CONTEÚDO

17ª OLIMPÍADA DE MAIO
Enunciados e resultado brasileiro 03

18ª OLIMPÍADA DE MAIO
Enunciados e resultado brasileiro 06

23ª OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL
Enunciados e resultado brasileiro 09

24ª OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL
Enunciados e resultado brasileiro 11

54ª OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA (IMO)
Enunciados e resultado brasileiro 13

3ª OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DA COMUNIDADE DOS PAÍSES DE LÍNGUA PORTUGUESA 16
Enunciados e resultado brasileiro

27ª OLIMPÍADA IBERO-AMERICANA DE MATEMÁTICA
Enunciados e resultado brasileiro 18

28ª OLIMPÍADA IBERO-AMERICANA DE MATEMÁTICA
Enunciados e resultado brasileiro 20

ARTIGOS

TEOREMA DE MORLEY: O QUE OS TRIÂNGULOS AINDA PODEM NOS REVELAR
Daniel Cordeiro de Morais Filho (UFCG), Arthur Cavalcante Cunha (UFCG) e Amauri da Silva Barros (UFAL) 22

JOGOS
Bruno Holanda (IMPA) 28

EQUAÇÕES FUNCIONAIS PARA OS MAIS JOVENS
Ricardo César da Silva Gomes (IFCE - Jaguaribe – CE) 34

COMO É QUE FAZ?	46
SOLUÇÕES DE PROBLEMAS PROPOSTOS	47
PROBLEMAS PROPOSTOS	60
AGENDA OLÍMPICA	61
COORDENADORES REGIONAIS	62

Esta edição da Revista Eureka! é dedicada à memoria do professor Angelo Barone Netto, que nos deixou neste ano de 2013. Barone foi uma das personalidades mais relevantes da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), com a qual colaborou ativamente desde seu início em 1979. Seu trabalho foi fundamental para o desenvolvimento da matemática olímpica no Brasil. Barone foi homenageado pela OBM durante a realização da Semana Olímpica em 2009.

A comunidade da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM)

18ª OLIMPÍADA DE MAIO

PRIMEIRO NÍVEL

PROBLEMA 1

Pablo disse: “Somo 2 ao dia do meu aniversário e multiplico o resultado por 2. Somo 4 ao número obtido e multiplico o resultado por 5. Ao novo número obtido somo o número do mês do meu aniversário (por exemplo, se é junho, somo 6) e obtenho 342.”

Qual é a data do aniversário de Pablo? Encontre todas as possibilidades.

PROBLEMA 2

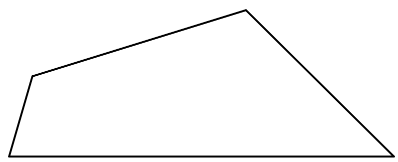
Chamamos $S\ (n)$ à soma dos algarismos do inteiro n. Por exemplo, $S(327)=3+2+7=12$.

Encontre o valor de

$$A=S(1)-S(2)+S(3)-S(4)+\ldots+S(2011)-S(2012).$$

(A tem 2012 termos).

PROBLEMA 3



A partir de um quadrilátero de papel, como o da figura ao lado, deve-se recortar um novo quadrilátero cuja área seja igual à metade da área do quadrilátero original. Somente podemos dobrar o papel uma ou mais vezes e cortar por algumas das linhas das dobras.

Descreva as dobras e os cortes e justifique por que a área obtida é a metade.

PROBLEMA 4

Pedro tem 111 fichas azuis e 88 fichas brancas. Existe uma máquina que faz dois tipos de operações: uma é trocar 14 fichas azuis por 11 fichas brancas e outra é trocar 7 fichas brancas por 13 azuis. Determine se Pedro pode conseguir, mediante sucessivas operações com a máquina, aumentar em 33 o número total de fichas, de modo que a quantidade de fichas azuis seja igual a $\frac{5}{3}$ da quantidade de fichas brancas.

Se isto for possível, indique como fazê-lo. Se não é possível, explique por quê.

PROBLEMA 5

Em uma reunião há 12 pessoas. Sabemos que para cada duas pessoas *A* e *B* da reunião há (pelo menos) uma outra pessoa *C* da reunião que é amiga de *A* e de *B*. Determine o número mínimo de pares de amigos que há na reunião.

Obs: Cada pessoa pode integrar vários pares de amigos. Se *X* é amigo de *Y* então *Y* é amigo de *X*.

SEGUNDO NÍVEL

PROBLEMA 1

Um número de quatro algarismos é *gago* se tem os dois primeiros algarismos iguais entre si e os dois últimos algarismos iguais entre si. Por exemplo, 3311 e 2222 são números gagos. Encontre todos os números gagos de quatro algarismos que são quadrados perfeitos.

PROBLEMA 2

Temos dois octógonos regulares de papelão. Os vértices de cada octógono são numerados de 1 a 8, em qualquer ordem (a ordem para um octógono pode ser diferente da ordem do outro). Em seguida os octógonos são sobrepostos, de modo que cada vértice de um deles fique em contato com um vértice do outro. Os números dos vértices em contato são multiplicados, e soma-se os 8 produtos obtidos.
Demonstre que, qualquer que seja a ordem em que tenham sido numerados os vértices, sempre é possível sobrepor os octógonos de maneira que a soma obtida seja maior ou igual a 162.

PROBLEMA 3

No triângulo ABC**,** verificamos que $\widehat{B} = 2\widehat{C}$ e $\widehat{A} > 90^\circ$. Seja M o ponto médio de BC. A perpendicular por *C* ao lado *AC* corta a reta *AB* no ponto *D.* Demonstre que $A\widehat{M}B = D\widehat{M}C$.

PROBLEMA 4

Temos seis pontos de maneira que não haja três pontos colineares e que os comprimentos dos segmentos determinados por estes pontos sejam todos distintos. Consideramos todos os triângulos que têm seus vértices nesses pontos. Demonstre que um dos segmentos é, ao mesmo tempo, o menor lado de um desses triângulos e o maior lado de outro.

PROBLEMA 5

Temos 27 caixas em fila; cada uma delas contém pelo menos 12 bolinhas. A operação permitida é transferir uma bolinha de uma caixa para sua vizinha da direita, se essa vizinha da direita tem mais bolinhas. Dizemos que uma distribuição inicial das bolinhas é *feliz* se é possível, mediante uma sucessão de operações permitidas, fazer com que todas as bolinhas fiquem numa mesma caixa. Determine o menor número total de bolinhas de uma distribuição inicial feliz.

RESULTADO BRASILEIRO

2012: Nível 1 (até 13 anos)

Nome	Cidade – Estado	Prêmio
Pedro Henrique Sacramento de Oliveira	Vinhedo – SP	Ouro
Bryan Diniz Borck	Porto Alegre – RS	Prata
Julia Perdigão Saltiel	Rio de Janeiro – RJ	Prata
Lucas Iokio Kawahara	São Paulo – SP	Bronze
Bruno Kenzo Ozaki	São Paulo – SP	Bronze
Brendon Diniz Borck	Porto Alegre – RS	Bronze
João Guilherme Madeira Araújo	Sobral – CE	Bronze
Lucas Diniz Gonçalves Villas Boas	Salvador – BA	M. Honrosa
Laura Mello D´Urso Viana	Rio de Janeiro – RJ	M. Honrosa
Italo Rennan Lima Silva	Fortaleza - CE	M. Honrosa

2012: Nível 2 (até 15 anos)

Nome	Cidade – Estado	Prêmio
Murilo Corato Zanarella	Amparo – SP	Ouro
Daniel Lima Braga	Eusébio – CE	Prata
Pedro Jorge Luz Alves Gronemberger	Teresina – PI	Prata
Pedro Henrique Alencar Costa	Fortaleza – CE	Bronze
Felipe Brandão Forte	Fortaleza – CE	Bronze
Lucca Morais de Arruda Siaudizionis	Fortaleza – CE	Bronze
Eduarda Ramos Bezerra de Alencar	Teresina – PI	Bronze
Ocimar Mota dos Santos Filho	Teresina – PI	M. Honrosa
Daniel Santana Rocha	Rio de Janeiro – RJ	M. Honrosa
Estevão Waldow	Piraquara - PR	M. Honrosa

19ª OLIMPÍADA DE MAIO

PRIMEIRO NÍVEL

PROBLEMA 1

Encontre a quantidade de formas de escrever o número 2013 como soma de dois inteiros maiores ou iguais a zero, de modo que ao somar não exista **nenhum** vai-um.

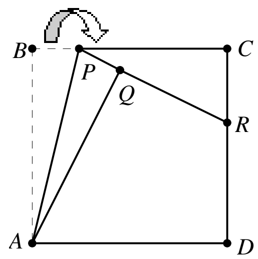
OBSERVAÇÃO: Na soma $2008+5=2013$, por exemplo, existe vai-um das unidades às dezenas.

PROBLEMA 2

Elisa soma os dígitos do seu ano de nascimento e observa que o resultado coincide com os dois últimos dígitos do ano em que nasceu o seu avô. Além disso, os dois últimos dígitos do ano em que ela nasceu são precisamente a idade atual do seu avô. Encontre o ano em que nasceu Elisa e o ano em que nasceu o avô dela.

PROBLEMA 3

Seja *ABCD* um quadrado de papel de lado 10 e *P* um ponto no lado *BC*. Ao dobrar o papel no comprimento da reta *AP*, o ponto *B* determina o ponto *Q*, como vemos na figura ao lado. A reta *PQ* corta o lado *CD* em *R*. Calcule o perímetro do triângulo *PCR*.



PROBLEMA 4

Pablo escreveu 5 números numa folha e logo após escreveu os números 6,7,8,8,9,9,10,10,11 e 12 em outra folha que este deu a Sofía, dizendo que esses números são as somas possíveis de dois dos números que ele tem escondidos. Decida se com esta informação Sofía pode determinar os cinco números que Pablo escreveu.

PROBLEMA 5

Num quadro está desenhado um quadrado de 8×8 dividido em 64 quadradinhos de 1×1 mediante linhas paralelas aos lados.

Gustavo apaga alguns segmentos de comprimento 1 de modo que de cada quadradinho de 1×1 apaga 0, 1 ou 2 lados.

Gustavo afirma que apagou 6 segmentos de longitude 1 da borda do quadrado de 8×8 e que a quantidade de quadradinhos de 1×1 que têm exatamente 1 lado apagado é igual a 5. Decida se o que afirma Gustavo pode ser verdadeiro.

SEGUNDO NÍVEL

PROBLEMA 1

Sofía somou os números das páginas de um livro começando pelo número 1 na primeira página e obteve 2013. Pablo viu como Sofia fez a soma e percebeu que ela pulou uma página. Quantas páginas tem o livro e qual é o número da página que Sofia pulou?

PROBLEMA 2

Temos uma régua sem números e um *trissector* que marca em qualquer segmento os dois pontos que o dividem em três partes iguais. Construa o ponto médio de um segmento dado utilizando exclusivamente estas duas ferramentas.

PROBLEMA 3

Marcamos vários pontos distintos no plano, e traçamos todos os segmentos determinados por esses pontos. Uma reta r não passa por nenhum dos pontos marcados e corta exatamente 60 dos segmentos que foram traçados. Quantos segmentos não foram cortados por r? Encontre todas as possibilidades.

PROBLEMA 4

É possível escrever 100 números ímpares numa fila de tal forma que a soma de cada 5 números adjacentes seja um quadrado perfeito e que a soma de cada 9 números adjacentes também seja um quadrado perfeito?

PROBLEMA 5

Temos 600 cartões. 200 deles têm escrito o número 5, 200 têm escrito o número 2 e os outros 200 têm escrito o número 1. Usando estes cartões queremos formar grupos de tal forma que em cada grupo a soma dos números seja 9. Qual é a maior quantidade de grupos que podemos formar?

RESULTADO BRASILEIRO

2013: Nível 1 (até 13 anos)

Nome	Cidade – Estado	Prêmio
Bryan Diniz Borck	Porto Alegre – RS	Ouro
Lucas dos Anjos Dantas Teixeira	São Paulo – SP	Prata
Bruno Brasil Meinhart	Fortaleza – CE	Prata
Brendon Diniz Borck	Porto Alegre – RS	Bronze
Andrey Jhen Shen Chen	São Paulo – SP	Bronze
Guilherme Goulart Kowalczuk	Porto Alegre – RS	Bronze
Davi Cavalcanti Sena	Caruaru – PE	Bronze
David Felipe Brochero Giraldo	Belo Horizonte – MG	M. Honrosa
Wanderson Ferreira de Almeida	Paulista – PB	M. Honrosa
Fernando Ribeiro de Senna	Jundiaí – SP	M. Honrosa

2013: Nível 2 (até 15 anos)

Nome	Cidade – Estado	Prêmio
João César Campos Vargas	Passa Tempo – MG	Ouro
Pedro Henrique Sacramento de Oliveira	Vinhedo – SP	Prata
Lucca Morais de Arruda Siaudzionis	Fortaleza – CE	Prata
Lucas Pereira Galvão de Barros	Pinheiros – SP	Bronze
Daniel Quintão de Morais	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
Pedro Henrique da Silva Dias	Porto Alegre – RS	Bronze
Ana Paula Lopes Schuch	Porto Alegre – RS	Bronze
Gabriel Toneatti Vercelli	Osasco – SP	M. Honrosa
Marcantônio Soares Figueiredo	Juazeirinho – PB	M. Honrosa
André Yuji Hisatsuga	São Paulo – SP	M. Honrosa

23ª OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL
Enunciados e resultado brasileiro

Os estudantes brasileiros tiveram uma participação destacada na Olimpíada de Matemática do Cone Sul que foi realizada entre os dias 27 de outubro e 3 de novembro de 2012 na cidade de Quito, Peru. A equipe foi liderada pelos professores Francisco Bruno Holanda, do Rio de Janeiro (RJ) e Marcelo Tadeu de Sá Oliveira Sales, de São Paulo (SP).

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	**Rodrigo Sanches Ângelo**	**Medalha de Ouro**
BRA2	**Henrique Gasparini Fiuza do Nascimento**	**Medalha de Prata**
BRA3	**Rafael Rodrigues Rocha de Melo**	**Medalha de Prata**
BRA4	**Tadeu Pieres de Matos Belfort Neto**	**Medalha de Bronze**

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1
Ao redor de uma circunferencia estão escritos 2012 números, cada um deles e igual a 1 ou a –1. Se não há 10 números consecutivos cuja soma seja 0, ache todos os valores possíveis da soma dos 2012 números.

PROBLEMA 2
Em um quadrado *ABCD,* seja *P* um posto sobre o lado *CD*, distinto de *C* e *D*. No triângulo *ABP* traça-se as alturas *AQ* e *BR*, e seja *S* o ponto de intersecção das retas *CQ* e *DR*. Demosntre que $\angle ASB = 90^{\circ}$.

PROBLEMA 3
Demonstre que não existem inteiros positivos *a*, *b*, *c*, *d*, primos entre si dois a dosi, tais que $ab+cd, ac+bd$, e $ad+bc$ sejam divisores ímpares de

$$(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d).$$

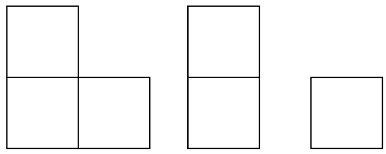
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4
Encontre o maior inteiro positivo *n*, menor que 2012, que cumpra a seguinte propriedade:

Se p é um divisor primo de n, então $p^2 - 1$ é um divisor de n.

PROBLEMA 5

A e B jogam alternadamente sobre um tabuleiro 2012×2013 com peças suficientes dos tipos:



tipo 1 tipo 2 tipo 3

Em seu turno, A debe colocar uma peça do tipo 1 sobre casas vazias de tabuleiro B em seu turno, debe colocar exatamente uma peça de cada tipo sobre casas vazias do tabuleiro. Perde o jogadore que não puder realizar sua jogada. Se A é o primeiro a jogar, determine quem possui uma estratégia vencedora.

Observação: As peças podem ser rotacionadas, mas não podem se sobrepor, nem sair do tabuleiro. As peças do tipo 1, 2 e 3 cobrem exatamente 3, 2 e 1 casas do tabuleiro, respectivamente.

PROBLEMA 6

Considere um triângulo ABC com $1 < \dfrac{AB}{AC} < \dfrac{3}{2}$. Sejam M e N respectivamente pontos variáveis sobre os lados AB e AC, distintos de A, tais que $\dfrac{MB}{AC} - \dfrac{NC}{AB} = 1$. Demonstre que a circunferência circunscrita do triângulo AMN passa por um ponto fixo distinto de A.

24ª OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL

Enunciados e resultado brasileiro

Os estudantes brasileiros tiveram uma excelente participação na Olimpíada de Matemática do Cone Sul que foi realizada entre os dias 2 e 7 de junho de 2013, na cidade de Assunção, Paraguai. A equipe foi liderada pelos professores Fabio Brochero Martínez de Belo Horizente (MG) e José Armando Barbosa de Fortaleza (CE).

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	**Victor Oliveira Reis**	**Medalha de Ouro**
BRA2	**Murilo Corato Zanarella**	**Medalha de Ouro**
BRA3	**Pedro Henrique Sacramento de Oliveira**	**Medalha de Prata**
BRA4	**Daniel Santana Rocha**	**Medalha de Prata**

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Sobre uma reta marcamos quatro pontos distintos. Para cada ponto marcado é calculada a soma das distâncias deste ponto aos outros três, obtendo assim quatro valores.

Decidir se é possível que os quatro valores sejam, em alguma ordem:

a) 29, 29, 35, 37 ; b) 28, 29, 35, 37 ; c) 28, 34, 34, 37.

PROBLEMA 2

Em um triângulo ABC, denotamos por M o ponto médio do lado BC e por I o ponto de interseção de suas bissetrizes. Se $IM = IA$, determinar o menor valor possível para a medida do ângulo $\angle AIM$.

PROBLEMA 3

Semciclolándia é um país com 500 cidades e 2013 estradas de mão dupla, cada uma conectando diretamente duas cidades. Duas cidades A e B são chamadas de *vizinhas* se existe uma estrada que as conecta e duas cidades A e B são chamadas de *quase-vizinhas* se existe uma cidade C tal que A é vizinha de C e C é vizinha de B.

Sabemos que em Semciclolándia não existem duas cidades conectadas diretamente por mais de uma estrada e não existem quatro cidades A, B, C e D tais que simultaneamente A é vizinha de B, B é vizinha de C, C é vizinha de D e D é vizinha de A.

Demonstrar que existe uma cidade que é quase-vizinha de pelo menos 57 cidades.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Seja M o conjunto dos números inteiros de 1 até 2013 inclusive. A cada um dos subconjuntos de M atribuímos uma das k cores disponíveis, com a condição de que, se dois conjuntos distintos A e B cumprem que $A \cup B = M$, então aos conjuntos A e B são atribuídas cores distintas. Qual é o menor valor possível que pode ter k?

PROBLEMA 5

Seja $d(k)$ o número de divisores positivos do inteiro k. Um número n é chamado *equilibrado* se:

$$d(n-1) \le d(n) \le d(n+1) \text{ ou } d(n-1) \ge d(n) \ge d(n+1).$$

Demonstrar que existem infinitos números equilibrados.

PROBLEMA 6

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. Seja $n \ge 2$ um número inteiro. Demonstrar que existem n triângulos da mesma área cumprindo todas as seguintes propriedades:

- Seus interiores são disjuntos, isto é, os triângulos não se sobrepõem;
- Cada triângulo está contido em $ABCD$ ou em seu interior;
- A soma das áreas dos triângulos é pelo menos $\dfrac{4n}{4n+1}$ da área do quadrilátero $ABCD$.

54ª OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA (IMO)

Enunciados e resultado brasileiro

O Brasil obteve um ótimo resultado na 54ª Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), que aconteceu entre os dias 20 e 28 de julho na cidade de Santa Marta na Colômbia, conquistando três medalhas de prata, uma de bronze e duas menções honrosas. A equipe foi liderada pelos professores Edmilson Motta de São Paulo (SP) e Onofre Campos da Silva Farias de Fortaleza (CE).

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	**Rodrigo Sanches Ângelo**	**Medalha de Prata**
BRA2	**Rafael Kazuhiro Miyazaki**	**Medalha de Prata**
BRA3	**Victor Oliveira Reis**	**Medalha de Prata**
BRA4	**Franco Matheus de Alencar Severo**	**Medalha de Bronze**
BRA5	**Alessandro de Oliveira Pacanowski**	**Menção Honrosa**
BRA6	**Victor de Oliveira Bitarães**	**Menção Honrosa**

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Demonstrar que, para qualquer par de inteiros positivos k e n, existem k inteiros positivos $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (não necessariamente distintos) tais que:

$$1+\frac{2^k-1}{n}=\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{m_k}\right).$$

PROBLEMA 2

Uma configuração de 4027 pontos do plano dos quais 2013 são vermelhos e 2014 azuis, e não há três pontos colineares, diz-se *colombiana*. Traçando algumas retas, o plano fica dividido em várias regiões. Um conjunto de retas é *bom* para uma configuração colombiana se satisfaz as duas seguintes condições:

- Nenhuma reta passa por algum ponto da configuração;
- Nenhuma região contem pontos de ambas as cores.

Encontrar o menor valor de k tal que, para qualquer configuração colombiana de 4027 pontos, há um conjunto bom de k retas.

PROBLEMA 3

Seja A_1 o ponto de tangência do excírculo do triângulo ABC oposto ao vértice A com o lado BC. Definem-se os pontos B_1 em CA e C_1 em AB, de modo análogo, uitilizando os excírculos opostos a B e a C, respectivamente. Suponha que o circuncentro do triângulo $A_1B_1C_1$ pertence à circunferência circunscrita ao triângulo ABC. Demonstrar que o triângulo ABC e retângulo.

O excírculo de ABC oposto ao A e a circunferência que é tangente ao segmento BC, ao prolongamento do lado AB no sentido de A para B e ao prolongamento do lado AC no sentido de A para C. Os excírculos opostos a B e a C definem-se de modo semelhante.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Seja ABC um triângulo acutângulo com ortocentro H e seja W um ponto do lado BC, estritamente entre B e C. Os pontos M e N são os pes das alturas traçadas desde B e C, respectivamente.

Designa-se por w_1 a circunferência circunscrita ao triângulo BWN; seja X o ponto de w_1 tal que WX é um diâmetro de w_1. Analogamente, designa-se por w_2 a circunferência circunscrita ao triângulo CWM; seja Y o ponto de w_2 tal que WY é um diâmetro de w_2. Demonstrar que os pontos X, Y e H são colineares.

PROBLEMA 5

Seja $\mathbb{Q}_{>0}$ o conjunto dos números racionais maiores do que zero. Seja $f:\mathbb{Q}_{>0}\to\mathbb{R}$ uma função que satisfaz as três seguintes condições:

(i) $f(x)f(y)\geq f(xy)$ para quaisquer $x, y\in\mathbb{Q}_{>0}$;

(ii) $f(x+y)\geq f(x)+f(y)$ para quaisquer $x, y\in\mathbb{Q}_{>0}$;

(iii) Existe um número racional $a>1$ tal que $f(a)=a$.

Demonstrar que $f(x)=x$ para qualquer $x\in\mathbb{Q}_{>0}$.

PROBLEMA 6

Seja $n \geq 3$ um número inteiro. Considera-se uma circunferência na qual estão marcados $n+1$ pontos igualmente espaçados. A cada ponto atribui-se um dos números 0, 1,..., n de modo que cada número e usado exatamente uma vez; duas atribuições de números consideram-se a mesma se uma pode ser obtida da outra por uma rotação da circunferência. Uma atribuição de números chama-se *bonita* se, para quaisquer quatro números $a < b < c < d$ com $a+b=b+c,$ a corda que une os pontos correspondentes a a e a d não intersecta a corda que une os pontos correspondentes a b e a c.

Sejam M o número de atribuições bonitas o N o número de pares ordenados (x, y) de inteiros positivos que $x+y \leq n$ e $mdc(x, y)=1.$ Demonstrar que

$$M = N + 1.$$

3ª OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DA COMUNIDADE DOS PAÍSES DE LÍNGUA PORTUGUESA

Enunciados e resultado brasileiro

O Brasil conquistou uma medalha de ouro e três de prata na 3ª Olimpíada de Matemática da Comunidade dos Países de Língua Portuguesa, realizada de 5 a 10 de agosto, na cidade de Maputo, Moçambique. Com este resultado o país ficou pelo terceiro ano consecutivo com a primeira posição na classificação geral, seguido pela equipe de Portugal. A equipe foi liderada pelos professores Carlos Bahiano, de Salvador (BA) e Marcelo Xavier de Mendonça, do Rio de Janeiro (RJ).

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	**Gabriel Toneatti Vercelli**	**Medalha de Ouro**
BRA2	**Lucca Morais de Arruda Siaudzionis**	**Medalha de Prata**
BRA3	**Lucas Pereira Galvão de Barros**	**Medalha de Prata**
BRA4	**João César Campos Vargas**	**Medalha de Prata**

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Quantos cestos e quantas laranjas tem a *Xiluva* sabendo que se ela arruma duas laranjas em cada cesto ficam quatro laranjas de sobra e se ela arruma cinco laranjas em cada cesto fica um cesto vazio?

PROBLEMA 2

Seja ABC um triângulo acutângulo. A circunferência de diâmetro AB intercepta os lados AC e BC nos pontos E e F respectivamente. As tangentes ao círculo nos pontos E e F se cruzam em P. Mostre que o ponto P pertence à altura do triângulo ABC a partir do vértice C.

PROBLEMA 3

Um evento ocorre há muitos anos, realizando-se regularmente em x anos consecutivos seguidos de uma pausa de y anos consecutivos. Sabe-se que o evento se realizou em 1964, 1986, 1996 e 2008 e não se realizou em 1976, 1993, 2006 e 2013. Qual é o primeiro ano em que o evento se vai realizar novamente?

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Determine todos os pares (x, y) de inteiros positivos que satisfazem a equação

$$x^2 - xy + 2x - 3y = 2013.$$

PROBLEMA 5

Determine todos os números de 5 algarismos não nulos tais que apagando consecutivamente o algarismo da esquerda, em cada etapa, se obtém um divisor do número anterior.

PROBLEMA 6

Considere um triângulo *ABC*. Seja *S* a circunferência que tangencia internamente os lados *BC, CA* e *AB* do triângulo nos pontos *D*, *E* e *F*, respectivamente. Externamente ao triângulo constroem-se três circunferências S_A, S_B e S_C. A circunferência S_A é tangente a *BC* no ponto *L* e aos prolongamentos das retas *AB* e *BC*, nos pontos *M* e *N*, respectivamente. A circunferência S_A é tangente a *BC* no ponto *L* e aos prolongamentos das retas *AB* e *AC* nos pontos *M* e *N,* respectivamente. A circunferência S_B é tangente a *AC* no ponto *E* e ao prolongamento da reta *BC* no ponto *P*. Prove que as retas *EP*, *FQ* e *AL* são concorrentes em um único ponto sobre *S*.

27ª OLIMPÍADA IBERO-AMERICANA DE MATEMÁTICA
Enunciados e resultado brasileiro

A equipe brasileira formada por quatro estudantes do ensino médio conquistou duas medalhas de ouro e duas de prata na 27ª Olimpíada Ibero-Americana de Matemática (OIM), realizada entre os dias 29 de setembro e 6 de outubro na cidade de Cochabamba, Bolívia. A equipe foi liderada pelos professores Matheus Secco e Hugo Fonseca, ambos do Rio de Janeiro (RJ).

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	**Rafael Kazuhiro Miyazaki**	**Medalha de Ouro**
BRA2	**Rodrigo Sanches Ângelo**	**Medalha de Ouro**
BRA3	**Franco Matheus de Alencar Severo**	**Medalha de Prata**
BRA4	**André Macieira Braga Costa**	**Medalha de Prata**

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1
Sobre o retângulo *ABCD* constroem-se os triângulos equiláteros *BCX* e *DCY*, de modo que cada um compartilhe pontos com o interior do retângulo. A reta *AX* intersecta a reta *DC* em *P*. A reta *AY* intersecta a reta *BC* em *Q*. Demonstrar que o triângulo *APQ* é equilátero.

PROBLEMA 2
Um inteiro positivo diz-se *bissomado* se puder ser escrito como soma de dois inteiros positivos que tenham a mesma soma dos algarismos. Por exemplo, 2012 é bissomado, pois 2012 = 2005 + 7 e tanto 2005 como 7 têm soma dos algarismos igual a 7.
Encontrar todos os inteiros positivos que **não são** bissomados.

PROBLEMA 3
Seja n um inteiro positivo. Dado um conjunto $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ de inteiros entre 0 e $2^n - 1$ inclusive, associados a cada um dos seus 2^n subconjuntos a soma dos seus elementos; em particular, o subconjunto vazio tem soma 0. Se estas 2^n somas deixam todas restos distintos na divisão por 2^n, dizemos que o conjunto $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ é n-completo. Determinar, para cada n, a quantidade de conjuntos n-completos.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Sejam a, b, c, d números inteiros tais que $a-b+c-d$ é ímpar e divide $a^2-b^2+c^2-d^2$. Demonstrar que, para qualquer inteiro positivo *n*, $a-b+c-d$ divide $a^n-b^n+c^n-d^n$.

PROBLEMA 5

Seja *ABC* um triângulo e sejam *P* e *Q* os pontos de interseção da paralela a *BC* por *A* com as bissetrizes exteriores dos ângulos *B* e *C*, respectivamente. A perpendicular a *BP* por *P* e a perpendicular a *CQ* por *Q* intersectam-se em *R*. Seja *I* o incentro de *ABC*. Demonstrar que *AI* = *AR*.

PROBLEMA 6

Demonstrar que, para qualquer inteiro positivo *n*, existem *n* inteiros positivos consecutivos tais que nenhum deles é divisível pela soma dos seus respectivos algarismos.

28ª OLIMPÍADA IBERO-AMERICANA DE MATEMÁTICA

Enunciados e resultado brasileiro

A equipe brasileira formada por quatro estudantes do ensino médio conquistou, por segundo ano consecutivo, o primeiro lugar geral na 28ª Olimpíada Ibero-Americana de Matemática (OIM), realizada entre os dias 20 e 28 de setembro na cidade do Panamá, Panamá. O evento contou com a participação de 78 jovens de 20 países da América Latina, Portugal e Espanha. A equipe foi liderada pelos professores Eduardo Wagner do Rio de Janeiro (RJ) e Pablo Rodrigo Ganassim de São Paulo (SP).

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	**Rodrigo Sanches Ângelo**	**Medalha de Ouro**
BRA2	**Rafael Kazuhiro Miyazaki**	**Medalha de Prata**
BRA3	**Franco Matheus de Alencar Severo**	**Medalha de Prata**
BRA4	**Victor Oliveira Reis**	**Medalha de Prata**

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Um conjunto S de inteiros positivos distintos chama-se *canaleiro* se para quaisquer três números $a,b,c \in S$, todos diferentes, se tem que a divide bc, b divide ca e c divide ab.

a) Demonstrar que para qualquer conjunto finito de inteiros positivos $\{c_1, c_2, ..., c_n\}$ existem infinitos inteiros positivos k, tais que o conjunto $\{kc_1, kc_2, ..., kc_n\}$ é canaleiro.

b) Demonstrar que para qualquer inteiro $n \geq 3$ existe um conjunto canaleiro que tem exatamente n elementos e tal que nenhum inteiro maior que 1 divide todos os seus elementos.

PROBLEMA 2

Sejam X e Y os extremos de um diâmetro de uma circunferência Γ e N o ponto médio de um dos arcos XY de Γ. Sejam A e B dois pontos do segmento XY. As retas NA e NB cortam novamente Γ nos pontos C e D, respectivamente. As tangentes a Γ em C e D encontram-se em P. Seja M o ponto de intersecção do segmento *XY* com o segmento *NP*. Demonstrar que *M* é o ponto médio do segmento *AB*.

PROBLEMA 3

Seja $A=\{1,2,3,...,n\}$ com $n>5.$ Demosntrar que existe um conjunto finito *B* de inteiros positivos distintos tal que $A\subseteq B$ e possui a propriedade:

$$\prod_{x\in B}x=\sum_{x\in B}x^2,$$

Ou seja, o produto dos elementos de *B* é igual à soma dos quadrados dos elementos de *B*.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Sejam Γ uma circunferência de centro *O*, *AE* um diâmetro de Γ e *B* o ponto médio de um dos arcos de *AE* de Γ. O ponto $D\neq E$ está sobre o segmento *OE*. O ponto *C* é tal que o quadrilátero *ABCD* é um paralelogramo com *AB* paralelo a *CD* e *BC* paralelo a *AD*. As retas *EB* e *CD* cortam-se no ponto *F*. A reta *OF* corta o menor arco *EB* de Γ no ponto *I*.

Demonstrar que a reta *EI* é a bissetriz do ângulo $\angle BEC$.

PROBLEMA 5

Sejam *A* e *B* dois conjuntos tais que:

i) $A\cup B$ é o conjunto dos inteiros positivos.

ii) $A\cap B$ é vazio.

iii) Se dois inteiros positivos têm como diferença um primo maior que 2013, então um deles está em *A* e o outro em *B*.

Encontrar todas as possibilidades para os conjuntos *A* e *B*.

PROBLEMA 6

Uma *configuração* é um conjunto finito *S* de pontos do plano entre os quais não há três colineares e tal que a cada ponto se atribui alguma cor, de modo que se um triângulo cujos vértices estão em *S* tem um ângulo maior ou igual a 120º, então exatamente dois de seus vértices são de uma mesma cor.

Encontrar o número máximo de pontos que pode ter uma configuração.

TEOREMA DE MORLEY: O QUE OS TRIÂNGULOS AINDA PODEM NOS REVELAR

Daniel Cordeiro de Morais Filho, UFCG
Arthur Cavalcante Cunha, UFCG
Amauri da Silva Barros, UFAL

♦ Nível Intermediário

INTRODUÇÃO

Problemas de Geometria sempre encantaram os admiradores da Matemática. Como a Geometria é uma das mais antigas manifestações matemáticas da humanidade, era de se esperar, há alguns séculos atrás, que os mais importantes resultados sobre triângulos já tivessem sido descobertos e estabelecidos. Mas isso não é verdade. No começo do século passado ainda se estava descobrindo resultados envolvendo triângulos, e é sobre um desses belos resultados que falaremos neste artigo.

O PROBLEMA

Como sabemos, as bissetrizes de um triângulo qualquer, semirretas que dividem os ângulos internos em dois ângulos congruentes, se intersectam em um ponto chamado incentro. Esse ponto tem a interessante propriedade de ser o centro de uma circunferência inscrita no triângulo. O famoso matemático grego Euclides (c.325 a.C-c.365 a.C.) provou esse resultado no Livro IV dos seus Elementos (Proposição 4), há pelo menos 24 séculos!

Nessa direção, a história guardou uma pergunta bem natural que parece não ter sido feita ao longo dos séculos: e se dividirmos os ângulos internos de um triângulo em três partes iguais? Encontraremos algum resultado também interessante? Vejamos.

As duas semirretas que dividem um ângulo interno de um triângulo em três ângulos congruentes chamam-se ***trissetrizes***. As trissetrizes de um triângulo geram seis pontos de interseção. Há alguma propriedade interessante que envolve esses pontos? Para ver o que ocorre, é preciso distinguir um pouco mais essas trissetrizes. Diremos que duas trissetrizes são ***adjacentes*** quando partem de vértices opostos pertencentes a um mesmo lado do triângulo e formam o menor ângulo que uma trissetriz pode formar com esse lado.

Una os pontos de interseção das trissetrizes adjacentes de um triângulo qualquer. Você obterá um triângulo. Observe melhor, mais do que isso, você descobrirá um resultado surpreendente: o triângulo obtido é sempre um triângulo eqüilátero! Vide figura a seguir.

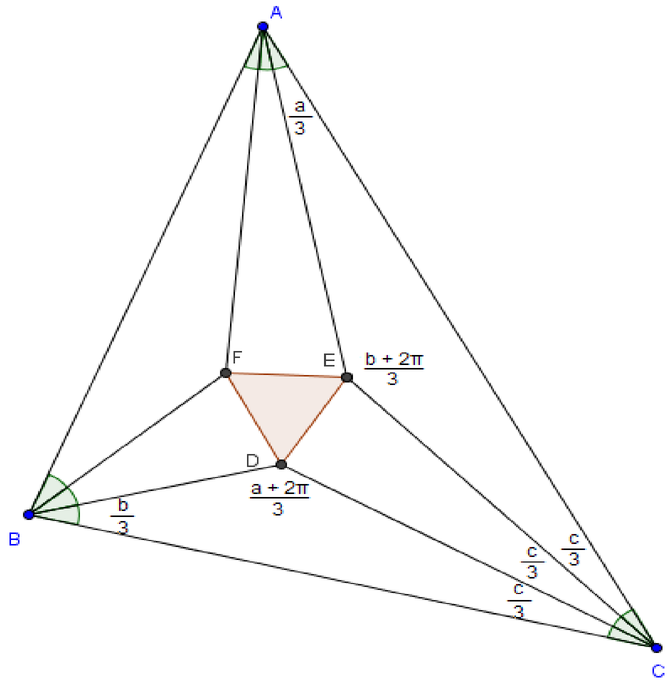


Figura 1: O Triângulo equilátero DEF é chamado Triângulo de Morley.

Esse é o Teorema de Frank Morley (1860-1937), matemático anglo-americano, presidente da American Mathematical Society no biênio 1919-1920, que provou esse teorema no final do Século XIX (vide uma pequena bibliografia de Morley em [1]). Na verdade, a demonstração do teorema como conhecido hoje só foi publicada em 1929 ([2]).

O enunciado do teorema é o seguinte:

Teorema de Morley: Em um triângulo qualquer, a união dos pontos de interseção das trissetrizes adjacentes forma um triângulo equilátero.
Uma animação do teorema pode ser vista em [3].

Porque esse problema é importante

Bem, além de ser um belo resultado, esse problema envolve um dos antigos problemas famosos da Matemática, que é a trissecção de um ângulo em três ângulos congruentes. Saber se é possível fazer isso para qualquer ângulo usando apenas régua e compasso é um problema famoso, que levou 20 séculos para ser resolvido, e a solução é negativa (vide [4]): não é possível, em geral, trissectar ângulos com régua e compasso. Por essa razão, talvez os resultados envolvendo trissecção de ângulos tenham sido considerados desinteressantes, e velado o teorema até ser descoberto e provado apenas no começo do século XX. Mas, convenhamos, na prática, ninguém precisa trissectar um ângulo para descobrir ou provar o Teorema de Morley!

Em segundo lugar, das demonstrações possíveis desse teorema (e há várias, dos mais variados gostos, e algumas até bem modernas. Vide [5].) optamos pela que usasse certos resultados vistos na Trigonometria, que às vezes são apenas memorizados pelos estudantes do Ensino Médio. Na maioria das vezes, esses resultados são apenas apresentados sem qualquer aplicação de destaque que merecesse estudá-los. Nossa demonstração também fornece a oportunidade de usar algumas identidades trigonométricas como as que transformam produtos em soma, bem como uma aplicação das Leis dos Senos e dos Cossenos em um único problema.

Demonstração do Teorema de Morley

Consideremos o triângulo ABC, da Figura 1, com ângulos internos $a = B\widehat{A}C$, $b = A\widehat{B}C$ e $c = A\widehat{C}B$. Consideremos também o triângulo DEF, formado pela interseção das trissetrizes adjacentes relativas a esses ângulos.

A ideia dessa demonstração é calcular os comprimentos dos lados do triângulo DEF, mostrando que são iguais. Como usaremos a Lei dos Senos, seja R o raio da circunferência inscrita ao triângulo ABC. Vamos mostrar que

$$DE = EF = FD = 8R \text{ sen}\frac{a}{3}\text{sen}\frac{b}{3}\text{sen}\frac{c}{3}.$$

Iremos usar as seguintes identidades trigonométricas:

1. $\text{sen } x = 4\text{sen}\frac{x}{3}\text{sen}\frac{x+\pi}{3}\text{sen}\frac{x+2\pi}{3}$
2. $\text{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$
3. $\text{sen } x \text{ sen} y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right]$
4. $\cos\frac{a+b+2\pi}{3} = \cos\frac{2\pi+\pi-c}{3} = \cos\left(\pi-\frac{c}{3}\right) = -\cos\frac{c}{3}$

5. $\frac{1}{2}(\cos x+\cos y)=\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

Pela Lei dos Senos aplicada ao triângulo *ABC*, e pela identidade (1) temos

6. $$\frac{BC}{\text{sen } a}=2R\Rightarrow BC=8R\text{ sen }\frac{a}{3}\text{ sen }\frac{a+\pi}{3}\text{ sen }\frac{a+2\pi}{3}.$$

Considere agora o triângulo *BDC*. As medidas de seus ângulos internos são:

$$C\hat{B}D=\frac{b}{3}, B\hat{C}D=\frac{c}{3}\text{ e } B\hat{D}C=\pi-\frac{b}{3}-\frac{c}{3}=\frac{3\pi-b-c}{3}=\frac{(\pi-b-c)+2\pi}{3}=\frac{a+2\pi}{3}.$$

Agora, aplicando a Lei dos Senos ao triângulo *BDC* e usando a igualdade (6) obtemos:

$$\frac{BC}{\text{sen }\frac{a+2\pi}{3}}=\frac{CD}{\text{sen }\frac{b}{3}}\Rightarrow CD=\frac{BC\text{ sen }\frac{b}{3}}{\text{sen }\frac{a+2\pi}{3}}\Rightarrow$$

$$CD=\frac{8R\text{ sen }\frac{a}{3}\text{sen }\frac{a+\pi}{3}\text{sen }\frac{a+2\pi}{3}\text{sen }\frac{b}{3}}{\text{sen }\frac{a+2\pi}{3}}\Rightarrow$$

7. $$CD=8R\text{ sen}\frac{a}{3}\text{sen}\frac{b}{3}\text{sen}\frac{a+\pi}{3}.$$

Fazendo o mesmo para o triângulo *ACE*, resulta em

8. $$CE=8R\text{ sen}\frac{a}{3}\text{sen}\frac{b}{3}\text{sen}\frac{b+\pi}{3}.$$

Para encontrar o comprimento do lado *DE*, usaremos a Lei dos Cossenos ao triângulo *CDE*, e por (7) e (8):

$$DE^2=CD^2+CE^2-2CD\cdot CE\cdot\cos\frac{c}{3}\Rightarrow$$

$$(9.)\qquad DE^2 = 64R^2\operatorname{sen}^2\frac{a}{3}\operatorname{sen}^2\frac{b}{3}\left[\operatorname{sen}^2\frac{a+\pi}{3}+\operatorname{sen}^2\frac{b+\pi}{3}-2\operatorname{sen}\frac{a+\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{b+\pi}{3}\cos\frac{c}{3}\right].$$

Para simplificar a escrita, chamemos

$M = 8R\operatorname{sen}\frac{a}{3}\operatorname{sen}\frac{b}{3}$, donde

$$M^2 = 64R^2\operatorname{sen}^2\frac{a}{3}\operatorname{sen}^2\frac{b}{3}.$$

De (2) e (3), segue da expressão (9) que

$$DE^2=M^2\left[\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2a+2\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2b+2\pi}{3}\right)-2\left(\frac{1}{2}\left(\cos\frac{a-b}{3}-\cos\frac{a+b+2\pi}{3}\right)\right)\cos\frac{c}{3}\right].$$

De (4) e (5), obtemos

$$DE^2=M^2\left[\frac{1}{2}\left(1+1-\cos\frac{2a+2\pi}{3}-\cos\frac{2b+2\pi}{3}\right)-\left(\cos\frac{a-b}{3}\cos\frac{c}{3}+\cos\frac{c}{3}\cos\frac{c}{3}\right)\right]=$$

$$=M^2\left[1-\left(-\cos\frac{c}{3}\cos\frac{a-b}{3}\right)-\cos\frac{a-b}{3}\cos\frac{c}{3}-\cos^2\frac{c}{3}\right]=M^2\left(1-\cos^2\frac{c}{3}\right)=M^2 sen^2\frac{c}{3}.$$

Logo,

$$DE= M\operatorname{sen}\frac{c}{3}=8\mathrm{R}\operatorname{sen}\frac{a}{3}\operatorname{sen}\frac{b}{3}\operatorname{sen}\frac{c}{3}.$$

Se fizermos o mesmo procedimento para os triângulos *BDF* e *AFE*, encontraremos que o comprimento dos lados *DF* e *EF* do triângulo *DEF* é também dado por

$$DF=EF= 8\mathrm{R}\operatorname{sen}\frac{a}{3}\operatorname{sen}\frac{b}{3}\operatorname{sen}\frac{c}{3}.$$

Portanto, como *DE, DF* e *EF* são iguais, o triângulo *DEF* é equilátero. Como queríamos demonstrar.

Conclusão

Em [3] pode-se encontrar 23 demonstrações desse teorema. Nossa demonstração baseia-se no artigo [5], onde pode ser encontrado um detalhado histórico desse teorema, que parece ter caído no gosto de muitos. Enfim, ficar famoso por provar, em pleno Século XX, um teorema da Geometria Elementar é um fato que muitos gostariam de ter tido o privilégio de que ocorresse com eles. Coisas da História, coisas da Matemática...

BIBLIOGRAFIA

[1] http://faculty.evansville.edu/ck6/bstud/morley.html
[2] American Journal of Mathematics, F. Morley, 51 (1929), pp. 465-472.
[3] http://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/index.shtml
[4] Gonçalves, Adilson; Introdução à Álgebra, IMPA (1999).
[5] Cletus O. Oakley e Justine Davis, The Morley Trisector Theorem, Amer. Math Monthly (1978), p. 737-745.O artigo pode ser encontrado na página http://www.haverford.edu/math/cgreene/399/morley/morley.pdf.

JOGOS

Bruno Holanda, Fortaleza – CE

♦ Nível Iniciante

Problemas sobre jogos estão entre os mais atrativos para a maioria dos alunos que estão iniciando o seu gosto pela matemática e, por isso, vêm ganhando grande importância nas provas da OBM. Neste artigo vamos mostrar as duas idéias que mais aparecem nas provas: a simetria e o uso das posições vencedoras.

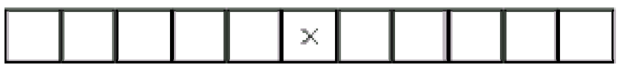
1. Simetria

Uma das estratégias mais simples é o uso de alguma simetria que pode ocorrer durante o jogo em vantagem de um dos jogadores, forçando sempre uma nova rodada para o jogador "destinado à derrota". Para entender melhor, veja o seguinte exemplo:

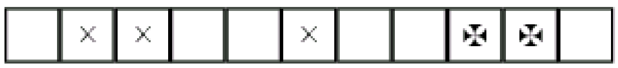
Exemplo 1.1: Pedro e Mônica jogam em um tabuleiro 1×11. Cada um, em sua vez, pode pintar um dos quadrados (que não foram pintados anteriormente), ou dois quadrados consecutivos (se ambos estiverem brancos). Quem não puder mais jogar perde. Sabe-se que Pedro será o primeiro a jogar. Quem pode sempre garantir a vitória?

Solução. Pedro sempre poderá ganhar se seguir a seguinte estratégia:

i. Inicialmente, Pedro deve pintar o quadrado do meio.



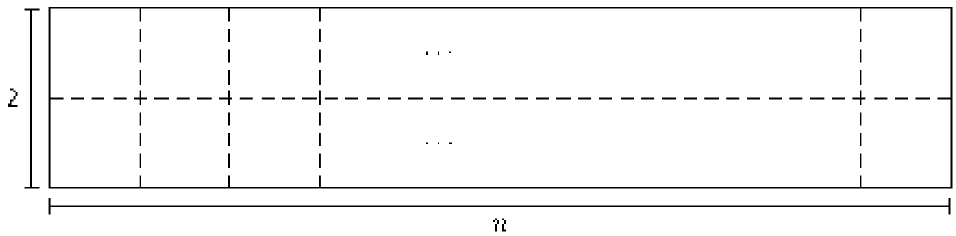
ii. Agora, depois que Mônica fizer sua jogada, Pedro deve jogar sempre simetricamente em relação ao centro do tabuleiro (i.e. sempre deixando o tabuleiro simétrico). Por exemplo, se Mônica jogar nas casas 9 e 10, Pedro deve jogar nas casas 2 e 3.



iii. Assim, Mônica nunca poderá ganhar, pois, na sua jogada, ela recebe uma posição simétrica e "quebra a simetria", e na configuração final do jogo, todas as casas estarão pintadas, ou seja, a configuração é simétrica.

O próximo exemplo é um dos problemas que apareceu na prova da OBM de 2004. Vamos apresentar uma solução diferente da solução proposta na Eureka! 22, usando simetria:

Exemplo 1.2: Arnaldo e Bernaldo disputam um jogo em um tabuleiro $2 \times n$:



As peças do jogo são dominós 2×1. *Inicialmente Arnaldo coloca um dominó cobrindo exatamente duas casas do tabuleiro, na horizontal ou na vertical. Os jogadores se revezam colocando uma peça no tabuleiro, na horizontal ou na vertical, sempre cobrindo exatamente duas casas do tabuleiro. Não é permitido colocar uma peça sobre outra já colocada anteriormente.*

Quem não conseguir colocar uma peça no tabuleiro perde.

Qual dos dois jogadores tem uma estratégia vencedora, ou seja, uma estratégia que o leva à vitória quaisquer que sejam as jogadas de seu adversário, para:
(a) $n = 2004$?
(b) $n = 2005$?

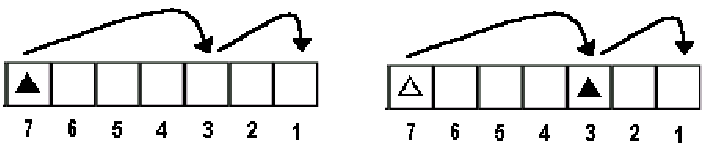
Solução. Quando $n = 2005$ o primeiro jogador garante a vitória. Ele pode fazer isto colocando um dominó na vertical no meio do tabuleiro e, em seguida, jogar simetricamente ao segundo jogador. Quando $n = 2004$ o tabuleiro possui um número par de colunas. Desse modo, o segundo ganha jogando simetricamente ao primeiro jogador.
PS: Quando falamos "jogar simetricamente" significa fazer um movimento para deixar o tabuleiro simétrico em relação ao centro.

2. Posições vencedoras

Alguns tipos de jogos possuem certas configurações que sempre levam um jogador à vitória. Essas configurações são chamadas de posições vencedoras. O próximo exemplo é um jogo bastante simples em que essa estratégia aparece facilmente.

Exemplo 2.1: Na primeira casa de um tabuleiro 1×13 está um pino. Tiago e Maria movem o pino alternadamente. Em cada turno é permitido avançar 1,2,3,4 ou 5 casas. Quem colocar o pino na última casa é o vencedor. Se Maria começar jogando, ela pode ter certeza da vitória?

Solução. Como em muitos problemas de olimpíada, vamos analisar alguns casos pequenos. Vamos supor que em vez de 13 casas o tabuleiro tivesse apenas quatro. Neste caso, fica fácil ver que quem começa ganha: basta avançar três casas. O mesmo iria ocorrer se o tabuleiro tivesse 2,3,4,5 ou 6 casas. Porém, veja que em um tabuleiro 7×1 o primeiro jogador perde. Isso acontece pois, após sua jogada, o pino ficará em uma das casas 2,3,4,5 ou 6. E já sabemos que essas casas levam o jogador à vitória.



Desse modo, vamos dizer que 7 é uma posição perdedora e 6,5,4,3 e 2 são posições vencedoras. Agora, se um o jogador que estiver em uma das casas 8,9,10,11 ou 12 pode garantir a vitória movendo o pino para a casa 7. Ou seja, deixando o seu adversário em uma posição perdedora. Assim, podemos afirmar que as posições 8,9,10,11 e 12 também são vencedoras. Resta analisar a 13ª casa. Observe que a partir desta casa podemos mover o pino apenas para uma das casas 8,9,10,11 ou 12, que são vencedoras. Daí, quem começar perde pois, inicia em uma posição perdedora.

A grande dificuldade para a maioria dos alunos é descobrir quais são as posições vencedoras de um jogo. Para evitar esse tipo de problema, tenha sempre em mente as seguintes definições:

Posição vencedora: A partir dela, *podemos escolher* um movimento e repassar uma posição perdedora para o adversário.

Posição perdedora: A partir dela, *é impossível escolher um movimento* e repassar uma posição perdedora para o adversário. Ou seja, não importa o movimento escolhido, o adversário irá receber uma posição vencedora.

E como fazer para descobrir quais são as posições vencedoras e perdedoras? A melhor maneira de se fazer isto é analisando o final do jogo e aplicar as definições acima. Vamos praticar um pouco resolvendo o seguinte problema:

Exemplo 2.2: Em um tabuleiro 8×8, uma torre está na casa a1. Dois jogadores movem a torre com objetivo de colocar a torre na casa h8. Sabendo que a torre pode mover-se apenas para cima ou para direita (quantas casas o jogador desejar) e que não se pode passar a vez, determine qual jogador tem a estratégia vencedora.

Solução. Primeiramente note que todas as casas da última linha e da última coluna (exceto a h8) são vencedoras pois, a partir delas *podemos escolher* um movimento que nos leve à vitória. Com isso, a casa g7 se torna perdedora pois, a partir dela *qualquer movimento* leva o outro jogador a uma posição vencedora (veja a figura 1).

	a	b	c	d	e	f	g	h
8	V	V	V	V	V	V	V	
7							P	V
6								V
5								V
4								V
3								V
2								V
1								V

FIGURA 1

Agora, como g7 é perdedora, as demais casas da sétima linha e da sétima coluna são vencedoras. Mais ainda, a casa f6 também deve ser perdedora (figura 2). Continuando de maneira análoga, obtemos que a casa a1 é perdedora (figura 3). Logo, quem começar, perde.

V	V	V	V	V	V	V	
V	V	V	V	V	V	P	V
					P	V	V
						V	V
						V	V
						V	V
						V	V
						V	V

FIGURA 2

V	V	V	V	V	V	V	
V	V	V	V	V	V	P	V
V	V	V	V	V	P	V	V
V	V	V	V	P	V	V	V
V	V	V	P	V	V	V	V
V	V	P	V	V	V	V	V
V	P	V	V	V	V	V	V
P	V	V	V	V	V	V	V

FIGURA 3

3. Problemas

1. Sobre uma mesa existem duas pilhas (uma com 15 e outra com 16 pedras). Em um jogo cada jogador pode, em sua vez, retirar qualquer quantidade de pedras de apenas uma pilha. Quem não puder mais jogar perde. Quem possui a estratégia vencedora?

2. Dois jogadores colocam alternadamente reis (de cores todas distintas) em um tabuleiro 9×9, de forma que nenhum rei ataque outro. Quem não puder mais jogar perde. Quem possui a estratégia vencedora?

3. (OBM 2002) São dados um tabuleiro de xadrez (8×8) e palitinhos do tamanho dos lados das casas do tabuleiro. Dois jogadores jogam alternadamente e, em cada rodada, um dos jogadores coloca um palitinho sobre um lado de uma das casas do tabuleiro, sendo proibido sobrepor os palitinhos. Vence o jogador que conseguir completar primeiro um quadrado 1×1 de palitinhos. Supondo que nenhum dos jogadores cometa erros, qual dos dois tem a estratégia vencedora?

4. (Leningrado 1987) Dois jogadores colocam alternadamente $\times$'s e O's em um tabuleiro 9×9. O primeiro escreve $\times$'s e o segundo O's. Quando o tabuleiro for completamente preenchido o jogo termina e os pontos são contados. Um ponto é dado ao jogador para cada linha ou coluna em que ele possuir mais casas dos que o adversário. O jogador que possuir mais pontos vence. Quem pode sempre ganhar?

5. (Leningrado 1989) Um pino está no centro de um tabuleiro 11×11. Dois jogadores fazem alternadamente o pino saltar para qualquer outra casa do tabuleiro, mas a cada movimento (a partir do segundo) o tamanho do salto deve ser maior que o anterior. O jogador que não puder mais jogar perde. Ache a estratégia vencedora.

6. Sobre uma mesa existem 2006 pedras. Em um jogo, cada jogador pode, em sua vez, retirar de 1 a 10 pedras (mas sempre retirando pelo menos uma pedra). Ganha o jogador que retirar a última pedra. Qual dos jogadores possui a estratégia vencedora?

7. (Leningrado 1990) Tom e Jerry jogam um jogo e Tom faz a primeiro passo. Em cada turno o jogador pode diminuir de um dado natural N um

dos seus dígitos não-nulos. Inicialmente o número N é 1234. O jogador que obtiver zero ganha. Quem pode garantir a vitória?

8. (Leningrado 1988) Uma pilha de 500 pedras é dada. Dois jogadores jogam o seguinte jogo: Em cada turno, o jogador pode retirar 1,2,4,8,... (qualquer potência de 2) pedras da pilha. O jogador que não puder mais jogar perde. Quem possui estratégia vencedora?

9. Em uma caixa existem 300 bolinhas. Cada jogador pode retirar não mais do que a metade das bolinhas que estão na caixa. O jogador que não puder mais jogar perde. Quem possui estratégia vencedora?

Referências:

[1] Dmitri Fomin, Alexey Kirichenkko, *Leningrad Mathematical Olympiads* 1987-1991, 1994

[2] Dmitri Fomin, Sergey Genkin e Ilia Itenberg, *Mathematical Circles* (*russian experience*), 1996

EQUAÇÕES FUNCIONAIS PARA OS MAIS JOVENS

Ricardo César da Silva Gomes, IFCE, Jaguaribe – CE

♦ Nível Intermediário

Um dos temas mais desafiadores para um olímpico são os problemas sobre equações funcionais. Porém, existem poucos artigos escritos para iniciantes, o que contribui para dificultar mais ainda a implantação de um treinamento para a OBM numa escola que deseja se aventurar no encantador universo das Olimpíadas de Matemática. Nosso objetivo neste artigo é suprir um pouco essa carência. Inicialmente, vamos fazer um aquecimento com os exemplos abaixo.

1. Um bom começo...

Exemplo 01. (Austrália) Para todo inteiro positivo n, temos:

$$f(n)=\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+2n+1}+\sqrt[3]{n^2-1}+\sqrt[3]{n^2-2n+1}}$$

Determine o valor da soma

$$f(1)+f(3)+f(5)+\ldots+f(999997)+f(999999).$$

Solução: Observando com bastante cuidado vemos que $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)\,(*)$ nos ajudará a sair dessa aparente dificuldade.

Basta fazermos $a=\sqrt[3]{n+1}$ e $b=\sqrt[3]{n-1}$

e a função dada pode ser reescrita como

$$f(n)=\frac{1}{a^2+ab+b^2}=\frac{a-b}{a^3-b^3}=\frac{a-b}{2}.$$

Escrevendo f desta forma fica bastante claro porque usaremos (*), em seguida voltaremos à variável n. Veja que legal:

$$2f(n)=a-b=\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1}.$$

Agora vamos à *tacada* final,

$$2f(1)=\sqrt[3]{2}$$

$$2f(3)=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}$$

$$2f(5)=\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{4}$$

$$\vdots$$

$$2f(999997)=\sqrt[3]{999998}-\sqrt[3]{999996}$$

$$2f(999999)=\sqrt[3]{1000000}-\sqrt[3]{999998}$$

Adicionando, membro a membro, as equações acima temos:

$$f(1)+f(3)+f(5)+...+f(999997)+f(999999)=\frac{1}{2}\sqrt[3]{1000000}=50.$$

Exemplo 02. Determine todas as funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tais que

$$f\left((x-y)^2\right)=\left(f(x)\right)^2-2xf(y)+y^2. \qquad (*)$$

Solução. Fazendo $x = y = 0$ em (*), obtemos:

$$f(0)^2-f(0)=0 \therefore f(0)\left(f(0)-1\right)=0$$

Há então dois casos:

1º Caso: $f(0)=0.$ Escolhendo $y = x$ em (*) teremos:

$$\left(f(x)-x\right)^2=\left(f(x)\right)^2-2xf(x)+x^2=f(0)=0$$

daí temos $f(x)=x,$ onde x é um número real qualquer.

2º Caso: $f(0)=1.$ Novamente escolhendo $y = x$ em (*), teremos:

$$\left(f(x)-x\right)^2=\left(f(x)\right)^2-2xf(x)+x^2=f(0)=1$$

daí temos que, para todo $x\in\mathbb{R},$ $f(x)=x+1$ ou $f(x)=x-1.$ Assim, $f(x)=x+\varepsilon_x,$ onde $\varepsilon_x\in\{-1,1\},\forall x\in\mathbb{R}.$ Temos então, de (*), $(x-y)^2+\varepsilon_{(x-y)^2}=(x+\varepsilon_x)^2-2x\left(y+\varepsilon_y\right)+y^2,$ donde

$\varepsilon_{(x-y)^2}=2x\left(\varepsilon_x-\varepsilon_y\right)+\varepsilon_x^2,\forall x,y\in\mathbb{R}.$ Como $f(0)=1,$ $\varepsilon_0=1.$

Se existe $z\in\mathbb{R}$ com $\varepsilon_z\neq 1,$ existe $y\in\mathbb{R}$ com $\varepsilon_y\neq\varepsilon_1.$ Fazendo $x=1$ na igualdade acima, temos $\varepsilon_{(1-y)^2}=2\left(\varepsilon_1-\varepsilon_y\right)+\varepsilon_x^2,$ donde

$2\left(\varepsilon_1-\varepsilon_y\right)=\varepsilon_{(1-y)^2}-\varepsilon_x^2,$ absurdo, pois $\left|2\left(\varepsilon_1-\varepsilon_y\right)\right|=4$ e $\left|\varepsilon_{(1-y)^2}-\varepsilon_x^2\right|\in\{0,2\}.$

Assim, devemos ter $\varepsilon_x=1,\forall x\in\mathbb{R},$ donde $f(x)=x+1,\forall x\in\mathbb{R}.$

É fácil ver que $f(x)=x$ ou $f(x)=x+1$ são soluções de (*).

Nos próximos exemplos precisaremos de um pouco mais de criatividade!

Exemplo 03. (Balcânica) Encontre todas as funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tais que

$$f\left(xf\left(x\right)+f\left(y\right)\right)=\left(f\left(x\right)\right)^2+y \qquad (*)$$

para quaisquer números reais *x* e *y*.

Solução: Fazendo $x = 0$ na equação acima obtemos:

$$f\left(f\left(y\right)\right)=\left(f\left(0\right)\right)^2+y \qquad (1)$$

para todo número real *y*. De (1) podemos ver que *f* é sobrejetiva, portanto existe um número real *k* tal que $f\left(k\right)=0.$ Fazendo $x = k$ em (*), teremos $f\left(f\left(y\right)\right)=y,$ para todo número real *y*. Por outro lado, vamos trocar *x* por $f\left(x\right)$ em (*) e ver o que acontece:

$$f\left(f\left(x\right)\underbrace{f\left(f\left(x\right)\right)}_{x}+f\left(y\right)\right)=x^2+y$$

Note que o lado esquerdo da última equação é idêntico ao lado esquerdo de (*), portanto

$$\left(f\left(x\right)\right)^2+y=x^2+y \quad \therefore \quad f\left(x\right)^2=x^2,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Em particular, $f\left(0\right)=0.$

Além disso, se $x\neq 0,$ $f\left(x\right)=x$ ou $f\left(x\right)=-x,$ isto é, $f\left(x\right)/x\in\{-1,1\}.$ Temos então, para $x,y\neq 0, f\left(xf\left(x\right)+f\left(y\right)\right)=f\left(x\right)^2+y=x^2+y.$ Elevando ao quadrado, obtemos

$x^4+2x^2y+y^2=\left(x^2+y\right)^2=f\left(xf\left(x\right)+f\left(y\right)\right)^2=\left(xf\left(x\right)+f\left(y\right)\right)^2=$

$=x^2f\left(x\right)^2+2xf\left(x\right)f\left(y\right)+f\left(y\right)^2=x^4+2xf\left(x\right)f\left(y\right)+y^2,$ donde $2xf\left(x\right)f\left(y\right)=2x^2y,$ e logo $f\left(x\right)f\left(y\right)=xy,$ ou seja, $f\left(x\right)/x=\left(f\left(y\right)/y\right)^{-1}.$ Assim, $f\left(x\right)/x=1,\forall x\in\mathbb{R}$ ou $f\left(x\right)/x=-1,\forall x\in\mathbb{R},$ donde $f\left(x\right)=x,\forall x\in\mathbb{R}$ ou $f\left(x\right)=-x,\forall x\in\mathbb{R}.$

É fácil ver que essas são as soluções.

É necessário notar que de (1) concluimos que *f* devia ser sobrejetiva. Sugerimos ao leitor não familiarizado com este fato que consulte [2], lá ele encontrará a demonstração deste e de outros fatos interessantes sobre vários teoremas envolvendo composição de funções.

Exemplo 04. (RPM – 77) Encontre todas as funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tais que

$$f\left(f\left(x\right)-y\right)+f\left(y\right)=f\left(x+f\left(y\right)\right)-y \qquad (*)$$

Para quaisquer números reais *x* e *y*.

Solução: Façamos $x=y=0$ na equação dada e facilmente concluiremos que $f\left(0\right)=0.$ Agora façamos somente $y=0,$ obtendo assim:

$$f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(x\right) \qquad (1)$$

Em seguida faremos $x = 0$ em (*), veja:

$$f\left(-y\right)+f\left(y\right)=f\left(f\left(y\right)\right)-y=f\left(y\right)-y,$$

donde $f\left(-y\right)=-y,\forall y\in\mathbb{R}.$ Assim, $f\left(t\right)=t,$ onde *t* é um número real qualquer. É fácil ver que esta é a solução da equação.
Antes de irmos para a próxima etapa exercite as idéias anteriores nos seguintes problemas:

01. (Romênia) Para todo inteiro positivo *n,* seja $f\left(n\right)=\dfrac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$

Calcule $f\left(1\right)+f\left(2\right)+f\left(3\right)+...+f\left(39\right)+...+f\left(40\right).$

03. (Coréia) Seja $f\left(x\right)=\dfrac{2}{4^x+2}$ para todo *x* real. Determine:

$$f\left(\frac{1}{2001}\right)+f\left(\frac{2}{2001}\right)+...+f\left(\frac{2000}{2001}\right).$$

04. (Brasil) Seja $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{1+x^2}.$ Calcule

$$\begin{gathered}f\left(\frac{1}{1}\right)+f\left(\frac{2}{1}\right)+f\left(\frac{3}{1}\right)+...+f\left(\frac{n}{1}\right)\\+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{2}{2}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)+...+f\left(\frac{n}{2}\right)\\+...\\+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+...+f\left(\frac{n}{n}\right).\end{gathered}$$

05. (Croácia) Seja f uma função definida por $f(x)=\frac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}$, com $a\in\mathbb{R}_+^*$.

Determine:

$$S=f\left(\frac{1}{2001}\right)+f\left(\frac{2}{2001}\right)+f\left(\frac{3}{2001}\right)+\ldots+\left(\frac{2000}{2001}\right).$$

06. (Holanda) Seja f uma função definida por $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}}$. Determine o valor de

$$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(1921).$$

07. Considerando a função $f:\left]0,\infty\right]\to\mathbb{R}$ tal que $f(a)=1$, sendo a um número real positivo. Prove que, se

$$f(x)f(y)+f\left(\frac{a}{x}\right)f\left(\frac{a}{y}\right)=2f(xy)$$

Para x e $y\in(0,\infty)$, então f é uma função constante.

08. Seja f uma função definida por $f(n)=\frac{1}{n^4+n^2+1}$, para todo natural n.

Mostre que:

$$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+\ldots+f(100)<\frac{1}{2}.$$

2. Caracterizando a função afim

Apresentaremos a partir de agora uma ferramenta muito simples e bastante poderosa que será útil na resolução de equações funcionais cujas soluções sejam funções afins. Suponha que em determinadas equações funcionais cheguemos à seguinte expressão: $f(x+h)-f(x)=\varphi$. O Teorema abaixo, garante que se φ depender apenas de *h,* mas não de *x*, ou seja, $\varphi=\varphi(h)$, então f é uma função afim.

Teorema: Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função monótona injetiva. Se o acréscimo $f(x+h)-f(x)=\varphi(h)$ depender apenas de *h*, mas não de *x*, então f é uma função afim.

Prova: A demonstração deste Teorema irá recorrer ao Teorema fundamental da proporcionalidade (fica como exercício para o leitor procurar sua demonstração em [1]). Suporemos que a função *f* seja crescente, caso *f* seja decrescente o resultado segue por analogia. É fácil ver que $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ também é uma função crescente e que $\varphi(0)=0.$ Além disso, para quaisquer $h,k\in\mathbb{R}$ temos:

$$\begin{aligned}\varphi(h+k) &= f(x+h+k)-f(x)\\ &= f\big((x+k)+h\big)-f(x+k)+f(x+k)-f(x)\\ &= \varphi(h)+\varphi(k)\end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema fundamental da proporcionalidade, $\varphi(h)=a\cdot h,$ onde $a=\varphi(1)$ para todo $h\in\mathbb{R}.$ Daí temos

$$f(x+h)-f(x)=\varphi(h)=a\cdot h$$

Fazendo $x=0$ na equação acima obtemos:

$$f(h)-f(0)=a\cdot h,$$

o que nos mostra que $f(h)=a\cdot h+b,$ onde $b=f(0)$ para todo $h\in\mathbb{R}.$ A recíproca também é verdadeira e fica como exercício para o leitor a sua demonstração.

Vejamos agora alguns exemplos:

Exemplo 01 (Adaptado de um problema da Estônia) Encontre todas as funções monótonas $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que satisfazem a equação

$$f\big(x+f(y)\big)=y+f(x+1),$$

para $x,y\in\mathbb{R}.$

Solução: Fazendo $x=0$ na equação dada temos

$$f\left(f\left(y\right)\right)=y+f\left(1\right), \qquad (*)$$

o que nos mostra a bijetividade da função *f*; portanto existe um número real *k* tal que $f\left(k\right)=0.$ Voltando à equação funcional dada e fazendo $y=k,$ temos

$$f\left(x+1\right)-f\left(x\right)=-k.$$

Fazendo $z=x+1$ e $h=f\left(y\right)-1,$ temos

$f\left(z+h\right)=f\left(x+f\left(y\right)\right)=y+f\left(x+1\right)=f\left(z\right)+\varphi(h),$ onde $\varphi(h)=f\left(h+1\right)-f\left(1\right).$

Pelo teorema anterior *f* é do tipo $f\left(x\right)=-kx+b,$ e é fácil ver que $b=k^2$ (pois $f\left(k\right)=0$). Agora vamos fazer $y=0$ em (*):

$$f\left(f\left(0\right)\right)=f\left(1\right)$$

Sendo $k\neq 0$ (senão *f* seria identicamente nula, o que não é possível) temos

$$f\left(k^2\right)=f\left(1\right)\Leftrightarrow k=\pm 1.$$

Para concluirmos temos que as soluções procuradas são $f\left(x\right)=\pm x+1$ e satisfazem perfeitamente as condições do problema.

Infelizmente nem sempre há no problema uma hipótese de monotonicidade, nem é possível provar de modo fácil que a função procurada é monótona, o que muitas vezes torna a solução do problema mais complicada tecnicamente.

Exemplo 02. (Equação de Cauchy) Encontre todas as funções $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ que satisfazem as seguintes condições:

$(i)\ f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right),$ para quaisquer que sejam os números reais *x* e *y*.

$(ii)\ f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{f\left(x\right)}{x^2}$ para $x\neq 0.$

Solução: Como $\left(a-b\right)+b=a, f\left(a-b\right)+f\left(b\right)=f\left(a\right),$ e logo $f\left(a-b\right)=f\left(a\right)-f\left(b\right),\forall a,b\in\mathbb{R}.$

Temos $\dfrac{1}{1-t}-1=\dfrac{1}{\frac{1}{t}-1}$ para $t\notin\{0,1\}$. Portanto,

$$\frac{f(1-t)}{(1-t)^2}-f(1)=\frac{f\left(\frac{1}{t}-1\right)}{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2}=\frac{t^2\left(\frac{f(t)}{t^2}-f(1)\right)}{(1-t)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1)-f(t)-(1-t)^2 f(1)=f(1-t)-(1-t)^2 f(1)=f(t)-t^2 f(1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2f(t)=t^2 f(1)+f(1)-(1-t)^2 f(1)=2f(1)t. \qquad (*)$$

Assim, $f(t)=f(1)t, \forall t\notin\{0,1\}$; naturalmente, essa igualdade também vale para $t=1$. Como $f(0)=f(0-0)=f(0)-f(0)=0,$ a igualdade também vale para $t=0$. Assim, $f(t)=ct, \forall t\in\mathbb{R},$ onde $c=f(1)$. É fácil ver que todas essas funções são soluções.

Exemplo 03. (Austrália) A função *f* satisfaz as seguintes condições:

(i) para todo número racional $x, f(x)$ assume um valor real;

(ii) $f(1988)\neq f(1987)$;

(iii) $f(x+y)=f(x)f(y)-f(xy)+1,$

onde *x* e *y* são números racionais quaisquer. Mostre que $f\left(-\dfrac{1987}{1988}\right)=\dfrac{1}{1988}$.

Solução: Fazendo $x=y=0$ em (iii), teremos

$$(f(0)-1)^2=0 \therefore f(0)=1.$$

Em seguida faremos a seguinte escolha: $x = 1$ e $y = -1$ e voltaremos à condição (iii),

$$f(0)=f(1)\cdot f(-1)-f(-1)+1$$
$$f(-1)(f(1)-1)=0$$

Daí temos duas possibilidades: $f(-1)=0$ ou $f(1)=1$.

1º Caso: $f(1)=1$. Fazendo $y=1,$ em (iii):

$$f(x+1) = f(x)\cdot f(1) - f(x) + 1 = 1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Porém esta equação contradiz (ii), portanto $f(-1) = 0$.

2º Caso: $f(-1) = 0$. Fazendo $x = y = -1$, em (iii), obtemos:

$$f(-2) = f(-1)\cdot f(-1) - f(1) + 1$$

$$f(-2) = 1 - f(1) \qquad (*)$$

Fazendo $x = -2, y = 1,$, em (iii) temos:

$$f(-1) = f(-2)\cdot f(1) \underbrace{- f(-2) + 1}_{+f(1)}$$

$$f(1)\left[f(-2)+1\right] = 0$$

Agora temos mais duas possibilidades.

Caso A: $f(1) = 0.$ Voltando a (iii) façamos $y = 1$:

$$f(x+1) = f(x)\cdot f(1) - f(x) + 1$$

$$f(x+1) = 1 - f(x)$$

trocando *x* por *x* + 1, obtemos

$$f(x+2) = f(x) \qquad (**)$$

Assim, $f(2) = f(0) = 1,$ e tomando $x = \frac{1}{2}$ e $y = 2$ em (iii) encontraremos uma contradição, veja:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f(2) - f(1) + 1 = f\left(\frac{1}{2}\right) + 1,$$

absurdo.

Caso B: $f(-2) = -1$. Usando este fato em (*) temos:

$$f(1) = 2$$

Por fim fazendo $y = 1$ em (iii) chegaremos à seguinte conclusão:

$$f(x+1) = f(x) + 1 \text{ (oba!).}$$

Daí segue que $f(x+k) = f(x) + k$ para todo *k* inteiro; como $f(0) = 1,$ temos $f(k) = k+1$ para todo *k* inteiro.

Se $x = p/q$, com p, q inteiros, $q \neq 0$, fazendo $y = q$ em (iii), obtemos $f(x)+q=f(x+q)=(q+1)f(x)-f(qx)+1=(q+1)f(x)-f(p)+1=(q+1)f(x)-p$, donde $qf(x) = p+q$, e logo $f(x) = \dfrac{p+q}{q} = \dfrac{p}{q}+1 = x+1$, para todo $x \in \mathbb{Q}$.

Em particular, $f\left(-\dfrac{1987}{1988}\right) = -\dfrac{1987}{1988}+1 = \dfrac{1}{1988}$.

Exemplo 04. (Seletiva Búlgara para a IMO) Encontre todas as funções $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, tais que

$$f\left(x^2+y\right) = \left(f(x)\right)^2 + \frac{f(xy)}{f(x)}$$

para quaisquer x, $y \in \mathbb{R}^*$, com $y \neq -x^2$.

Fazendo $y = 1$, obtemos $f\left(x^2+1\right) = f(x)^2+1, \forall x \in \mathbb{R}^*$.

Fazendo $x = 1$, obtemos $f(y+1) = f(1)^2 + f(y)/f(1), \forall y \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$.

Assim, $f(2) = f(1)^2+1$ e $f(5) = f\left(2^2+1\right) = f(2)^2+1 = \left(f(1)^2+1\right)^2+1$.

Por outro lado, $f(3) = f(2+1) = f(1)^2 + f(2)/f(1) = f(1)^2 + \dfrac{f(1)^2+1}{f(1)}$,

$$f(4) = f(3+1) = f(1)^2 + f(3)/f(1) = f(1)^2 + f(1) + \frac{f(1)^2+1}{f(1)^2}$$

$f(5) = f(4+1) = f(1)^2 + f(4)/f(1) = f(1)^2 + f(1) + 1 + \dfrac{f(1)^2+1}{f(1)^3}$, e logo

$$f(1)^4 + 2f(1)^2 + 2 = \left(f(1)^2+1\right)^2 + 1 = f(5) = f(1)^2 + f(1) + 1 + \frac{f(1)^2+1}{f(1)^3},$$

donde $f(1)^4 + f(1)^2 + 1 = \dfrac{f(1)^4+f(1)^2+1}{f(1)^3}$, e, como $f(1)^4+f(1)^2+1>0, f(1)^3=1$, e portanto $f(1)=1$.

Assim, temos $f(y+1)=f(1)^2+f(y)/f(1)=f(y)+1, \forall y\in\mathbb{R}^*, \quad y\neq -1.$ Assim, $f(x^2+1)=f(x^2)+1, \forall x\in\mathbb{R}^*,$ donde $f(x^2)+1=f(x)^2+1,$ e logo $f(x^2)=f(x)^2, \forall x\in\mathbb{R}^*.$ Em particular, $f(x)>0, \forall x>0.$

Fazendo $y=-1,$ obtemos $f(x^2-1)=f(x)^2+f(-x)/f(x)=f(x^2)+f(-x)/f(x),$ $\forall x\in\mathbb{R}^*\setminus\{-1,1\}.$ Como $f(x^2)=f(x^2-1+1)=f(x^2-1)+1,$ segue que $f(-x)/f(x)=-1, \forall x\in\mathbb{R}^*\setminus\{-1,1\},$ i.e., $f(-x)=-f(x), \forall x\in\mathbb{R}^*\setminus\{-1,1\}.$ Como $f(-1)=f(-2+1)=f(-2)+1,$ e $f(-2)=-f(2)=-(f(1)^2+1)=-2,$ temos também $f(-1)=-1=-f(1).$ Assim, $f(-x)=-f(x), \forall x\in\mathbb{R}^*.$ Vamos mostrar que $f(a)=a, \forall a>0,$ donde $f(x)=x, \forall x\in\mathbb{R}^*.$

Se $x>0, |y|<x^2, f(x^2+y)=f(x^2)+f(xy)/f(x)$ e $f(x^2-y)=f(x^2)+f(-xy)/f(x)$ $=f(x^2)-f(xy)/f(x),$ donde $f(x^2+y)+f(x^2-y)=2f(x^2),$ ou seja, se $u, u-h, u+h>0, f(u+h)+f(u-h)=2f(u).$ Assim, se $(a_n)_{n\geq 0}$ é uma progressão aritmética de termos positivos, $(f(a_n))_{n\geq 0}$ também é uma progressão aritmética de termos positivos. Em particular, $\forall q\in\mathbb{N}^*, (f(p/q))_{p\in\mathbb{N}^*}$ é uma progressão aritmética de termos positivos. Como $f(q/q)=f(1)=1$ e $f(2q/q)=f(2)=2,$ segue que $f(p/q)=p/q, \forall p,q\in\mathbb{N}^*.$

Dado $a>0,$ suponha por absurdo que $f(a)\neq a.$ Vamos supor que $f(a)>a$ (o caso $f(a)<a$ é análogo). Sejam $p,q\in\mathbb{N}^*$ com $a<p/q<f(a).$ Seja $x=\sqrt{a}>0,$ e seja $y=p/q-a>0.$

Temos $p/q=f(p/q)=f(x^2+y)=f(x^2)+f(xy)/f(x)>f(x^2)=f(a),$ absurdo. Assim, $f(a)=a, \forall a>0,$ c.q.d..

Exercícios

01. Determine todas as funções $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^+$ que satisfazem as condições abaixo:

(i) $f(x+1)=f(x)+1,$ para quaisquer que sejam os números x e $y\in\mathbb{Q}^+.$

(ii) $f\left(x^3\right)=\left(f\left(x\right)\right)^3$, para $x\in\mathbb{Q}^+$.

02. (Austrália) Prove que existe apenas uma função $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*$ que satisfaz as seguintes condições:

(i) $f\left(x\right)=xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$ para todo número real x não-nulo;

(i) $f\left(x\right)+f\left(y\right)=1+f\left(x+y\right)$, para todos os pares $\left(x,y\right)$ de reais não-nulos tais que $x\neq -y$.

03. (Austrália) São dados m e n inteiros maiores do que 1 com m par e uma função f que assume apenas valores reais, e que está definida nos reais não negativos, satisfazendo as condições abaixo:

(i) para quaisquer $x_1,x_2,x_3,x_4,...,x_n$,

$$f\left(\frac{x_1^m+x_2^m+x_3^m+...+x_n^m}{n}\right)=\frac{\left[f\left(x_1\right)\right]^m+\left[f\left(x_2\right)\right]^m+\left[f\left(x_3\right)\right]^m+...+\left[f\left(x_n\right)\right]^m}{n};$$

(ii) $f\left(1986\right)\neq 1986$;

(iii) $f\left(1988\right)\neq 0$.

Prove que $f\left(1987\right)=1$.

Bibliografia:

[1] Lima, Elon Lages *et al.* A Matemática do Ensino Médio. Rio de Janeiro. SBM, Coleção Professor de Matemática-2000.
[2] Marcelo Rufino e Márcio Rodrigo. Coleção Elementos da Matemática, vol. 01. Editora VestSeller-2010.
[3] www.obm.org.br

COMO É QUE FAZ?

Descubra um quadrado $n \times n$, com $n > 1$ natural, dividido em n^2 quadrados unitários, preenchidos com quadrados perfeitos distintos e não nulos, de modo que a soma dos valores de cada coluna e de cada linha também sejam quadrados perfeitos. (Proposto por Marta de Fátima Severiano).

SOLUÇÃO

Por exemplo o quadrado correspondente à matriz abaixo:

$\begin{pmatrix} 4^2 & 23^2 & 52^2 \\ 32^2 & 44^2 & 17^2 \\ 47^2 & 28^2 & 16^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 529 & 2704 \\ 1024 & 1936 & 289 \\ 2209 & 784 & 256 \end{pmatrix}$ para a qual as somas dos elementos

de todas as linhas e de todas as colunas são iguais a $3249 = 57^2$.

Há infinitas matrizes com essas propriedades. Por exemplo, para qualquer inteiro k, a matriz

$$\begin{pmatrix} 2^2 & (14+10k)^2 & (5+14k+5k^2)^2 \\ (11+10k+3k^2)^2 & (2+10k+4k^2)^2 & (10+8k)^2 \\ (10+10k+4k^2)^2 & (5+10k+3k^2)^2 & (10+6k)^2 \end{pmatrix}$$

é tal que as somas dos elementos de todas as linhas e de todas as colunas são iguais a $(15+14k+5k^2)^2$.

SOLUÇÕES DE PROBLEMAS PROPOSTOS

Publicamos aqui algumas das respostas enviadas por nossos leitores.

143) Determime todas as funções $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(xy) = g(x^3 + y) + h(x + y^3), \forall x, y \in \mathbb{R}.$

SOLUÇÃO DE ZOROASTRO AZAMBUJA NETO (RIO DE JANEIRO – RJ)

Chamemos de (*) a equação funcional $f(xy) = g(x^3 + y) + h(x + y^3).$

Fazendo $x = 0$ em (*), obtemos $f(0) = g(y) + h(y^3), \forall y \in \mathbb{R},$ e, fazendo $y = 0,$ temos $f(0) = g(x^3) + h(x), \forall x \in \mathbb{R}.$ Assim, $h(x) = f(0) - g(x^3),$ e (*) se escreve como $f(xy) = f(0) + g(x^3 + y) - g\left((x + y^3)^3\right), \forall x, y \in \mathbb{R}.$ Fazendo $x = 0,$ obtemos $f(0) = f(0) - g(y) + g(y^9),$ donde $g(y^9) = g(y), \forall y \in \mathbb{R}.$ Segue facilmente por indução que $g\left(y^{9^k}\right) = g(y), \forall y \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}.$

Fazendo $x = -y^3$ em (*), temos $f(-y^4) = g(y - y^9) + h(0),$ e trocando y por $-y$, temos $f(-y^4) = g(-y + y^9) + h(0),$ donde $g(y - y^9) = g(-y + y^9) = g(-(y - y^9)), \forall y \in \mathbb{R}$

Como a função $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $t(y) = y - y^9$ é sobrejetiva, segue que $g(-z) = g(z), \forall z \in \mathbb{R}.$

Dado $a \in (0, \sqrt{3}/3),$ vamos mostrar que existem $x, y \in \mathbb{R}$ com $xy = a$ e $x^3 + y = (x + y^3)^3$. Assim, teremos $f(a) = f(xy) = f(0) + g(x^3 + y) - g\left((x + y^3)^3\right) = f(0).$

Como $(x + y^3)^3 = x^3 + 3x^2y^3 + 3xy^6 + y^9,$ a igualdade $x^3 + y = (x + y^3)^3$ pode ser escrita como $y^9 + 3xy^6 + 3x^2y^3 - y = 0,$ e, de $xy = a,$ temos $xy^6 = ay^5$ e $x^2y^3 = a^2y,$ logo a igualdade se torna $y^9 + 3ay^5 + (3a^2 - 1)y = 0.$ Dividindo por y temos $y^8 + 3ay^4 + (3a^2 - 1) = 0.$ Para $y = 0$ temos $y^8 + 3ay^4 + (3a^2 - 1) = 3a^2 - 1 < 0,$ e para $y = 1$ temos $y^8 + 3ay^4 + (3a^2 - 1) = 3a + 3a^2 > 0.$ Assim, existe y com $0 < y < 1$ tal que $y^8 + 3ay^4 + (3a^2 - 1) = 0$, e, tomando $x = a/y$, temos

$y^9+3xy^6+3x^2y^3-y=y\left(y^8+3xy^5+3x^2y^2-1\right)=y\left(y^8+3ay^4+\left(3a^2-1\right)\right)=0.$ Isto prova que $f(a)=f(0)$ para todo a com $0\le a<\sqrt{3/3}.$

Assim, se $c>0,\quad x,y\ge 0,\quad x+y^3=c$ e $xy<\sqrt{3/3},$ temos, por (*), $g\left(\left(c-y^3\right)^3+y\right)=g\left(x^3+y\right)=f(xy)-h\left(x+y^3\right)=f(0)-h(c).$ Escolhendo $c=24/25$ e $0\le y\le 3/10$, temos $xy\le c\cdot\frac{3}{10}=\frac{24}{25}\cdot\frac{3}{10}<\frac{\sqrt{3}}{3}$, sempre que $x,y\ge 0$ e $x+y^3=c.$ Para $y=0,\ \left(c-y^3\right)^3+y=c^3=(24/25)^3<9/10,$ e, para $y=3/10, \left(c-y^3\right)^3+y=\left(24/25-(3/10)^3\right)^3+3/10>11/10.$ Assim, dado z com $9/10\le z\le 11/10$, existe $y\in[0,3/10]$ com $\left(c-y^3\right)^3+y=z,$ e logo $g(z)=g\left(\left(c-y^3\right)^3+y\right)=f(0)-h(c)=f(0)-h(24/25).$ Ou seja, se $d=f(0)-h(24/25)$, temos $g(z)=d,\forall z\in[9/10,11/10].$

Dado $w>0,$ existe $k\in\mathbb{N}$ com $(9/10)^{9^k}<w<(11/10)^{9^k}$, e logo existe $z\in[9/10,11/10]$ com $z^{9^k}=w.$ Assim, $g(w)=g\left(z^{9^k}\right)=g(z)=d$. Também temos $g(-w)=g(w)=d$. Assim $g(w)=d,\forall w\in\mathbb{R}^*$. Analogamente, existe $\tilde{d}\in\mathbb{R}$ tal que $h(w)=\tilde{d}\ \forall w\in\mathbb{R}^*$ (os papéis de *g* e *h* em (*) são análogos).

Assim, $f(-16)=f\left(-2^3\cdot 2\right)=g\left(2-2^9\right)+h(0)=d+h(0),$ e, por outro lado, $f(-16)=f(-4\cdot 4)=g\left(4-4^3\right)+h\left(4^3-4\right)=d+\tilde{d},$ donde $d+h(0)=d+\tilde{d}$, e logo $h(0)=\tilde{d}$. Analogamente, $g(0)=d$. Assim, g e h são constantes, donde $f(x)=f(x\cdot 1)=g\left(x^3+1\right)+h(x+1)=d+\tilde{d},\forall x\in\mathbb{R},$ ou seja, *f* é constante. Como dadas quaisquer constantes $d,\tilde{d}\in\mathbb{R},$ se $g(x)=d,\forall x\in\mathbb{R}, h(x)=\tilde{d},\forall x\in\mathbb{R}$ e $f(x)=d+\tilde{d},\forall x\in\mathbb{R},$ a condição (*) do enunciado é satisfeita, essas são todas as soluções da equação funcional (*).

144) Seja $x \geq 1$ um número racional tal que existe uma constante $c \neq 0$ e uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ de inteiros tal que $\lim_{n\to\infty}(cx^n - a_n) = 0.$ Prove que *x* é inteiro.

SOLUÇÃO DE ASDRÚBAL PAFÚNCIO SANTOS (BOTUCATU – SP)

Seja $x = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{N}^*$, $p \geq q$ e $mdc(p,q) = 1.$

Se $\lim_{n\to\infty}(cx^n - a_n) = 0,$ temos $\lim_{n\to\infty}(c \cdot p \cdot x^n - p \cdot a_n) = 0,$ e $\lim_{n\to\infty}(c \cdot q \cdot x^{n+1} - q \cdot a_{n+1}) = 0,$ e, como $qx = p,$ $c \cdot q \cdot x^{n+1} = c \cdot p \cdot x^n,$ donde $\lim_{n\to\infty}(p \cdot a_n - q \cdot a_{n+1}) = 0.$ Como $p \cdot a_n - q \cdot a_{n+1}$ é sempre inteiro, segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $p \cdot a_n - q \cdot a_{n+1} = 0, \forall n \geq n_0.$ Assim, $a_{n+1} = \left(\frac{p}{q}\right) \cdot a_n, \forall n \geq n_0,$ donde $a_n = a_{n_0}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-n_0}, \forall n \geq n_0.$ Como $mdc(p,q) = 1,$ $q^{n-n_0} \mid a_{n_0}, \forall n \geq n_0,$ e logo *q* = 1 ou $a_{n_0} = 0.$ Caso $a_{n_0} = 0,$ teríamos $a_n = a_{n_0}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-n_0} = 0, \forall n \geq n_0,$ o que é um absurdo, pois $\lim_{n\to\infty}(cx^n - a_n) = 0$ e $|cx^n| \geq |c| > 0.$

Assim, $q = 1$ e $x = p/q$ é inteiro.

Obs: É importante a hipótese de *x* ser racional.

De fato, $a_n = (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$ satisfaz $a_1 = 2,$ $a_2 = 6$ e $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n, \forall n \geq 1,$ e logo é inteiro, para todo $n \geq 1.$

Por outro lado, como $|1-\sqrt{2}| < 1,$ $\lim_{n\to\infty}\left((1+\sqrt{2})^n - a_n\right) = 0.$

149) a) Deseja-se organizar um torneio de futebol com *n* times $(n \geq 2)$ em que cada time joga uma vez contra cada um dos outros, dividido em um certo número de rodadas. Em cada rodada cada time joga no máximo uma partida.

Prove que, se *n* é ímpar, é possível organizar um tal torneio com *n* rodadas e, se *n* é par, é possível organizar um tal torneio com *n* – 1 rodadas.

b) Uma matriz $n \times n$ é preenchida com elementos do conjunto $S = \{1, 2, 3, ..., 2n-1\}.$ Sabe-se que, para todo $i \in \{1, 2, ..., n\},$ a *i*-ésima linha e a *i*-ésima coluna contêm juntas todos os elementos de *S*.

Quais os possíveis valores de n?

SOLUÇÃO DE JOSÉ DE ALMEIDA PANTERA (RIO DE JANEIRO – RJ)

a) Se n é ímpar, podemos organizar o torneio da seguinte forma: para $1 \le k \le n$, na rodada k são realizadas todas as partidas entre jogadores i e j (os jogadores são numerados de 1 a n) tais que $i + j \equiv k \pmod{n}$. Nessa rodada exatamente um dos jogadores não joga (fica "bye"): o jogador a_k, com $2a_k \equiv k \pmod{n}$. Para cada par de jogadores $\{i, j\}$, existe exatamente um k, com $1 \le k \le n$, tal que $i + j \equiv k \pmod{n}$: i joga contra j na k-ésima rodada.

Se n é par, $n-1$ é ímpar, e construímos um torneio de $n-1$ rodadas como acima, em que os jogadores $1, 2, \ldots, n-1$ jogam entre si. Para cada k com $1 \le k \le n-1$, o jogador a_k, com $1 \le a_k \le n-1$ tal que $2a_k \equiv k \pmod{n-1}$, não joga contra nenhum dos jogadores $1, 2, \ldots, n-1$. Completamos o torneio fazendo com que na rodada k, para $1 \le k \le n-1$, o jogador a_k jogue contra o jogador n. Como $\{a_k, 1 \le k \le n-1\} = \{k; 1 \le k \le n-1\}$, o torneio satisfaz as condições do enunciado.

b) A resposta é: os inteiros positivos pares.

De fato, se n é par, existe um torneio de $n-1$ rodadas com n jogadores em que todos jogam contra todos. Construímos uma matriz $(a_{ij})_{1 \le i, j \le n}$ da seguinte forma:

Se $i > j$, tomamos $a_{ij} \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ tal que os jogadores i e j se enfrentam na rodada a_{ij}, e definimos $a_{ji} = a_{ij} + n$. Finalmente, definimos $a_{ii} = n$ para $1 \le i \le n$. É fácil ver que esta matriz satisfaz as condições do enunciado.

Se $n \ge 3$ é ímpar, suponha por absurdo que existe uma tal matriz. Como $2n-1 > n$, existe $k \le 2n-1$ tal que $a_{jj} \ne k, \forall j \le n$. Temos então

$$n = \sum_{j=1}^{n} \left(\left| \{1 \le i \le n \mid a_{ji} = k\} \right| + \left| \{1 \le i \le n \mid a_{ij} = k\} \right| \right) =$$

$$= 2 \left| \{(i, j); 1 \le i, j \le n, a_{ij} = k\} \right|,$$

absurdo, pois n é ímpar.

151) Encontre todas as soluções reais positivas de $x^{x^{1/2}} = \frac{1}{2}$.

SOLUÇÃO DE BRUNO PEDRA (RIO DE JANEIRO – RJ)

Seja $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ dada por $f(x) = x^{x^{1/2}}$.

Temos

$\ln[f(x)] = x^{\frac{1}{2}} \ln x.$

Derivando, obtemos

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2} x^{\frac{-1}{2}} \ln x + x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} f(x) \cdot x^{\frac{-1}{2}} (\ln x + 2)$$

$0 < x < e^{-2} \to f'(x) < 0 \to f$ decrescente em $(0, e^{-2})$

$x > e^{-2} \to f'(x) > 0 \to f$ é crescente em (e^{-2}, ∞)

$x = e^{-2} \to$ ponto de mínimo, $f(e^{-2}) = e^{\frac{-2}{e}}$.

$2 < e < 4 \to 4 < e^2 < 16 \to \frac{1}{16} < e^{-2} < \frac{1}{4}.$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{2}.$

$\frac{1}{4} \in (e^{-2}, \infty)$ e $\frac{1}{16} \in (0, e^{-2}).$

Em $(0, e^{-2})$ temos apenas $x = \frac{1}{16}$ como raiz, uma vez que f é estritamente decrescente.

Em (e^{-2}, ∞) temos apenas $x = \frac{1}{4}$ como raiz, uma vez que f é estritamente crescente.

Assim, o conjunto das soluções reais positivas da equação é $S = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right\}$.

152) Sejam a, b, c números reais positivos tais que $a + b + c = 1$.

Prove que $\frac{a - bc}{a + bc} + \frac{b - ca}{b + ca} + \frac{c - ab}{c + ab} \le \frac{3}{2}$.

SOLUÇÃO DE CARLOS ALBERTO DA SILVA VICTOR (NILÓPOLIS – RJ)

Provar que $\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}\le\frac{3}{2}$ é equivalente a $1-\frac{2bc}{a+bc}+1-\frac{2ac}{b+ac}+1-\frac{2ab}{c+ab}\le\frac{3}{2}$ que é equivalente a

I) $\frac{ab}{c+ab}+\frac{bc}{a+bc}+\frac{ac}{b+ac}\ge\frac{3}{4}$, e já que

$a+b+c=1$, teremos: $\begin{cases} c+ab=(1-a)(1-b) \\ a+bc=(1-b)(1-c) \\ b+ac=(1-a)(1-c) \end{cases}$

Daí (I) ficará escrita da seguinte forma

$\frac{ab}{(1-a)(1-b)}+\frac{bc}{(1-b)(1-c)}+\frac{ac}{(1-a)(1-c)}\ge\frac{3}{4}$ que é equivalente a:

$4\big(ab(1-c)+bc(1-a)+ac(1-b)\big)\ge 3(1-a)(1-b)(1-c)$

ou

$4(ab+bc+ac-3abc)\ge 3(ab+ac+bc-abc)$, pois $a+b+c=1$ ou $ab+ac+bc\ge 9abc$, que é equivalente a provar que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 9.$

Das desigualdades das médias aritmética e harmônica temos:

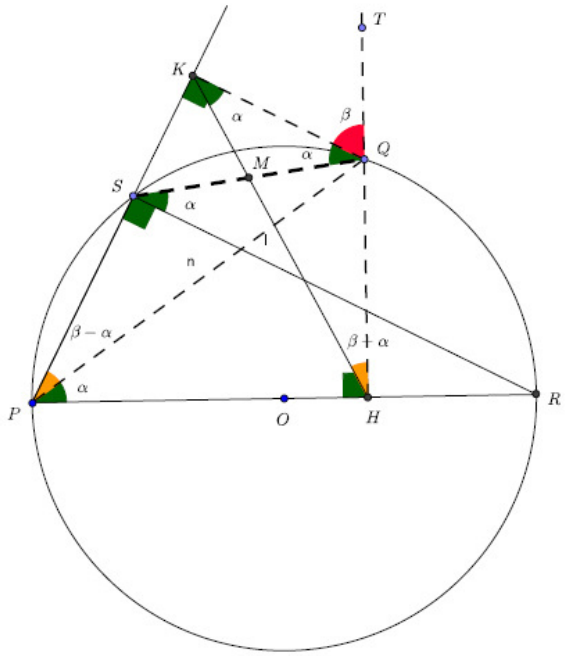
$\frac{1}{3}=\frac{a+b+c}{3}\ge\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$, ou seja $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 9.$

153) Quatro pontos *P,* Q, *R*, *S* pertencem a um círculo de tal forma que o ângulo $P\hat{S}R$ é reto. Sejam *H* e *K* as projeções de *Q* nos segmentos *PR* e *PS,* respectivamente. Prove que a reta *HK* divide o segmento *QS* ao meio.

SOLUÇÃO DE MARCELO RIBEIRO DE SOUZA (RIO DE JANEIRO – RJ)

Considere a semireta de origem em *H* passando por *Q* e tomemos um ponto *T* qualquer, situado acima de *Q*. Tracemos também o segmento $\overline{PQ}$. Chamemos *M* o ponto de interseção entre o segmento $\overline{QS}$ e $\overline{HK}$.

Agora vamos marcar os ângulos e nomeá-los: $\angle KQS=\alpha, \angle KQT=\beta$, conforme o desenho a seguir:



Note que a reta que contém o segmento $\overline{KQ}$ é paralela à reta que contém o segmento $\overline{SR}$, assim sendo, são alternos internos os ângulos $\angle KQS = \angle QSR = \alpha$. Além disso, $\angle QPR$ "olha" para o arco QR, portanto, temos $\overline{QPR} = \alpha$. Como o quadrilátero $KQHP$ é circunscrível, $\angle TQK = \angle KPH = \beta$, portanto, podemos escrever $\angle KPQ = \beta - \alpha$. Ainda pelo fato de $KQHP$ ser circunscrível, devemos ter $\angle KPQ = \angle KHQ = \beta - \alpha$. Finalmente, sabemos que $\angle QHK + \angle QKH = \beta$, ou seja, $\angle QKM = \alpha$. Como o triângulo QKS é retângulo, devemos ter $\overline{QM} = \overline{KM} = \overline{MS}$, assim, temos M ponto médio de $\overline{QS}$.

154) Determine todas as funções $f:\mathbb{Q} \to \mathbb{R} \cap [0,+\infty)$ tais que $f(xy) = f(x)f(y)$ e $f(x+y) \le f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{Q}$.

SOLUÇÃO DE BRUNO SALGUEIRO FANEGO (VIVEIRO – ESPANHA)

Seja $f:\mathbb{Q} \to \mathbb{R} \cap [0,+\infty)$ uma função verificando as duas propriedades do enunciado, que denominaremos multiplicatividade e desigualdade triangular, respectivamente.

Tomando $x = y = 1$ na propriedade de multiplicatividade, resulta $f(1) = f(1)f(1)$. Assim, $f(1)(f(1)-1) = 0 \Rightarrow f(1) = 0$ ou $f(1) - 1 = 0$.

Se $f(1) = 0$, então $0 \le f(n) = f\left(\overbrace{1+\ldots+1}^{n \text{ vezes}}\right) = \overbrace{f(1)+\ldots+f(1)}^{n \text{ vezes}} = nf(1) = n \cdot 0 = 0 \Rightarrow$

$f(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f\left(\frac{a}{b}\right) = f\left(a\frac{1}{b}\right) = f(a)f\left(\frac{1}{b}\right) = 0, \ \forall a \in \mathbb{N}, \ b \in \mathbb{Z}, \ b \ne 0,$ quer dizer, *f* é a função nula, que é multiplicativa e verifica a desigualdade triangular, logo é uma solução válida.

Supomos então, no que segue, que $f(1) = 1$.

Então
$1 = f(1) = f(-1 \cdot (-1)) = f(-1)f(-1) = f(-1)^2 \Rightarrow f(-1) \in \{-1,1\} \Rightarrow f(-1) = 1.$
Daí segue que $f(-x) = f(-1)f(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{Q}.$

Além disso, $1 = f(1) = f\left(b\frac{1}{b}\right) = f(b)f\left(\frac{1}{b}\right) \Rightarrow f(b) \ne 0, f\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{f(b)}, \forall b \ne 0$

$\Rightarrow f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a)f\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{f(a)}{f(b)}, \forall a,b \in \mathbb{N}, b \ne 0$ e

$f(x^n) = f\left(\overbrace{x \cdot \ldots \cdot x}^{n \text{ vezes}}\right) = \overbrace{f(x) \cdot \ldots \cdot f(x)}^{n \text{ vezes}} = f(x)^n \ \forall x \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Também temos $f(0) = f(0)f(0)$, donde $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Se $f(0) = 1$, $1 = f(0) = f(0;x) = f(0) \cdot f(x) = 1 \cdot f(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{Q}.$ Fixemos agora um número primo *p* e um $0 < \alpha < 1$ e escrevamos $x \in \mathbb{Q}^*$ como $x = p^n \frac{a}{b}$, sendo $n \in \mathbb{Z}$ e $a,b \in \mathbb{N}$ coprimos com *p* e definamos $f(x) = f\left(p^n \frac{a}{b}\right) = \alpha^n$. Então *f* satisfaz a propriedade multiplicativa e a desigualdade triangular, pois se $x = p^m \frac{a}{b}$ e $y = p^n \frac{c}{d}$, então $f(xy) = f\left(p^{m+n} \frac{ac}{bd}\right) = \alpha^{m+n} = \alpha^m \alpha^n = f(x)f(y)$ e

$$f(x+y)=f\left(p^{\min\{m,n\}}\frac{*}{bd}\right)=f\left(p^{\min\{m,n\}}\right)f\left(\frac{*}{bd}\right)\le\alpha^{\min\{m,n\}}=m\acute{a}x\{f(x),f(y)\}\le f(x)+f(y).$$

Portanto, um número racional é pequeno em relação a f se e só se é divisível por uma potência grande de *p*.

Dizemos agora que duas funções $f,g:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}\cap[0,+\infty)$ satisfazendo a multiplicatividade e a desigualdade triangular são equivalentes se $f=g^c$ para alguma contante $c>0.$ A função para a qual $\alpha=\frac{1}{p}$ será denotada por f_p.

Provaremos a seguir que qualquer função não nula é não constante igual a 1 $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}\cap[0,+\infty)$ verificando a multiplicatividade e a desigualdade triangular e distinta da função $\mathbb{Q}\to\mathbb{R}\cap[0,+\infty)$ dada por

$x\to\begin{cases}0, & x=0,\\ 1, & x\ne 0\end{cases}$ que denominaremos função trivial, é equivalente à função valor absoluto ou a uma função f_p para algum *p,* ficando assim resolvido o problema.

Sejam $a,b,n\in\mathbb{N},\ a\ge 2,\ b\ge 2$ e escrevemos b^n na base a: $b^n=c_0+\sum_{i=1}^{m}c_ia^i$, com $0\le c_i\le a-1.$ Seja $M=\max\{f(a-1),...,f(1)\}$; então

$$f(b)^n f(b^n)\le f(c_0)+\sum_{i=1}^{m}f(c_i)f(a)^i\le(m+1)M\max\left\{1,f(a),f(n)^2,...,f(a)^m\right\}\le$$
$$\le(n\log_a b+1)M\max\left\{1,f(a)^m\right\}.$$

Tomando raízes de índice n e fazendo tender n a infinito, resulta $f(b)\le\max\left\{1,f(a)^{\log_a b}\right\}.$

1) Se $f(b)>1$ para algum $b\in\mathbb{N},\ b\ge 2,$ obtemos $f(b)\le\max\left\{1,f(a)^{\log_a b}\right\}=f(a)^{\log_a b}$, donde $f(a)>1,\ \ \forall a\in\mathbb{N},\ a\ge 2.$

Intercambiando *a* e *b* em (*), resulta $f(a)\le f(b)^{\log_b a}$, logo $f(b)^{\frac{1}{\log b}}=f(a)^{\frac{1}{\log a}}$ ou equivalentemente, $f(a)=a^{\lambda}$ para todos os $a\ge 1$ e algum λ independente de *a*, sendo então *f* equivalente à função valor absoluto. Para que a desigualdade triangular seja verificada, é necessário e suficiente que $0<\lambda\le 1.$ Temos então $f(x)=|x|^{\lambda},\forall x\in\mathbb{Q}.$

2) Caso contrário, quer dizer, se $f(b)\le 1$ para todos os $b\in\mathbb{N},\ b\ge 1,$ existe um $b\ge 2$ tal que $f(b)<1,$ pois em caso contrário f é a função trivial ou a função constante igual a 1. Tomemos um desses b´s e escrevamos $b=p_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{n_k}$. Então $1>f(b)=f(p_1)^{n_1}\cdot\ldots\cdot f(p_k)^{n_k}$, donde existe p primo igual a um dos p_j tal que $f(p)<1.$ Basta provar que $f(q)=1$ para todos os primos $q\ne p,$ de onde se deduzirá que f é equivalente a f_p. Suponhamos que $f(p)<1$ e $f(q)<1$ para primos $p\ne q.$ Tomemos $m,n\ge 1$ tais que $f(p^m)<\frac{1}{2}$ e $f(q^n)<\frac{1}{2}.$ Como p^m e q^n são co-primos, então $xp^m+yq^n=1$ para alguns $x,y\in\mathbb{Z},$ donde $1\le f(x)f(p)^m+f(y)f(q)^n<\frac{1}{2}+\frac{1}{2},$ o que é uma contradição.

155) Sejam a,b e c inteiros positivos, tais que existe um triângulo T de lados $\sqrt{a},\sqrt{b}$ e $\sqrt{c}$. Prove que são equivalentes:

i) Existe um triângulo congruente a T cujos vértices têm coordenadas inteiras em $\mathbb{R}^2$.

ii) T tem área racional e existem x, y inteiros com $a=x^2+y^2$.

iii) T tem área racional e existem u, v inteiros com $mdc(a,b,c)=u^2+v^2$.

SOLUÇÃO DE JOSÉ DE ALMEIDA PANTERA (RIO DE JANEIRO – RJ)

Vamos usar mais de uma vez a existência e unicidade de fatoração para elementos de $\mathbb{Z}[i]$ (Vejam o artigo de Guilherme Fujiwara na Eureka! Nº 14).

Lema 1: Seja $D=\{x^2+y^2, x, y\in\mathbb{Z}\}$. Dado $a\in D\setminus\{0\}$, temos, para todo inteiro $b\in D\Leftrightarrow ab\in D.$

Prova: Se $a\in D\setminus\{0\}$, temos $a=x^2+y^2$ para certos inteiros $x,y.$ Se $b\in D, b=u^2+v^2$ para certos inteiros u,v e portanto $ab=(x^2+y^2)(u^2+v^2)=(xu-yv)^2+(xv+yu)^2\in D.$

Vamos provar que $ab\in D\Rightarrow b\in D$ por indução em a.

Se $a=1$ a implicação é obvia. Suponha agora que $\tilde{a}>1,\ \tilde{a}\in D$ e a implicação vale para todo $a<\tilde{a}.$

Temos $\tilde{a}=x^2+y^2=(x+iy)(x-iy).$ Seja α um fator irredutível de $x+iy.$ Suponha que $\tilde{a}b=u^2+v^2=(u+iv)(u-iv).$

Então $\alpha\left|(u+iv)(u-iv)\right.$, donde $\alpha|u+iv$ ou $\alpha|u-iv$.
Vamos supor sem perda de generalidade que $\alpha|u+iv$, ou seja, $u+iv=\alpha\beta$, com $\beta\in\mathbb{Z}[i]$. Assim, temos $\tilde{a}b=(u+iv)\left(\overline{u+iv}\right)=\alpha\beta\overline{\alpha\beta}=\alpha\overline{\alpha}\beta\overline{\beta}$. Como $\alpha|x+iy$, $\overline{\alpha}|x-iy$ e logo $\alpha\overline{\alpha}|(x+iy)(x-iy)=\tilde{a}$. Se $\alpha=r+si$, $\alpha\overline{\alpha}=(r+si)(r-si)=r^2+s^2>1$. Assim, $c=\dfrac{\tilde{a}}{r^2+s^2}=\dfrac{\tilde{a}}{\alpha\overline{\alpha}}<\tilde{a}$, e $cb=\dfrac{\tilde{a}b}{\alpha\overline{\alpha}}=\beta\overline{\beta}\in D$ (de fato, se $\beta=m+ni, \beta\overline{\beta}=m^2+n^2\in D$). Assim, por hipótese de indução, $b\in D$.

Lema 2: Seja T um triângulo cujos vértices têm coordenadas inteiras em $\mathbb{R}^2$ e cujos lados medam $\sqrt{a},\sqrt{b}$ e $\sqrt{c}$ (com a, b, c inteiros positivos). Então, se $d=mdc(a,b,c)$, existe um triângulo $\widetilde{T}$ cujos vértices também têm coordenadas inteiras em $\mathbb{R}^2$ e cujos lados medem $\sqrt{a/d},\sqrt{b/d}$ e $\sqrt{c/d}$. Em particular, os inteiros d, a/d, b/d e c/d pertencem a $D=\{x^2+y^2, x, y\in\mathbb{Z}\}$.

Prova: Vamos provar a afirmação por indução em $d=mdc(a,b,c)$.
Para $d=1$ não há o que provar. Se $d>1$, podemos supor sem perda de generalidade que um dos vértices de T é $(0,0)$ (senão fazemos uma translação). Sejam (u,v) e (r,s) os outros vértices de T. Temos então (digamos) $u^2+v^2=a$, $r^2+s^2=b$ e $(u-r)^2+(v-s)^2=c$. Seja α um fator irredutível de d em $\mathbb{Z}[i]$. Temos então que $\alpha|a=u^2+v^2=(u+iv)(u-iv)$. Podemos supor sem perda de generalidade que $\alpha|u+iv$. Temos também que $\alpha|b=r^2+s^2=(r+is)(r-is)$, donde $\alpha|r+is$ ou $\alpha|r-is$.
Além disso, $\alpha|c=(u-r)^2+(v-s)^2=((u+iv)-(r+is))((u-iv)-(r-is))$, donde $\alpha|(u+iv)-(r+is)$ ou $\alpha|(u-iv)-(r-is)$. Temos dois casos:

i) $\alpha|r+is$

ii) $\alpha\nmid r+is$. Nesse caso, $\alpha|r-is$, donde $\overline{\alpha}|r+is$, e não podemos ter $\alpha|(u+iv)-(r+is)$, pois, como $\alpha|u+iv$, teríamos $\alpha|r+is$, absurdo.

Portanto, $\alpha \mid (u - iv) - (r - is)$, e logo $\overline{\alpha} \mid (u + iv) - (r + is)$, donde, como $\overline{\alpha} \mid r + is$, $\overline{\alpha} \mid u + iv$.

Assim, no caso i), $\alpha \mid u + iv$ e $\alpha \mid r + is$, e, no caso ii), $\overline{\alpha} \mid u + iv$ e $\overline{\alpha} \mid r + is$. Dividindo os vértices de T (identificados com os números complexos $0, u + iv$ e $r + is$, respectivamente) por α, no caso i), ou por $\overline{\alpha}$, no caso ii) obtemos um triângulo T' (cujos vértices têm coordenadas inteiras) semelhante a T. Se $\alpha = m + in$, e $k = m^2 + n^2 > 1$, T' tem lados $\sqrt{a/k}, \sqrt{b/k}$ e $\sqrt{c/k}$. Temos $mdc(a/k, b/k, c/k) = d/k < d$, e a afirmação segue por indução.

Se os vértices de $\tilde{T}$ são $(0,0)$, $(\tilde{u}, \tilde{v})$ e $(\tilde{r}, \tilde{s})$, temos $\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 = a/d$. Assim, $a = u^2 + v^2$ e a/d pertencem a D, e, pelo lema 1, $d = a/(a/d)$ também pertence a D. Analogamente, b/d e c/d também pertencem a D.

Isto termina a prova do lema 2.

Vamos agora provar a equivalência dos itens do enunciado:

$i) \Rightarrow ii)$: Se os vértices de T são $(0,0), (u,v)$ e (r,s), sua área é $\frac{1}{2}|us - vr| \in \mathbb{Q}$, e seus lados são $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ e $\sqrt{c}$, onde $a = u^2 + v^2, b = r^2 + s^2$ e $c = (u - r)^2 + (v - s)^2$ são somas de dois quadrados.

Para as próximas implicações, notemos que, se um triângulo tem lados $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ e $\sqrt{c}$, com a, b e c inteiros positivos, e área racional, então existe um triângulo semelhante a ele, com lados $2a$, $2\sqrt{ab}$ e $2\sqrt{ac}$, cujos vértices têm coordenadas inteiras: de fato, podemos colocar seus vértices em $C = (0,0), B = (2a, 0)$ e $A = (m, h)$, com $m^2 + h^2 = \left(2\sqrt{ab}\right)^2 = 4ab$ e $(m - 2a)^2 + h^2 = \left(2\sqrt{ac}\right)^2 = 4ac$, donde $m = \dfrac{4ab - 4ac + 4a^2}{4a} = b - c + a$ e $h^2 = 4ab - m^2$ são inteiros, mas, como a área do triângulo, que é racional, é igual a $\dfrac{2ah}{2} = ah$, h é racional, e logo inteiro. Assim, segue do lema 2 que existe um triângulo $\tilde{T}$ cujos vértices têm coordenadas inteiras e cujos lados são $\sqrt{4a^2/d'}, \sqrt{4ab/d'}$ e $\sqrt{4ac/d'}$, onde $d' = mdc(4a^2, 4ab, 4ac) = 4ad$, onde $d = mdc(a, b, c)$. Assim, os lados de $\tilde{T}$ são $\sqrt{a/d}, \sqrt{b/d}$ e $\sqrt{c/d}$. Em particular, a/d, b/d e c/d pertencem a D.

Agora, para ver que $(ii) \Rightarrow (iii)$ basta usar o lema 1, pois, se $a \in D$, como $a/d \in D$, segue que $d = mdc(a,b,c) \in D$.

E, finalmente, para ver que $(iii) \Rightarrow (i)$, vemos da discussão anterior que existe um triângulo $\widetilde{T}$ cujos vértices têm coordenadas inteiras e cujos lados medem $\sqrt{a/d}, \sqrt{b/d}$ e $\sqrt{c/d}$. Se $d = x^2 + y^2$, com $x, y \in \mathbb{Z}$, multiplicando os vértices de $\widetilde{T}$ por $x + iy$, obtemos um triângulo T' cujos vértices têm coordenadas inteiras e cujos lados medem $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ e $\sqrt{c}$, como queríamos.

Agradecemos o envio de soluções e a colaboração de:

Bruno Salgueiro Fanego (Viveiro, Espanha)	**Prob. 151, 152, 153**
Daniel Vacaru (Pitesti, Romênia)	**Prob. 151**
Marcelo Ribeiro	**Prob. 151, 152**
Lucas Justo de Freitas Neto (Mossoró, RN)	**Prob. 149, 151**
Geraldo Perlino Jr. (Cotia, SP)	**Prob. 151, 153**
Ricardo Klein Hoffman (Rio de Janeiro, RJ)	**Prob. 151**
Carlos Alberto da Silva Victor (Nilópolis, RJ)	**Prob. 153**
Osvaldo Mello Sponquiado (Olímpia, SP)	**Prob. 152**

Continuamos aguardando a solução do problema 156.

PROBLEMAS PROPOSTOS

Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e sugestões de novos problemas para próximos números.

157) Sejam x e y inteiros positivos tais que $x^{2^n}-1$ é divisível por $2^n y+1$ para todo inteiro positivo n. Prove que $x=1$.

158) Ache todas as funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tais que

$$f(xy+1)=f(x+y)+f(x)f(y), \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

159) Dizemos que um conjunto $A\subset\mathbb{N}$ é *progressista* se, sempre que $x,y\in A$ com $x\le y$, temos $2y-x\in A$. Prove que se A é progressista e $x, x+a_1, x+a_2, ..., x+a_k\in A$ com $k\ge 2$ e $0<a_1<a_2<...<a_k$ então $x+a_1+a_k-3d, x+a_1+a_k-2d\in A$, onde $d=mdc(a_1,a_2,...,a_k)$.

160) Considere a sequência definida por $a_n=\lfloor n\sqrt{2003}\rfloor$ para $n\ge 1$. Prove que, para quaisquer inteiros positivos m e p, a sequência contém m elementos em uma progressão geométrica de razão maior que p.

161) Um sapo faz um caminho infinito no plano euclidiano da seguinte forma: no início ele está no ponto (0, 0), e, se num dado momento está no ponto (x, y), no segundo seguinte salta para o ponto (x + 1, y) ou para o ponto (x, y +1).
Prova que, para todo inteiro positivo n, existe uma reta l tal que o sapo passa por pelo menos n pontos de l em seu caminho.

162) Uma prova da IMO tem 6 problemas, e cada problema de cada participante recebe uma nota inteira n com $0\le n\le 7$. Dizemos que duas provas de dois participantes são *comparáveis* se uma delas, digamos a do participante A é menor ou igual à prova do participante B, no seguinte sentido: em cada um dos 6 problemas a nota do participante A é menor ou igual à nota do participante B. Determine o menor inteiro positivo m tal que, se houver m participantes numa IMO, necessariamente haverá duas provas comparáveis.

O problema 157 foi proposto na *shortlist* da IMO de 2012, e o problema 158 é uma generalização de um problema proposto na *shortlist* da IMO de 2012. Ambos foram sugeridos para publicação nesta seção por Luis Farias Maia. O problema 159 é uma generalização de um problema proposto na IV Competição Ibero-Americana Interuniversitária de Matemática (CIIM), realizada em 2012 em Guanajuato no México. O problema 160 foi proposto no teste de seleção da IMO 2003. O problema 161 foi proposto originalmente por T. C. Brown para o American Mathematical Monthly, e foi sugerido para esta edição por Fabio Brochero.

AGENDA OLÍMPICA

35ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

NÍVEIS 1, 2 e 3
Primeira Fase – sábado, 15 de junho de 2013
Segunda Fase – sábado, 21 de setembro de 2013
Terceira Fase – sábado, 19 de outubro de 2013 (níveis 1, 2 e 3)
domingo, 20 de outubro de 2013 (níveis 2 e 3 - segundo dia de prova)

NÍVEL UNIVERSITÁRIO
Primeira Fase – sábado, 21 de setembro de 2013
Segunda Fase – sábado, 19 e domingo, 20 de outubro de 2013

6ª ROMANIAN MASTER OF MATHEMATICS (RMM)
27 de fevereiro a 3 de março de 2013 (Bucareste, Romênia)

ASIAN PACIFIC MATH OLYMPIAD (APMO)
11 de março de 2013

19ª OLIMPÍADA DE MAIO
11 de maio de 2013

24ª OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL
1 a 7 de junho de 2013 (Assunção, Paraguai)

54ª OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA
18 a 28 de julho de 2013 (Santa Marta, Colômbia)

3ª OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DA COMUNIDADE DOS PAÍSES DE LÍNGUA PORTUGUESA
5 a 10 de agosto de 2013 (Maputo, Moçambique)

19ª COMPETIÇÃO INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA (IMC)
6 a 12 de agosto de 2013 (Blagoevgrad, Bulgária)

27ª OLIMPÍADA IBERO-AMERICANA DE MATEMÁTICA
20 a 28 de setembro de 2013 (Cidade do Panamá, Panamá)

5ª COMPETIÇÃO IBERO-AMERICANA INTERUNIVERSITÁRIA DE MATEMÁTICA
15 a 20 de outubro de 2013, (Armenia, Colômbia)

15ª OLIMPÍADA IBERO-AMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
23 de novembro de 2013

COORDENADORES REGIONAIS

Alberto Hassen Raad	(UFJF)	Juiz de Fora – MG
Américo López Gálvez	(USP)	Ribeirão Preto – SP
Antonio Carlos Nogueira	(UFU)	Uberlândia – MG
Carlos Alexandre Gomes da Silva	(UFRN)	Natal – RN
Fabrício Siqueira Benevides	(UFC)	Fortaleza – CE
Carmen Vieira Mathias	(UNIFRA)	Santa María – RS
Claus Haetinger	(UNIVATES)	Lajeado – RS
Cláudio de Lima Vidal	(UNESP)	S.J. do Rio Preto – SP
Denice Fontana Nisxota Menegais	(UNIPAMPA)	Bagé – RS
Débora de Jesús Bezerra	(Universidade Metodista de SP)	S.B. do Campo – SP
Disney Douglas Lima de Oliveira	(UFAM)	Manaus – AM
Edson Roberto Abe	(Colégio Objetivo de Campinas)	Campinas – SP
Edney Aparecido Santulo Jr.	(UEM)	Maringá – PR
Eduardo Leandro	(UFPE)	Recife – PE
Emiliano Chagas	(Grupo Educacional Etapa)	São Paulo – SP
Fabio Brochero Martínez	(UFMG)	Belo Horizonte – MG
Florêncio Ferreira Guimarães Filho	(UFES)	Vitória – ES
Francinildo Nobre Ferreira	(UFSJ)	São João del Rei – MG
Diego Marques	(UnB)	Brasília – DF
Herivelto Martins	(USP – São Carlos)	São Carlos – SP
Gisele Detomazi Almeida	(UFT)	Arraias – TO
Gilson Tumelero	(UTFPR)	Pato Branco – PR
Ivanilde Fernandes Saad	(UC. Dom Bosco)	Campo Grande – MS
João Benício de Melo Neto	(UFPI)	Teresina – PI
João Francisco Melo Libonati	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Diogo Diniz	(UFPB)	Campina Grande – PB
José Luiz Rosas Pinho	(UFSC)	Florianópolis – SC
José Vieira Alves	(UFPB)	Campina Grande – PB
José William Costa	(Instituto Pueri Domus)	Santo André – SP
Krerley Oliveira	(UFAL)	Maceió – AL
Licio Hernandes Bezerra	(UFSC)	Florianópolis – SC
Luciano G. Monteiro de Castro	(Sistema Elite de Ensino)	Rio de Janeiro – RJ
Luzinalva Miranda de Amorim	(UFBA)	Salvador – BA
Marcelo Antonio dos Santos	FACOS	Osório – RS
Marcelo Rufino de Oliveira	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Márcio Fialho Chaves	(UFLA)	Lavras – MG
Newman Simões	(Cursinho CLQ Objetivo)	Piracicaba – SP
Nivaldo Costa Muniz	(UFMA)	São Luis – MA
Uberlândio Batista Severo	(UFPB)	João Pessoa – PB
Raul Cintra de Negreiros Ribeiro	(Colégio Anglo)	Atibaia – SP
Reinaldo Gen Ichiro Arakaki	(UNIFESP)	SJ dos Campos – SP
Ricardo Amorim	(Centro Educacional Logos)	Nova Iguaçu – RJ
Ronaldo Alves Garcia	(UFGO)	Goiânia – GO
Rosangela Ramon	(UNOCHAPECÓ)	Chapecó – SC
Seme Gebara Neto	(UFMG)	Belo Horizonte – MG
Tadeu Ferreira Gomes	(UEBA)	Juazeiro – BA
Tomás Menéndez Rodrigues	(U. Federal de Rondônia)	Porto Velho – RO
Valdenberg Araújo da Silva	(U. Federal de Sergipe)	São Cristóvão – SE
Wanderson Breder	(CEFET – RJ)	Nova Friburgo – RJ