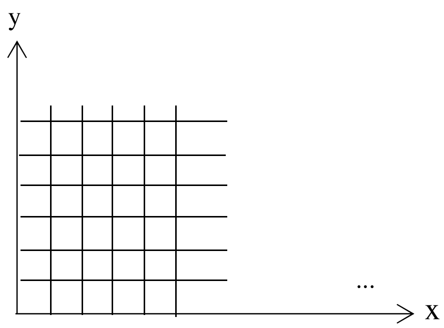
$\therefore M, B$ e C são pontos da circunferência de centro E, $B\hat{E}C = 36° \to$ arco $BC = 36° \to B\hat{M}C = \frac{BC}{2} = 18°$.
$\Delta MED \cong \Delta MBC$ (LAL).
$ME = MB$
$M\hat{E}D = M\hat{B}C$
$\overline{ED} = \overline{BC}$
$\to D\hat{M}E = B\hat{M}C = 18°$
$\therefore C\hat{M}D = 60° - 18° - 18° = 24°$.

PROBLEMA 5: SOLUÇÃO DE ANDREY JHEN SHAN CHEN (CAMPINAS – SP)
Primeiramente observe que
$(a+b)(a+1)(b+1) = (a+b)(ab+a+b+1) = 2$
e que $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = 1$
Assim, $(a+b)ab + (a+b)^2 + (a+b) = 2$ e $(a+b)^3 - 3ab(a+b) = 1 \Rightarrow$

$$\underbrace{(a+b)^3 - 3ab(a+b)}_{1} + \underbrace{3ab(a+b) + 3(a+b)^2 + 3(a+b)}_{3\cdot 2=6} = 7$$

$\Leftrightarrow (a+b)^3 + 3(a+b)^2 + 3(a+b) + 1 = 8$
$\Leftrightarrow (a+b+1)^3 = 8 \Leftrightarrow a+b+1 = 2$.
Assim, $a + b = 1$.

PROBLEMA 6:
SOLUÇÃO DE PEDRO HENRIQUE SACRAMENTO DE OLIVEIRA (VINHEDO – SP)
Primeiramente coloquemos o tabuleiro em um plano cartesiano:



E pegamos uma casa A com $x_A \leq d$ e $Y_A \leq d$ e formamos com ela e todas as outras com $x = x_A + d \cdot \alpha$ e $y = y_A + d \cdot \beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*)$ um outro tabuleiro; este teria que ter um número par de casas para poder ser preenchido agora com $d = 1$ (por paridade, exemplo de preenchimento: ...).

Mas se para alguma casa A isso não for verdade, então não seria possível preencher o tabuleiro original, logo tem que dar certo sempre.
A fórmula para o número de casinhas que serão pegas é:

$\left(\left\lfloor\frac{m-x_A}{d}\right\rfloor+1\right)\cdot\left(\left\lfloor\frac{n-y_A}{d}\right\rfloor+1\right)$, e isso tem que ser sempre par, porém se $2d \nmid m$ e $2d \nmid n$, podemos pegar x_A e y_A tais que a fórmula dê ímpar ($se\ m = 2d\alpha + \beta$, $1 \le \beta < 2d$, podemos pegar $x_A = 1$ se $\beta \le d$ e $x_A = d$ se $\beta > d$, e analogamente para n e y_A). Logo, uma das dimensões é divisível por $2d$ e podemos preencher este tabuleiro: dado um
sub-bloco de $1 \times 2d$, marcamos os pares $(j, j + d)$ para $1 \le j \le d$. E preenchemos o tabuleiro com cópias dele. Logo todos os tabuleiros com $m = 2d\alpha$ (α inteiro positivo) e n qualquer são válidos, bem como os tabuleiros com m qualquer e $n = 2d\beta$ (β inteiro positivo).

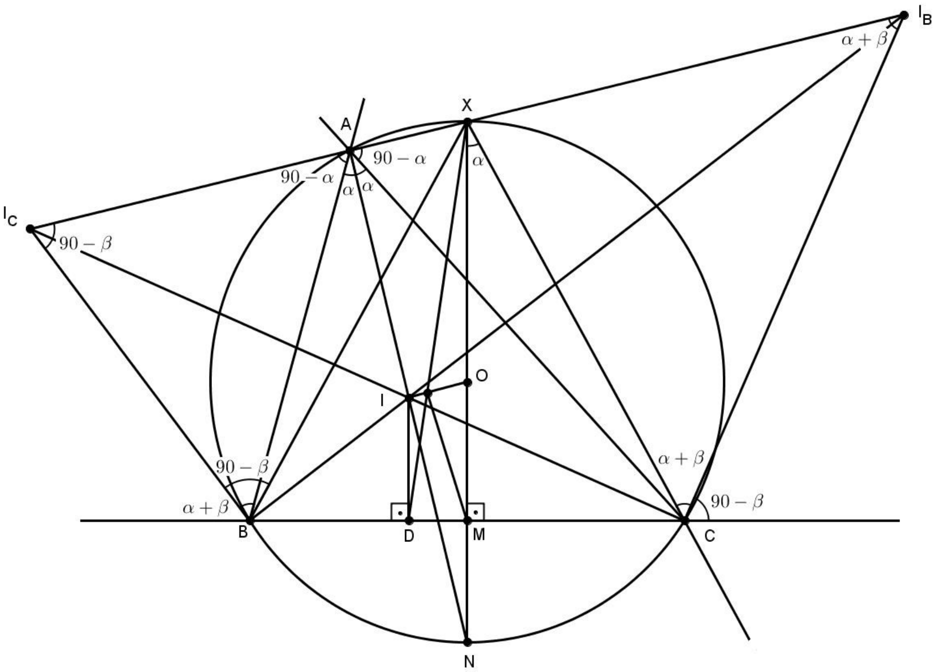
SOLUÇÕES – NÍVEL 3

PROBLEMA 1: SOLUÇÃO DE DANIEL LEITE RIBEIRO (MONTES CLAROS – MG)

Denotemos por (x, y) a situação do tubo quando há x amebas azuis e y amebas vermelhas.
Os casos $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$ são triviais: as quantidades possíveis são 0 amebas, 1 ameba (azul) e 1 ameba (vermelha), respectivamente, pois só há mudança quando há pelo menos duas amebas.
Quando duas amebas vermelhas se encontram para formar uma azul, a situação passa de (x, y) para $(x + 1, y - 2)$. Chame essa transformação de função f.
Quando uma de cada cor se encontra para formar três vermelhas, a situação passa de (x, y) para $(x - 1, y + 2)$. Chame essa transformação de função g.
Quando duas azuis se encontram para formar quatro vermelhas, a situação passa de (x, y) para $(x - 2, y + 4)$. Chame essa transformação de função h.
Observando que $f(g(x,y)) = (x, y)$ e que $h(x,y) = g(g(x,y))$, podemos dizer que $g = f^{-1}$ e que $h = g^2 = f^{-2}$.
Logo, qualquer combinação realizável de f, g e h sobre (a, v) pode ser escrita como $f^n(a, v)$, com $-a \le n \le \left\lfloor\frac{v}{2}\right\rfloor$, onde $f^n(a, v) = (a + n, v - 2n)$.
Excluindo-se os casos triviais mencionados inicialmente, se $a = 0$ sempre será possível realizar g ou $f \circ h$, ambas equivalentes a f^{-1} e, se $y \neq 0$, sempre será possível realizar f. Isto significa que é sempre possível aumentar ou diminuir n de 1 unidade se $-a < n < \left\lfloor\frac{v}{2}\right\rfloor$, isto é, n pode assumir qualquer valor inteiro de $-a$ até $\left\lfloor\frac{v}{2}\right\rfloor$.

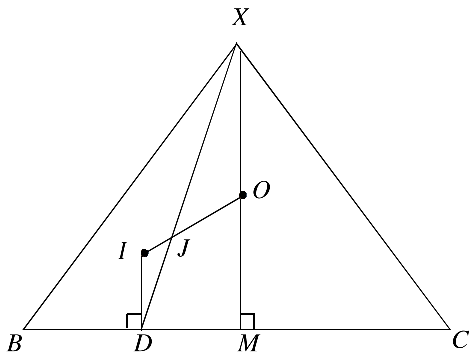
Assim sendo, as quantidades possíveis de amebas num tubo onde havia inicialmente a amebas azuis e y amebas vermelhas são as da forma $a+n+v-2n=a+v-n$, para cada valor inteiro que n assume de $-a$ a $\left\lfloor \frac{v}{2} \right\rfloor$, onde $a+n$ são azuis e $v-2n$ são vermelhas.

PROBLEMA 2:
SOLUÇÃO DE PEDRO MORAIS DE ARRUDA SIAUDZIONIS (FORTALEZA – CE)



Como $I_C\hat{B}I_B = I_C\hat{C}I_B = 90° \Rightarrow \Delta I_C B I_B$ é retângulo e $\Delta I_C C I_B$ também é retângulo. Seja
X o ponto médio de $I_B\, I_C$. Segue que $BX = \frac{I_B\, I_C}{2}$ e $CX = \frac{I_B\, I_C}{2} \Rightarrow BX = CX \Rightarrow X$ está na mediatriz de BC, ou seja, sendo O o circuncentro do ΔABC e M o ponto médio de BC,
O, M, X são colineares.
Seja $B\hat{A}C = 2\alpha$; $A\hat{C}B = 2\beta \Rightarrow A\hat{B}C = 180 - 2\alpha - 2\beta$. Logo $I_C\, \hat{A}B = 90 - \alpha$ e $A\hat{B}I_C = \alpha + \beta \Rightarrow \quad A\hat{I}_C B = 90 - \beta \Rightarrow X\widehat{I_C}B = 90 - \beta \Rightarrow X\hat{B}I_C = 90 - \beta$. Logo $X\hat{B}C = 90 - \alpha \Rightarrow B\hat{X}M = \alpha = \frac{\widehat{BN}}{2} \Rightarrow X$ está na circunferência circunscrita a ABC.
Vamos mostrar que DX passa por um ponto fixo em IO.

Para isso, vamos olhar mais atentamente para a figura:



Na figura, note que $ID \parallel OM \Rightarrow \Delta IDJ \sim \Delta OJX$, onde J é o ponto de interseção de IO e DX. Logo:

$\frac{IJ}{JO} = \frac{DI}{XO} = \frac{r}{R}$, onde r é o raio do incírculo e R é o raio do circuncírculo.

Logo

$\frac{IJ}{JO} =$ constante $\Rightarrow J$ é constante e DX passa por J.

Analogamente para EY e FZ, elas também passarão por J.

Portanto elas concorrem em um ponto sobre IO.

PROBLEMA 3:

SOLUÇÃO DE FRANCO MATHEUS DE ALENCAR SEVERO (RIO DE JANEIRO – RJ)

Para resolver o problema devemos achar n tal que exista k tal que $n^k \equiv \underbrace{11\cdots1}_{2012\ 1\text{'s}} = \frac{10^{2012}-1}{9}$ $(\text{mod}\, 10^{2012})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9n^k \equiv -1 \left(\text{mod } 5^{2012}\right) \text{ (I)} \\ 9n^k \equiv -1 \left(\text{mod } 2^{2012}\right) (II) \end{cases}$$

Note que todo quadrado perfeito é congruente a 0,1 ou 4 módulo 8, logo não podemos ter k par, pois teríamos $9.n^k \equiv 0{,}1{,}4$ (mod 8) (contradição com (II))

Logo k é ímpar $\Rightarrow$ $n \equiv 7$ (mod 16) ($*$). (caso contrário também haveria contradição com (II)).

Portanto $9n^{k+1}$ é quadrado perfeito, e portanto, deveríamos ter

$\left(\frac{-n}{5}\right) = 1 \Rightarrow (-1)^{\frac{5-1}{2}} \left(\frac{n}{5}\right) = 1$, logo n é resíduo quadrático módulo 5, isto é, $n \equiv 1, -1$ (mod 5), mas se $n \equiv -1$ (mod 5) teríamos $9.n^k \equiv -9 = 1$ (mod 5) (contradição com (I)).

Logo n $\equiv$ 1 (mod 5) $(**)$.
Note que o menor inteiro positivo que satisfaz $(*)$ e $(**)$ simultaneamente é $n = 71$.
Provaremos que n $= 71$ é solução. Para isso usaremos os dois seguintes lemas:
Lema 1: $\text{ord}_{5^t}71 = 5^{t-1}, \forall$ t ≥ 1.
Prova: Provaremos por indução em t que $5^t \parallel 71^{5^{t-1}} - 1$ (lembramos que, dados p primo, $k \geq 2$ e $n \in \mathbb{Z}$, $p^k \parallel n$ se, e somente se, $p^k|n$ e $p^{k+1}\nmid n$). Isto é obviamente verdade para $t = 1$. Se é verdade para algum t, teremos $71^{5^{t-1}} = 5^t.l + 1$, onde $5\nmid l$, logo:
$71^{5^t} = (5^t.l)^5 + 5.(5^t.l)^4 + 10.(5^t.l)^3 + 10(5^t.l)^2 + 5^{t+1}l$+1$\equiv 5^{t+1}l + 1$ (mod 5^{t+2}) $\Rightarrow 5^{t+1} \parallel 71^{5^t} - 1$ (c.q.d).
De $5^{t-1} \parallel 71^{5^{t-2}} - 1$, $5^t \parallel 71^{5^{t-1}} - 1$ e ord_{5^t} $71|\varphi(5^t) = 4.5^{t-1}$, segue que ord_{5^t} $71 = 5^{t-1}$, o que conclui a prova do Lema.
Lema 2: $\text{ord}_{2^t}71 = 2^{t-3}, \forall t \geq 4$.
Prova: Provaremos por indução em t que $2^t \parallel 71^{2^{t-3}} - 1, \forall t \geq 4$. Isto é óbvio para t=4.
Se é verdade para t, então:

$$71^{2^{t-3}} = 2^t.l + 1, \text{ onde } 2\nmid l, \text{ então } 71^{2^{t-2}} = 2^{2t}l + 2^{t+1}l + 1 \equiv 2^{t+1}l + 1(\text{mod}2^{t+2})$$

$\Rightarrow 2^{t+1} \parallel 71^{2^{t-2}} - 1$(c.q.d).
De $2^{t-1} \parallel 71^{2^{t-4}} - 1$, $2^t \parallel 71^{2^{t-3}} - 1$ e $\text{ord}_{2^t}71|\varphi(2^t) = 2^{t-1}$, segue que $\text{ord}_{2^t}71 = 2^{t-3}$.
Note que, como $71^k \equiv 1(\text{mod}5)$, temos que os possíveis restos de 71^k por 5^{2012} são: 1,6,11,...,$5^{2012} - 5 + 1$ (5^{2011}valores possíveis). Como $\text{ord}_{5^{2012}}71 = 5^{2011}$ pelo lema 1, temos que 71^k atinge todos os restos citados. Em particular $\frac{10^{2012}-1}{9} \equiv$ 1 (mod5), logo $\exists k_1$ tal que $71^{k_1} \equiv \frac{10^{2012}-1}{9}$ (mod5^{2012}).
Com $71 \equiv 7$ (mod16) temos$71^k \equiv 7{,}1$ (mod16) logo os possíveis restos são 1,7,16,23,...
$2^{2012} - 16 + 1, 2^{2012} - 16 + 7$($2^{2009}$restos possíveis) na divisão por 2^{2012}. Como $\text{ord}_{2^{2012}}71 = 2^{2009}$, temos que 71^k atinge todos os restos citados, em particular, como $\frac{10^{2012}-1}{9} \equiv (-1).9 \equiv 7$ (mod16), $\exists k_2$ tal que $71^{k_2} \equiv \frac{10^{2012}-1}{9}$(mod$2^{2012}$).

Como mdc $(2^{2009}, 5^{2011}) = 1$, temos que $\exists k$ tal que

$$\begin{cases} k \equiv k_1 (\text{mod} 5^{2011}) \\ k \equiv k_2 \, (\text{mod} 2^{2009}) \end{cases} \rightarrow 71^k \equiv \frac{10^{2012}-1}{9} (\text{mod} 10^{2012}).$$

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DE RAFAEL KAZUHIRO MIYAZAKI (SÃO PAULO – SP)

Sim. Tome a_2 um ímpar qualquer maior que 1 e $a_3, a_4, \ldots, a_{2012}$ pares quaisquer maiores que 1. Temos que $a_2^3 + a_3^5 + \cdots + a_{2012}^{p_{2012}} \equiv 1(mod\ 2)$, e assim $a_1^3 + a_2^5 + \cdots + a_{2012}^{p_{2012}} = 2k + 1$, para algum $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Então tome $n = k + 1, a_1 = k$ e chegamos a $k^2 + 2k + 1 = n^2 = a_1^2 + \left(a_2^3 + \cdots + a_{2012}^{p_{2012}}\right)$, como queríamos.

PROBLEMA 5: SOLUÇÃO DE THIAGO POEIRAS SILVA (BELO HORIZONTE – MG)

Seja $f(n, m)$ o número de formas de pintar um tabuleiro $n \times m$ e seja $g(n) = f(n, n)$ o número de formas de pintar um tabuleiro $n \times n$.

$\rightarrow g(2) = 4.3.2.1 = 24$

4	3
2	1

Vamos agora calcular $g(3)$:
Inicialmente temos 24 formas de pintar o quadro 2×2 no canto superior esquerdo do tabuleiro 3×3.

A	*B*	
C	*D*	

Depois temos as seguintes possibilidades:
Caso *I*:

A	*B*	*C*
C	*D*	*A*

$\Rightarrow$

A	*B*	*C*
C	*D*	*A*
	B	

$\downarrow$
Não pode ser *A*, *C* ou *D*.

$\Rightarrow$

A	*B*	*C*
C	*D*	*A*
A	*B*	*C*

$\downarrow$
Nos quadradinhos 2×2 inferiores faltam apenas estas cores.

Caso *II*:

A	*B*	*A*
C	*D*	*C*

$\Rightarrow$ ...

A	B	A
C	D	C
B		

$\Rightarrow$

A	B	A
C	D	C
B	A	B

OU

A	B	A
C	D	C
A		

$\Rightarrow$

A	B	A
C	D	C
A	B	A

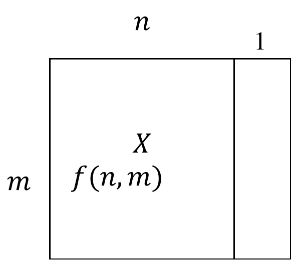
Observação I:
Observe que sempre que temos um quadradinho 2×2 com 3 casas pintadas, a pintura da 4ª casa é fixa:

A	B
C	

$\Rightarrow$

A	B
C	D

Observe também que para cada pintura que fizermos no quadradinho 2×2 do canto superior esquerdo, temos 3 formas de finalizar a pintura.
Logo, $g(3) = 3.24 = 72$.



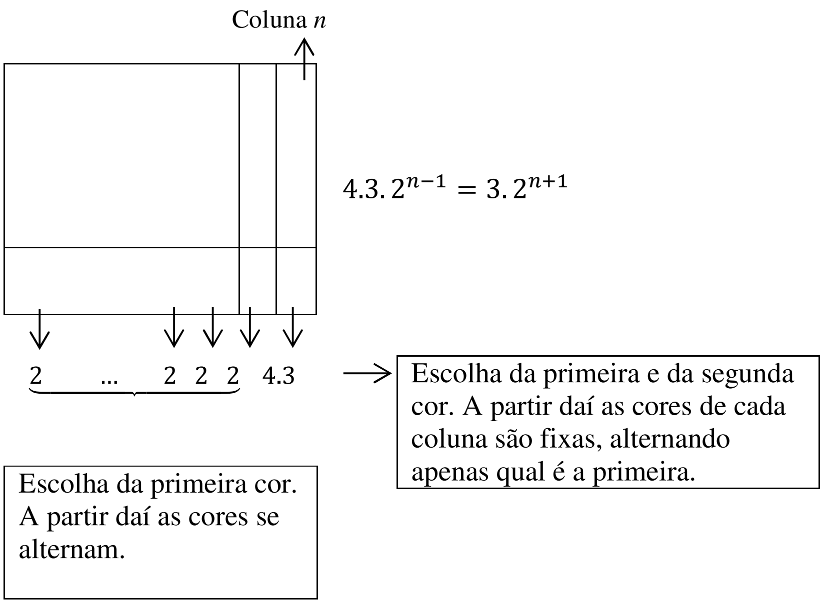
Supondo $n, m > 3$:

Agora, a partir do $f(n,m)$ calcularemos $f(n+1,m)$.
Considere um tabuleiro $(n+1) \times m$ em que pintamos todo o tabuleiro menos a última coluna (há $f(n,m)$ maneiras de fazer isso). Vamos calcular de quantas maneiras podemos finalizar a pintura.

Vamos primeiro dividir as formas de pintar o subtabuleiro X $(n \times m)$ em duas categorias.

1ª) A coluna n tem apenas 2 cores.

A quantidade de tabuleiros com essa propriedade é dada por:



Nesse caso para completarmos a pintura do tabuleiro $(n+1) \times m$ só temos duas possibilidades, dadas pela escolha da cor da casa $(n+1,1)$ – a partir daí as cores das casas $(n+1, j), 1 \leq n \leq m$ se alternam.

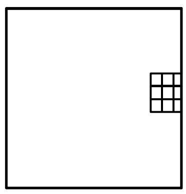
Assim, para este caso temos:

$2.3.2^{n+1} = 3.2^{n+2}$ formas de colorir o tabuleiro $(n+1) \times m$.

2ª) A coluna n tem mais de 2 cores.

Neste caso temos $f(n,m) - 3.2^{n+1}$ formas de pintar o tabuleiro $n \times m$.

Como a última coluna tem mais de 2 cores, existe um quadradinho 3×3 no canto direito da seguinte forma:



$\Rightarrow$

A	*C*	
B	*D*	
C	*A*	

Que só pode ser preenchido de uma maneira

A	*C*	*A*
B	*D*	*B*
C	*A*	*C*

A partir dessa pintura, pintamos de maneira única o restante da coluna $(n+1)$.
Para este caso temos então $1.(f(n,m) - 3.2^{n+1})$ formas de pintar o tabuleiro $(n+1) \times m$.

Como os dois casos são disjuntos, temos

$$f(n+1,m) = 3.2^{n+2} + f(n,m) - 3.2^{n+1} = f(n,m) + 3.2^{n+1}$$

Com este resultado temos

$$f(n+1,n) = f(n,n) + 3.2^{n+1}$$
$$f(n+1,n+1) = f(n+1,n) + 3.2^{n+1}$$
$$f(n+1,n+1) = f(n,n) + 3.2^{n+2}$$
$$g(n+1) = g(n) + 3.2^{n+2}$$

Como $n > 3$ temos

$$\begin{aligned} g(4) &= g(3) + 3.2^5 \\ g(5) &= g(4) + 3.2^6 \\ &\vdots \\ \underline{g(n)} &\underline{= g(n-1) + 3.2^{n+1}} \end{aligned}$$

$$g(n) = g(3) + 3.2^5(1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-4})$$
$$g(n) = 72 + 3.2^5(2^{n-3} - 1)$$
$$g(n) = 72 + 3.2^{n+2} - 3.2^5$$

$$g(n) = 3.2^{n+2} - 24, \text{ para } n > 3$$

Mas observe que para $n = 2$ e $n = 3$ esta fórmula também é válida:

$$g(3) = 3.2^5 - 24 = 72$$
$$g(2) = 3.2^4 - 24 = 24$$

Logo temos que a quantidade de formas de pintar o tabuleiro $n \times n$ com as condições do enunciado é dada por

$\boxed{3.2^{n+2} - 24}$ para $n \geq 2$ e 4 para $n = 1$.

PROBLEMA 6:
SOLUÇÃO DE FRANCO MATHEUS DE ALENCAR SEVERO (RIO DE JANEIRO – RJ)

Note que $2xf\big(f(x)\big) = \big(f\big(f(x)\big) + x\big)f(x) \Leftrightarrow (2x - f(x))f\big(f(x)\big) = xf(x) \Leftrightarrow \frac{1}{f(f(x))} = \frac{2}{f(x)} - \frac{1}{x}$.

Se $f^1(x) = f(x)$ e $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$, temos que, definindo $k_n = \frac{1}{f^n(x)}$, para um x fixo

$(k_0 = \frac{1}{x})$, teremos $k_{n+1} = 2k_n - k_{n-1}$ para $n \geq 1$, e é fato conhecido que isso implica que
$k_n = an + b$ (fácil de provar por indução), onde $\frac{1}{x} = k_0 = b$ e $\frac{1}{f(x)} = k_1 = a + b \Rightarrow b = \frac{1}{x}$ e $a = \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{x}$.

Logo: $\frac{1}{f^n(x)} = \frac{1}{x} + \frac{n(x-f(x))}{xf(x)}$. Como $f^n(x) > 0, \forall n, x$, devemos ter $x \geq f(x)$ $(*)$, pois caso contrário $\frac{1}{f^n(x)} \xrightarrow{n \to +\infty} -\infty$, um absurdo.

Suponha que $f(x) = f(y)$, então $x = \frac{f(x)f(f(x))}{2f(f(x))-f(x)} = \frac{f(y)f(f(y))}{2f(f(y))-f(y)} = y$.
Logo, f é injetiva e, pelo enunciado, também é sobrejetiva. Logo $\exists g: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $g\big(f(x)\big) = f\big(g(x)\big) = x$, isto é, g inversa de f.

Substituindo na equação dada, temos: $2g\big(g(y)\big)y = \Big(y + g\big(g(y)\big)\Big)\, g(y), \forall\, y \in \mathbb{R}^+$ (este "∀" é porque sempre existe x tal que $f\big(f(x)\big) = y$, pois f é sobrejetiva).

Mas esta condição sobre g é idêntica à condição sobre f, logo podemos concluir, de forma análoga, que $g(y) \leq y, \forall\, y \in \mathbb{R}^+$. E portanto, se $x = g(y)$ temos que $f(x) = y$, logo $g(y) \leq y \Rightarrow x \leq f(x)$ $(**)$.

De $(*)$ e $(**)$ segue que $f(x) = x, \forall\, x \in \mathbb{R}^+$. É fácil ver que esta função é solução.

34ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e soluções da Primeira Fase – Nível Universitário

PROBLEMA 1

a) Determine o maior valor possível de $\left|sen^2(x)\cdot sen(2x)\right|$ para $x\in\mathbb{R}$.

b) Prove que para todo inteiro positivo *k*, se $x=\dfrac{2\pi r}{2^k-1}$, com $r\in\mathbb{Z}$, então

$$\left|\prod_{j=0}^{k-1} sen\left(2^j x\right)\right| = \left|sen(x)\cdot sen(2x)\cdot\ldots\cdot sen\left(2^{k-1}x\right)\right| \le \left(\sqrt{3}/2\right)^k.$$

PROBLEMA 2

Considere a função dada por $f(x)=\left(e^x-1\right)^{1/x}$, definida para $x>0$.

a) Mostre que $f(x)$ é estritamente crescente.

b) Seja $V(y)$ definida por $V(y)=x$ se e somente se $f(x)=y$. Dados $0<a<b<c$, números reais, considere a equação $a^x+b^x=c^x$. Escreva *x* em função de *a*, *b* e *c* usando funções elementares e a função *V*.

PROBLEMA 3

Sejam $f(x)$ e $g(x)\in\mathbb{R}[x]$ não constantes e *m*, *n* inteiros positivos. Mostre que $y^m-f(x)$ divide $y^n-g(x)$ em $\mathbb{R}[x,y]$ se, e somente se, *m* divide *n* e $g(x)=f(x)^{n/m}$.

PROBLEMA 4

Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências dadas por $x_1=2, y_1=2012, x_{n+1}=2^{x_n}$ e $y_{n+1}=(y_n)!$, para todo $n\ge 1$. Determine o menor inteiro positivo *k* tal que $x_k>y_{2012}$.

PROBLEMA 5

Sejam $M_1=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$, $M_2=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$, $M_3=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$. Para cada uma das matrizes M_i

(i = 1, 2, 3), determine quantas matrizes A_i existem com $A_i^5 = M_i$.

PROBLEMA 6

Considere a parábola formada pelos pontos $\left(x, x^2\right), x \in \mathbb{R}$ e a sequência $\left(x_n\right)_{n\geq 0}$ dada por $x_n = n^{\alpha}$, onde $\alpha > 0$ é uma constante real. Considere a região formada pelos pontos que estão à direita do eixo vertical $\left(x = 0\right)$, abaixo da parábola e acima das retas tangentes à parábola nos pontos $\left(x_n, x_n^2\right), n \geq 0$. Para que valores de α essa região tem área infinita?

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1

(a) Sendo $f(x) = sen^2(x)sen(2x)$, uma função π-periódica, temos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2sen\,(x)\cos(x)\cdot sen(2x) + sen^2(x)\cdot 2\cos(2x) \\ &= 2sen(x)\cdot(\cos(x)\,sen(2x) + sen(x)\cos(2x)) \\ &= 2sen(x)sen(3x) \end{aligned}$$

E assim, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pi r/3,\ r \in \mathbb{Z}$. Substituindo estes valores, concluímos que $|f(x)|$ é no máximo $|f(\pi/3)| = |f(2\pi/3)| = (\sqrt{3}/2)^3$.

(b) Pelo item anterior, temos as k desigualdades

$$\begin{aligned} &|sen^2(x)sen(2x)| \leq (\sqrt{3}/2)^3 \\ &|sen^2(2x)sen(4x)| \leq (\sqrt{3}/2)^3 \\ &\cdots \\ &\left|sen^2\left(2^{k-1}x\right)sen(2^k x)\right| \leq \left(\sqrt{3}/2\right)^3 \end{aligned}$$

Note que como $2^k x = 2\pi r\cdot 2^k/(2^k - 1) = x + 2\pi r$ temos $sen\left(2^k x\right) = sen\,(x)$. Assim, multiplicando as desigualdades acima obtemos

$$\left|sen^3(x)sen^3(2x)\cdots sen^3(2^{k-1}x)\right| \leq (\sqrt{3}/2)^{3k}$$

E portanto

$$\left|sen(x)sen(2x)\cdots sen(2^{k-1}x)\right| \leq (\sqrt{3}/2)^{k}$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2

(a) Note que $f(x) > 0$ para todo $x > 0$. Assim, seja

$$g(x) = ln\left(f(x)\right) = \frac{\ln(e^x - 1)}{x}$$

Como $\text{In}(x)$ é uma função estritamente crescente, basta mostrar que $g(x)$ é estritamente crescente. Mas

$$g'(x) = \frac{ln(e^x - 1) - e^x\, ln(e^x - 1) + xe^x}{x^2(e^x - 1)}$$

Como o denominador é claramente positivo para $x > 0$, basta mostrar que o numerador $N(x)$ é positivo. Mas, se $e^x - 1 \geq 1$

$$N(x) = \underbrace{ln(e^x - 1)}_{\geq 0} + e^x \underbrace{\left(x - ln(e^x - 1)\right)}_{>0} > 0$$

Por outro lado, se $e^x - 1 < 1$, então

$$N(x) = \underbrace{ln(e^x - 1)}_{<0}\underbrace{(1 - e^x)}_{<0} + \underbrace{xe^x}_{>0} > 0$$

(b) Note que $\lim_{x \to 0+} f(x) = 0$ e

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e \cdot \left(\frac{e^x - 1}{e^x}\right)^{\frac{1}{x}} = e \cdot 1^0 = e$$

Como f é crescente, sua imagem é (0, e), que será o domínio de V (y). Em $a^x + b^x = c^x$, não poderíamos ter $x \leq 0$. De fato, como $0 < a < b < c$, isto implicaria em $a^x \geq c^x$, e $a^x + b^x > c^x$. Então $x > 0$.

Agora divida tudo por b^x.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x + 1 = \left(\frac{c}{b}\right)^x$$

Sendo $\alpha = \frac{a}{b}$ e $\gamma = \frac{c}{b}$, o problema passa a ser

$$\alpha^x + 1 = \gamma^x \Leftrightarrow \alpha = (e^{x\, ln\, \gamma} - 1)^{1/x}$$

Fazendo a mudança de variáveis $x\, ln\, \gamma = z$ (note que $\gamma > 1$, então $z > 0$)

$$\alpha = (e^z - 1)^{ln\, \gamma/z} \Leftrightarrow f(z) = \alpha^{1/ln\, \gamma}$$

Como $0 < \alpha < 1$ e $ln\, \gamma > 0$, temos $0 < \alpha^{1/ln\, \gamma} < 1$, ou seja, $\alpha^{1/ln\, \gamma}$ está no domínio de V. Assim, a única solução é:

$$z = V\left(\alpha^{1/ln\, \gamma}\right) \Leftrightarrow x\, ln\, \gamma = V\left(\alpha^{1/ln\, \gamma}\right) \Leftrightarrow x = \frac{V\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{1/(ln\, c - ln\, b)}\right)}{ln\, c - ln\, b}$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3

Escrevendo $n = qm + r$, com $0 \leq r < m$, e

$y^n - g(x) = y^r(y^{qm} - f(x)^q) + f(x)^q y^r - g(x)$,

usando o fato de que $y^{qm} - f(x)^q$ é divisível por $y^m - f(x)$, concluímos que, se $y^n - g(x)$ é divisível por $y^m - f(x), f(x)^q \cdot y^r - g(x)$ também é. Como o grau em y de $f(x)^q y^r - g(x)$, que é r, é menor que m, que é o grau em y de $y^m - f(x)$, devemos ter $f(x)^q y^r - g(x)$ identicamente nulo, ou seja, $r = 0$ e $g(x) = f(x)^q = f(x)^{n/m}$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4

Temos $x_2 = 2^2 = 4, x_3 = 2^4 = 16 < 2012$ (e logo segue facilmente por indução que $x_{n+2} < y_n$ para todo $n \geq 1$), $x_4 = 2^{16} = 65536 > 22 \cdot 2012$, donde $x_5 = 2^{65536} > ((2^{11})^{2012})^2 > (2012^{2012})^2 > (2012!)^2 = y_2^2$.

A partir daí vamos provar por indução que $x_{n+3} > y_n^2 > y_n$ para todo $n \geq 2$. De fato,

$$x_{n+4} = 2^{x_{n+3}} > 2^{y_2^2} = (2^{y_n})^{y_n} > (y_n^2)^{y_n} = \left(y_n^{y_n}\right)^2 > (y_n)!^{\,2} = y_{n+1}^2.$$

Assim, a resposta é 2015.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5

O enunciado não especifica se as matizes A_i são reais ou complexas; consideraremos os dois casos.

A matriz M_1 pode ser diagonalizada por

$$M_1 = X_1 D_1 X_1^{-1},\ \ D_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \ X_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim queremos encontramos B_1 com $B_1^5 = D_1$ para fazermos $A_1 = X_1 B_1 X_1^{-1}$ (note que A_1 é real se e somente se B_1 é real). Note que B_1 deve ser diagonal. Assim existe uma única B_1 real e existem 25 tais matrizes complexas:

$$\begin{pmatrix} \varsigma^{e_1}\sqrt[5]{3} & 0 \\ 0 & \varsigma^{e_2} \end{pmatrix}, \varsigma = exp\left(\frac{2\pi i}{5}\right), e_1, e_2 \in \{0,1,2,3,4\}.$$

A matriz

$$M_2 = 2\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tem um único autovalor ($\lambda = 2$) com multiplicidade geométrica um e multiplicidade algébrica dois. Assim A_2 também deve ter um único autovalor com multiplicidade algébrica dois.

No caso real temos uma única matriz A_2; no caso complexo temos cinco:

$$A_2 = \varsigma^{e}\sqrt[5]{2}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{10} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad e \in \{0,1,2,3,4\}.$$

Para a matriz $M_3 = 2I$ já no caso real existem infinitas matrizes A_3 (e portanto também infinitas no caso complexos). De fato, seja

$$R = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) & -\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \end{pmatrix}$$

Seja *Z* uma matriz inversível qualquer. Tome

$$A_3 = \sqrt[5]{2} Z R Z^{-1}$$

Uma conta verifica diretamente que $A_3^5 = M_3$. Para ver que temos infinitas matrizes distintas basta observar que se

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \qquad c > 0$$

Então valores diferentes de *c* obtêm valores diferentes de $A_3 e_1$ e portanto de A_3.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6

Para cada *n* natural encontraremos a área abaixo da parábola e acima das retas tangentes à parábola pelos pontos (x_n, x_n^2) e (x_{n+1}, x_{n+1}^2) para depois somá-las e concluir.

Passo 1. Equações das retas tangentes: A derivada de $f(x) = x^2$ é $f'(x) = 2x$, de modo que a equação da reta tangente à esta parábola pelo ponto (x_n, y_n) (aqui denotamos $y_n = x_n^2$) é

$$\frac{y - y_n}{x - x_n} = 2x_n.$$

Passo 2. Interseção das retas tangentes: Seja t_n a reta tangente à parábola pelo ponto (x_n, y_n). Suponha que t_n e t_{n+1} se encontram no ponto (a_n, b_n). Devemos ter portanto

$$\frac{b_n - y_n}{a_n - x_n} = 2x_n \quad e \quad \frac{b_n - y_{n+1}}{a_n - x_{n+1}} = 2x_{n+1},$$

e resolvendo este sistema encontramos (lembre-se que $y_n = x_n^2$)

$$a_n = \frac{x_n + x_{n+1}}{2} \quad e \quad b_n = x_n x_{n+1}.$$

Passo 3. Cálculo das parcelas da área: Agora calculamos a área abaixo da parábola e acima das retas tangentes à parábola pelos pontos (x_n, x_n^2) e (x_{n+1}, x_{n+1}^2).

I) a área abaixo da parábola de x_n a x_{n+1} é

$$\text{(I)} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} x^2 dx = \frac{1}{3}(x_{n+1}^3 - x_n^3).$$

II) A área abaixo da reta t_n de x_n a a_n é (observe por exemplo que este é um trapézio)

$$\text{(II)} = \frac{1}{2}(y_n + b_n)(a_n - x_n) = \frac{1}{4}(x_n^2 + x_n x_{n+1})(x_{n+1} - x_n).$$

III) A área abaixo da reta t_{n+1} de a_n a x_{n+1} é

$$\text{(III)} = \frac{1}{2}(b_n + y_{n+1})(x_{n+1} - a_n) = \frac{1}{4}(x_n x_{n+1} + x_{n+1}^2)(x_{n+1} - x_n).$$

Portanto, nossa área buscada é

$$\text{(I)} - \text{(II)} - \text{(III)} = \frac{(x_{n+1} - x_n)^3}{12}.$$

Passo 4. Conclusão: No caso $x_n = n^\alpha$ a área total buscada é portanto

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((n+1)^\alpha - n^\alpha)^3}{12}.$$

Pelo Teorema do Valor Médio sabemos que

$$(n+1)^\alpha - n^\alpha = \alpha(n^*)^{\alpha-1},$$

para algum $n^* \in [n, n+1]$, e temos portanto a soma

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha(n^*)^{\alpha-1})^3}{12} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^3}{12}(n^*)^{3(\alpha-1)}.$$

Como $n^* \in [n, n+1]$ está ultima soma diverge se e somente se $3(\alpha - 1) \geq -1$, ou seja, quando $\alpha \geq 2/3$.

34ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e soluções da Segunda Fase – Nível Universitário

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Seja $N = 2012.$ Determine todas as $(N^2)-$uplas de números reais $(a_{i,j}), 1 \leq i, j \leq N,$ que tornam o seguinte limite convergente

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{1\leq i,j\leq N} (a_{i,j}\sqrt[j]{x+i})$$

PROBLEMA 2

Considere todas as matrizes quadradas de ordem 4*n* que têm 4*n* entradas iguais a 1 e 4*n* entradas iguais a –1 e as demais entradas iguais a 0.
Qual é o maior valor possível de seu determinante (em função de *n*)?

PROBLEMA 3

Neste problema, uma *caixa* é um paralelepípedo retângulo $P \subset \mathbb{R}^3$.
Definimos o *tamanho* da caixa P como sendo $a^s + b^s + c^s$, onde a, b, c são os comprimentos das arestas de P nas três direções e s é um inteiro fixo.
Determine para quais valores de s vale a seguinte afirmação:
se uma caixa P_1 está contida em uma caixa P_0
então o tamanho de P_1 é menor ou igual ao tamanho de P_0.
Obs.: Os paralelepípedos em questão podem estar em qualquer posição
(em particular não precisam ter lados paralelos aos eixos coordenados).

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Cada indivíduo de uma população tem dois genes (possivelmente repetidos) dentre os genes $G_1, G_2, \ldots, G_n$. Suponha que, na geração 0 desta população, $p_{ij}(0)$ (onde $1 \leq i \leq j \leq n$) é a proporção de indivíduos que têm o genótipo G_iG_j (ou G_jG_i, que é biologicamente idêntico a G_iG_j).
Para gerar cada indivíduo da geração *k* + 1, escolhem-se dois indivíduos da geração *k* independentemente e ao acaso, e escolhe-se um gene de cada um independentemente e ao acaso: estes dois genes serão o genótipo do filho.

Seja $p_{ij}(k)$ a probabilidade de um indivíduo da geração k ter o genótipo G_iG_j (ou G_jG_i). Suponha que a população é grande de tal forma que a cada geração pelo menos dois indivíduos são gerados por este processo.
Mostre que $p_{ij}(2012) = p_{ij}(2013)$ para todo i, j ($1 \le i \le j \le n$).

PROBLEMA 5
Seja $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ uma função duas vezes derivável satisfazendo $f'(x) < 0$ para todo $x > 0$. Para cada $x > 0$ considere o triângulo cujos lados são a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$ e os dois eixos coordenados. Sabemos que a área deste triângulo é igual a C (constante e independente de x).
Determine os possíveis valores de $f(1)$ (em função de C).

PROBLEMA 6
Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa; justifique.
(a) Se $(a_n)_{n\ge 1}$ é uma sequência decrescente de termos positivos tal que $\sum a_n = +\infty$, então existe uma sequência decrescente de termos positivos $(b_n)_{n\ge 1}$ com $b_n \le a_n$ para todo n, $\sum b_n = +\infty$ e $\lim (n\, b_n) = 0$.
(b) Se $(a_n)_{n\ge 1}$ é uma sequência decrescente de termos positivos tal que $\sum a_n = +\infty$, então existe uma sequência decrescente de termos positivos $(b_n)_{n\ge 1}$ com $b_n \le a_n$ para todo n, $\sum b_n = +\infty$ e $n\, b_n$ decrescente.

SOLUÇÕES DA SEGUNDA FASE

PROBLEMA 1: SOLUÇÃO DA BANCA
Faremos algumas observações iniciais: para $j = 1$ e $1 \le i \le N$ temos $\sqrt[j]{x+i} - \sqrt[j]{x} = (x+i) - x = i$, constante, e, para $2 \le j \le N, 1 \le i \le N$, temos, da identidade

$$a^j - b^j = (a-b)\sum_{r=o}^{j-1} a^{j-1-r}\cdot b^r, i = \left(\sqrt[j]{x+i}\right)^j - \left(\sqrt[j]{x}\right)^j =$$

$$= \left(\sqrt[j]{x+i} - \sqrt[j]{x}\right)\cdot \sum_{r=0}^{j-1}\left(\sqrt[j]{x+i}\right)^{j-1-r}\left(\sqrt[j]{x}\right)^r, \text{ donde}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[j]{x+i} - \sqrt[j]{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{i}{\sum_{r=0}^{j-1}\left(\sqrt[j]{x+i}\right)^{j-1-r}\cdot\left(\sqrt[j]{x}\right)^r} = 0.$$

Em particular, para quaisquer $i,\ j$ com $l \le i, j \le N$, a função $\sqrt[j]{x+i} - \sqrt[j]{x}$ é limitada. Vamos mostrar que, se o limite do enunciado é convergente, então, para todo $j \le N$, devemos ter $\sum_{i=1}^{N} a_{ij} = 0$.

Suponhamos por contradição que não. Seja j_0 mínimo com $1 \le j_0 \le N$ tal que $\sum_{i=1}^{N} a_{ij_0} \ne 0$. Para todo $j < j_0$ temos $\sum_{i=1}^{N} a_{ij} = 0$ e logo
$\sum_{i=1}^{N} a_{ij} \sqrt[j]{x+i} = \left(\sum_{i=1}^{N} a_{ij} \sqrt[j]{x+i}\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} a_{ij}\right) \cdot \sqrt[j]{x} = \sum_{i=1}^{N} a_{ij} \left(\sqrt[j]{x+i} - \sqrt[j]{x}\right)$, e portanto é limitado, donde $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[j]{x}} \sum_{i=j}^{N} a_{ij} \sqrt[j]{x+i} = 0$. Por outro lado, para

$j > j_0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[j]{x+i}}{\sqrt[j_0]{x}} = 0,\ \forall i \le N$, donde $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[j_0]{x}} \sum_{i=1}^{N} a_{ij} \sqrt[j]{x+i} = 0$.
Portanto, como estamos supondo que o limite do enunciado converge, $0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[j_0]{x}} \sum_{1\le i,j\le N} a_{ij} \sqrt[j]{x+i} = \sum_{j=1}^{N} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[j_0]{x}} \sum_{i=1}^{N} a_{ij} \sqrt[j]{x+i} =$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[j_0]{x}} \sum_{i=1}^{N} a_{ij_0} \sqrt[j_0]{x+i} = \sum_{i=1}^{N} a_{ij_0} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[j_0]{x+i}}{\sqrt[j_0]{x}} = \sum_{i=1}^{N} a_{ij_0}$, pois $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[j_0]{x+i} / \sqrt[j_0]{x} = 1,\ \forall i \le N$. Contradição.
Vamos agora mostrar que se $\sum_{i=1}^{N} a_{ij} = 0,\ \forall j \le N$ então o limite do enunciando existe.
Se $j > 1$, como $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt[j]{x+i} - \sqrt[j]{x}\right) = 0, \forall i \le N$, temos $\lim\limits_{x\to+\infty} \sum_{i=1}^{N} a_{ij} \sqrt[j]{x+i} =$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \sum_{i=1}^{N} a_{ij} \left(\sqrt[j]{x+i} - \sqrt[j]{x}\right) = 0$. Assim, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sum_{1\le i,j\le N} a_{ij} \sqrt[j]{x+i} =$
$\sum_{j=1}^{N} \lim\limits_{x\to+\infty} \sum_{i=1}^{N} a_{ij} \sqrt[j]{x+i} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sum_{i=1}^{N} a_{i1}(x+i) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x \sum_{i=1}^{N} a_{i1} + \right.$
$\left.\sum_{i=1}^{N} i \cdot a_{i1}\right) =$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \sum_{i=1}^{N} i \cdot a_{i1} = \sum_{i=1}^{N} i \cdot a_{i1}$.
Assim, o limite do enunciado converge se, e somente se, $\sum_{i=1}^{N} a_{ij} = 0$ para $1 \le j \le N$.

PROBLEMA 2: SOLUÇÃO DE LUCAS DE FREITAS SMAIRA (GUAXUPÉ – MG)

Mostraremos que o maior valor possível do determinante é 4^n.
Utilizando a teoria de matriz em blocos, sabemos que, seja w uma matriz de ordem $2m$ da forma:

$w = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}$ em que x, y, z são matrizes de ordem m, então $\det w = \det x \cdot \det y$.
Vamos, então construir uma matriz A de dimensão $4n$ com $4n$ entradas iguais a 1, $4n$ entradas iguais a -1 e as demais iguais a 0, tal que $\det A = 4^n$.

Para tal, seja a matriz B de ordem $2n$:

$B = \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ -I_n & I_n \end{bmatrix}$ onde I_n é a matriz identidade de ordem n.

$\det B = \begin{vmatrix} I_n & I_n \\ -I_n & I_n \end{vmatrix} + \; = \begin{vmatrix} I_n & I_n \\ 0 & 2I_n \end{vmatrix} = \det I_n \cdot (2^n) \det I_n = 2^n.$

$\det(-B) = (-1)^{2n} \det B = 2^n.$

Seja então a matriz A de ordem $4n$:

$A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & -B \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \det B . \det(-B) = 2^n . 2^n = 4^n.$

Note que B tem $3n$ entradas iguais a 1 e n entradas iguais a -1 e $-B$ tem n entradas iguais a 1 e $3n$ entradas iguais a -1, assim A satisfaz as condições.

Dado que mostramos uma matriz A que satisfaz as condições, e $\det A = 4^n$, basta mostrarmos que para toda matriz C de ordem $4n$ com $4n$ entradas iguais a 1, $4n$ entradas iguais a -1 e as demais iguais a 0, temos $\det C \leq 4^n$.

Para isso, seja D a matriz de ordem $4n$ dada por $D = CC^T$. Sabemos que D é positiva definida e que $Tr(D) = \sum_{1 \leq i, j \leq 4n} C_{ij}^2 = 4n \cdot 1^2 + 4n(-1)^2 = 8n.$

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{4n} > 0$ os autovalores de D.

Sabemos que $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{4n} = Tr(D) = 8n$ e $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_{4n} = \det(CC^T) = \det C \det(C^t) = \det^2 C$.

Sendo assim, pela desigualdade das médias:

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{4n}}{4n} \geq \sqrt[4n]{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{4n}}$$

$$\frac{8n}{4n} \geq \sqrt[4n]{\det^2 C} \Rightarrow \sqrt[4n]{\det^2 C} \leq 2 \Rightarrow \det^2 C \leq 2^{4n} \Rightarrow \det C \leq 2^{2n} = 4^n.$$

Com isso concluímos que o valor máximo do determinante é 4^n.

PROBLEMA 3: SOLUÇÃO DE IURI REZENDE SOUZA (UBERLÂNDIA – MG) (ADAPTADA)

Considere um cubo de lado 1. Assim, qualquer que seja s, ele vai ter tamanho $1^s + 1^s + 1^s = 3$. Tomemos dois vértices opostos desse cubo e escolhemos dois planos que passam dentro do cubo e que são perpendiculares à reta que passa pelos vértices escolhidos, de modo que a distância dos planos ao vértice mais próximo seja *x* (figura 1).

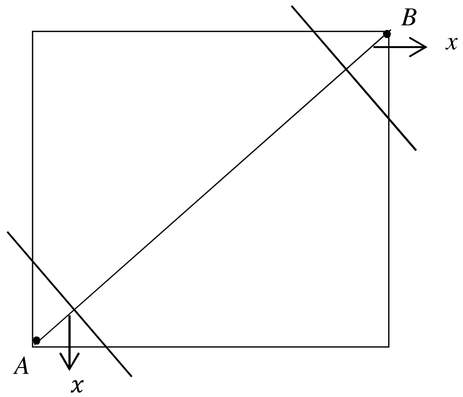


Figura 1

As intersecções desses planos com o cubo formam um triângulo equilátero de lado $x\sqrt{6}$, no qual podemos colocar um quadrado de lado kx, onde $k = \frac{3x\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}}$. Considerando o tetraedro com vértice no vértice A do cubo (figura 1) e base igual ao triângulo equilátero visto, vemos que sua altura $\frac{x}{2}$ é linear a l, então vamos escrever $x = k \cdot l$. O tamanho de um paralelepípedo com faces em dois tais quadrados nos planos que cortam o cubo é $(\sqrt{3} - 2x)^s + 2(k \cdot x)^s$. Sabemos que $\lim_{x\to 0}\left[(\sqrt{3} - 2x)^s + 2(k \cdot x)^s\right] = \sqrt{3^s}$. Em outras palavras, dado $\varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ tal que $0 < x < \delta \Rightarrow \sqrt{3^s} - \varepsilon <$ Tamanho do paralelepípedo $< \sqrt{3^s} + \varepsilon$.
Em particular, para $s \geq 3$, podemos escolher $\varepsilon < 3\sqrt{3} - 3$ e verificar que existe um paralelepípedo com tamanho maior que o do cubo que está contido no cubo.
Então para que a afirmação seja válida, s não pode ser maior ou igual a 3.
Também podemos verificar que s não pode ser negativo, pois podemos escolher um paralelepípedo de dimensões reduzidas, por exemplo, $\frac{1}{10}$ que cabe no cubo unitário e tem tamanho maior que 3.
Assim os possíveis valores de s para que a afirmação seja válida estão no conjunto $\{0,1,2\}$. Temos, agora, que procurar tais valores nesse conjunto.
Para $s = 0$, a afirmação vale, pois o tamanho será sempre 3 (e $3 \leq 3$).
Sabemos que se P_1 está contida em P_0 os vértices opostos de P_1 estão dentro da esfera circunscrita a P_0, que tem diâmetro igual à diagonal de P_0.
Assim, se $a_0\, b_0\, c_0$ são os comprimentos das arestas de P_0 e a_1, b_1 e c_1 são as arestas de P_1,

$$\sqrt{a_0^2 + b_0^2 + c_0^2} > \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \Rightarrow a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 > a_1^2 + b_1^2 + c_1^2.$$

Assim, a afirmação vale também para $s = 2$.

Observe que se a área do paralelepípedo P_0 for maior ou igual que a área de P_1 e P_1 está contido em P_0, temos $2 \cdot (a_0b_0 + a_0c_0 + b_0c_0) \geq 2 \cdot (a_1b_1 + a_1c_1 + b_1c_1) \Rightarrow a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 + 2 \cdot (a_0b_0 + a_0c_0 + b_0c_0) \geq a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + 2 \cdot (a_1b_1 + a_1c_1 + b_1c_1) \Rightarrow (a_0 + b_0 + c_0)^2 \geq (a_1 + b_1 + c_1)^2 \Rightarrow a_0 + b_0 + c_0 \geq a_1 + b_1 + c_1$.

Então caso a afirmação P_1está contido em $P_0 \Rightarrow$ área de P_1 é menor ou igual que a área de P_0 seja verdadeira, a afirmação do problema vale para $s = 1$.

Seja R um retângulo que é face de P_1, contido em um plano α. Os lados de R são as interseções de α com planos $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ e β_4, suportes de outras faces de P_1. A região do lado de fora de P_1 delimitada pelos planos $\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ e β_4 intersecta as faces de P_0 numa região (que é a "projeção" de R nas faces de P_0) cuja área é maior ou igual à área de R. Como essas projeções das faces de P_1 são disjuntas, a área de P_0 é maior ou igual que a área de P_1.

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DE FERNANDO FONSECA A. OLIVEIRA (BELO HORIZONTE – MG)

Definimos $p_{ij} = p_{ji}$, quando $i > j$.

Seja $p_i(k) = \frac{(\sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} p_{ij}(k)) + 2p_{ii}(k)}{2}$ a proporção de genes do tipo G_i na população na geração k. Como todos os genes são escolhidos com a mesma probabilidade, pode-se escrever $p_{ij}(k+1)$ exclusivamente em termos dos $p_i(k)$, na forma $p_{ii}(k+1) = p_i(k).p_i(k)$ e $p_{ij}(k+1) = p_i(k).p_j(k) + p_j(k).p_i(k)\ 2p_i(k)p_j(k), i \neq j$.

Portanto, podemos escrever com isso $p_i(k+1)$ em função dos valores na geração k.

$$p_i(k+1) = \frac{\left(\sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} 2p_i(k)p_j(k)\right) + 2p_i(k)p_i(k)}{2}$$
$$= p_i(k)(\sum_{1 \leq j \leq n} p_j(k)) = p_i(k).$$

Dessa forma, como $p_{ij}(k+1)$ depende apenas dos valores de $p_i(k)$ e $p_j(k)$, que são constantes, podemos afirmar que $p_{ij}(k+1) = p_{ij}(k), \forall\ k \geq 2$.

Tomando $k = 2012$, temos a igualdade pedida.

PROBLEMA 5: SOLUÇÃO DA BANCA

Para cada $x \in (0, +\infty)$, a equação da reta tangente ao gráfico de $Y = f(X)$ em $(x, f(x))$ é $Y = f(x) + f'(x)(X - x)$, e logo essa reta intersecta os eixos coordenados em $(0, f(x) - x\, f'(x))$ e $\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}, 0\right)$.

Devemos ter então $\frac{1}{2}\left(f(x) - x\,f'(x)\right)\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right) = C,\ \forall x \in (0,+\infty)$, ou seja, $\left(x\,f'(x) - f(x)\right)^2 + 2C\,f'(x) = 0, \forall x \in (0,+\infty)$.

Utilizando as notações $y = f(x), y' = f'(x)$, e definindo $w = y/x$ temos $w' = \frac{xy'-y}{x^2}$, $y' = (xw)' = w + xw'$, e logo a equação se escreve como $(x^2w')^2 + 2C(w + xw') = 0$, o que (dividindo por x^4) equivale a $w'^2 + \frac{2Cw'}{x^3} + \frac{2Cw}{x^4} = 0$, ou a $\left(w' + \frac{C}{x^3}\right)^2 = \frac{C^2}{x^6} - \frac{2Cw}{x^4}$.

Fazendo $t = w - \frac{C}{2x^2}$, temos $t' = w' + \frac{C}{x^3}$, e a equação se escreve como $t'^2 = \frac{C^2}{x^6} - \frac{2Cw}{x^4} = \frac{C^2}{x^6} - \frac{2C}{x^4}\cdot\left(t + \frac{C}{2x^2}\right) = -\frac{2Ct}{x^4}$. Daí segue que devemos ter sempre $t \le 0$. Fazendo $s = -t$, temos $s \ge 0$ e $s'^2 = t'^2 = -\frac{2Ct}{x^4} = \frac{2Cs}{x^4}$, donde $s' = \pm\frac{\sqrt{2Cs}}{x^2}$.

Se, para algum $x_0 \in (0,+\infty)$ temos $s \ne 0$, devemos ter $s > 0$ e $\frac{s'}{2\sqrt{s}} = \pm\frac{\sqrt{C/2}}{x^2}$ numa vizinhança de x_0 (digamos para $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$), donde $\sqrt{s} = k \mp \frac{\sqrt{C/2}}{x}$, nessa vizinhança de x_0 para alguma constante *k*, ou seja, nessa vizinhança de x_0 temos

$$\frac{C}{2x^2} - w = -t = s = \left(k \mp \frac{\sqrt{C/2}}{x}\right)^2.$$ Assim, $-w = k^2 \mp \frac{k\sqrt{2C}}{x}$, ou seja,

$\frac{y}{x} = w = -k^2 \pm \frac{k\sqrt{2C}}{x}$, ou ainda $y = \pm k\sqrt{2C} - k^2x$ nessa vizinhança de x_0. Como $y = f(x) > 0$, podemos supor que $k > 0$ e $y = k\sqrt{2C} - k^2x$ nessa vizinhança de x_0.

Se, por outro lado, para algum $x \in (0,+\infty)$, $s = 0$, devemos ter $\frac{C}{2x^2} - w = -t = s = 0$, donde $\frac{y}{x} = w = \frac{C}{2x^2}$, e logo $y = \frac{C}{2x}$.

Note que se $s \ne 0$ para todo $x \ge x_0$, devemos ter $y = k\sqrt{2C} - k^2x$ para todo $x \ge x_0$, o que é absurdo, pois, para $x > max\left\{x_0, \sqrt{2c}/k\right\}$ teríamos $y < 0$, mas $y = f(x) > 0,\ \forall x \in (0,+\infty)$. Assim, para todo $x_0 \in (0,+\infty)$ existe $x > x_0$ com $s = 0$, e logo com $y = C/2x$.

Vamos mostrar que necessariamente $f(x) = y = C/2x, \forall x \in (0,+\infty)$. Suponha inicialmente que existam $0 < x_1 < x_2$ tais que $s = 0$ em x_1 e $s \ne 0$ em x_2.

Seja (a, b) o intervalo aberto maximal contendo x_2 tal que, para todo $x \in (a,b), s \neq 0$. Então $x_1 \leq a < x_2 < b < +\infty$ e $s = 0$ para $x \in \{a,b\}$, donde $f(a) = C/2a$ e $f(b) = C/2b$. Por outro lado, devemos ter $f(x) = k\sqrt{2C} - k^2x$ para todo $x \in (a,b)$ (e para um certo $k > 0$) donde $k\sqrt{2C} - k^2a = {C}/{2a}$, e logo $\left(ak - \sqrt{{C}/{2}}\right)^2 = k^2a^2 - ak\sqrt{2C} + {C}/{2} = 0$, o que implica $k = \frac{1}{a}\sqrt{{C}/{2}}$, mas também devemos ter $k\sqrt{2C} - k^2b = {C}/{2b}$ donde, analogamente, obtemos $k = \frac{1}{b}\sqrt{{C}/{2}}$, absurdo, pois $a \neq b$.

Assim, se existe $x \in (0,+\infty)$ com $s \neq 0$, deve existir necessariamente $b \in (0,+\infty)$ tal que $s \neq 0$ para $x \in (0,b)$ e $s = 0$ para $x \in (b,+\infty)$,mas então $f(x) = k\sqrt{2C} - k^2x$ (para algum $k > 0$) para $x \in (0,b)$ e $f(x) = {C}/{2x}$ para $x \in (b,+\infty)$.

Mas então a segunda derivada à esquerda de $f(x)$ em $x = b$ é 0 mas a segunda derivada à direita de $f(x)$ em $x = b$ é ${C}/{b^3} \neq 0$, absurdo. Portanto

$f(x) = {C}/{2x}, \forall x \in (0,+\infty)$.

Em particular $f(1) = {C}/{2}$.

PROBLEMA 6: SOLUÇÃO DA BANCA

a) Verdadeira. Considere as sequências $s = \sum_{k=1}^{n} a_k$ e $c_n = a_1 \cdot \frac{a_n}{s_n}$. Temos que $(s_n)_{n\geq 1}$ é crescente e $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$; em particular, c_n é decrescente e $s_n \geq a_1, \forall n \geq 1$, e logo $c_n \leq a_n, \forall n \geq 1$. Vamos mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = +\infty$. De fato, dado $n > 1$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $s_{n+k} \geq 2s_{n-1}$, pois $\lim\limits_{m\to+\infty} s_m = +\infty$. Temos então $\sum_{m=n}^{n+k} c_n = a_1 \sum_{m=n}^{n+k} \frac{a_n}{s_n} \geq \frac{a_1}{s_{n+k}} \sum_{m=n}^{n+k} a_n = \frac{a_1 \cdot (s_{n+k} - s_{n-1})}{s_{n+k}} = a_1\left(1 - \frac{s_{n-1}}{s_{n+k}}\right) \geq \frac{a_1}{2} > 0$. Se $\sum_{m=1}^{\infty} c_m < +\infty$ existiria $n \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{m=1}^{\infty} c_m < \frac{a_1}{2}$, donde $\sum_{m=n}^{n+k} c_n < \sum_{m=n}^{\infty} c_n < \frac{a_1}{2}, \forall k \in \mathbb{N}$, contradição. Além disso, como (a_n) é decrescente, $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \geq n \cdot a_n$, donde $c_n = a_1 \cdot \frac{a_n}{s_n} \leq \frac{a_1}{n}$.

Seja agora $\tilde{s}_n = \sum_{k=1}^{n} c_n$ e $b_n = c_1 \cdot \frac{c_n}{\tilde{s}_n}$, para $n \geq 1$. Como antes, $b_n \leq c_n \leq a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{s}_n = +\infty$, donde $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b_n}{c_n} = 0$, e, como $c_n \leq \frac{a_1}{n}, \forall n \geq 1$, segue que $\lim\limits_{n\to+\infty} n \cdot b_n = 0$. Além disso, (b_n), assim como (c_n), é decrescente, e logo (b_n) satisfaz as condições do enunciado.

b) Falsa. Considere a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ definida da seguinte forma: para cada natural $k \geq 0$, se $2^{k^2} \leq n < 2^{(k+1)^2}$, definimos $a_n = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2^{(k+1)^2}}$. Claramente (a_n) é decrescente, e, para todo $k \geq 0$, $\sum_{2^{k^2} \leq n < 2^{(k+1)^2}} a_n > \frac{\left(2^{(k+1)^2} - 2^{k^2}\right)}{2^{(k+1)^2}} > \frac{1}{2}$, donde $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{2^{k^2} \leq n < 2^{(k+1)^2}} a_n = +\infty$. Suponha agora que (b_n) é uma sequência de termos positivos com $b_n \leq a_n, \forall n \geq 1$ tal que $(n \cdot b_n)_{n\geq 1}$ é decrescente. Temos, em particular, $b_{2^{k^2}} \leq a_{2^{k^2}} = \frac{2^{k^2}+1}{2^{k^2}} \cdot \frac{1}{2^{(k+1)^2}} < \frac{2}{2^{(k+1)^2}} = \frac{1}{2^{k^2+2k}}$, donde $n \cdot b_n \leq 2^{k^2} \cdot b_{k^2} < \frac{1}{2^{2k}}, \forall n \geq 2^{k^2}$. Em particular, $\sum_{2^{k^2} \leq n < 2^{(k+1)^2}} b_n \leq \sum_{2^{k^2} \leq n < 2^{(k+1)^2}} \frac{1}{2^{2k} \cdot n}, \forall k \geq 0$.
Como $\sum_{2^r \leq n < 2^{r+1}} \frac{1}{n} \leq \frac{(2^{r+1} - 2^r)}{2^r} = 1, \forall r \in \mathbb{N}$, temos

$\sum_{2^{k^2} \leq n < 2^{(k+1)^2}} \frac{1}{n} = \sum_{r=k^2}^{k^2+2k} \sum_{2^r \leq n < 2^{r+1}} \frac{1}{n} \leq 2k+1, \forall k \in \mathbb{N}$, donde

$\sum_{2^{k^2} \leq n < 2^{(k+1)^2}} b_n \leq \sum_{2^{k^2} \leq n < 2^{(k+1)^2}} \frac{1}{2^{2k} \cdot n} \leq \frac{2k+1}{2^{2k}}$, e logo

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{2^{k^2} \leq n < 2^{(k+1)^2}} b_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{2^{2k}} < +\infty$.

34ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Premiados

NÍVEL 1 (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

Nome	Cidade – Estado	Total	Prêmio
André Yuji Hisatsuga	São Paulo – SP	314	Ouro
Lucas dos Anjos Dantas Teixeira	São Paulo – SP	273	Ouro
Júlia Perdigão Saltiel	Rio de Janeiro – RJ	268	Ouro
Bruno Brasil Meinhart	Fortaleza – CE	250	Ouro
João Guilherme Madeira Araújo	Sobral – CE	227	Ouro
Brendon Diniz Borck	Porto Alegre – RS	225	Ouro
Emmanuel da Silva Dias	Porto Alegre – RS	220	Prata
Gabriel Tabbal Mallet	Porto Alegre – RS	219	Prata
João Alberto Moreira Seródio	Brasília – DF	219	Prata
Haotian Xing	Rio de Janeiro – RJ	217	Prata
Bruno Vinícius da Silva Alves	Curitiba – PR	211	Prata
Arthur Henrique Craveiro Costa	Natal – RN	207	Prata
Nícolas Meira Sinott Lopes	Salvador – BA	202	Prata
Miriam Harumi Koga	Guarulhos – SP	199	Prata
Diene Xie	Curitiba – PR	196	Prata
Fernando Ribeiro de Senna	Jundiaí – SP	196	Prata
Janderson Casado Vasconcelos Santos Jr.	Brasília – DF	195	Bronze
Pietro Motta Geronimi	Rio de Janeiro – RJ	194	Bronze
David Felipe Brochero Giraldo	Belo Horizonte – MG	193	Bronze
Artur Assis Amorim	Juiz de Fora – MG	192	Bronze
Ryan Nobrega da Costa Silveira	Rio de Janeiro – RJ	192	Bronze
Rafael Della Giustina Basilone Leite	Florianópolis – SC	190	Bronze
Raphael André Leal	Rio de Janeiro – RJ	190	Bronze
Alexandre Takahiro Oshima	São Paulo – SP	187	Bronze
Guilherme Nascimento de Oliveira	Vila Velha – ES	186	Bronze
Mark Helman	Rio de Janeiro – RJ	186	Bronze
Henrique Silva Barbeta	São Paulo – SP	185	Bronze
Hugo Farah Affonso Alves	Rio de Janeiro – RJ	183	Bronze
Riedel Linhares Lima	Teresina – PI	182	Bronze
Rafael Modesto de Sousa Moura	Teresina – PI	181	Bronze
Lucas Siqueira Aragão	Vitória – ES	179	Bronze
Rafael Vidigal de Paula Santos	Rio de Janeiro – RJ	179	Bronze

Diogo Correia Netto	Sorocaba – SP	178	Menção Honrosa
Gustavo Gullit Leal Rodrigues Magalhães	Rio de Janeiro – RJ	177	Menção Honrosa
Bruno Kenji Hashimoto Miura	São Paulo – SP	174	Menção Honrosa
Eric Arcanjo Bringel	Fortaleza – CE	173	Menção Honrosa
Guilherme José da Silva	Avaré – SP	173	Menção Honrosa
Ulisses Ferreira de Sousa	Recife – PE	171	Menção Honrosa
Luísa Macambira Noronha	Fortaleza – CE	170	Menção Honrosa
Matheus Colsato Bevilacqua	Campinas – SP	170	Menção Honrosa
Júlia Bueno Nascimento Jannotti	Belo Horizonte – MG	169	Menção Honrosa
Gabriel de Souza Ovalle	São Paulo – SP	168	Menção Honrosa
Renan Francisco Costa Brito	Teresina – PI	168	Menção Honrosa
Gabriela Martins Costa	São Paulo – SP	167	Menção Honrosa
Matheus Neves de Jesus Oliveira Santos	Santos – SP	167	Menção Honrosa
Carlos Eduardo Sousa de Magalhães B. Gomes	Rio de Janeiro – RJ	165	Menção Honrosa
Frederico Messa Schwartzhaupt	Porto Alegre – RS	165	Menção Honrosa
Luísa de Andrade Lima Marinho	Recife – PE	165	Menção Honrosa
Danielle de Oliveira Pinto Alves	Salvador – BA	164	Menção Honrosa
Davi Cavalcanti Sena	Caruaru – PE	164	Menção Honrosa
Lucas Vianna Lopes Ferreira	Rio de Janeiro – RJ	164	Menção Honrosa
Nathalia Oliveira Pereira	Brasília – DF	164	Menção Honrosa
Gabriela Gomes Valejo Sanches	São Paulo – SP	163	Menção Honrosa
Matheus Ramos de Araújo	Brasília – DF	163	Menção Honrosa
Eduardo Ventilari Sodré	Brasília – DF	162	Menção Honrosa
Alessandro Sobral Ferrari	Rio de Janeiro – RJ	161	Menção Honrosa
Filipe Macedo Cordeiro	Salvador – BA	161	Menção Honrosa
Francisco Bruno Dias Ribeiro da Silva	Teresina – PI	161	Menção Honrosa
Leonardo Faria de Oliveira	Três Lagoas – MS	161	Menção Honrosa
Eduardo Moreira Marques	Belo Horizonte – MG	160	Menção Honrosa
Beatriz Martins Costa	São Paulo – SP	159	Menção Honrosa
Hélcio Prado Lima	S.B. do Campo – SP	159	Menção Honrosa
Lucas Barroso Rocha	Belo Horizonte – MG	159	Menção Honrosa
Matheus Rodrigues Varela	Rio de Janeiro – RJ	158	Menção Honrosa
Paula Passos Campos	Belo Horizonte – MG	158	Menção Honrosa
Bruno de Melo Costa	Cabo de Sto Agostinho – PE	157	Menção Honrosa
Erik Bardini da Rosa	Porto Alegre – RS	157	Menção Honrosa
Pietro de Camargo Palma	São Paulo – SP	157	Menção Honrosa
Viviane M. C. Oliveira	São Paulo – SP	157	Menção Honrosa
Wesley Watanabe Bellé	Curitiba – PR	157	Menção Honrosa

Daniel Yan	São Paulo – SP	156	Menção Honrosa
Matheus Rocha do Nascimento	Fortaleza – CE	156	Menção Honrosa
Michelly Rodrigues Loewenberg	São Paulo – SP	156	Menção Honrosa
Caio Augusto de Carvalho Costa	Belém – PA	155	Menção Honrosa
Davi Braga Tolentino Veloso	Belo Horizonte – MG	155	Menção Honrosa
Luca Silveira Escopel	Porto Alegre – RS	155	Menção Honrosa
Crystian Souza Firmino	Rio de Janeiro – RJ	154	Menção Honrosa
Heitor Ferrari Tessarolli	Bariri – SP	154	Menção Honrosa
Isabela de Oliveira Araújo	Juiz de Fora – MG	153	Menção Honrosa
Tiago Firmeza Farias	Fortaleza – CE	153	Menção Honrosa

Nível 2 (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

Nome	Cidade - Estado	Total	Prêmio
Pedro Henrique Alencar Costa	Fortaleza – CE	359	Ouro
Pedro Henrique Sacramento de Oliveira	Vinhedo – SP	351	Ouro
Daniel Lima Braga	Eusébio – CE	315	Ouro
João Baptista de Paula e Silva	Belo Horizonte – MG	315	Ouro
Andrey Jhen Shan Chen	Campinas – SP	275	Ouro
Lucas Pereira Galvão de Barros	São Paulo – SP	245	Prata
Rafael Filipe dos Santos	Rio de Janeiro – RJ	245	Prata
José Márcio Machado de Brito	Cocal dos Alves – PI	241	Prata
João César Campos	Passa Tempo – MG	233	Prata
Lucca Morais de Arruda Siaudizionis	Fortaleza – CE	231	Prata
Rogerio Aristida Guimarães Júnior	Teresina – PI	229	Prata
João Martins Cortez Filho	Teresina – PI	227	Prata
Ana Emília Hernandes Dib	S.J. Rio Preto – SP	226	Prata
Ana Paula Lopes Schuch	Porto Alegre – RS	225	Prata
Gabriel Ribeiro Barbosa	Fortaleza – CE	220	Prata
Gabriel Toneatti Vercelli	Osasco – SP	219	Prata
Felipe Reyel Feitosa de Sousa	Teresina – PI	216	Bronze
Luiz Henrique Aguiar de Lima Alves	Rio de Janeiro – RJ	213	Bronze
Daniel de Almeida Souza	Brasília – DF	212	Bronze
Jiang Zhi	São Paulo – SP	210	Bronze
Marina Maciel Ansanelli	São Paulo – SP	206	Bronze
José Wanderclesson Nobre Damasceno Filho	Fortaleza – CE	205	Bronze
André Akinaga Benites	São Paulo – SP	199	Bronze
Douglas de Araújo Smigly	S. Caetano do Sul – SP	199	Bronze

Elcio Koodiro Yoshida	São Paulo – SP	199	Bronze
Hermes Lins e Nascimento	Fortaleza – CE	192	Bronze
Marlon Carvalho Benjamin	Rio de Janeiro – RJ	188	Bronze
Helena Veronique Rios	São Carlos – SP	187	Bronze
Leonardo Silva Nóbrega	Parnamirim – RN	186	Bronze
Aline Cristina Mafra	Coimbra – MG	184	Bronze
Marley Silva de Jesus	Amélia Rodrigues – BA	182	Menção Honrosa
Gabriel Diniz Vieira	Fortaleza – CE	182	Menção Honrosa
Eduardo Reis Cavalcante de Farias	Teresina – PI	181	Menção Honrosa
Gustavo Guedes Faria	S.J. dos Campos – SP	180	Menção Honrosa
Leonardo Alves da Silva	Adamantina – SP	179	Menção Honrosa
Amanda Vidotto Cerqueira	São Paulo – SP	176	Menção Honrosa
Alícia Fortes Machado	Teresina – PI	176	Menção Honrosa
Pedro Henrique da Silva Dias	Porto Alegre – RS	174	Menção Honrosa
Rafael Seiji Uezu Higa	São Paulo – SP	174	Menção Honrosa
Daniel Quintão de Moraes	Rio de Janeiro – RJ	174	Menção Honrosa
Gustavo Figueiredo Serra	São Paulo – SP	174	Menção Honrosa
Italo Lesione de Paiva Rocha	Fortaleza – CE	173	Menção Honrosa
Wanderson Hugues de Vasconcelos	Fortaleza – CE	172	Menção Honrosa
Gustavo Dehaini	Belo Horizonte – MG	171	Menção Honrosa
Lucas Souza Mota de Aragão	Aracaju – SE	170	Menção Honrosa
Ítalo Rennan Lima Silva	Fortaleza – CE	170	Menção Honrosa
Iuri Grandeiro Carvalho	Fortaleza – CE	169	Menção Honrosa
Luiz Felipe Reis Couto	Rio de Janeiro – RJ	169	Menção Honrosa
Leandro Alves Cordeiro	Ribeirão Pires – SP	169	Menção Honrosa
Henrique Gontijo Chiari	Belo Horizonte – MG	168	Menção Honrosa
Rodrigo Silva Ferreira	Salvador – BA	168	Menção Honrosa
Júlia Wotzasek Pereira	São Paulo – SP	167	Menção Honrosa
Pedro Henrique Rocha de freitas	Brasília – DF	167	Menção Honrosa
Henrique Martinez Rocamora	S.B. do Campo – SP	166	Menção Honrosa
Marco Antonio de Borba Gilson	Rio de Janeiro – RJ	166	Menção Honrosa
Rafael Linhares de Albuquerque	Fortaleza – CE	166	Menção Honrosa
Ebenezer Pinto Bandeira Neto	Fortaleza – CE	165	Menção Honrosa
Ricardo Ken Wang Tsuzuki	São Paulo – SP	165	Menção Honrosa
Douglas Matos Gomes	São Paulo – SP	165	Menção Honrosa
Ryunosuke Watanabe	Rio Claro – SP	164	Menção Honrosa
João Luis Reis Freitas	Goiânia – GO	163	Menção Honrosa
Lucas Bastos Germano	Fortaleza – CE	163	Menção Honrosa

Alexandre Saraiva Bezerra	Fortaleza – CE	162	Menção Honrosa
Sandra Ayumi Nihama	São Paulo – SP	162	Menção Honrosa
Loic Dominguez	Fortaleza – CE	159	Menção Honrosa
Marcus Vinícius Faustino	Belo Horizonte – MG	159	Menção Honrosa
Vilma Pires Bernardo	Sousa – PB	158	Menção Honrosa
Henrique Medici Pontieri	Campo Grande – MS	158	Menção Honrosa
Mateus Arraes Feitosa Borges	Fortaleza – CE	157	Menção Honrosa
Mariana Moura Diniz Araújo	Teresina – PI	156	Menção Honrosa
Ocimar Mota dos Santos Filho	Teresina – PI	156	Menção Honrosa

Nível 3 (Ensino Médio)

Nome	**Cidade – Estado**	**Total**	**Prêmio**
Rodrigo Sanches Angelo	São Paulo – SP	372	Ouro
Henrique Gasparini Fiuza do Nascimento	Brasília – DF	367	Ouro
Franco Matheus de Alencar Severo	Rio de Janeiro – RJ	363	Ouro
Victor de Oliveira Bitarães	Betim – MG	345	Ouro
Rafael Kazuhiro Miyazaki	São Paulo – SP	320	Ouro
Rafael Rodrigues Rocha de Melo	Fortaleza – CE	313	Prata
Victor Oliveira Reis	Recife – PE	308	Prata
André Macieira Braga Costa	Belo Horizonte – MG	295	Prata
Murilo Corato Zanarella	Amparo – SP	295	Prata
Daniel Eiti Nishida Kawai	Atibaia – SP	273	Prata
Mateus Henrique Ramos de Souza	Pirapora – MG	272	Prata
Alessandro de Oliveira Pacanowski	Rio de Janeiro – RJ	271	Prata
Henrique Vieira G. Vaz	São Paulo – SP	258	Prata
Raphael Mendes de Oliveira	Rio de Janeiro – RJ	257	Prata
Vinícius Canto Costa	Rio de Janeiro – RJ	255	Prata
Bruno Ferri de Moraes	São Paulo – SP	251	Bronze
Alexandre Perozim de Faveri	Neves Paulista – SP	246	Bronze
Pedro Victor Falci de Rezende	Juiz de Fora – MG	246	Bronze
Igor Albuquerque Araújo	Rio de Janeiro – RJ	246	Bronze
Tadeu Pires de Matos Belfort Neto	Fortaleza – CE	239	Bronze
Thiago Poeiras Silva	Belo Horizonte – MG	226	Bronze
Gabriel Ilharco Magalhães	Juiz de Fora – MG	226	Bronze
Jair Gomes Soares Junior	Montes Claros – MG	222	Bronze
Thomas Rincon Reis	Belo Horizonte – MG	220	Bronze
Daniel Santana Rocha	Rio de Janeiro – RJ	220	Bronze

Victor Venturi	Campinas – SP	209	Bronze
Ana Karoline Borges Carneiro	Fortaleza – CE	208	Bronze
Lucas Garcia Gomes	Vitória – ES	208	Bronze
Samuel Brasil de Albuquerque	Fortaleza – CE	207	Bronze
Gabriel Fazoli Domingos	Urupês – SP	207	Bronze
Marina Pessoa Mota	Fortaleza – CE	207	Bronze
Daniel Ramos Bezerra de Alencar	Fortaleza – CE	207	Bronze
Victor Hugo Corrêa Rodrigues	Rio de Janeiro – RJ	205	Menção Honrosa
João Pedro Gonçalves Ramos	Rio de Janeiro – RJ	204	Menção Honrosa
Lincoln de Queiroz Vieira	Fortaleza – CE	202	Menção Honrosa
Guilherme Anitele Silva	Pres. Prudente – SP	201	Menção Honrosa
Nicolas Seoane Miquelin	Santo André – SP	201	Menção Honrosa
Davi Coelho Amorim	Fortaleza – CE	201	Menção Honrosa
Liara Guinsberg	São Paulo – SP	201	Menção Honrosa
Ivan Tadeu Ferreira Antunes Filho	Lins – SP	198	Menção Honrosa
Fernando Lima Saraiva Filho	Eusébio – CE	197	Menção Honrosa
Marcos Massayuki Kawakami	São Paulo – SP	196	Menção Honrosa
Francisco Markan Nobre de Souza Filho	Fortaleza – CE	195	Menção Honrosa
Vitor Ramos de Paula	Rio de Janeiro – RJ	192	Menção Honrosa
Gabriel José Moreira da Costa Silva	Maceió – AL	192	Menção Honrosa
Michel Rozenberg Zelazny	São Paulo – SP	190	Menção Honrosa
André Badenas dos Santos	Curitiba – PR	189	Menção Honrosa
João Pedro Sedeu Godoi	Rio de Janeiro – RJ	185	Menção Honrosa
Kelvin Azevedo Santos	S.J. dos Campos – SP	184	Menção Honrosa
Lucas da Silva Reis	Belo Horizonte – MG	182	Menção Honrosa
Lucas Mioranci	S.J. do Rio Preto – SP	181	Menção Honrosa
Rodolfo Rodrigues da Costa	Fortaleza – CE	180	Menção Honrosa
Flávio Távora Dix-Huit Rosado Ventura	Natal – RN	178	Menção Honrosa
José Lucas de Alencar Saraiva	Recife – PE	177	Menção Honrosa
Mariana Teatini Ribeiro	Belo Horizonte – MG	176	Menção Honrosa
Estevão Waldow	Piraquara – PR	176	Menção Honrosa
Breno Soares da Costa Vieira	Piedade – PE	175	Menção Honrosa
Bruno Fernando Abreu de Melo	Rio de Janeiro – RJ	173	Menção Honrosa
Marcelo Luiz Gonçalves	Franca – SP	171	Menção Honrosa
Carlos Alexandre Silva dos Santos	Fortaleza – CE	171	Menção Honrosa
Mateus Bezrutchka	Taboão da Serra – SP	170	Menção Honrosa
Pedro Morais de Arruda Siaudizionis	Fortaleza – CE	169	Menção Honrosa
Vitor Dias Gomes Barrios Marin	Pres. Prudente – SP	169	Menção Honrosa

Nível Universitário

Nome	Cidade – Estado	Total	Prêmio
Renan Henrique Finder	Rio de Janeiro – RJ	324	Ouro
Marcelo Tadeu de Sá Oliveira Sales	São Paulo – SP	245	Ouro
Carlos Coelho Lechner	Rio de Janeiro – RJ	244	Ouro
Felipe Gonçalves Assis	Campina Grande – PB	239	Ouro
Thiago Ribeiro Ramos	Varginha – MG	215	Prata
Matheus Secco Torres da Silva	Rio de Janeiro – RJ	209	Prata
Regis Prado Barbosa	Fortaleza – CE	207	Prata
Lucas de Freitas Smaira	Guaxupé – MG	206	Prata
Davi Lopes Alves de Medeiros	Fortaleza – CE	205	Prata
Gabriel Luís Mello Dalalio	S.J. dos Campos – SP	200	Prata
Darcy Gabriel Augusto de Camargo Cunha	Campinas – SP	200	Prata
Matheus Barros de Paula	Taubaté – SP	194	Prata
Hugo Fonseca Araújo	Rio de Janeiro – RJ	191	Prata
Rafael Endlich Pimentel	Vitória – ES	186	Bronze
Bruno de Nadai Sarnaglia	Vila Velha – ES	176	Bronze
Fernando Fonseca Andrade Oliveira	Belo Horizonte – MG	163	Bronze
Leandro Lyra Braga Dognini	Rio de Janeiro – RJ	162	Bronze
Lucas Colucci Cavalcante de Souza	São Paulo – SP	147	Bronze
Daniel de Barros Soares	São Gonçalo – RJ	145	Bronze
Daniel dos Santos Bossle	Porto Alegre – RS	144	Bronze
Iuri Rezende Souza	Uberlândia – MG	142	Bronze
Carlos Henrique Melo Souza	Ap. de Goiânia – GO	141	Bronze
Guilherme de Sena Brandine	Fortaleza – CE	138	Bronze
Glauber de Lima Guarinello	São Paulo – SP	136	Bronze
Alysson Espìndola de Sá Silveira	Fortaleza – CE	134	Bronze
Cassio Henrique Vieira Morais	Belo Horizonte – MG	134	Bronze
Rafael Alves da Ponte	Fortaleza – CE	128	Menção Honrosa
Savio Ribas	Belo Horizonte – MG	126	Menção Honrosa
Otávio Augusto de Oliveira Mendes	Pilar do Sul – SP	126	Menção Honrosa
Danilo Augusto Dos Santos R. de Faria	Rio de Janeiro – RJ	120	Menção Honrosa
José Olegario de Oliveira Neto	Fortaleza – CE	120	Menção Honrosa
Daniel Ariano Sortica	São Paulo – SP	120	Menção Honrosa
Ricardo Turolla Bortoloti	Rio Claro – SP	120	Menção Honrosa
Davi de Castro Silva	Goiânia – GO	118	Menção Honrosa
Ivan Guilhon Mitoso Rocha	Fortaleza – CE	109	Menção Honrosa
Robério Soares Nunes	Ribeirão Preto – SP	109	Menção Honrosa

Renato Dias Costa	Rio de Janeiro – RJ	104	Menção Honrosa
Michel Faleiros Martins	Campinas – SP	100	Menção Honrosa
Tarik Carvalho Bussab	São Paulo – SP	99	Menção Honrosa
Joas Elias dos Santos Rocha	Muribeca – SE	98	Menção Honrosa
Alexandre Azevedo Cesar	Rio de Janeiro – RJ	94	Menção Honrosa
Rodrigo Rolim Mendes de Alencar	Rio de Janeiro – RJ	93	Menção Honrosa
Esdras Muniz Mota	Caucaia – CE	89	Menção Honrosa
Roberto Akiba de Oliveira	Sorocaba – SP	87	Menção Honrosa
Alan Anderson da Silva Pereira	U. dos Palmares – AL	86	Menção Honrosa
Clara Macedo Lage	Florianópolis – SC	85	Menção Honrosa
Fernando Nascimento Coelho	Fortaleza – CE	81	Menção Honrosa
Eric Dias Cariello de Carvalho	Rio de Janeiro – RJ	76	Menção Honrosa
Vinícius Oliari Couto Dias	Vila Velha – ES	75	Menção Honrosa

COORDENADORES REGIONAIS

Alberto Hassen Raad	(UFJF)	Juiz de Fora – MG
Alzira Akemi Kushima	(Colégio Militar de Curitiba)	Curitiba – PR
Américo López Gálvez	(USP)	Ribeirão Preto – SP
Antonio Carlos Nogueira	(UFU)	Uberlândia – MG
Carlos Alexandre Gomes da Silva	(UFRN)	Natal – RN
Carlos Alexandre Santana Oliveira	(IFAP)	Macapá – AP
Carmen Vieira Mathias	(UNIFRA)	Santa María – RS
Cláudio de Lima Vidal	(UNESP)	S.J. do Rio Preto – SP
Claus Haetinger	(UNIVATES)	Lajeado – RS
Débora de Jesús Bezerra	(Universidade Metodista de SP)	S.B. do Campo – SP
Denice Fontana Nisxota Menegais	(UNIPAMPA)	Bagé – RS
Diego Marques	(UnB)	Brasília – DF
Diogo Diniz	(UFPB)	Campina Grande – PB
Disney Douglas Lima de Oliveira	(UFAM)	Manaus – AM
Edson Roberto Abe	(Colégio Objetivo de Campinas)	Campinas – SP
Eduardo Gonçalves dos Santos	(UFPB)	João Pessoa – PB
Eduardo Leandro	(UFPE)	Recife – PE
Elisangela dos Santos Meza	(UEPG)	Ponta Grossa – PR
Emiliano Chagas	(Grupo Educacional Etapa)	São Paulo – SP
Fabio Brochero Martínez	(UFMG)	Belo Horizonte – MG
Fabrício Siqueira Benevides	(UFC)	Fortaleza – CE
Florêncio Ferreira Guimarães Filho	(UFES)	Vitória – ES
Francinildo Nobre Ferreira	(UFSJ)	São João del Rei – MG
Gisele Detomazi Almeida	(UFT)	Arraias – TO
Guilherme Luiz de Oliveira Neto	(IFPI)	Floriano – PI
Herivelto Martins	(USP – São Carlos)	São Carlos – SP
Ivanilde Fernandes Saad	(UC. Dom Bosco)	Campo Grande – MS
João Benício de Melo Neto	(UFPI)	Teresina – PI
João Francisco Melo Libonati	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
José Luiz Rosas Pinho	(UFSC)	Florianópolis – SC
José Vieira Alves	(UFPB)	Campina Grande – PB
José William Costa	(Instituto Pueri Domus)	Santo André – SP
Jucélia Pirkel	(Colégio Militar de Curitiba)	Curitiba – PR
Krerley Oliveira	(UFAL)	Maceió – AL
Licio Hernandes Bezerra	(UFSC)	Florianópolis – SC
Luciano G. Monteiro de Castro	(Sistema Elite de Ensino)	Rio de Janeiro – RJ
Luzinalva Miranda de Amorim	(UFBA)	Salvador – BA
Marcelo Antonio dos Santos	FACOS	Osório – RS
Marcelo Ferreira	(UFTM)	Uberaba – MG
Marcelo Rufino de Oliveira	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Márcio Fialho Chaves	(UFLA)	Lavras – MG
Marcos Luiz Henrique	(UFPE)	Caruaru – PE
Newman Simões	(Cursinho CLQ Objetivo)	Piracicaba – SP
Nivaldo Costa Muniz	(UFMA)	São Luis – MA
Raul Cintra de Negreiros Ribeiro	(Colégio Anglo)	Atibaia – SP
Reinaldo Gen Ichiro Arakaki	(UNIFESP)	SJ dos Campos – SP
Ricardo Amorim	(Centro Educacional Logos)	Nova Iguaçu – RJ
Rogério Ricardo Steffenon	(UFRGS)	Porto Alegre – RS
Ronaldo Alves Garcia	(UFGO)	Goiânia – GO
Rosangela Ramon	(UNOCHAPECÓ)	Chapecó – SC
Seme Gebara Neto	(UFMG)	Belo Horizonte – MG
Tadeu Ferreira Gomes	(UEBA)	Juazeiro – BA
Valdenberg Araújo da Silva	(U. Federal de Sergipe)	São Cristóvão – SE