CONTEÚDO

XXXIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

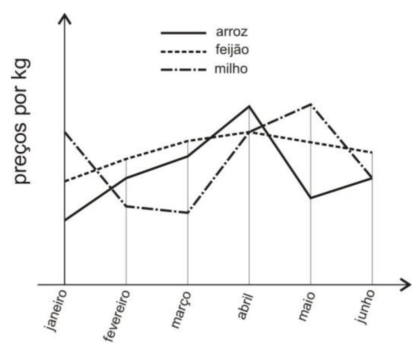
Problemas e soluções da Primeira Fase

PROBLEMAS – NÍVEL 1

1. Em maio, o valor total da conta de telefone celular de Esmeralda foi R$119,76, sem os impostos. Esse valor corresponde aos itens: chamadas, acesso à internet, envio de mensagens. Se ela gastou R$29,90 com acesso à Internet e R$15,50 com o serviço de envio de mensagens, quanto foi que ela gastou com chamadas?
A) R$74,36 **B)** R$74,46 **C)** R$84,36 **D)** R$89,86 **E)** R$104,26

2. Numa padaria, uma lata de 200g de achocolatado em pó CHOCOBM custa R$3,00, uma lata de 400g custa R$5,00 e a de 800g custa R$9,00. Lara precisa de 1,2kg de CHOCOBM para fazer um enorme bolo. Qual das opções a seguir é a maneira mais econômica de comprar 1,2kg de CHOCOBM nessa padaria?
A) 6 latas de 200g
B) 1 lata de 400g e 1 lata de 800g
C) 4 latas de 200g e 1 lata de 400g
D) 2 latas de 200g e 1 lata de 800g
E) 2 latas de 200g e 2 latas de 400g

3. O gráfico mostra a variação dos preços de alguns produtos alimentícios no primeiro semestre em uma certa região. Com base no gráfico é possível afirmar com certeza que

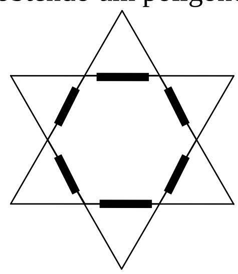


A) o milho sempre foi mais barato que o arroz e o feijão
B) o preço do arroz foi o mais estável no período
C) o feijão sempre custou mais caro que o milho
D) nunca houve dois produtos com o mesmo preço
E) o produto com menor variação de preços foi o feijão

4. Uma data curiosa neste ano é o dia 11/11/11, pois o dia, mês e dois últimos dígitos do ano são iguais. No ano passado, esse padrão aconteceu em 10/10/10. Quantos dias há desde 10/10/10 até 11/11/11, incluindo o dia 10 e o dia 11?

A) 396 **B)** 398 **C)** 400 **D)** 402 **E)** 404

5. Luana colou com fita adesiva 6 triângulos equiláteros nos lados de um hexágono, conforme a figura, obtendo um polígono de 12 lados.



Se ela trocar 3 triângulos por 2 quadrados e 1 pentágono regular, todos com lado de mesmo tamanho do lado do hexágono, ela vai obter um polígono com quantos lados?

A) 14 **B)** 16 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 25

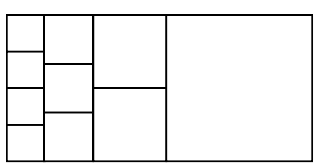
6. Por conta de uma erupção de um vulcão, 10% dos voos de um aeroporto foram cancelados. Dos voos restantes, 20% foram cancelados pela chuva. Que porcentagem do total de voos deste aeroporto foram cancelados?

A) 28% **B)** 30% **C)** 35% **D)** 38% **E)** 70%

7. O produto de três números naturais é 105 e a sua soma é a maior possível. Qual é essa soma?

A) 15 **B)** 23 **C)** 27 **D)** 39 **E)** 107

8. O retângulo da figura abaixo está dividido em 10 quadrados. As medidas dos lados de todos os quadrados são números inteiros positivos e são os menores valores possíveis.



A área desse retângulo é:

A) 180 **B)** 240 **C)** 300 **D)** 360 **E)** 450

9. Numa classe de 36 alunos, todos têm alturas diferentes. O mais baixo dos meninos é mais alto do que cinco meninas, o segundo menino mais baixo é mais alto do que seis meninas, o terceiro menino mais baixo é mais alto do que sete meninas e assim por diante, observando-se que o mais alto dos meninos é mais alto do que todas as meninas. Quantas meninas há nessa classe?

A) 12 **B)** 14 **C)** 16 **D)** 18 **E)** 20

10. Esmeralda escolheu quatro números e, ao somar cada um deles à média aritmética dos outros três, achou os números 60, 64, 68 e 72. Qual é a média aritmética dos quatro números que ela escolheu no início?

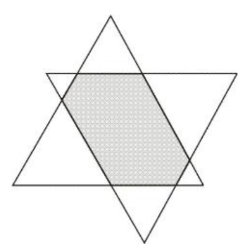
A) 30 **B)** 31 **C)** 32 **D)** 33 **E)** 66

11. Luca comprou uma revista por R$9,63 e deu uma nota de R$10,00 para pagar. De quantas maneiras ele pode receber o troco de 37 centavos em moedas, se as moedas disponíveis no caixa são as de 1, 5, 10 e 25 centavos? Suponha que há muitas moedas de cada tipo.

A) 10 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 24 **E)** 30

12. Dois triângulos equiláteros de perímetro 36 cm cada um são sobrepostos de modo que sua interseção forme um hexágono com pares de lados paralelos, conforme ilustrado no desenho. Qual é o perímetro desse hexágono?

A) 12 cm **B)** 16 cm **C)** 18 cm
D) 24 cm **E)** 36 cm



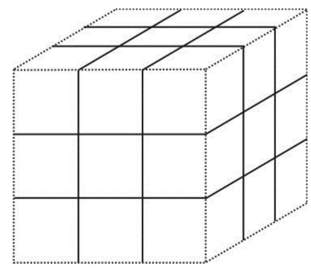
13. Numa corrida com 2011 participantes, Dido chegou à frente do quádruplo do número de pessoas que chegaram à sua frente. Em que lugar chegou o Dido?

A) 20º **B)** 42º **C)** 105º **D)** 403º **E)** 1005º

14. Quantos números inteiros positivos menores do que 30 têm exatamente quatro divisores positivos?

A) 9 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** 13

15. Um cubo de madeira, pintado de vermelho, foi serrado em 27 cubos menores iguais e as faces desses cubos ainda não pintadas o foram de branco. Qual é a razão entre a área da superfície total pintada em vermelho e a área da superfície total pintada de branco?

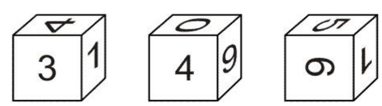


A) 1:2 **B)** 1:1 **C)** 2:1 **D)** 1:3 **E)** 2:3

16. Esmeralda rasgou uma folha de papel em *n* pedaços e, em seguida, pegou uma dessas partes e rasgou-a também em *n* pedaços. Não satisfeita, pegou uma destas últimas partes e também a rasgou em *n* partes. Qual dos números a seguir poderia ser a quantidade total de pedaços obtida por Esmeralda?
A) 15 **B)** 18 **C)** 24 **D)** 26 **E)** 28

17. O número $n = 9999\cdots99$ tem 2011 algarismos e todos iguais a 9. Quantos algarismos 9 tem o número n^2?
A) nenhum **B)** 11 **C)** 2010 **D)** 2011 **E)** 4022

18. No desenho, três cubos iguais apoiados sobre uma mesa têm suas faces pintadas com os números 0, 1, 3, 4, 5 e 9. Qual é a soma dos números de todas as faces em contacto com a mesa?



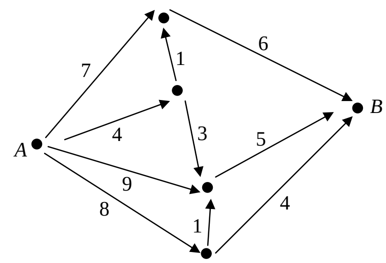
A) 6 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 12

19. Representamos por $n!$ o produto de todos os inteiros positivos de 1 a *n*. Por exemplo, $5! = 1\times 2\times 3\times 4\times 5$. Calculando a soma $1!+2!+3!+4!+\cdots+2010!+2011!$, qual é o algarismo das unidades do resultado obtido?
A) 1 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 7 **E)** 9

20. Esmeralda tem 11 notas de dois reais, Rosa tem 7 notas de cinco reais e Nelly tem 3 notas de dez reais. Qual é o menor número possível do total de notas que devem mudar de mãos de forma que todas as moças fiquem com a mesma quantia?
A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

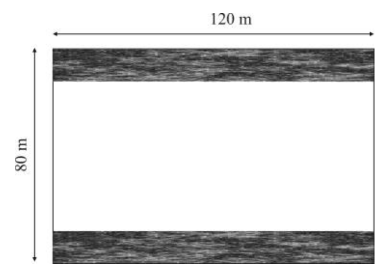
PROBLEMAS – NÍVEL 2

1. A figura ao lado representa um mapa de estradas. Os números escritos nas setas indicam quanto de pedágio um viajante deve pagar ao passar pela estrada. Todas as estradas são de mão única, como indicam as setas. Qual o valor mínimo de pedágio pago por um viajante que sai da cidade *A* e chega na cidade *B*?



A) 11 **B)** 14 **C)** 12 **D)** 10 **E)** 15

2. O pai de Esmeralda comprou um terreno retangular de 120 metros de comprimento por 80 metros de largura. Devido a leis ambientais, ele deve plantar árvores em 20% do terreno. Ele faz isso plantando-as em duas faixas de mesma largura nas laterais do terreno, conforme mostra a figura. Qual é essa largura?



A) 6m **B)** 8m **C)** 10m **D)** 16m **E)** 24m

3. Veja o problema Nº 18 do Nível 1

4. Qual é o valor da expressão $20112011^2 + 20112003^2 - 16\times 20112007$?

A) 2×20112007^2 **B)** 2×20112003^2 **C)** 2×20112007

D) 2×20112003 **E)** 2×20112011^2

5. Quantos triângulos não congruentes de perímetro 7 têm todos os lados com comprimentos inteiros?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

6) Veja o problema Nº 12 do Nível 1

7. Qual é o produto da quantidade de vogais pela quantidade de consoantes na alternativa correta? (Não considere as letras A, B, C, D, E das alternativas na contagem.)

A) Vinte e quatro. **B)** Trinta e seis. **C)** Quarenta e dois.
D) Quarenta e oito. **E)** Cinquenta e seis.

8. Luca comprou um gibi por R$4,63 e pagou com uma nota de R$5,00. De quantas maneiras ele pode receber seu troco de 37 centavos, com moedas de 1, 5, 10 e 25 centavos? Suponha que há muitas moedas de cada tipo.

A) 10 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 24 **E)** 25

9. Quantos números inteiros positivos menores que 30 têm exatamente quatro divisores positivos?

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

10. Em um triângulo *ABC* com $m(A\hat{B}C) - m(B\hat{A}C) = 50^\circ$, a bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$ intersecta o lado *AB* em *D*. Seja *E* o ponto do lado *AC* tal que $m(C\hat{D}E) = 90^\circ$. A medida do ângulo $A\hat{D}E$ é:

A) 25^o **B)** 30^o **C)** 40^o **D)** 45^o **E)** 50^o

11. Subtraindo um mesmo número do numerador e do denominador da fração $\frac{13}{14}$, obtemos a fração $\frac{14}{13}$. A soma dos algarismos desse número é:

A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9

12. Se multiplicarmos todos os inteiros positivos menores que 2011 que não são múltiplos de 5, qual será o algarismo das unidades do número obtido?

A) 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

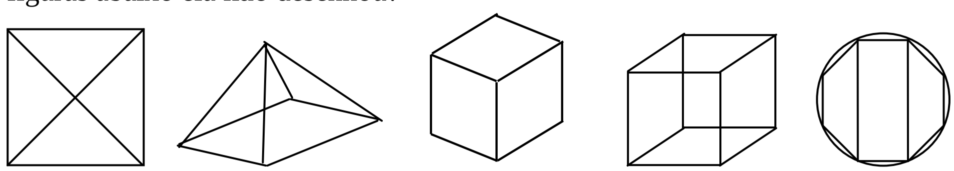
13. Seja *XOY* um triângulo retângulo com $X\hat{O}Y = 90^\circ$. Sejam *M* e *N* os pontos médios de *OX* e *OY*, respectivamente. Dado que *XN* = 19 e *YM* = 22, determine a medida do segmento *XY*.

A) 24 **B)** 26 **C)** 28 **D)** 30 **E)** 32

14. Safira rasgou uma folha de papel em n pedaços e, em seguida, pegou um desses pedaços e rasgou também em n pedaços. Não satisfeita, ela pegou um desses últimos pedaços e também rasgou em n pedaços. Qual dos números a seguir pode representar a quantidade final de pedaços em que Safira rasgou a folha?
A) 15 **B)** 26 **C)** 28 **D)** 33 **E)** 36

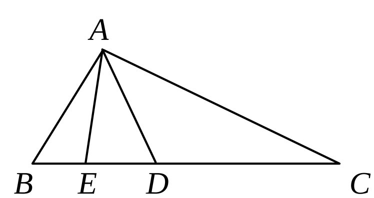
15. Qual é a maior quantidade de números do conjunto $\{1,2,3,\ldots,20\}$ que podemos escolher de modo que nenhum deles seja o dobro do outro?
A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

16. Topázio desenhou cada figura a seguir, exceto uma, tirando o lápis do papel exatamente uma vez e nunca passando pela mesma linha duas vezes. Qual das figuras abaixo ela **não** desenhou?



A) **B)** **C)** **D)** **E)**

17. No triângulo ABC, os pontos D e E pertencem ao lado BC e são tais que BD = BA e CE = CA. Dado que $m(D\hat{A}E) = 40^\circ$, quanto mede, em graus, o ângulo $B\hat{A}C$?
A) 80 **B)** 90 **C)** 100
D) 110 **E)** 120

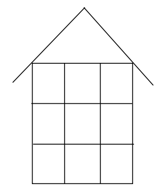


18. Em um teste de múltipla escolha com 24 problemas, cada um pode receber uma das seguintes pontuações: 4 pontos se a resposta é correta, menos 1 ponto se a resposta é incorreta e 0 ponto se a resposta está em branco. Sabendo que um estudante recebeu exatamente 52 pontos, qual o número máximo de respostas corretas que ele pode ter obtido?
A) 14 **B)** 15 **C)** 16 **D)** 17 **E)** 18

19. A calculadora de Esmeralda está quebrada: quando ela aperta o botão $\boxed{\sqrt{\ }}$, a calculadora faz, ao acaso, uma das duas seguintes operações: tirar a raiz quadrada (como deveria fazer) ou dividir o número por 100 (como não deveria fazer). Esmeralda digitou o número 201120112011 na calculadora e começou a apertar o botão $\boxed{\sqrt{\ }}$ repetidamente. Quantas vezes, no máximo, Esmeralda aperta o botão até aparecer pela primeira vez um número menor que 2?

A) 2 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 8 **E)** 9

20. Renan quer pintar os quadradinhos da figura ao lado, usando até três cores diferentes, de modo que quadradinhos que compartilham um lado em comum possuam cores diferentes. Quantas pinturas distintas Renan poderá fazer?



A) 3^9 **B)** 246 **C)** 178 **D)** 150 **E)** 120

21. No Planeta Nérdia, existem três espécies de nerds: ET-nerds, UFO-nerds e OVNI-nerds. A primeira mente quando chove e diz a verdade quando não chove; a segunda sempre mente; a terceira sempre diz a verdade. Certo dia Bruberson, um nerd muito camarada, se encontra com quatro nerds. E eles falam:

X: "Hoje está chovendo."
Y: "O nerd que acabou de falar está mentindo."
Z: "Hoje não está chovendo."
W: "O primeiro nerd mentiu ou eu sou um ET-nerds."
Com quantos ET-nerds Bruberson falou no máximo?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

22. Qual é o primeiro dígito não nulo após a vírgula na representação decimal da fração $\dfrac{1}{5^{12}}$?

A) 1 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 7

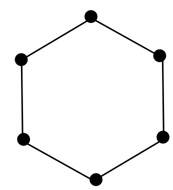
23. Esmeralda tem 2011 balas e quer colocá-las em fileiras, cada fileira com a mesma quantidade de balas. Ela estabelece que tanto a quantidade de fileiras como a quantidade de balas em cada fileira devem ser maiores do que 32. Ela sabe que não consegue fazer isso com 2011 balas, pois 2011 é primo, então faz isso com a maior quantidade de balas que puder usar e dá as balas que sobrarem para Jade. Quantas balas Jade ganhou?

A) 1 **B)** 2 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 11

24. Uma circunferência passando pelos vértices *B*, *A*, *D* do paralelogramo *ABCD* encontra o segmento *CD* em *Q*. Sabendo que $m(B\hat{A}D) = 60^\circ$ e $AD = 10$, o tamanho do segmento *CQ* é:

A) 10 **B)** 20 **C)** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ **D)** $10\sqrt{3}$ **E)** 15

25. Rosa escreveu os números de 1 a 6 nos vértices do hexágono ao lado. Em seguida, para cada lado do hexágono, ela multiplicou os números escritos nas suas extremidades, obtendo seis números. Qual o valor mínimo da soma dos seis números obtidos?

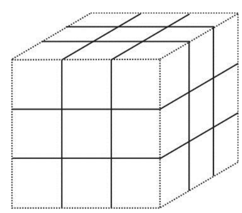


A) 69 **B)** 58 **C)** 59 **D)** 61
E) 57

PROBLEMAS – NÍVEL 3

1. Veja o problema Nº 1 do Nível 2

2. Um cubo de madeira, pintado de vermelho, foi serrado em 27 cubos menores iguais e as faces desses cubos ainda não pintadas o foram de branco. Qual é a razão entre a área da superfície total pintada em vermelho e a área da superfície total pintada de branco?



A) 1:2 **B)** 1:1 **C)** 2:1
D) 1:3 **E)** 2:3

3. Numa padaria, uma lata de 200g de achocolatado em pó CHOCOBM custa R$3,00, uma lata de 400g custa R$5,00 e a de 800g custa R$9,00. Lara precisa de 1,2kg de CHOCOBM para fazer um enorme bolo. Qual das opções a seguir é a maneira mais econômica de comprar 1,2kg de CHOCOBM nessa padaria?

A) 6 latas de 200g
B) 1 lata de 400g e 1 lata de 800g
C) 4 latas de 200g e 1 lata de 400g
D) 2 latas de 200g e 1 lata de 800g
E) 2 latas de 200g e 2 latas de 400g

4. Os inteiros positivos 30, 72 e *N* possuem a propriedade de que o produto de quaisquer dois é divisível pelo terceiro. Qual o menor valor possível de *N*?

A) 60 **B)** 30 **C)** $30 \cdot 72$ **D)** 360 **E)** 6

5. Numa classe de 36 alunos, todos têm alturas diferentes. O mais baixo dos meninos é mais alto do que cinco meninas, o segundo menino mais baixo é mais alto do que seis meninas, o terceiro menino mais baixo é mais alto do que sete meninas e assim por diante, observando-se que o mais alto dos meninos é mais alto do que todas as meninas. Quantas meninas há nessa classe?

A) 12 **B)** 14 **C)** 16 **D)** 18 **E)** 20

6. Qual é o produto da quantidade de vogais pela quantidade de consoantes na alternativa correta? (Não considere as letras A, B, C, D, E das alternativas na contagem.)

A) Vinte e quatro. **B)** Trinta e seis. **C)** Quarenta e dois.
D) Quarenta e oito. **E)** Cinquenta e seis.

7. Sendo a e b reais tais que $0 < a \leq 1$ e $0 < b \leq 1$, o maior valor que $\dfrac{ab}{a+b}$ pode assumir é:

A) 0 **B)** $\dfrac{1}{4}$ **C)** $\dfrac{1}{3}$ **D)** $\dfrac{1}{2}$ **E)** 1

8. Por conta de uma erupção de um vulcão, 10% dos voos de um aeroporto foram cancelados. Dos voos restantes, 20% foram cancelados pela chuva. Que porcentagem do total de voos deste aeroporto foram cancelados?

A) 28% **B)** 30% **C)** 35% **D)** 38% **E)** 70%

9. Qual é o valor da expressão $20112011^2 + 20112003^2 - 16\times 20112007$?

A) 2×20112007^2 **B)** 2×20112003^2 **C)** 2×20112007
D) 2×20112003 **E)** 2×20112011^2

10. Luca comprou uma revista por R$9,63 e deu uma nota de R$10,00 para pagar. De quantas maneiras ele pode receber o troco de 37 centavos em moedas, se as moedas disponíveis no caixa são as de 1, 5, 10 e 25 centavos? Suponha que há muitas moedas de cada tipo.

A) 10 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 24 **E)** 30

11. Quantos números inteiros positivos menores que 30 têm exatamente quatro divisores positivos?

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

12. Em um triângulo ABC com $m(A\hat{B}C) - m(B\hat{A}C) = 50^\circ$, a bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$ intersecta o lado AB em D. Seja E o ponto do lado AC tal que $m(C\hat{D}E) = 90^\circ$. A medida do ângulo $A\hat{D}E$ é:

A) 25^o **B)** 30^o **C)** 40^o **D)** 45^o **E)** 50^o

13. Esmeralda tem 11 notas de dois reais, Rosa tem 7 notas de cinco reais e Nelly tem 3 notas de dez reais. Qual é o menor número possível do total de notas que devem mudar de mãos de forma que todas as moças fiquem com a mesma quantia?

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

14. Qual é o primeiro dígito não nulo após a vírgula na representação decimal da fração $\frac{1}{5^{12}}$?

A) 1 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 7

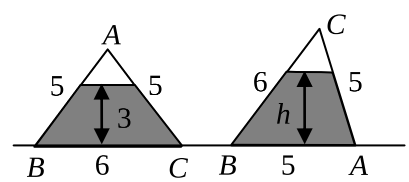
15. No Planeta Nérdia, existem três espécies de nerds: ET-nerds, UFO-nerds e OVNI-nerds. A primeira mente quando chove e diz a verdade quando não chove; a segunda sempre mente; a terceira sempre diz a verdade. Certo dia Bruberson, um nerd muito camarada, se encontra com quatro nerds. E eles falam:

X: "Hoje está chovendo."
Y: "O nerd que acabou de falar está mentindo."
Z: "Hoje não está chovendo."
W: "O primeiro nerd mentiu ou eu sou um ET-nerds."

Com quantos ET-nerds Bruberson falou no máximo?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

16. Um peso de papel tem a forma de um triângulo de lados $BC = 6$ cm e $AB = AC = 5$ cm e está parcialmente preenchido com água. Quando o peso de papel se apoia sobre o lado BC, a água tem uma altura de 3 cm. Qual é a altura da água, em cm, quando o peso de papel se apoia sobre o lado AB?



A) $\frac{4}{3}$ **B)** $\frac{3}{2}$ **C)** $\frac{8}{5}$ **D)** $\frac{18}{5}$ **E)** $\frac{24}{5}$

17. O maior inteiro positivo n tal que $(2011!)!$ é divisível por $((n!)!)!$ é:

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

18. A calculadora de Esmeralda está quebrada: quando ela aperta o botão $\boxed{\sqrt{\ }}$, a calculadora faz, ao acaso, uma das duas seguintes operações: tirar a raiz quadrada (como deveria fazer) ou dividir o número por 100 (como não deveria fazer). Esmeralda digitou o número 201120112011 na calculadora e começou a apertar o botão $\boxed{\sqrt{\ }}$ repetidamente. Quantas vezes, no máximo, Esmeralda aperta o botão até aparecer pela primeira vez um número menor que 2?

A) 2 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 8 **E)** 9

19. Existem 3 valores inteiros positivos de $n > 1$ tais que 10 pode ser escrito como soma de n inteiros positivos e distintos:

$n = 2$: $10 = 3 + 7$

$n = 3$: $10 = 2 + 3 + 5$

$n = 4$: $10 = 1 + 2 + 3 + 4$

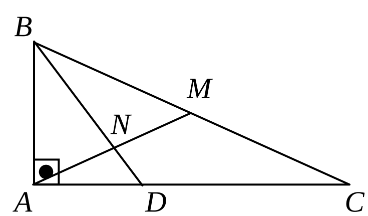
Quantos valores inteiros e positivos de $n > 1$ existem para os quais é possível expressar 2011 como soma de n inteiros positivos e distintos?

A) 59 **B)** 60 **C)** 61 **D)** 62 **E)** 63

20. Qual é a maior quantidade de números do conjunto $\{1,2,3,\ldots,20\}$ que podemos escolher de modo que nenhum deles seja o dobro do outro?

A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

21. Seja ABC um triângulo retângulo em A. O ponto D pertence ao lado AC e é tal que $BD = CD$. Sejam M o ponto médio de BC e N a interseção de AM e BD. Sendo N o ponto médio de AM, qual a medida, em graus, do ângulo $B\hat{C}A$?



A) 15 **B)** 22,5 **C)** 30 **D)** 37,5 **E)** 45

22. Sendo a e b inteiros tais que $\left(1+\sqrt{2}\right)^{2011} = a + b\sqrt{2}$, $\left(1-\sqrt{2}\right)^{2010}$ é igual a

A) $a + 2b + (a-b)\sqrt{2}$ **B)** $a - 2b + (a-b)\sqrt{2}$

C) $a + 2b + (b-a)\sqrt{2}$ **D)** $2b - a + (b-a)\sqrt{2}$

E) $a + 2b - (a+b)\sqrt{2}$

23. Se a, b e c são inteiros positivos tais que $a \le b \le c$ e $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2011}$, qual é o menor valor possível de a?

A) 2011 **B)** 2012 **C)** 2013 **D)** 2014 **E)** $2011 \cdot 2012$

24. Três polígonos regulares, de 8, 12 e 18 lados respectivamente, estão inscritos em uma mesma circunferência e têm um vértice em comum. Os vértices dos três polígonos são marcados na circunferência. Quantos vértices distintos foram marcados?

A) 20 **B)** 24 **C)** 26 **D)** 28 **E)** 30

25. Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível (ou seja, cujos vértices pertencem a uma circunferência) com $AB = 4$, $BC = 8\sqrt{3}$, $AC = 4\sqrt{13}$ e $AD = 2\sqrt{13}$. Sendo E a interseção das diagonais AC e BD, o comprimento do segmento BE é:

A) $\frac{12\sqrt{3}}{7}$ **B)** $\frac{13\sqrt{3}}{7}$ **C)** $2\sqrt{3}$ **D)** $\frac{15\sqrt{3}}{7}$ **E)** $\frac{16\sqrt{3}}{7}$

GABARITO

NÍVEL 1 (6º ou 7º anos do Ensino Fundamental)

1) A	6) A	11) D	16) E
2) B	7) E	12) D	17) C
3) E	8) C	13) D	18) D
4) B	9) E	14) A	19) B
5) B	10) D	15) A	20) C

NÍVEL 2 (8º ou 9º anos do Ensino Fundamental)

1) B	6) D	11) B	16) C	21) A
2) E	7) E	12) B	17) D	22) D
3) B	8) B	13) D	18) C	23) D
4) B	9) E	14) D	19) C	24) C
5) C	10) D	15) C	20) C	25) B

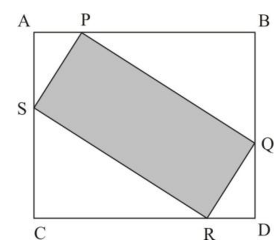
NÍVEL 3 (Ensino Médio)

1) E	6) C	11) E	16) B	21) D
2) C	7) D	12) C	17) A	22) A
3) B	8) B	13) B	18) A	23) B
4) D	9) D	14) A	19) B	24) E
5) D	10) D	15) A	20) C	25) B

XXXIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Problemas e soluções da Segunda Fase

PROBLEMAS – NÍVEL 1 – PARTE A
(Cada problema vale 5 pontos)

01. Na figura, os vértices do retângulo *PQRS* pertencem aos lados do retângulo *ABCD*. Sendo *AP* = 3cm, *AS* = 4 cm, *SC* = 6 cm e *CR* = 8 cm, qual é a área do retângulo *PQRS*, em cm^2?



02. Em cada vértice de um cubo foi escrito um número. Esmeralda calcula a soma dos números escritos nos vértices de cada face e encontra os números 8, 10, 11, 12, 13 e *x*. Se a face de soma 8 é oposta à face de soma *x*, qual é o valor de *x*?

03. Duas tribos vivem numa ilha. Os da tribo azul só dizem a verdade e os da vermelha, só mentira. Um dia, 100 pessoas da ilha se reuniram num círculo e um repórter se dirigiu a cada uma delas, com a pergunta: "O seu vizinho à direita é um mentiroso?". Terminada a pesquisa, verificou-se que 48 pessoas responderam "sim". No máximo, quantas pessoas da tribo vermelha poderiam estar no círculo?

04. Com cubinhos de mesmo tamanho construiu-se um cubo $4\times4\times4$. Os cubinhos são feitos de madeiras diferentes e foram colados assim: cubinhos com três cubos vizinhos (cubos com faces comuns) pesam 10 gramas, com quatro vizinhos pesam 8 gramas, com cinco vizinhos pesam 6 gramas e com seis vizinhos pesam 4 gramas. Qual é a massa do cubo, em gramas?

05. Quantos números de três algarismos diferentes de zero têm pelo menos dois algarismos iguais?

06. Dizemos que dois ou mais números são *irmãos* quando têm exatamente os mesmos fatores primos. Por exemplo, os números $10=2\times5$ e $20=2^2\times5$ são irmãos, pois têm 2 e 5 como seus únicos fatores primos. O número 60 tem quantos irmãos menores do que 1000?

PROBLEMAS – NÍVEL 1 – PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1

A sequência 1, 5, 4, 0, 5, ... é formada pelos algarismos das unidades das somas a seguir

$$1^2 = \underline{1}$$
$$1^2 + 2^2 = \underline{5}$$
$$1^2 + 2^2 + 3^2 = 1\underline{4}$$
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 3\underline{0}$$
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 4\underline{5}$$
$$\dots$$
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots = \dots ?\underline{?}$$

a) Escreva a sequência formada pelos algarismos das unidades das dez primeiras somas obtidas da forma descrita acima.

b) Qual é o algarismo das unidades da soma $1^2 + 2^2 + \dots + 2011^2$?

PROBLEMA 2

Vamos chamar de selo *de um número inteiro positivo* o par $(x; y)$ no qual x é o número de divisores positivos desse número menores do que ele e y é a soma desses divisores. Por exemplo, o selo do número 10 é $(3;8)$ pois o número 10 tem como divisores menores do que ele os números 1, 2 e 5, cuja soma é 8. Já o selo do número primo 13 é $(1;1)$.

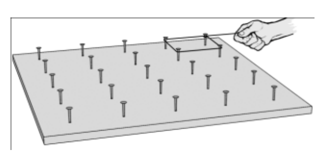
a) Qual é o selo do número 9?

b) Qual número tem o selo $(2;3)$?

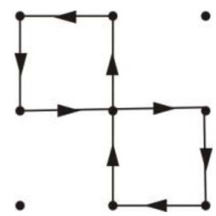
c) Há números cujo selo é $(6;m)$. Qual é o menor valor possível para m?

PROBLEMA 3

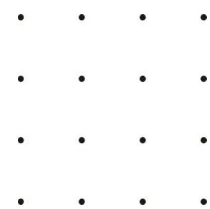
Amarrando um pedaço de barbante em um dos pregos do seu geoplano, Diamantino consegue formar quadrados, *sem passar o barbante duas vezes pelo mesmo lado desses quadrados*. A figura ao lado mostra um quadrado obtido desta maneira.



A figura abaixo representa de forma simplificada uma parte do geoplano em que foram obtidos dois quadrados da maneira descrita acima, partindo-se de qualquer um dos pregos.



a) Desenhe, na parte do geoplano representada ao lado, a maior quantidade de quadrados iguais que Diamantino pode obter com um único pedaço de barbante. Coloque as flechinhas como no exemplo para indicar como foi colocado o barbante.



b) Diamantino garante que pode obter 11 quadrados no seu geoplano. Mostre que você também pode obter a mesma quantidade na figura abaixo. Não se esqueça das flechinhas no desenho.

PROBLEMAS – NÍVEL 2 – PARTE A
(Cada problema vale 5 pontos)

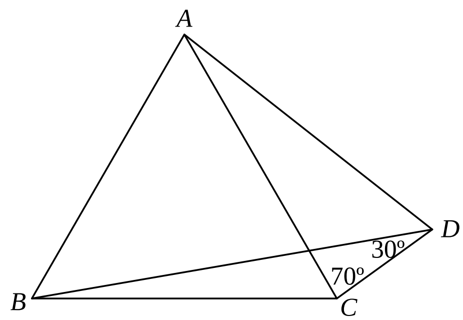
01. Sejam a e b números reais não nulos tais que a equação $x^2 + ax + b = 0$ possui soluções a e b. Determine $a - b$.

02. Quantos números compostos de dois algarismos distintos podem ser formados usando os algarismos 2, 3, 4, 5 e 6?

03. O triângulo ABC é retângulo em B. As bissetrizes interna e externa do ângulo $B\hat{A}C$ cortam a reta BC em D e E, respectivamente. Dado que $AD = 360$ e $AE = 480$, determine a medida do lado AB.

04. O número 7, quando elevado à quarta potência, termina com 01: $7^4 = 2401$. Quantos são os números de dois algarismos que, quando elevados à quarta potência, terminam com 01?

05. Na figura a seguir, o triângulo ABC é equilátero, o ângulo $B\hat{D}C$ mede 30º e o ângulo $A\hat{C}D$ mede 70º. Determine, em graus, a medida do ângulo $B\hat{A}D$.



PROBLEMAS – NÍVEL 2 – PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1
Inicialmente o número 5 está escrito na tela de um computador. Em qualquer momento, o número n escrito na tela do computador pode ser trocado por qualquer número da forma $a \cdot b$ sendo a e b inteiros positivos tais que $a + b = n$.

a) Mostre como obter o número 19 realizando tais operações.
b) É possível obter o número 2011? Não se esqueça de justificar sua resposta.

PROBLEMA 2
Sejam a, b e c números reais positivos tais que $a(b + c) = 152$, $b(c + a) = 162$ e $c(a + b) = 170$. Determine o valor de abc.

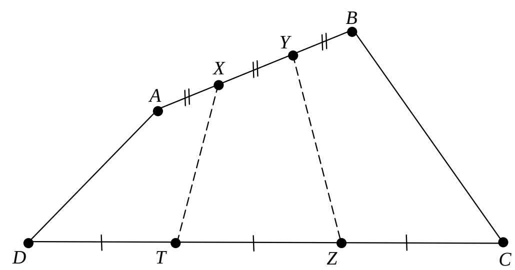
PROBLEMA 3

Quantos são os pares ordenados (a,b), com a, b inteiros positivos, tais que

$$a+b+\text{mdc}(a,b)=33?$$

PROBLEMA 4

No quadrilátero convexo *ABCD*, os pontos *X* e *Y* dividem o lado *AB* em três segmentos iguais enquanto que os pontos *Z* e *T* dividem o lado *DC* em três segmentos iguais (veja a figura abaixo). Se a área do quadrilátero *ABCD* é 60, mostre que a área do quadrilátero *XYZT* não depende do formato do quadrilátero *ABCD* e calcule tal área.



PROBLEMAS – NÍVEL 3 – PARTE A
(Cada problema vale 4 pontos)

01. A equação do segundo grau $x^2 - 5x + m = 2011$ tem pelo menos uma solução inteira. Qual é o menor valor inteiro positivo possível de m?

02. Uma sequência de letras, com ou sem sentido, é dita *alternada* quando é formada alternadamente por consoantes e vogais. Por exemplo, EZEQAF, MATEMÁTICA, LEGAL e ANIMADA são palavras alternadas, mas DSOIUF, DINHEIRO e ORDINÁRIO não são. Quantos anagramas da palavra FELICIDADE (incluindo a palavra FELICIDADE) são sequências alternadas?

03. O ângulo interno do vértice *A* de um triângulo acutângulo *ABC* mede 75 graus. A altura relativa ao vértice *A* toca o lado *BC* no ponto *D*. As distâncias de *D* ao vértice *B* e ao ortocentro do triângulo são ambas iguais a 10 cm. Qual é a área do triângulo *ABC*, aproximada para o inteiro mais próximo? Se necessário, use $\sqrt{3}\cong 1{,}732$.

04. Qual é o maior valor possível do mdc de dois números distintos pertencentes ao conjunto $\{1,2,3,\ldots,2011\}$?

05. Seja f uma função dos reais não nulos nos reais não nulos tal que

- $(f(x)+f(y)+f(z))^2=(f(x))^2+(f(y))^2+(f(z))^2$ para todos x, y, z reais não nulos tais que $x+y+z=0$;
- $f(-x)=-f(x)$ para todo x real não nulo;
- $f(2011)=1$.

Encontre o inteiro mais próximo de $f(33)$.

PROBLEMAS – NÍVEL 3 – PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1
No triângulo ABC, o ângulo $B\hat{A}C$ mede 45º. O círculo de diâmetro BC corta os lados AB e AC em D e E, respectivamente. Dado que $DE = 10$, encontre a distância do ponto médio M de BC à reta DE.

PROBLEMA 2
Encontre todas as soluções reais (x, y, z) do sistema

$$\left|\begin{array}{l} 2y = x + \dfrac{1}{x} \\ 2z = y + \dfrac{1}{y} \\ 2x = z + \dfrac{1}{z} \end{array}\right.$$

PROBLEMA 3
Seja $P(x)$ um polinômio de coeficientes inteiros. Sabe-se que $P(x) = 2011$ tem pelo menos duas raízes inteiras distintas iguais a 1 e t, e que $P(x) = 0$ tem pelo menos uma raiz inteira. Determine todos os possíveis valores de t.

PROBLEMA 4
Esmeralda tem um círculo de cartolina dividido em n setores circulares, numerados de 1 a n, no sentido horário. De quantas maneiras Esmeralda pode pintar a cartolina, pintando cada setor com uma cor, tendo disponíveis k cores e de modo que quaisquer dois setores circulares vizinhos (isto é, que têm um segmento em

comum como fronteira) tenham cores diferentes? Note que isso implica que os setores de números 1 e *n* devem ter cores diferentes.

SOLUÇÕES NÍVEL 1 – SEGUNDA FASE – PARTE A

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**
Resposta	0050	0015	0076	0448	0225	0018

01. Por simetria, os triângulos *APS* e *DRQ* são congruentes, assim como os triângulos *SCR* e *QBP*. Assim, os lados do retângulo *ABDC* são *AS* + *SC* = 4 + 6 = 10 cm e *CR* + *RD* = *CR* + *AP* = 8 + 3 = 11 cm. Deste modo, a área do retângulo *PQRS* é obtida subtraindo as áreas dos triângulos *APS*, *DRQ*, *SCR* e *QBP* da área do retângulo *ABDC*, ou seja, é $8\cdot 11-2\cdot\frac{3\cdot 4}{2}-2\cdot\frac{6\cdot 8}{2}=50\ \text{cm}^2$.

02. Se em cada face estiver escrita a soma dos números dos vértices correspondentes a face, então a soma dos números em duas faces opostas é igual a soma dos números de todos os vértices do cubo. Logo se 8 e *x* é um par de faces opostas, então outro par de faces opostas é 10 e 13 e o terceiro par é 11 e 12, para que 10 + 13 = 11 + 12 = soma dos números em todos os vértices. Portanto $8+x=23 \Leftrightarrow x=15$.

03. Observe que se uma pessoa responde "sim", então esta pessoa e a da direita não são da mesma tribo, mas se responder "não", então ela e a pessoa à sua direita são da mesma tribo. Assim, se 48 pessoas responderam "sim", então ao percorrer o círculo no sentido horário, observaremos 48 trocas de cor da tribo. Para que haja 48 trocas, devem haver pelo menos 24 pessoas da tribo azul e 24 da tribo vermelha dispostas alternadamente. Como queremos o máximo de pessoas da tribo vermelha, então podemos colocar as 100 – 24 – 24 = 52 pessoas restantes juntas num mesmo bloco vermelho, como indicado a seguir:

$$\underbrace{AVAVA\ldots VAV}_{24AV's}\underbrace{VV\ldots VV}_{52V's}$$

Logo há no máximo 100 – 24 = 76 pessoas da tribo vermelha.

04. No cubo $4\times 4\times 4$, há 8 cubinhos nos vértices (que tem 3 vizinhos), $2\times 12=24$ cubinhos nas arestas (que tem 4 vizinhos), $4\times 6=24$ cubinhos nas faces (que tem 5 vizinhos) e 8 cubinhos no interior do cubo maior (que tem 6 vizinhos). Assim, o cubo maior pesa $8\times 10+24\times 8+24\times 6+8\times 4=448$g.

05. Há $9 \times 9 \times 9 = 729$ números de três algarismos não nulos. Destes, $9 \times 8 \times 7 = 504$ tem os três algarismos distintos. Portanto, há $729 - 504 = 225$ números com pelo menos dois algarismos iguais.

06. $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ tem os fatores 2, 3 e 5, logo os irmãos de 60 são múltiplos de $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Como há $\left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor = 33$ múltiplos de 30 menores que 1000, então 60 tem no máximo 32 irmãos. Destes múltiplos, os que tem outros fatores além de 2, 3 e 5 são $7 \cdot 30$, $11 \cdot 30$, $13 \cdot 30$, $14 \cdot 30$, $17 \cdot 30$, $19 \cdot 30$, $21 \cdot 30$, $22 \cdot 30$, $23 \cdot 30$, $26 \cdot 30$, $28 \cdot 30$, $29 \cdot 30$, $31 \cdot 30$ e $33 \cdot 30$. Logo, 60 tem $32 - 14 = 18$ irmãos.

SOLUÇÕES NÍVEL 1 – SEGUNDA FASE – PARTE B

PROBLEMA 1

a) Para calcular os termos, basta considerar os dígitos das unidades na soma e no resultado. Assim, como os dígitos das unidades de $1^2, 2^2, \ldots, 10^2$ são 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1 e 0, então começando por 1, temos: 1, 1 + 4 = <u>5</u>, 5 + 9 = 1<u>4</u>, 4 + 6 = 1<u>0</u>, 0 + 5 = <u>5</u>, 5 + 6 = 1<u>1</u>, 1 + 9 = <u>0</u>, 0 + 4 = <u>4</u>, 4 + 1 = <u>5</u> e 5 + 0 = <u>5</u>, logo os 10 primeiros termos da seqüência são 1, 5, 4, 0, 5, 1, 0, 4, 5 e 5.

b) Observe que a partir do 11º termo, vamos começar a somar novamente os dígitos 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1 e 0, já que os dígitos das unidades de $11^2, 12^2, \ldots, 20^2$, são os mesmos dígitos das unidades de $1^2, 2^2, \ldots, 10^2$. Assim, na soma $1^2 + 2^2 + \cdots + 2011^2$, faremos as somas dos dígitos das unidades de 1^2 a 10^2 $\left\lfloor \frac{2011}{10} \right\rfloor = 201$ vezes e adicionaremos 1 de 2011^2. Assim, o algarismo das unidades da soma $1^2 + 2^2 + \cdots + 2011^2$ é o mesmo algarismo das unidades de $201 \cdot (1 + 4 + 9 + 6 + 5 + 6 + 9 + 4 + 1 + 0) + 1 = 201 \cdot 25 + 1 = 5026$, que é 6.

PROBLEMA 2

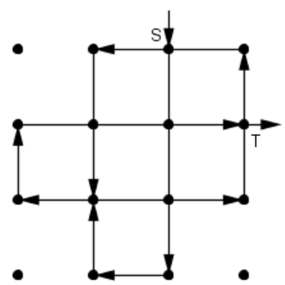
a) Os divisores positivos de 9 menores que 9 são 1 e 3, logo o selo do número 9 é o par (2, 4).

b) Observe que todo número inteiro positivo tem 1 como divisor. Como o número que estamos procurando tem apenas dois divisores menores que ele, 1 terá que ser um desses divisores e como a soma dos dois divisores é 3, então o outro divisor deve ser 2. Como não há outros divisores, então o número que procuramos é uma

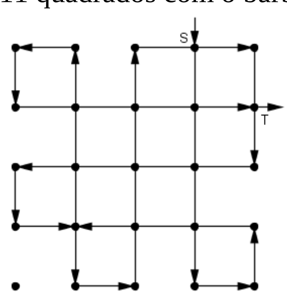
potência de 2, e para ter apenas dois divisores menores que ele próprio, então o número deve ser 4.
c) Seja n um número com selo (6, m). n possui 7 divisores contando com ele próprio, logo a única possibilidade é que ele seja da forma p^6, com p primo, e m é igual a $1+p+p^2+\cdots+p^5$. Para que m seja mínimo, p terá que ser mínimo, logo p = 2 e $m=1+2+2^2+\cdots+2^5=63$.

PROBLEMA 3

a) Observe que para cada prego do geoplano deve entrar e sair o mesmo número de flechas (o barbante ao passar por um prego deve entrar em uma direção e sair em outra), com exceção de onde começa e termina o barbante. Logo nos pregos onde não começa ou termina o barbante temos um número par de flechas, metade entrando e metade saindo. Mas no geoplano 4×4, há 8 pregos com 3 arestas cada (os da borda do geoplano), logo em 6 deles haverá pelo menos uma aresta por onde o barbante não pode passar. No melhor caso, conseguimos fazer com que um quadrado contenha 2 dessas arestas, assim não poderemos completar 3 quadrados. Na figura abaixo temos um exemplo onde 9 – 3 = 6 quadrados são formados, em que o barbante começa no vértice S e termina no vértice T:



b) Uma maneira de construir 11 quadrados com o barbante está descrita abaixo:



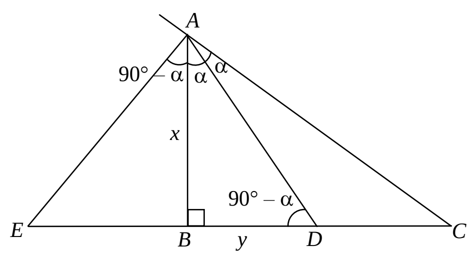
SOLUÇÕES NÍVEL 2 – SEGUNDA FASE – PARTE A

Problema	01	02	03	04	05	06
Resposta	3	17 ou 20	288	6	0225	100

01. Utilizando o produto das raízes, obtemos:
$ab = b$
$a = 1$
pois $b \neq 0.$ Utilizando a soma das raízes, obtemos:
$a + b = -a$
$1 + b = -1$
$a - b = 3$

02. Todos os números terminados em 2, 4, 5 e 6 são compostos. Existem $4 \times 4 = 16$ tais números. Dos números terminados em 3, apenas 63 é composto.
O enunciado apresenta uma ambiguidade. Outra interpretação seria considerar os números de dois algarismos constituídos por dois números distintos do conjunto $\{2,3,4,5,6\}$. Nesse caso, a resposta correta é $5 \times 4 = 20.$
Ambas as respostas devem ser consideradas corretas.

03.



Da semelhança dos triângulos ΔABD e ΔEAD obtermos:
$$\frac{360}{480} = \frac{y}{x} \Rightarrow y\frac{3}{4}x$$
Pelo Teorema de Pitágoras no triângulo ΔABD, temos:
$$x^2 + y^2 = 360^2$$
$$x^2 + \frac{9}{16}x^2 = (360)^2$$
$$x = 288$$

04. Um número de dois dígitos (ab) elevado à quarta potência possui a seguinte forma:

$$(10a+b)^4 = 10^4a^4 + 4\cdot 10^3a^3b + 6\cdot 10^2a^2b^2 + 4\cdot 10ab^3 + b^4$$

Assim, os últimos dois dígitos são determinados por $4\cdot 10ab^3 + b^4$. Qualquer número ímpar diferente de 5 elevado à quarta potência termina em 1. Logo, temos quatro possibilidades para b:

Se $b=1$, para o número $40a+1$ terminar em 01 devemos ter $a=5$.
Se $b=3$, para o número $1080a+81$ terminar em 01devemos ter $a=4$ ou $a=9$.
Se $b=7$, para o número $13720a+2401$ terminar em 01 devemos ter $a=5$.
Se $b=9$, para o número $29160a+6561$ terminar em 01 devemos ter $a=4$ ou $a=9$.

05. Como $B\hat{D}C$ mede 30° e $B\hat{A}C$ é 60°, o ponto D está no círculo de centro A e raio AB. Como o triângulo ACD é isósceles com ângulo da base igual a 70, temos $C\hat{A}D = 40°$ e $B\hat{A}D = 100°$

SOLUÇÕES NÍVEL 2 – SEGUNDA FASE – PARTE B

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1

a) Uma possível sequência de operações é:

$$5 \overset{2+3}{\Rightarrow} 6 \overset{3+3}{\Rightarrow} 9 \overset{4+5}{\Rightarrow} 20 \overset{19+1}{\Rightarrow} 19$$

b) Perceba que se é possível obtermos o número n também é possível obtermos o número $n-1$ com a operação $n \overset{(n-1)+1}{\Rightarrow} n-1$ e consequentemente poderemos obter todos os inteiros positivos menores que $n-1$ repetindo essa operação. Então é suficiente obtermos um inteiro maior que 2011 começando em 5. Uma possível sequência de operações para isso seria:

$$5 \overset{2+3}{\Rightarrow} 6 \overset{4+2}{\Rightarrow} 8 \overset{4+4}{\Rightarrow} 16 \overset{8+8}{\Rightarrow} 64 \overset{32+32}{\Rightarrow} 1024 \overset{1022+2}{\Rightarrow} 2044.$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2

Somando as três equações obtemos: $2ab+2bc+2ca=484$

Daí,

$ab = 242 - c(a+b) = 72,$

$bc = 242 - a(b+c) = 90,$

$ca = 242 - b(a+c) = 80.$

Logo, $(abc)^2 = 72 \cdot 90 \cdot 80$ e $abc = 720.$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3

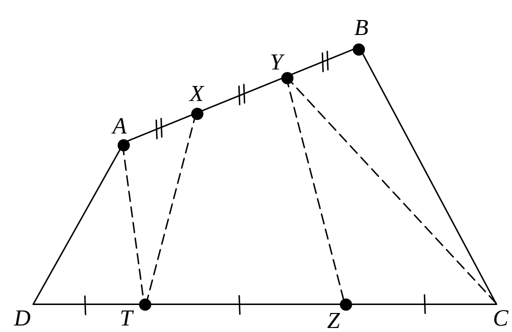
Seja $d = mdc(a,b).$ Podemos reescrever a equação como:

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} + 1 = \frac{33}{d}.$$

O lado esquerdo é uma soma de números inteiros logo, d divide 33. Agora temos que $mdc(a/d, b/d) = mdc(a/d, 33/d - 1) = mdc(b/d, 33/d - 1) = 1.$
Fixado d, é suficiente encontrarmos os pares de inteiros positivos (x, y) com $mdc(x, 33/d - 1) = 1$ tais que $x + y = 33/d - 1$ pois daí obteremos também que $mdc(y, 33/d - 1) = 1$ e que $(a,b) = (dx, dy)$ é solução. Vejamos então as possibilidades para d :

Para $d = 1$ e $\frac{a}{d} + \frac{b}{d} + 1 = \frac{33}{d}$, temos 16 soluções, pois basta escolhermos x ímpar.
Para $d = 3$ e $x + y = 10,$ temos 4 soluções pois x não pode ser par nem múltiplo de 5.
Para $d = 11$ e $x + y = 2,$ temos 1 solução apenas.
Não podemos ter $d = 33$, pois a e b são positivos.
Logo, existem 21 pares de soluções.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4



Temos as seguintes relações de áreas:

$$[ADT]+[BYC]=\frac{1}{3}([ADC]+[ABC])=\frac{1}{3}([ABCD])=20.$$

Portanto a área do quadrilátero $[ATCY]$ é igual à 40. Além disso,

$$[ATX]+[YZC]=\frac{1}{2}([ATY]+[YTC])=\frac{1}{2}([ATCY])=20.$$

Consequentemente, $[XTZY]=[ATCY]-[ATX]-[YZC]=20.$

Segunda Solução

Sejam P a interseção de AB e DC, $a=PA, b=PD, x=AX$ e $y=DT$.

Temos:

$$2[ABCD]/\,senAPD=(a+3x)(b+3y)-ab=9xy+3bx+3ay$$
$$2[XYZT]/\,senAPD=(a+2x)(b+2y)-(a+x)(b+y)=bx+ay+3xy$$

Logo a área do quadrilátero $[XYZT]$ é um terço da área do quadrilátero $[ABCD]$.

SOLUÇÕES NÍVEL 3 – SEGUNDA FASE – PARTE A

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**
Resposta	0037	3600	0237	1005	0061

01. Como m é inteiro positivo, temos $x^2 - 5x < 2011$. Sendo x inteiro e $47^2 - 5 \cdot 47 < 2011 < 48^2 - 5 \cdot 48$, devemos ter $x^2 - 5x < 2011 \Leftrightarrow x \le 47$. Assim, o menor valor de m é $2011 - (47^2 - 5 \cdot 47) = 37$.

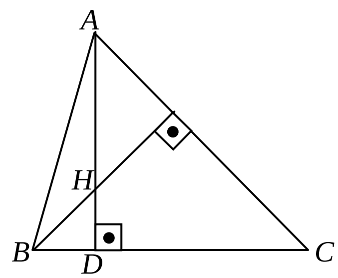
02. As consoantes de FELICIDADE são F, L, C, D, D e as vogais são E, I, I, A, E. As posições das vogais são as pares ou as ímpares, as consoantes podem se permutar entre si de $\frac{5!}{1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 2!}=60$ maneiras e as vogais podem se permutar de $\frac{5!}{2!\cdot 1!\cdot 2!}=30$ maneiras. Assim, o total de anagramas alternados de FELICIDADE é $2\cdot 60\cdot 30=3600$.

03. Seja H o ortocentro do triângulo ABC. Então BD = HD = 10 cm. Então o triângulo retângulo BDH é isósceles e, portanto, $m(H\hat{B}D)=45^\circ$. Logo, considerando o triângulo retângulo de hipotenusa BC, temos $m(\hat{C}) = 90^\circ - m(H\hat{B}D) = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.

Assim, $m(D\hat{A}C) = 90^\circ - m(\hat{C}) = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ e

$m(B\hat{A}D) = m(\hat{A}) - m(D\hat{A}C) = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ$.

Enfim, $m(\hat{B}) = 90^\circ - m(B\hat{A}D) = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.



Assim, $AD = BD\,\text{tg}\,60^\circ = 10\sqrt{3}$ cm e $CD = AD = 10\sqrt{3}$ cm. Portanto a área de ABC é $\dfrac{BC \cdot AD}{2} = \dfrac{(10+10\sqrt{3})10\sqrt{3}}{2} = 150 + 50\sqrt{3} \cong 150 + 50 \cdot 1{,}732 = 236{,}6\ \text{cm}^2$, cujo valor inteiro mais próximo é 237 cm^2.

04. O mdc de dois números é divisor de cada um dos dois números, ou seja, cada um dos dois números é múltiplo de seu mdc. Logo queremos o maior valor de d que tem dois múltiplos positivos menores ou iguais a 2011. O maior dos dois múltiplos de d é maior ou igual a $2d$, logo $2d \le 2011 \Leftrightarrow d \le 1005$. Como 1005 e $2 \cdot 1005 = 2010$ são ambos menores do que 2011, o valor procurado é 1005.

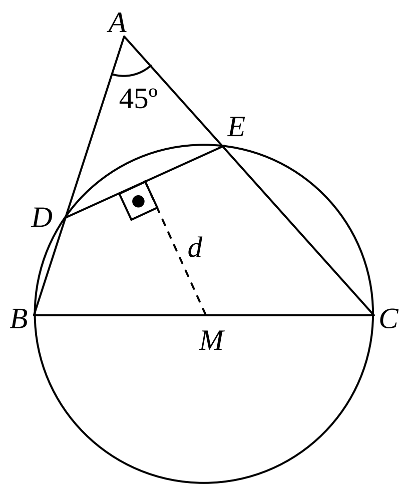
05. A condição $(f(x) + f(y) + f(z))^2 = (f(x))^2 + (f(y))^2 + (f(z))^2$ para $x + y + z = 0$ é equivalente a $\dfrac{1}{f(x)} + \dfrac{1}{f(y)} + \dfrac{1}{f(-x-y)} = 0$. Como $f(-x) = -f(x)$, sendo $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ temos $\dfrac{1}{f(x)} + \dfrac{1}{f(y)} - \dfrac{1}{f(x+y)} = 0 \Leftrightarrow g(x+y) = g(x) + g(y)$.

Fazendo $y = x$, obtemos $g(2x) = 2g(x)$. Fazendo $y = 2x$, obtemos $g(3x) = g(2x) + g(x) = 2g(x) + g(x) = 3g(x)$ e, indutivamente, prova-se que $g(nx) = n \cdot g(x)$ para n inteiro positivo. Fazendo $x = 1$ e $n = 2011$, obtemos $g(2011) = 2011g(1)$. Como $g(2011) = \dfrac{1}{f(2011)} = 1$, temos $g(1) = \dfrac{g(2011)}{2011} = \dfrac{1}{2011}$. Enfim, fazendo $x = 1$ e

$n = 33$, temos $g(33) = 33 \cdot g(1) = 33 \cdot \dfrac{1}{2011} = \dfrac{33}{2011}$. Logo $f(33) = \dfrac{1}{g(33)} = \dfrac{2011}{33}$.
Como 2011 = 33·60 + 31, o inteiro mais próximo de $f(33)$ é 61.

SOLUÇÕES NÍVEL 3 – SEGUNDA FASE – PARTE B

PROBLEMA 1



Temos $m(B\hat{A}C) = \dfrac{m(\overset{\frown}{CB}) - m(\overset{\frown}{DE})}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot 45^\circ = 180^\circ - m(D\hat{M}E) \Leftrightarrow m(D\hat{M}E) = 90^\circ$.
Logo o triângulo DME é retângulo e, sendo M o centro do círculo, isósceles. Então, sendo a projeção de M sobre DE o ponto médio de DE e, portanto, circuncentro de DME. Logo $DE = 2d \Leftrightarrow 10 = 2d \Leftrightarrow d = 5$.

PROBLEMA 2

Somando as três equações, obtemos

$$2x + 2y + 2z = x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \Leftrightarrow x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Note que x, y e z têm o mesmo sinal. De fato, se $x > 0$ então $y = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right) > 0$ e $z = \dfrac{1}{2}\left(y + \dfrac{1}{y}\right) > 0$. Analogamente, se $x < 0$ então $y < 0$ e $z < 0$.

Agora, veja que, pela desigualdade das médias, $|y| = \frac{1}{2}\left(|x| + \frac{1}{|x|}\right) \geq \sqrt{|x| \cdot \frac{1}{|x|}} = 1$ e, analogamente, $|x| \geq 1$ e $|z| \geq 1$. Mas isso implicaria $\frac{1}{|x|} \leq 1$, $\frac{1}{|y|} \leq 1$ e $\frac{1}{|z|} \leq 1$, $|x+y+z| = |x| + |y| + |z| \geq 3$ e $\left|\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right| = \left|\frac{1}{x}\right| + \left|\frac{1}{y}\right| + \left|\frac{1}{z}\right| \leq 3$.

Mas $|x+y+z| = \left|\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right|$, logo todas as desigualdades anteriores são igualdades, ou seja, $|x| = |y| = |z| = 1$. Lembrando que x, y e z têm o mesmo sinal, as únicas possibilidades são $x = y = z = 1$ e $x = y = z = -1$. Verifica-se facilmente que as duas possibilidades são realmente soluções.

PROBLEMA 3

Seja $Q(x) = P(x) - 2011$. Então $Q(x) = 0$ tem coeficientes inteiros e duas de suas raízes são 1 e r. Logo $Q(x) = (x-1)(x-r)R(x)$, sendo $R(x)$ um polinômio de coeficientes inteiros e, portanto, $P(x) = (x-1)(x-r)R(x) + 2011$.

Como $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-r)R(x) = -2011$ tem soluções inteiras, e $R(x)$ é inteiro para x inteiro, $x - 1$ e $x - r$ são dois divisores distintos (não necessariamente positivos) de 2011. Sendo 2011 primo, cada um desses dois fatores pode ser –2011, –1, 1 ou 2011, com a única restrição sendo que eles não podem ser –2011 e 2011 simultaneamente. Assim, $(x-1) - (x-r) = r - 1$ pode ser igual a 2010, –2010, 2012, –2012, 2 ou –2, ou seja, r pode ser igual a 2011, –2009, 2013, –2011, 3 ou –1.

PROBLEMA 4

Para $n = 1$, temos k possibilidades (basta escolher a cor da região 1); para $n = 2$, há $k(k-1)$ possibilidades (k escolhas para a região 1 e $k - 1$ para a região 2, que deve ter cor diferente da região 1). Suponha $n \geq 3$ e seja a_n a quantidade desejada de maneiras de pintar um círculo dividido em n setores, sem que haja setores vizinhos de mesma cor.

Pintemos a região de qualquer uma das k cores e cada uma das regiões 2, 3, …, n de qualquer uma das $k - 1$ cores diferentes da cor da região anterior. Observe a cor da região n: se a cor é diferente da cor da região 1, obtemos uma pintura válida com n setores; se a cor é igual à cor da região 1, se juntarmos a região 1 e a região n obtemos uma pintura válida com $n - 1$ setores. Note que qualquer pintura com n

setores e qualquer pintura com $n - 1$ setores é obtida de maneira única com esse procedimento. Assim, $a_n + a_{n-1} = k(k-1)^{n-1}$ para $n \geq 3$.

Agora aplique a igualdade repetidas vezes:

$$\begin{gathered} a_n + a_{n-1} = k(k-1)^{n-1} \\ -a_{n-1} - a_{n-2} = -k(k-1)^{n-2} \\ a_{n-2} + a_{n-3} = k(k-1)^{n-3} \\ -a_{n-3} - a_{n-4} = -k(k-1)^{n-4} \\ \dots \\ (-1)^{n+1}a_3 + (-1)^{n+1}a_2 = (-1)^{n+1}k(k-1)^2 \end{gathered}$$

Somando as $n - 2$ igualdades, obtemos

$$\begin{gathered} a_n + (-1)^{n+1}a_2 = k(k-1)^2((k-1)^{n-3} - (k-1)^{n-4} + \dots + (-1)^{n+1}) = \\ k(k-1)^2 \frac{(-1)^{n+1}((-k+1)^{n-2}-1)}{-k+1-1} \\ a_n = (-1)^n k(k-1) + (k-1)^2(-1)^n((-1)^n(k-1)^{n-2} - 1) = (k-1)^n + (k-1)(-1)^n \end{gathered}$$

Logo, considerando que a fórmula obtida vale para $n \geq 2$, temos

$$a_n = \begin{cases} k, \text{se } n = 1 \\ (k-1)^n + (k-1)(-1)^n \text{ se } n \geq 3 \end{cases}$$

XXXIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e soluções da Terceira Fase

TERCEIRA FASE – NÍVEL 1

PROBLEMA 1

Esmeralda escreveu no quadro negro a sequência de todos os números inteiros de 1 a 2011. Em seguida, apagou todos os números pares da lista.

a) Quantos números restaram?

b) Dos números restantes, quantos foram escritos apenas com os algarismos 0 e 1?

PROBLEMA 2

Temos um cubo vermelho de aresta 2 cm. Qual é o número mínimo de cubinhos iguais que devemos juntar ao vermelho para obter um cubo de volume $\left(\frac{12}{5}\right)^3$ cm^3?

PROBLEMA 3

Dizemos que um número inteiro positivo é *chapa* quando ele é formado apenas por algarismos não nulos e a soma dos quadrados de todos os seus algarismos é também um quadrado perfeito. Por exemplo:

- o número 2115522 é chapa, pois $2^2+1^2+1^2+5^2+5^2+2^2+2^2=8^2$ e todos os seus algarismos são não nulos (diferentes de zero);

- o número 403 não é chapa, pois, apesar de $4^2+0^2+3^2=5^2$, um dos algarismos de 403 é nulo (igual a zero);

- o número 12 não é chapa, pois $1^2+2^2=5$ e 5 não é um quadrado perfeito.

a) Qual é o maior inteiro positivo com dois algarismos que é chapa?

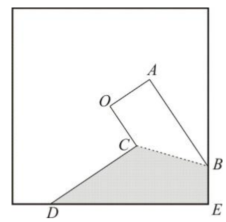
b) Existe um inteiro positivo com 2011 algarismos que é chapa? Justifique sua resposta.

PROBLEMA 4

Na figura, O é o centro do quadrado, $OA = OC = 2, AB = CD = 4,$ $\overline{CD}$ é perpendicular a $\overline{OC}$ que é perpendicular a $\overline{OA}$, que é perpendicular a $\overline{AB}$. A área do quadrado é 64 cm^2.

a) Calcule a área do trapézio *ABCO*.

b) Calcule a área do quadrilátero *BCDE*.



PROBLEMA 5

Num tabuleiro 3×3 escrevemos os números de 1 a 9, um em cada casa. Em seguida, achamos a soma dos números de cada linha, de cada coluna e de cada diagonal e contamos o número de somas que são múltiplos de três. Por exemplo, no tabuleiro ao lado as 8 somas (as três linhas, as três colunas e as duas diagonais) são números múltiplos de 3.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

a) Copie o tabuleiro ao lado na sua folha de respostas e o preencha com os números de 1 a 9 de modo existam exatamente 3 somas que são números múltiplos de 3.

b) É possível que nenhuma das 8 somas seja um múltiplo de 3? Lembre-se de que você deve justificar sua resposta.

TERCEIRA FASE – NÍVEL 2

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Num tabuleiro 3×3 escrevemos os números de 1 a 9, um em cada casa. Em seguida, achamos a soma dos números de cada linha, de cada coluna e de cada diagonal e contamos o número de somas que são múltiplos de três. Por exemplo, no tabuleiro ao lado as 8 somas (as três linhas, as três colunas e as duas diagonais) são números múltiplos de 3.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

É possível que nenhuma das 8 somas seja um múltiplo de 3?
Lembre-se de que você deve justificar sua resposta.

PROBLEMA 2

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que $AD = DC$, $AC = AB$ e $\angle ADC = \angle CAB$. Se M e N são os pontos médios dos lados AD e AB, prove que o triângulo MNC é isósceles.

PROBLEMA 3

Esmeralda e Jade participam de um jogo: Esmeralda faz uma lista de 2011 números inteiros positivos, mas não mostra para Jade. Jade deve descobrir o produto dos números. Para isso, ela pode perguntar qual é o mdc ou o mmc dos números de qualquer subconjunto com mais de um elemento dos 2011 números (por exemplo, "qual é o mdc do 1º, 2º, 10º e 2000º números da sua lista?" ou "qual é o mmc de todos os números da lista?"). Jade pode fazer quantas perguntas quiser, mas só obtém as respostas (corretas) de Esmeralda após fazer todas as suas perguntas (Esmeralda é generosa e também diz qual é a resposta de cada pergunta). Jade então pode fazer qualquer uma das quatro operações fundamentais (soma, subtração, multiplicação e divisão) com os números que obtiver de Esmeralda. Jade consegue uma estratégia para obter o produto dos 2011 números de Esmeralda? Justifique sua resposta.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Esmeralda escreveu uma lista de números inteiros positivos em uma folha de papel. Renan percebeu que todos os números da lista e todas as somas de qualquer quantidade de números distintos da lista não eram divisíveis por nenhum quadrado perfeito diferente de 1. Qual a quantidade máxima de números na lista de Esmeralda?

PROBLEMA 5

No interior de um quadrado de lado 16 são colocados 1000 pontos. Mostre que é possível colocar um triângulo equilátero de lado $2\sqrt{3}$ no plano de modo que ele cubra pelo menos 16 destes pontos.

PROBLEMA 6

Para qualquer número natural N de $2k$ dígitos, seja $I(N)$ o número de k dígitos obtido escrevendo os algarismos de ordem ímpar de N da esquerda para a direita e $P(N)$ como o número de k dígitos obtido escrevendo os algarismos de ordem par de N da esquerda para a direita. Por exemplo, $I(249035) = 405$ e $P(249035) = 293$. Provar que não é possível encontrar um natural N de $2k$ algarismos tal que $N = I(N) \cdot P(N)$.

TERCEIRA FASE – NÍVEL 3
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Dizemos que um número inteiro positivo é *chapa* quando ele é formado apenas por algarismos não nulos e a soma dos quadrados de todos os seus algarismos é também um quadrado perfeito. Por exemplo, 221 é chapa pois $2^2 + 2^2 + 1^2 = 9$ e todos os seus algarismos são não nulos, 403 não é chapa, pois, apesar de $4^2 + 0^2 + 3^2 = 5^2$, um de seus algarismos de 403 é nulo e 12 não é chapa pois $1^2 + 2^2 = 5$ não é quadrado perfeito.

Prove que, para todo inteiro positivo n, existe um número chapa com exatamente n algarismos.

PROBLEMA 2

Um álbum, composto por 2011 figurinhas, está sendo colecionado por 33 amigos. Uma distribuição de figurinhas entre os 33 amigos é *incompleta* quando existe pelo menos uma figurinha que nenhum dos 33 amigos tem. Determinar o menor valor de m com a seguinte propriedade: toda distribuição de figurinhas entre os 33 amigos tal que, para quaisquer dois dos amigos, faltam, para ambos, pelo menos m figurinhas em comum, é incompleta.

PROBLEMA 3

Mostre que, para todo pentágono convexo $P_1P_2P_3P_4P_5$ de área 1, existem dois triângulos $P_iP_{i+1}P_{i+2}$ e $P_jP_{j+1}P_{j+2}$ (em que $P_6 = P_1$ e $P_7 = P_2$), formados por três vértices consecutivos do pentágono, tais que

$$\text{área}\, P_iP_{i+1}P_{i+2} \le \frac{5-\sqrt{5}}{10} \le \text{área}\, P_jP_{j+1}P_{j+2}$$

TERCEIRA FASE – NÍVEL 3
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4
Existem 2011 inteiros positivos $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2011}$ tais que, para todo $1 \le i < j \le 2011$, $\text{mdc}(a_i, a_j) = a_j - a_i$?

PROBLEMA 5
Seja ABC um triângulo acutângulo e H seu ortocentro. As retas BH e CH cortam AC e AB em D e E, respectivamente. O circuncírculo de ADE corta o circuncírculo de ABC em $F \neq A$. Provar que as bissetrizes internas de $\angle BFC$ e $\angle BHC$ se cortam em um ponto sobre o segmento BC.

PROBLEMA 6
Sejam $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2011}$ reais não negativos cuja soma é $\dfrac{2011}{2}$. Prove que

$$\left|\prod_{cíc}(x_i - x_{i+1})\right| = \left|(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_4 - x_5)\ldots(x_{2009} - x_{2010})(x_{2010} - x_{2011})(x_{2011} - x_1)\right| \le \frac{3\sqrt{3}}{16}.$$

SOLUÇÕES – NÍVEL 1

PROBLEMA 1:
SOLUÇÃO ADAPTADA DE MATEUS SIQUEIRA TIMÓTEO (MOGI DAS CRUZES – SP)

a) Podemos notar que restarão os números ímpares de 1 a 2011. Começando a partir do 1, os números inteiros, tomados dois a dois, são compostos de um par e um ímpar.

Logo, a quantidade de números restantes é de $\left(\dfrac{2010}{2}\right) + 1$, cujo resultado é 1006 números.
Vamos supor inicialmente que os algarismos 0 e 1 devem de fato aparecer.

b) Podemos perceber que todos os números com algarismos 0 e 1 apenas deverão ter ao menos três algarismos, já que devem começar a terminar com 1, pois, além de terem restado apenas algarismos ímpares, nenhum deles pode começar com zero, e devem ter ao menos um de seus algarismos zero.

Nesse caso temos:

- Números com três algarismos (1): 101

- Números com quatro algarismos (3): 1001, 1101, 1011.

Quatro desses números foram escritos apenas com alagarismos 0 e 1.
Se incluirmos os números que têm apenas o algarismo 1, temos mais quatro números: 1, 11, 111 e 1111.

PROBLEMA 2: SOLUÇÃO DE WILLIAM HIDEKI KONDO (SÃO PAULO – SP)

O lado do cubo vermelho é de 2*cm*. O lado de um cubo de volume igual a $\left(\frac{12}{5}\right)^3 cm^3$ é igual a $\sqrt[3]{\left(\frac{12}{5}\right)^3} = \frac{12}{5} = 2,4cm.$ Ao juntar-se cubinhos iguais com o cubo vermelho, formando um cubo de volume $\left(\frac{12}{5}\right)^3 cm^3$, a aresta do cubo vermelho aumenta $2,4-2=0,4cm.$ Dessa forma, formou-se três tipos de blocos.

Os blocos de dimensões $2\times 0,4\times 2cm$, cujos volumes são iguais a $2\times 0,4\times 2 = 1,6cm^3$ e há 3 destes blocos, sobrepostos a três faces do cubo vermelho com um vértice em comum.

Os blocos de dimensões $0,4\times 0,4\times 2cm,$ cujos volumes são iguais a $2\times 0,4\times 0,4 = 0,32cm^3$ e há três desses blocos, entre os blocos de dimensões $2\times 2\times 0,4cm.$

E um bloco cúbico de 0,4*cm* de lado para preencher o espaço que falta.

Os cubinhos preencherão esses blocos.

O menor lado de todos os blocos é 0,4*cm*. Para se ter o menor número de cubinhos usados, os lados dos cubinhos têm que ser os maiores possíveis, ou seja, 0,4*cm*. Dessa forma, o volume dos cubinhos seria $0,4\cdot 0,4\cdot 0,4 = 0,064cm^3$.

Cabem $\frac{1,6}{0,064} = 25$ cubinhos destes em um bloco de dimensões $2\times 0,4\times 2cm.$

Como são três blocos, são necessários $25\cdot 3 = 75$ cubinhos.

Cabem $\frac{0,32}{0,064}\cdot 3 = 5\cdot 3 = 15$ cubinhos em três blocos de dimensões $0,4\times 0,4\times 2cm.$ E cabe $\frac{0,064}{0,064} = 1$ cubinho no bloco de dimensões $0,4\times 0,4\times 0,4cm.$

Logo, o número mínimo de cubinhos a serem usados é $75+15+1=91$ cubinhos.

PROBLEMA 3: SOLUÇÃO DE WILLIAM HIDEKI KONDO (SÃO PAULO – SP)

a) Números de 2 algarismos: 10 a 99

$9^2+9^2=81+81=162\times$	$8^2+9^2=145\times$
$9^2+8^2=81+64=145\times$	$8^2+7^2=64+49=113\times$
$9^2+7^2=81+49=130\times$	$8^2+6^2=64+36=100$
$9^2+6^2=81+36=117\times$	$\downarrow$
$9^2+5^2=81+25=106\times$	$86:8^2+6^2=10^2$
$9^2+4^2=81+16=97\times$	
$9^2+3^2=81+9=90\times$	
$9^2+2^2=81+4=85\times$	
$9^2+1^2=81+1=82\times$	

86 é o maior inteiro positivo com dois algarismos que é chapa.

b) Sim, é possível.

O número seria $\underbrace{111...111}_{2008\text{ "uns"}}322$

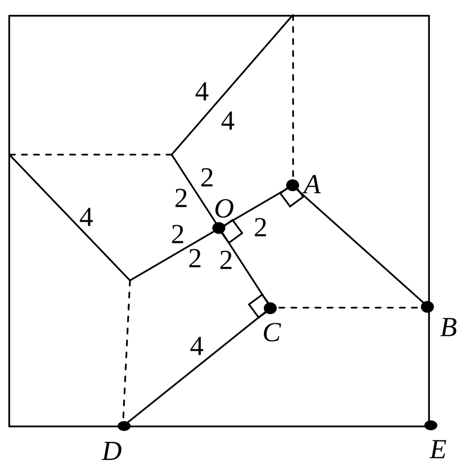
Esse número seria chapa, pois $\underbrace{1^2+...1^2}_{2008\text{ vezes}}+3^2+2^2+2^2$

$=2008+9+4+4=2025=45^2$.

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DE LAURA MELLO D´URSO VIANNA (RIO DE JANEIRO – RJ)

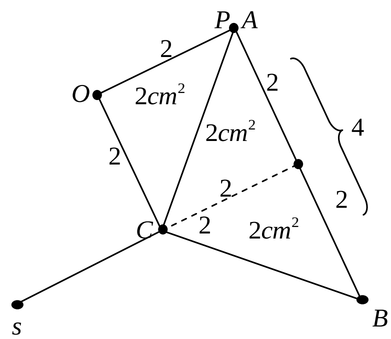
$4\cdot OABC+4\cdot DCBE=64cm^2$

$OABC+DCBE=16cm^2$



A princípio traçamos quatro figuras iguais a *AOCB* e encontramos o quadrado inteiro.

Então $ABCO + BCDE = 16cm^2$



Traçamos uma reta paralela a reta *OA* que é a reta *s*.

Ligamos o ponto *C* ao ponto *A* e dividimos a figura *ABCO* em três triângulos retângulos isósceles iguais, cada um com catetos medindo $2cm$, e logo com área igual a $2cm^2$.

a) Então a área de *ABCO* é $2cm^2 \cdot 3 = 6cm^2$.

b) Então a área da figura *BCDE* é $16cm^2 - 6cm^2 = 10cm^2$, pois,

$$ABCO + BCDE = 16cm^2$$
$$BCDE = 16cm^2 - ABCO$$
$$BCDE = 16cm^2 - 6cm^2$$
$$BCDE = 10cm^2.$$

PROBLEMA 5:

a) SOLUÇÃO DE PEDRO HENRIQUE SACRAMENTO DE OLIVEIRA (VINHEDO – SP)

5	8	2
7	9	4
3	6	1

b) Veja a solução do problema 1 do nível 2.

SOLUÇÕES – NÍVEL 2

PROBLEMA 1: SOLUÇÃO DE ANA EMÍLIA HERNANDES DIB (SÃO JOSÉ DO RIO PRETO – SP)

Não é possível.

Basta analisarmos a tabela em módulo 3:

$1 \equiv 1 \pmod 3$ $\quad$ $4 \equiv 1 \pmod 3$ $\quad$ $7 \equiv 1 \pmod 3$

$2 \equiv 2 \pmod 3$ $\quad$ $5 \equiv 2 \pmod 3$ $\quad$ $8 \equiv 2 \pmod 3$

$3 \equiv 0 \pmod 3$ $\quad$ $6 \equiv 0 \pmod 3$ $\quad$ $9 \equiv 0 \pmod 3$

Para que a soma não seja um múltiplo de 3, não podem ocorrer os seguintes casos nas linhas, colunas ou diagonais:

$0,0,0$ $\quad$ $1,0,2$

$1,1,1$ $\quad$ $1,2,0$

$2,2,2$ $\quad$ $2,0,1$

$0,1,2$ $\quad$ $2,1,0$

$0,2,1$

Assim, concluímos que não poderíamos colocar mais que dois números congruentes (mod 3) na mesma linha, coluna ou diagonal, ou seja, cada linha, coluna e diagonal deveria ter dois números congruentes e um diferente.

Os possíveis casos seriam (sendo *x*, *y* e *z*, em qualquer ordem, 0, 1 e 2), e levando em conta as simetrias que preservam as diagonais, como trocar as posições da primeira e da terceira linhas:

X	X	
	Y	Y
Z		Z

Que não é possível, já que a soma da diagonal seria $\equiv 0 \pmod 3$.

X	X	
Y		Y
	Z	Z

Que também não é possível, já que, como faltam $1X, 1Y$ e $1Z$, a soma da diagonal seria $\equiv 0 \pmod 3$.

X		X
Y		Y
Z	Z	

Os outros casos incluem uma mesma linha ou coluna com a soma $x+y+z\equiv 0\pmod{3}$.

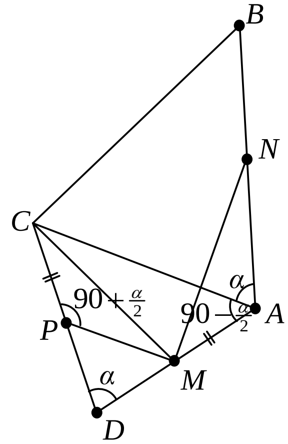
Ou seja, é impossível que nenhuma das oito somas seja múltiplo de 3.
Obs. Um múltiplo de 3 é congruente a $0\pmod{3}$.

PROBLEMA 2: SOLUÇÃO ADAPTADA DA SOLUÇÃO DE ISABELLE FERREIRA DE OLIVEIRA (FORTALEZA – CE)

Seja $\angle CDA=\angle CAN=\alpha$ e *P* o ponto médio de *CD*.
Logo,

$$PM=\frac{CA}{2}=\frac{AB}{2}=AN$$

Alem disso, como ΔCDA é isósceles, $CP=MA$.



Veja também que $\angle CPM=180-\angle DPM=90+\dfrac{\alpha}{2}$.

E que $\angle NAM=\angle MAC+\angle CAN=90-\dfrac{\alpha}{2}+\alpha=90+\dfrac{\alpha}{2}$

Portanto, $\Delta CPM\equiv\Delta MAN\,(LAL)\Rightarrow CM=MN\Rightarrow CMN$ isósceles.

PROBLEMA 3: SOLUÇÃO DE DANIEL SANTANA ROCHA (RIO DE JANEIRO – RJ)

Sim.

Obs: $\left[a_1,\ldots,a_n\right]$ denotará o mmc dos números $a_1,\ldots,a_n$ e $\left(a_1,\ldots,a_n\right)$ o mdc dos números $a_1,\ldots,a_n$.

Lema 1: $abc=\dfrac{[a,b,c](a,b)(a,c)(b,c)}{(a,b,c)}$ para todos *a*, *b*, *c* inteiros positivos.

Prova: Seja *p* primo. Usaremos a notação Se $p^k \parallel n$ significando que $p^k \mid n$ e $p^{k+1} \nmid n$. $p^{\alpha_1} \parallel a$, $p^{\alpha_2} \parallel b$ e $p^{\alpha_3} \parallel c \Rightarrow$

$p^{\min\{\alpha_1,\alpha_2\}+\min\{\alpha_1,\alpha_3\}+\min\{\alpha_2,\alpha_3\}+\max\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}-\min\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}} \parallel \dfrac{[a,b,c](a,b)(a,c)(b,c)}{(a,b,c)}$. Provaremos que o expoente de *p* é $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$. Supondo sem perda de generalidade $\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge \alpha_3$, o expoente do *p* é $\alpha_1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$. Logo, pelo teorema fundamental da aritmética vale a igualdade.

Sejam $a_1,a_2,\ldots,a_{2011}$ os números de Esmeralda.

Basta Jade perguntar o $mdc\left(a_i,a_{i+1}\right)$ e o $mmc\left(a_i,a_{i+1}\right) \forall i \in \{1,3,5,\ldots,2007\}$ e perguntar também o $mdc\left(a_{2009},a_{2010},a_{2011}\right)$, $mmc\left(a_{2009},a_{2010},a_{2011}\right)$, $mdc\left(a_{2009},a_{2010}\right)$, $mdc\left(a_{2009},a_{2011}\right)$, $mdc\left(a_{2010},a_{2011}\right)$.

Multiplicando os primeiros $2\left(\dfrac{2007-1}{2}\right)=2006$ valores, pelo Lema para $c=1$, Jade obterá

$mmc\left(a_1,a_2\right)mdc\left(a_1,a_2\right)mmc\left(a_3,a_4\right)mdc\left(a_3,a_4\right)\ldots mmc\left(a_{2007},a_{2008}\right)mdc\left(a_{2007},a_{2008}\right)=$
$=a_1a_2\ldots a_{2008}$.

Multiplicando os 4 últimos e dividindo pelo quinto de trás para frente Jade encontra

$$\frac{\left[a_{2009},a_{2010},a_{2011}\right]\cdot\left(a_{2009},a_{2010}\right)\cdot\left(a_{2009},a_{2010}\right)\cdot\left(a_{2010},a_{2011}\right)}{\left(a_{2009},a_{2010},a_{2011}\right)}$$

$a_{2009}a_{2010}a_{2011}$, agora basta Jade multiplicar os dois valores encontrados e obterá $a_1a_2\ldots a_{2011}$, c.q.d..

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DE DANIEL SANTANA ROCHA (RIO DE JANEIRO – RJ)

A quantidade máxima é 3.

Primeiro vamos escrever uma lista com 3 números:

13, 17, 21. Como

$13+17+21=30+21=51=3\cdot 17$

$13+17=30=2\cdot 3\cdot 5$

$13+21=34=2\cdot 17$

$17+21=38=2\cdot 19$

$13=13$

$17=17$

$21=3\cdot 7$

Todos os números são livres de quadrados (i.e. não possuem quadrados perfeitos diferentes de 1 como divisor), pois senão teriam um expoente >1 na sua fatoração em primos.

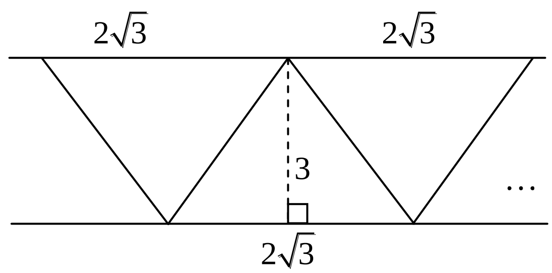
Agora suponha por absurdo que a lista de Esmeralda tenha mais que 3 números. Então existem pelo menos 4 números digamos a,b,c,d. Note que $4=2^2\neq 1$ é quadrado perfeito $\Rightarrow 4\nmid a, 4\nmid b, 4\nmid c, 4\nmid d$. Logo, os a,b,c,d só podem ter resto $1,2,3$ na divisão por 4. Pelo princípio da casa dos pombos existem dois que deixam o mesmo resto. Suponha, sem perda de generalidade, que sejam a e $b \Rightarrow a\equiv b \bmod 4 \Rightarrow a+b\equiv 2a \bmod 4$. Como $4\nmid a+b \Rightarrow 4\nmid 2a \Rightarrow$ a ímpar $\Rightarrow 2a\equiv 2 \bmod 4 \left(\text{se } a=2k+1, 2a=4k+2\right)$. Logo $a+b\equiv 2 \bmod 4$. Como $4\nmid a+b+c \Rightarrow c \not\equiv -(a+b)\equiv 2 \bmod 4$ e $4\nmid a+b+d \Rightarrow d\not\equiv -(a+b)\equiv 2 \bmod 4$. Como $c,d\not\equiv 0 \bmod 4$, os restos da divisão por 4 de c e d são 1 ou 3. Se $c\not\equiv d \bmod 4 \Rightarrow c\equiv 1 \bmod 4$ e $d\equiv 3 \bmod 4$ ou $c\equiv 3 \bmod 4$ e $d\equiv 1 \bmod 4$.

De qualquer forma, $c+d\equiv d+c\equiv 0 \bmod 4$, absurdo. Logo $c\equiv d \bmod 4 \Rightarrow c+d\equiv 2d \bmod 4$ e de $4\nmid 2d \Rightarrow d$ ímpar $\Rightarrow c+d\equiv 2d\equiv 2 \bmod 4 \Rightarrow a+b+c+d\equiv 2+2\equiv 0 \bmod 4$. Absurdo!

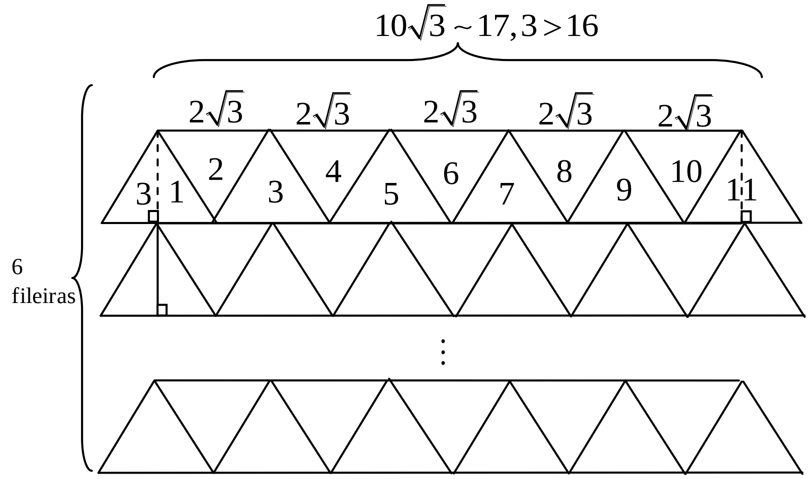
PROBLEMA 5: SOLUÇÃO DE FABIO DA SILVA SOARES (PLANALTINA – DF)

Primeiro vamos encontrar a quantidade de triângulos necessários para colorir o quadrado.

Note que a altura do triângulo é 3, pelo Teorema de Pitágoras, e sabemos que o lado do triângulo é $2\sqrt{3}$. Usando o seguinte esquema:



Usaremos 6 fileiras com 11 triângulos, 6 virados para cima e o resto para baixo.
Obs: usamos 6 fileiras pois cada fileira tem altura 3 e com 5 não cobriremos o quadrado.



Dessa forma, temos que a figura que fizemos é capaz de cobrir o quadrado. Sabemos ainda que a figura tem 11×6 triângulos, 66.

Nós usaremos essa figura pois o enunciado pede que o triângulo esteja no plano, assim, se metade do triângulo estiver dentro do quadrado e metade fora, o enunciado ainda vale.

Cubramos então o quadrado de lado 16 com a figura. Note que existem 66 triângulos que cobrem toda a sua superfície. Pelo Princípio da Casa dos Pombos, temos que uma casa, ou triângulo, terá mais que 16 pontos, pois suponha que não acontecesse isso, todo triêngulo teria no máximo 15 pontos nele, totalizando $15 \cdot 66 = 990.$ Entretanto faltariam 10 pontos, pois o total de pontos é mil. Logo, um triângulo terá no mínimo 16 pontos nele. c.q.d..

PROBLEMA 6: SOLUÇÃO DE ALESSANDRO PACANOWSKI (RIO DE JANEIRO – RJ)

Vamos fazer por indução em k.

Se k = 1, vamos provar que sempre $N > I(N)P(N)$.

$N = \overline{ab}.$ Mas $N = 10a + b > ab = (a)(b) = P(N)I(N) \Leftrightarrow a(10-b)+b > 0.$ Mas $a \ge 0, 10-b \ge 0;\ b \ge 0 \Rightarrow a(10-b)+b \ge 0;$ só ocorrendo igualdade se b = 0 e $a(10-b) = 0.$ Como $b = 0 \Rightarrow 10-b \ne 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow N = 00,$ impossível (N tem 2 dígitos).

Olhemos agora para o caso com N com $2k$ dígitos. (Suponha, pela indução que, para todo e qualquer N', com $2(k-1)$ dígitos, $N' > P(N')I(N')$.)

Seja $N = \overline{xyN'}$, onde x e y são algarismos e N' é um número com $2k-2$ dígitos. Seja $P(N') = \varepsilon$ e $I(N') = \theta \Rightarrow P(N) = \overline{x\varepsilon}$ e $I(N) = \overline{y\theta}.$ Vamos provar que:

$N > P(N)I(N) \Leftrightarrow N = 10^{2k-1}x + 10^{2k-2}y + N' > P(N)I(N) = (x\cdot 10^{k-1}+\varepsilon)(y\cdot 10^{k-1}+\theta)$ (N' tem $2k-2$ dígitos, $N = 10^{2k-1}x + 10^{2k-2}y + N';$ θ e ε têm, ambos, k – 1 dígitos) $\Leftrightarrow 10^{2k-1}x + 10^{2k-2}y + N' > 10^{2k-2}xy + 10^{k-1}(x\theta + y\varepsilon) + \varepsilon\theta$. Pela hipótese de indução, $N' > P(N')I(N') = \varepsilon\theta \Rightarrow$ só precisamos provar que:

$10^{2k-1}x + 10^{2k-2}y > 10^{2k-2}xy + 10^{k-1}(x\theta + y\varepsilon).$ Como θ e ε tem ambos $k-1$ dígitos, temos que: $\varepsilon, \theta \le 10^{k-1} - 1 \Rightarrow 10^{2k-2}xy + 10^{k-1}(x\theta + y\varepsilon) \le 10^{2k-2}xy + 10^{k-1}\left((10^{k-1}-1)(x+y)\right) =$

$10^{2k-2}xy + 10^{2k-2}x + 10^{2k-2}y - 10^{k-1}(x+y).$ Então, só precisamos provar que: $10^{2k-1}x + 10^{2k-2}y > 10^{2k-2}xy + 10^{2k-2}x + 10^{2k-2}y - 10^{k-1}(x+y) \Leftrightarrow 10^{2k-1}x + 10^{k-1}(x+y)$ $> 10^{2k-2}\cdot x(y+1).$

Agora, observamos que $10^{2k-1}x \ge 10^{2k-2}\cdot x(y+1) \Leftrightarrow 10 \ge y+1$, o que é verdade, já que $y \le 9.$

Assim, como $x + y \ne 0 \Rightarrow 10^{k-1}(x+y) > 0 \Rightarrow 10^{2k-1}x + 10^{k-1}(x+y) > 10^{2k-2}\cdot x(y+1).$

SOLUÇÕES – NÍVEL 3

PROBLEMA 1: SOLUÇÃO DE RAFAEL KAZUHIRO MIYAZAKI (SÃO PAULO – SP)

Se n é quadrado perfeito, $n = k^2,$ o número é: $\underbrace{555...55}_{k^2},$ cujo somatório dos quadrados dos dígitos é $25k^2 = (5k)^2$, logo existe um número chapa com essa quantidade de algarismos.

Agora mostraremos como partir deste número obter números chapas de até $2k^2 > (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$, conseguimos um algoritmo para obter números chapas a partir de então.

Para $k^2 + x\left(0 \le x \le k^2\right)$, a configuração é:

$\underbrace{343434...34}_{x \text{ vezes } 34}\ \underbrace{555...5}_{k^2 - x \text{ vezes } 5}$. O qual tem soma dos quadrados igual a $25k^2 = (5k)^2$.

Vamos ver a partir de qual número esta configuração cobre os inteiros: $2k^2 > k^2 + 2k + 1 \Leftrightarrow k < 1 - \sqrt{2}$ e $k > 1 + \sqrt{2} \Rightarrow k \ge 3$.

Provamos que a partir de $n = 9$ construímos um número chapa de tamanho n.

Faltam os casos:

$n = 1$: 1 é chapa

$n = 2$: 34 é chapa

$n = 3$: 221 é chapa

$n = 4$: 5555 é chapa

$n = 5$: 34555 é chapa

$n = 6$: 343455 é chapa

$n = 7$: 3434345 é chapa

$n = 8$: 34343434 é chapa

$n = 9$: 555555555 é chapa

$n \ge 10$: utilize o algaritmo acima. (só fazer $k = \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor^2$ e $x = n - \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor^2 < \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor^2$, obedecendo as condições do número construído).

PROBLEMA 2: SOLUÇÃO DE ALEXANDRE PEROZIM DE FAVERI (SÃO PAULO – SP)

Inicialmente, $m = 1889$ não é possível, pois dando a 32 dos amigos, 61 figurinhas diferentes para cada, e 59 figurinhas (diferentes das distribuídas anteriormente) a um dos amigos, cada figurinha é possuída por exatamente um amigo. Assim, há uma distribuição completa. Veja que ela é possível, pois, analisando primeiro o amigo com 59 figurinhas, ele não possui 1957 figurinhas, 61 das quais cada amigo possui. Assim, comparando-o com cada amigo, eles não possuem 1891 figurinhas em comum. Além disso, comparando cada amigo que possui 61 figurinhas com outro que possui a mesma quantidade, pelo mesmo argumento, como para qualquer par de amigos essas figurinhas são todas diferentes, eles não possuem

$2011-(61+61)=1889.$ Assim, existe uma distribuição completa (não incompleta) com m = 1889.

É evidente que se $m<1889$, também existirão distribuições completas, pois cada amigo terá a mesma quantidade ou mais figurinhas, no caso de uma distribuição como exemplificamos (e ela já é completa). Assim, $m>1889.$

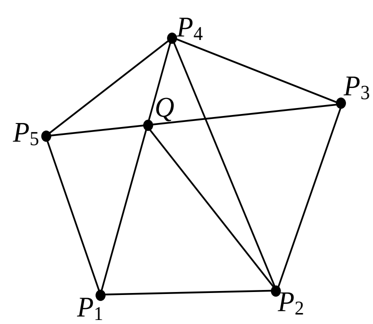
Agora provaremos que o mínimo é $m=1890.$

Primeiro, escolha um amigo ao acaso e dê-lhe x figurinhas. Considere dois outros amigos. Agora, denote por y e z o número de figurinhas exclusivas diferentes que esses amigos têm. Observe que $x+y\le 121,$ caso contrário, $2011-(x+y)<1890,$ e não se cumpre $m=1890.$ Assim, analogamente, $x+z\le 121$ e $y+z\le 121.$

Somando $2(x+y+z)\le 363 \Rightarrow x+y+z\le \dfrac{363}{2} \Rightarrow x+y+z\le 181,$ pois a soma é inteira. Assim, dados quaisquer 3 amigos, eles têm no máximo 181 figurinhas diferentes, o que nos dá, para os 33 amigos, $11\cdot 181=1991$ figurinhas diferentes. Como $1991<2011,$ há figurinhas que ninguém possui, e toda distribuição é incompleta. Assim, a resposta é: m = 1890.

PROBLEMA 3: SOLUÇÃO DA BANCA

Vamos provar que existe um triângulo $P_jP_{j+1}P_{j+2}$ com área maior ou igual a $\alpha=\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}.$ Suponha, por absurdo, que as áreas de todos os triângulos $P_jP_{j+1}P_{j+2}$ são todas menores de que $\alpha.$



Seja Q a interseção entre P_1P_4 e $P_3P_5.$

Note que área $P_1P_2Q \le \max\left(\text{área } P_1P_2P_5,\ \text{área } P_1P_2P_3\right) < \alpha$ e, portanto, $\text{área } P_1P_2P_4 = 1 - \text{área } P_1P_4P_5 - \text{área } P_2P_3P_4 > 1 - 2\alpha.$ Assim,

$$\frac{P_1Q}{P_1P_4} = \frac{\text{área } P_1P_2Q}{\text{área } P_1P_2P_4} < \frac{\alpha}{1-2\alpha}$$

Mas também é verdade que $\dfrac{P_1Q}{P_4Q} = \dfrac{\text{área } P_1P_3P_5}{\text{área } P_3P_4P_5}$. Como $\text{área } P_3P_4P_5 < \alpha$ e (analogamente a $P_1P_2P_4$) $\text{área } P_1P_3P_5 > 1-2\alpha,$

$$\frac{P_1Q}{P_4Q} > \frac{1-2\alpha}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{P_1Q}{P_1P_4} > \frac{1-2\alpha}{1-\alpha}.$$

Logo

$$\frac{1-2\alpha}{1-\alpha} < \frac{P_1Q}{P_1P_4} < \frac{\alpha}{1-2\alpha} \Rightarrow 5\alpha^2 - 5\alpha + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{5-\sqrt{5}}{10} < \alpha < \frac{5+\sqrt{5}}{10},$$

absurdo.

Analogamente o outro lado da desigualdade pode ser provado, bastando inverter as desigualdades.

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DE TADEU PIRES DE MATOS BELFORT NETO (FORTALEZA – CE)

Sim, basta ver a seguinte sequência:

$b_1, b_1 + b_2, b_1 + b_2 + b_3 ..., b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_{2011},$

onde $b_1 = mmc\left(b_2 + b_3 + ... + b_{2011}, b_2 + b_3 + ... + b_{2010}, ..., b_2 + b_3, b_2\right)$

$b_2 = mmc\left(b_3 + b_4 + ... + b_{2011}, b_3 + ... + b_{2010} ..., b_3 + b_4, b_3\right)$

$b_3 = mmc\left(b_4 + b_5 + ... + b_{2011}, b_4 + ... + b_{2010} ..., b_4 + b_5, b_4\right)$

$b_4 = mmc\left(b_5 + ... + b_{2011}, b_5 + ... + b_{2010}, ..., b_5 + b_6, b_5\right)$

$b_{2010} = b_{2011}k, k \ge 1, k \in \mathbb{Z}_+^*,$

e b_{2011}, um inteiro positivo qualquer. Agora vejamos que essa sequência é estritamente crescente, pois sempre estamos somando novos inteiros positivos. E que: $a_j - a_i = b_1 + b_2 + ... + b_j - \left(b_1 + b_2 + ... + b_i\right) = b_{i+1} + b_{i+2} + ... + b_j$. Mas como pela construção da sequência $b_{i+1} + b_{i+2} + ... + b_j \left| b_i \right.$ e $b_i \left| b_{i-1} \right| b_{i-2} \left| ... \right| b_1$; pois cada b_i é múltiplo do b_{i+1}. Assim

$b_{i+1}+b_{i+2}+...+b_j \mid b_1+b_2+...+b_i=a_i$ e

$b_{i+1}+b_{i+2}+...+b_j \mid b_1+b_2+...+b_i+\left(b_{i+1}+...+b_j\right)=a_j$

$$\Downarrow$$

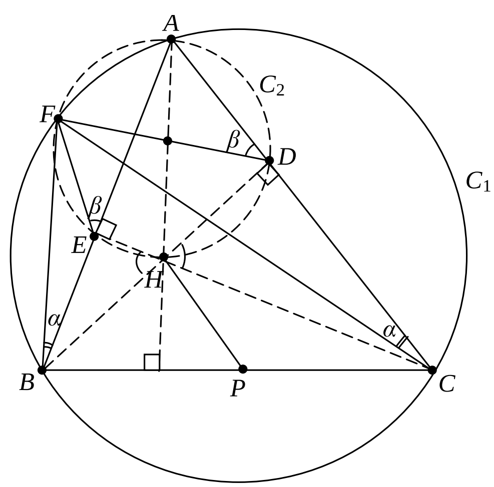
$a_j-a_i \mid a_i \Rightarrow a_j-a_i \mid a_i+\left(a_j-a_i\right)=a_j \Rightarrow a_j-a_i \mid mdc\left(a_i,a_j\right).$

Mas $mdc\left(a_i,a_j\right) \mid a_i$ e $mdc\left(a_i,a_j\right) \mid a_j \Rightarrow$

$mdc\left(a_i,a_j\right) \mid a_j-a_i \Rightarrow a_j-a_i=mdc\left(a_i,a_j\right).$ Logo tal sequência existe.

PROBLEMA 5: SOLUÇÃO DE KAYO DE FRANÇA GURGEL (FORTALEZA – CE)

Note que o círculo circunscrito ao ΔADE também passa por H porque $AEH+ADH=180°$ o que torna o quadrilátero $AEHD$ inscritível.



Note que

$$\begin{cases} FBA \equiv FCA \text{ porque ambos "olham" para o arco } FA \text{ no círculo } C_1 \text{ (ângulos inscritos)} \\ FEA \equiv FDA \text{ porque ambos "olham" para o arco } FA \text{ no círculo } C_2 \text{ (ângulos inscritos)} \end{cases}$$

Com isso, $\Delta FEB \sim \Delta FDC$ (dois ângulos comuns: α e $\left(180-\beta\right)$) e

$$\frac{\overline{FB}}{\overline{FC}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{DC}}$$

Veja também que $\Delta BEH \sim \Delta CDH$ pois $\begin{cases} BEH \equiv FDH = 90° \\ EHB \equiv DHC \ (\text{O.P.V}) \end{cases}$, então

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{HC}}$$

Sendo $\overline{HP}$ a bissetriz interna do ângulo BHC, o teorema da bissetriz interna garante que

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{HC}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}$$

Essas três igualdades mostram que $\frac{\overline{FB}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}$, e isso nos diz que $\overline{FP}$ é a bissetriz interna do ângulo BFC, conforme a recíproca do teorema da bissetriz interna no ΔBFC. Desse modo fica provado que as duas bissetrizes se encontram em um ponto comum *P* sobre $\overline{BC}$.

PROBLEMA 6: SOLUÇÃO DA BANCA

No que se segue, tomaremos os índices mod 2011, ou seja, $x_{i+2011} = x_i$ para todo *i* inteiro.

Lema 1. No caso em que a expressão dada é máxima, não existe *i* tal que x_{i-1}, x_i, x_{i+1} são todos não nulos.

Suponha, por absurdo, que a expressão assume seu valor máximo e que exista x_i tal que x_{i-1}, x_i, x_{i+1} são todos não nulos (ou, o que é o mesmo, $x_{i-1}x_ix_{i+1} > 0$). Defina os conjuntos $A = \{x_i \mid x_i > 0\}$ e $B = \{x_i \mid x_{i-1}x_ix_{i+1} > 0\}$. Então $B \subset A$ e $B \neq 0$. Seja x_k o menor elemento de *B* e considere x_{k-1} e x_{k+1}. Temos os seguintes casos:

- $x_k < x_{k-1}$ e $x_k < x_{k+1}$. Nesse caso, sejam

$$x_i' = \begin{cases} 0, & \text{se } x_i = 0 \text{ ou } i = k \\ x_i + \frac{x_k}{|A|-1}, & \text{se } x_i > 0 \text{ e } i \neq k \end{cases}$$

Essencialmente, zeramos x_k e distribuímos o seu valor uniformemente entre os demais termos não nulos. Então $|x_i - x_{i+1}|$ não muda se $x_i, x_{i+1} \in A$ e

$k \notin \{i, i+1\}$, ou $x_i, x_{i+1} \notin A$; aumenta de $|x_i - x_{i+1}| = \max\{x_i, x_{i+1}\}$ para $\max\{x_i, x_{i+1}\} + \frac{x_k}{|A|-1}$ se $x_i \notin A$ ou $x_{i+1} \notin A$, nas não ambos; aumenta de $|x_{k\pm1} - x_k| = x_{k\pm1} - x_k$ para $x_{k\pm1} + \dfrac{x_k}{|A|-1}$ se $k \in \{i, i+1\}$.

- $x_{k-1} < x_k < x_{k+1}$. Isso significa que $x_{k-1} \notin B$, e sendo $x_k \in B, x_{k-1} > 0$, ou seja, $x_{k-1} \in A \setminus B$, ou seja, $x_{k-2} = 0$. Nesse caso, trocamos (x_{k-1}, x_k) por $(x'_{k-1}, x'_k) = (x_{k-1} + x_k, 0)$. Nesse caso, $|x_i - x_{i+1}|$ não muda para $i \notin \{k-2, k-1, k\}$; para $i = k-2$ aumenta de $|x_{k-2} - x_{k-1}| = x_{k-1}$ para $|x_{k-2} - x'_{k-1}| = x_{k-1} + x_k$; para $i = k-1$ aumenta de $|x_{k-1} - x_k| = x_k - x_{k-1}$ para $|x'_{k-1} - x'_k| = x_{k-1} + x_k$; para $i = k$ aumenta de $|x_k - x_{k+1}| = x_{k+1} - x_k$ para $|x'_k - x_{k+1}| = x_{k+1}$.
- $x_{k-1} > x_k > x_{k+1}$. Análogo ao anterior.
- $x_k > x_{k-1}$ e $x_k > x_{k+1}$. Isso quer dizer que $x_{k-1}, x_{k+1} \in A \setminus B$, ou seja,

$x_{k-2} = x_{k+2} = 0$. Nesse caso, troque (x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) por $(x'_{k-1}, x'_k, x'_{k+1}) = (x_{k-1} + x_k/2, 0, x_{k+1} + x_k/2)$. Todas as diferenças $|x_i - x_{i+1}|$ não mudam exceto para $i \in \{k-2, k-1, k, k+1\}$. O que muda no produto final é

$$|(x_{k-2} - x_{k-1})(x_{k-1} - x_k)(x_k - x_{k+1})(x_{k+1} - x_{k+2})| = x_{k-1}(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})x_{k+1}$$

que muda para

$$|(x_{k-2} - x'_{k-1})(x'_{k-1} - x'_k)(x'_k - x'_{k+1})(x'_{k+1} - x_{k+2})| = (x_{k-1} + x_2/2)^2 (x_{k+1} + x_k/2)^2.$$

Mas

$$\begin{aligned}(x_{k-1} + x_k/2)^2 (x_{k+1} + x_k/2)^2 &= \left(x_{k-1}(x_{k-1} + x_k) + x_k^2/4\right)\left(x_{k+1}(x_{k+1} + x_k) + x_k^2/4\right) \\ &> x_{k-1}(x_k + x_{k-1})(x_k + x_{k+1})x_{k+1} \\ &> x_{k-1}(x_k - x_{k-1})(x_k + x_{k+1})x_{k+1}.\end{aligned}$$

Como todos os casos estão cobertos, e em todos eles obtivemos um produto maior ou igual ao original, o lema está provado.
Agora só temos grupos de uma ou duas variáveis consecutivas não nulas. Se temos

um grupo $(0, x_k, 0)$, obtemos o produto $|(x_{k-1} - x_k)(x_k - x_{k+1})| = x_k^2$; se temos um grupo $(0, x_k, x_{k+1}, 0)$, obtemos $|(x_{k-1} - x_k)(x_k - x_{k+1})(x_{k+1} - x_{k+2})| = x_k x_{k+1} |x_{k+1} - x_k|$. Note que os grupos agora podem ser permutados, de modo que podemos deixar todos os grupos com duas variáveis vizinhas. Com isso, temos agora o seguinte lema:

Lema 2: No caso em que a expressão dada é máxima há exatamente um grupo de duas variáveis não nulas.

Suponha, por absurdo, que há pelo menos dois grupos de variáveis não nulas $(0, a, b, 0)$ e $(0, a, b, 0)$. Pela observação acima, podemos supor sem perda de generalidade que os grupos são consecutivos, ou seja, são, na ordem, $(0, a, b, 0, c, d, 0)$. Troque essas variáveis por $(0, a+b/2, 0, (b+c)/2, 0, d+c/2, 0)$. Trocamos o produto $abcd|(a-b)(c-d)|$ por $(a+b/2)^2((b+c)/2)^2(d+c/2)^2$. Mas já vimos que $(a+b/2)^2 > a|a-b|, (d+c)^2 > d|c-d|$ e, pela desigualdade das médias, $((b+c)/2)^2 \geq bc$. Multiplicando tudo, prova-se que obtivemos um produto maior com a troca, o que prova o lema.

Com isso, podemos supor, sem perda de generalidade, que as variáveis não nulas são as de índice ímpar, ou seja, $x_1, x_3, \ldots, x_{2011}$. Nesse caso, obtemos o produto $x_1 x_{2011} |x_1 - x_{2011}| x_3^2 x_5^2 \ldots x_{2009}^2$, e podemos otimizar localmente.

Primeiro, seja $x_1 + x_{2011} = s$ e suponha, sem perda de generalidade, $x_1 > x_{2011}$. Sejam α, β reais positivos a serem determinados. Então, pela desigualdade das médias,

$$\begin{aligned} x_1 x_{2011}(x_1 - x_{2011}) &= \frac{1}{\alpha\beta}(\alpha x_1)(\beta x_{2011})(x_1 - x_{2011}) \\ &\leq \frac{1}{\alpha\beta}\left(\frac{\alpha x_1 + \beta x_{2011} + (x_1 - x_{2011})}{3}\right)^3 \\ &= \frac{1}{\alpha\beta}\left(\frac{(\alpha+1)x_1 + (\beta-1)x_{2011}}{3}\right)^3 \end{aligned}$$

Para que tudo dê certo, escolhamos α e β tais que

- Obtenhamos *s* no final, ou seja, $\alpha+1=\beta-1 \Leftrightarrow \beta-\alpha=2$;
- A igualdade possa ocorrer, ou seja,

$\alpha x_1=\beta x_{2011}=x_1-x_{2011} \Leftrightarrow x_{2011}=(1-\alpha)x_1$ e $x_1=(\beta+1)x_{2011}$, ou seja, $1=(1-\alpha)(\beta+1) \Leftrightarrow -\alpha\beta=\alpha-\beta=-2.$

Assim, $-\alpha$ e β são as raízes da equação $t^2-2t-2=0.$ Assim $\alpha=\sqrt{3}-1$ e $\beta=1+\sqrt{3},$ e

$$x_1x_{2011}(x_1-x_{2011})\le\frac{1}{\alpha\beta}\left(\frac{(\alpha+1)x_1+(\beta-1)x_{2011}}{3}\right)^3=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}(x_1+x_{2011})}{3}\right)^3=\frac{\sqrt{3}}{18}s^3$$

Agora, vamos otimizar o resto, que é simples. Sendo $x_3+x_5+\ldots+x_{2009}=\frac{2011}{2}-s,$ temos

$$x_3^2x_5^2\ldots x_{2009}^2\le\left(\frac{x_3+x_5+\ldots+x_{2009}}{1004}\right)^{2008}=\left(\frac{\frac{2011}{2}-s}{1004}\right)^{2008}$$

Com isso, podemos terminar o problema. Seja γ real positivo a ser escolhido. Então a nossa expressão é

$$x_1x_{2011}\left|x_1-x_{2011}\right|x_3^2x_5^2\ldots x_{2009}^2\le\frac{\sqrt{3}}{18}s^3\cdot\left(\frac{\frac{2011}{2}-s}{1004}\right)^{2008}=\frac{\sqrt{3}}{18\gamma^3}(\gamma s)^3\left(\frac{\frac{2011}{2}-s}{1004}\right)^{2008}$$

$$\le\frac{\sqrt{3}}{18\gamma^3}\left(\frac{3\gamma s+2008\cdot\frac{\frac{2011}{2}-s}{1004}}{2011}\right)^{2011}$$

$$\le\frac{\sqrt{3}}{18\gamma^3}\left(\frac{2011+(3\gamma-2)s}{2011}\right)^{2011}$$

Escolhemos $\gamma=2/3,$ e enfim temos

$$x_1x_{2011}\left|x_1-x_{2011}\right|x_3^2x_5^2\ldots x_{2009}^2\le\frac{3\sqrt{3}}{16}.$$

Observações:

- É claro que essa parte final poderia ter sido feita com cálculo, mas evitei fazê-lo para manter a solução elementar.
- A igualdade pode ocorrer. Basta refazer as contas: obtemos $x_3 = x_5 = \ldots = x_{2009} = 1, x_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4}$ e $x_{2011} = \frac{3-\sqrt{3}}{4}$.

XXXIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Problemas e soluções da Primeira Fase – Nível Universitário

PROBLEMA 1
Calcule o valor de

$$\sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq 0}\frac{\min\{m,n\}}{3^{m+n}}.$$

PROBLEMA 2
Encontre o volume da região definida por

$$x^2+y^2\leq 1,\ \ 0\leq z\leq 2+\left(x^4-6x^2y^2+y^4\right)^{2011}.$$

PROBLEMA 3
Zé Roberto precisa sortear alguns números primos para elaborar uma questão de teoria dos números para a Olimpíada de Matemática. Ele resolve jogar um dado comum e ir somando os pontos até alcançar um primo. Ele pede para o seu filho mais velho Umberto ir anotando as respostas.
Da primeira vez que ele joga o dado sai o número 2. Umberto anota que o primeiro primo será $p_1=2.$
No segundo lanamento sai 1. Como 1 não é primo, Zé Roberto volta a lançar o dado e desta vez sai 4. Umberto anota que o segundo primo será $p_2=5.$
Zé Roberto lança o dado novamente e obtém 6. Neste momento seu segundo filho Doisberto, que assistia ao sorteio, declara: "Tenho a intuição de que o próximo primo será $p_3=11.$". Zé Roberto fica um pouco surpreso mas decide continuar a lançar o dado normalmente. Qual a probabilidade de que o palpite de Doisberto venha a se confirmar?

PROBLEMA 4
Para *n* natural, seja *f*(*n*) o número de pares ordenados (*x*, *y*) com *x*, *y* inteiros tais que

$$3x^2-2xy+3y^2=n.$$

Calcule o valor médio de *f*(*n*), ou seja, calcule

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(0)+f(1)+f(2)+...+f(n-1)}{n}.$$

PROBLEMA 5

A função $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ é contínua em $[0,+\infty)$, derivável em $(0,+\infty)$ e satisfaz

$f(x+1)=\cos(f(x))$

para todo $x\in[0,+\infty)$. Sabemos que $f(0)=0$ e $f'(2)=1$. Mostre que existe um único número real *d* tal que o limite abaixo exista e pertença a $(0,+\infty)$:

$$a=\lim_{x\searrow 0}\frac{f(x)}{x^d}.$$

Determine os valores de *d* e de *a*.

PROBLEMA 6

Seja *X* uma matriz real quadrada $n\times n$. Suponha que existe um inteiro positivo *m* com $(X^2+I)^m=0$.

(a) Mostre que $n\neq 2011$.

(b) Se *n* = 2010, é possível concluir que $X^2+I=0$?

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1

Para $n\geq 0$ fixo, seja

$$S_n=\sum_{m\geq 0}\frac{\min\{m,n\}}{3^m}=\sum_{0\leq m<n}\frac{m}{3^m}+\sum_{m\geq n}\frac{n}{3^m}=\sum_{0\leq m<n}\frac{m}{3^m}+\frac{n}{2\cdot 3^{n-1}} \qquad (*)$$

Assim,

$$3S_n=\sum_{0\leq m<n}\frac{m}{3^{m-1}}+\frac{n}{2\cdot 3^{n-2}}=\sum_{0\leq m<n-1}\frac{m+1}{3^m}+\frac{n}{2\cdot 3^{n-2}} \qquad (**)$$

Substraindo (*) de (**), obtemos

$$2S_n=\sum_{0\leq m<n-1}\frac{1}{3^m}+\frac{n}{2\cdot 3^{n-2}}-\frac{n-1}{3^{n-1}}-\frac{n}{2\cdot 3^{n-1}}=\sum_{0\leq m\leq n-1}\frac{1}{3^m}.$$

Somando a PG, obtemos

$$S_n=\frac{3}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{3^n}\right).$$

Assim,

$$\sum_{m\ge 0}\sum_{n\ge 0}\frac{\min\{m,n\}}{3^{m+n}}=\sum_{n\ge 0}\frac{S_n}{3^n}$$
$$=\frac{1}{4}\left(\sum_{n\ge 1}\frac{1}{3^{n-1}}-\sum_{n\ge 1}\frac{1}{3^{2n-1}}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{8}\right)$$
$$=\frac{9}{32}.$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2

Em primeiro lugar, notemos que

$$x^4-6x^2y^2+y^4=\left(x^2+y^2\right)^2-8x^2y^2$$

que, em coordenadas polares, é

$$r^4-8\left(r\cos\theta\right)^2\left(r\sin\theta\right)^2=r^4\left(1-8\cos^2\theta\sin^2\theta\right)=r^4\left(1-2\sin^2 2\theta\right)=r^4\cos 4\theta$$

Assim, em coordenadas cilíndricas, a região fica definida por

$$0\le r\le 1,\quad 0\le z\le 2+\left(r^4\cos 4\theta\right)^{2011}$$

Onde vale a pena notar que, como $r\le 1$, tem-se $2+\left(r^4\cos 4\theta\right)^{2011}\ge 2-1=1$, isto é, a tampa superior do tronco de cilindro não toca a base $z = 0$.

Para encontrar o volume, basta colocar tudo em coordenadas cilíndricas

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(2+r^{8044}\cos^{2011}4\theta\right)rdrd\theta=\int_0^{2\pi}\left(r^2+\frac{r^{8046}}{8046}\cos^{2011}4\theta\right)_{r=0}^{r=1}d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{\cos^{2011}4\theta}{8046}\right)d\theta=2\pi+C\cdot\int_0^{8\pi}\cos^{2011}u\ du$$

Mas, fazendo a substituição $\omega=\sin u$

$$\int_0^{8\pi}\cos^{2011}u\ du=\int_0^0\left(1-\omega^2\right)^{1005}d\omega=0.$$

Portanto, o volume pedido é 2π.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3

Para que o palpite de Doisberto venha a se confirmar, o próximo resultado do dado não pode ser 1, senão a soma até aí seria 1 + 6 = 7, que é um primo menor que 11. Doisberto estará certo se o próximo resultado do dado após o 6 inicial for maior que 1 e alguma sequencia de resultados do dado após o 6 inicial tiver a soma igual a 5 (pois 11 = 6 + 5). As sequências de resultados com essa propriedade são: (5), (4, 1), (3, 2), (3, 1, 1), (2, 3) (2, 2, 1), (2, 1, 2) e (2, 1, 1, 1). A probabilidade de que o palpite de Doisberto venha a se confirmar é, portanto igual à probabilidade de que, após o 6 inicial, saia uma dessas sequências de resultados, a qual é

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{6^4}=\frac{1}{6}+\frac{3}{36}+\frac{3}{216}+\frac{1}{1296}=\frac{343}{1296}.$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4

Aplicando uma rotação de 45º à curva determinada pela equação acima, obtemos

$$3\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2-2\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)+3\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2=n$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\sqrt{n/2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{n/4}\right)^2}=1.$$

Ou seja, a curva é uma elipse com semi-eixos $\sqrt{n/2}$ e $\sqrt{n/4}$ e área

$$A_n=\pi\sqrt{\frac{n}{2}}\sqrt{\frac{n}{4}}=\frac{n\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Por outro lado, $f(0)+f(1)+f(2)+...+f(n-1)$ é igual ao número de pontos (x,y) com coordenadas inteiras tais que $3x^2-2xy+3y^2\le n-1$, ou seja, igual ao número de pontos inteiros no interior da elipse de equação $3x^2-2xy+3y^2=n$, que é essencialmente a área A_n desta elipse.

Mais precisamente, para cada ponto inteiro (*x*, *y*) no interior da elipse de equação $3x^2-2xy+3y^2=n$, considere o quadrado de vértices (*x*, *y*), (*x* + 1, *y*), (*x*, *y* + 1), (*x* + 1, *y* + 1). Afirmamos que este quadrado está contido na elipse $3x^2-2xy+3y^2=n+10\sqrt{n}$. Como $|x|,|y|\le\sqrt{n}$, temos

$$3(x+1)^2-2(x+1)(y+1)+3(y+1)^2=3x^2-2xy+3y^2+4(x+y)+4\le n+10\sqrt{n}$$

e analogamente para os demais vértices do quadrado. Assim,

$$f(0)+f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1)\le A_{n+10\sqrt{n}}$$

Da mesma forma, prova-se que

$$f(0)+f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1)\ge A_{n-10\sqrt{n}}$$

Assim, pelo sanduíche, temos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_{n-10\sqrt{n}}}{n}\le\lim_{n\to\infty}\frac{f(0)+f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1)}{n}\le\lim_{n\to\infty}\frac{A_{n+10\sqrt{n}}}{n}$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(0)+f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1)}{n}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5

Estritamente falando, o enunciado deste problema está incorreto: é possível que exista $\delta>0$ tal que $f(x)<0$ para todo $x\in(0,\delta)$. O enunciado ficaria correto com qualquer uma das seguintes alterações:

(a) Tomar $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$;

(b) Considerar, no enunciado, $a=\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{f(x)}{x^d}\right|$.

(c) Pedir que $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Vamos resolver o problema com esta última variação no enunciado, talvez a que menos altera o problema.

De $f(x+1)=\cos f(x)$, obtemos $f(1)=\cos f(0)=\cos 0=1$.

Derivando $f(x+1)=\cos f(x)$, obtemos

$$f'(x+1)=-\operatorname{sen}\left(f(x)\right)\cdot f'(x),\forall x>0.$$

Fazendo $x = 1$, obtemos $1=f'(2)=-\operatorname{sen}\left(f(1)\right)\cdot f'(1)=-\operatorname{sen}(1)\cdot f'(1)$, donde

$$f'(1)=-\frac{1}{\operatorname{sen}1}.$$

Assim, $f(1+h)=1-\dfrac{\left(1+r(h)\right)h}{\operatorname{sen}1}$, onde $\lim_{h\to 0}r(h)=0$.

Por outro lado, $\cos x = 1 - \frac{(1+s(x))x^2}{2}$, onde $\lim_{x\to 0} s(x) = 0$, e logo $f(1+h) = \cos f(h) = 1 - \frac{(1+s(f(h)))f(h)^2}{2}$. Assim, para $h > 0$, temos $1 - \frac{(1+r(h))h}{\text{sen}1} = f(1+h) = 1 - \frac{(1+s(f(h)))f(h)^2}{2}$, donde

$$|f(h)| = \left(\frac{2(1+r(h))h}{(1+s(f(h)))\text{sen}1}\right)^{1/2},$$

E portanto

$$\lim_{h\searrow 0}\left|\frac{f(h)}{h^{1/2}}\right| = \left(\frac{2}{\text{sen}1}\right)^{1/2},$$

Pois como *f* é contínua em 0, $\lim_{h\searrow 0} s(f(h)) = \lim_{h\searrow 0} r(h) = 0.$ Assim *f* tem sinal constante em um intervalo da forma $(0,\delta), \delta > 0$ pequeno. Assim

$$\lim_{h\searrow 0}\frac{f(h)}{h^{1/2}} = \pm\left(\frac{2}{\text{sen}1}\right)^{1/2}.$$

Se $d < 1/2$,

$$\lim_{h\searrow 0}\frac{f(h)}{h^d} = \left(\lim_{h\searrow 0}\frac{f(h)}{h^{1/2}}\right)\left(\lim_{h\searrow 0} h^{1/2-d}\right) = 0,$$

e, se $d > 1/2$,

$$\lim_{h\searrow 0}\left|\frac{f(h)}{h^d}\right| = \left(\lim_{h\searrow 0}\left|\frac{f(h)}{h^{1/2}}\right|\right)\left(\lim_{h\searrow 0} h^{1/2-d}\right) = +\infty$$

Donde *a* não está definido.
Assim, temos necessariamente $d = 1/2$ e $a = \pm\sqrt{2/\text{sen}1}.$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6

(a) Se *n* = 2011, então o polinômio característico de *X* tem grau 2011, e portanto deve ter uma raiz real. Em suma, *X* teria um autovetor real *w* associado a um autovalor real λ. Mas então:

$$\left(X^2+I\right)w=\left(\lambda^2+1\right)w$$

$$\left(X^2+I\right)^m w=\left(\lambda^2+1\right)^m w=0.$$

Como *w* não é nulo, devemos ter $\left(\lambda^2+1\right)^m=0,$ isto é, $\lambda^2+1=0,$ absurdo.

(b) Não. Em primeiro lugar, mostremos que existe uma matriz $B_{4\times 4}$ que satisfaz $\left(B^2+I\right)^2=0$ mas que não satisfaz $B^2+I=0.$ Por exemplo:

$$B=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^2=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}=-I+N$$

onde *N* é uma matriz não-nula, triangular superior e, portanto, nilpotente (aliás, $N^2=0$). Assim

$B^2+I=N\neq 0$ mas $\left(B^2+I\right)^2=N^2=0$

Enfim, considere

$$X=\begin{bmatrix} B & & \cdots & & \\ & A & \cdots & & \\ & & & A & \\ & & & & A \end{bmatrix}$$

Onde há um bloco $B_{4\times 4}$ e 1003 blocos $A_{2\times 2}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (note que $A^2=-I;$ todas as entradas em branco são nulas). Então

$$X^2=\begin{bmatrix} B^2 & & \cdots & & \\ & A^2 & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \cdots & A^2 & \\ & & \cdots & & A^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -I+N & & \cdots & & \\ & -I & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \cdots & -I & \\ & & \cdots & & -I \end{bmatrix}$$

donde

$$\left(X^2+I\right)^2=\begin{bmatrix} N^2 & & \cdots & & \\ & 0 & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \cdots & 0 & \\ & & \cdots & & 0 \end{bmatrix}=0.$$

Então $X^2+I\neq 0$ mas $\left(X^2+I\right)^2=0$ (e $\left(X^2+I\right)^m=0$ para m = 2, 3, 4...).

XXXIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e soluções da Segunda Fase – Nível Universitário

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Para cada *t* reta, seja $P_t(x) = x^3 - 12x + t$, e seja

$\Delta(t) = \max\{c \in \mathbb{R} \mid P_t(c) = 0\} - \min\{c \in \mathbb{R} \mid P_t(c) = 0\}$

A diferença entre a maior raiz real e a menor raiz real de $P_t(x)$. Determine o conjunto de valores que $\Delta(t)$ pode assumir quando *t* varia.

PROBLEMA 2

Considere um polígono regular de *n* lados inscrito em um círculo unitário.
Determine a soma das áreas de todos os triângulos cujos vértices são vértices do polígono.

PROBLEMA 3

Para *n* inteiro positivo e *A* um subconjunto do conjunto $\mathbb{Z}/(n)$ dos inteiros módulo *n*, definimos $f(A) = \min_{t \in \mathbb{Z}/(n)} |A \cap (A+t)|$, onde $A + t = \{x + t, x \in A\} \subset \mathbb{Z}/(n)$.

Definimos $g(n) = \max\{f(A); A \subset \mathbb{Z}/(n), |A| = \lfloor n/2 \rfloor\}$.

(a) Prove que $g(n) \le \lceil n/4 \rceil - 1, \forall n \ge 1$.

(b) Prove que $g(n) = \lceil n/4 \rceil - 1$ para infinitos valores de $n \ge 1$.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Considere o polinômio

$$f(x) = x^3 + x^2 - 4x + 1.$$

(a) Mostre que se *r* é raiz de $f(x)$, então $r^2 + r - 3$ também é uma raiz de $f(x)$.

(b) Sejam α, β e γ as três raízes de $f(x)$, em alguma ordem. Determine todos os possíveis valores de

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}.$$

PROBLEMA 5

Se $u_1,...,u_k \in \mathbb{R}^3$, denote por $C(u_1,...,u_k)$ o cone gerado por $u_1,...,u_k$:

$$C(u_1,...,u_k)=\{a_1u_1+...+a_ku_k; a_1,...,a_k \in [0,+\infty)\}.$$

Sejam v_1,v_2,v_3,v_4 pontos sorteados independentemente e uniformemente na esfera unitária $x^2+y^2+z^2=1$.

a) Qual é a probabilidade de que $C(v_1,v_2,v_3,v_4)=\mathbb{R}^3$?

b) Qual é a probabilidade de que cada um dos quatro vertores seja necessário para gerar $C(v_1,v_2,v_3,v_4)$, isto é, que $C(v_1,v_2,v_3)\neq C(v_1,v_2,v_3,v_4)$, $C(v_1,v_2,v_4)\neq C(v_1,v_2,v_3,v_4), C(v_1,v_3,v_4)\neq C(v_1,v_2,v_3,v_4)$ e $C(v_2,v_3,v_4)\neq C(v_1,v_2,v_3,v_4)$?

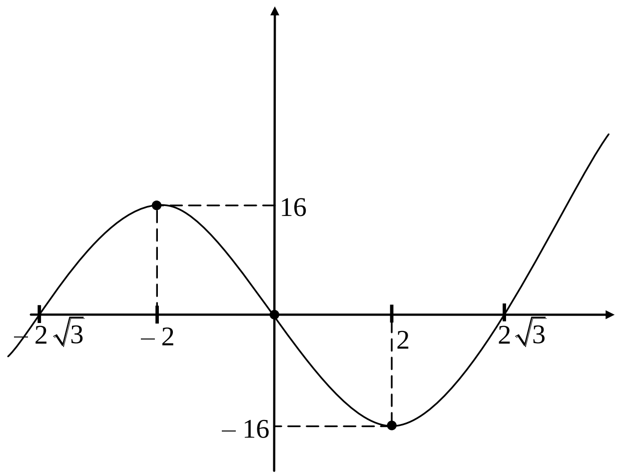
PROBLEMA 6

Seja $(x_n)_{n\geq 0}$ uma sequência de números inteiros que satisfaz uma *recorrência linear de ordem k* para um certo inteiro positivo *k* fixado, i.e., existem constantes reais $c_1,c_2,...,c_k$ tais que $x_{n+k}=\sum_{r=1}^{k} c_r x_{n+k-r}, \forall n\geq 0.$ Suponha que *k* é o menor inteiro positivo com essa propriedade. Prove que $c_j \in \mathbb{Z}$, para todo *j* com $1\leq j\leq k.$

SOLUÇÕES DA SEGUNDA FASE

PROBLEMA 1: SOLUÇÃO DE LUCAS COLUCCI CAVALCANTE DE SOUZA (SÃO PAULO – SP)

Vamos esboçar o gráfico de $f(x)=x^3-12x.$



Seja $P_t(x) = x^3 - 12x + t.$ Como sua derivada tem raízes ± 2, P_t só pode ter mais de uma raiz real se houver raiz β tal que $-2 \le \beta \le 2$, pois em $]2, +\infty[$ e $]-\infty, -2[$ a derivada $(3x^2 - 12)$ é positiva.

Assim, vamos separar em casos: P_t é do terceiro grau, logo tem: ou três raízes reais ou só uma raiz real.

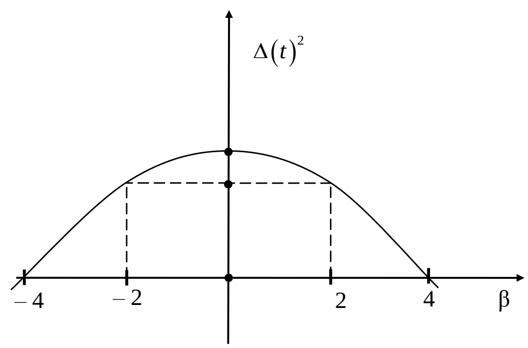
i) P_t só possui uma raiz real: Nesse caso, do gráfico, $t > 16$ ou $t < -16$, já que P_t é obtido transladando o gráfico de *f t* unidades para cima. Nesse caso, $\Delta(t) = 0$ (pois a única raiz real é max e min).

ii) P_t possui três raízes reais. (obrig. uma $]-\infty, -2]$, outra em $[-2, 2]$ e outra em $[2, +\infty[$ sejam $\alpha_1, \beta, \alpha_3$ essas raízes (com $\alpha_1 \le \beta \le \alpha_3$. Na realidade não podemos ter $\alpha_1 = \beta = \alpha_3$, já que a derivada de P_t tem duas raízes simples). Das relações de Girard,

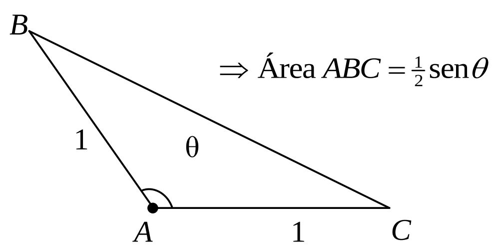
$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta + \alpha_3 = 0 & \Leftrightarrow -\beta = \alpha_1 + \alpha_3 \ (*) \\ \alpha_1\beta + \alpha_3\beta + \alpha_1\alpha_3 = -12 \\ \alpha_1\beta\alpha_3 = -t \end{cases}$$

Pondo (*) na segunda equação do sistema obtemos $-\beta^2 + \alpha_1\alpha_3 = -12 \Leftrightarrow \alpha_1\alpha_3 = \beta^2 - 12.$

Por fim, note que $(\alpha_3-\alpha_1)^2=(\alpha_3+\alpha_1)^2-4\alpha_3\alpha_1=48-3\beta^2,$ por (*) e (**).
Como $\beta\in[-2,2],$ temos o gráfico de $\Delta(t)^2$ em função de β: Assim, $36\le\Delta(t)^2\le 48\Leftrightarrow 6\le\Delta(t)\le 4\sqrt{3}.$ Por fim temos que $\operatorname{Im}\Delta(t)=\{0\}\cup\left[6,4\sqrt{3}\right].$



PROBLEMA 2: SOLUÇÃO DE GABRIEL LUÍS MELLO DALALIO (SÃO PAULO – SP)
O primeiro fato útil para o problema é que:

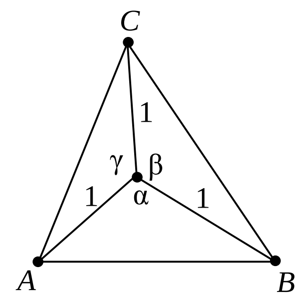


O segundo fato útil é que tomando *A*, *B*, *C* pontos de um polígono regular inscrito em círculo unitário centrado na origem, se *A*, *B*, *C* estiverem no sentido anti-horário, tem-se:

$$\text{Área } ABC=\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\theta(B)-\theta(A))+\operatorname{sen}(\theta(C)-\theta(B))+\operatorname{sen}(\theta(A)-\theta(C))\right]$$

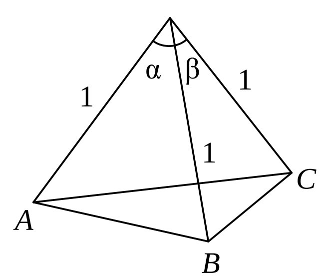
onde $\theta(P)$ é o ângulo que o ponto *P* forma com a origem e o eixo *x* medido no sentido anti-horário (como no círculo trigonométrico)
Isso ocorre porque:

Se a origem estiver dentro de ΔABC



$$\text{Área } ABC = \frac{1}{2}\left(\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta + \text{sen}\,\gamma\right)$$

Se a origem estiver fora de ΔABC



$$\text{Área } ABC = \frac{1}{2}\left(\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta - \text{sen}\left(\alpha+\beta\right)\right)$$

Com isso, podemos calcular a área do triângulo com parcelas relativas aos lados.

Numerando os vértices do polígono regular como $P_0, P_1, ..., P_{n-1}$ no sentido anti-horário, temos de contar quantas vezes cada lado aparece em algum triângulo orientado no sentido anti-horário.

Um lado P_0P_k aparece em $(n-k-1)$ triângulos orientados no sentido anti-horário $\left(P_0P_kP_{k+1}, P_0P_kP_{k+2}..., P_0P_kP_{n-1}\right)$. Isso também vai ocorrer com mais n lados que tem o mesmo tamanho que P_0P_k $\left(P_1P_{k+1}, P_2P_{k+2}...\right)$.

A parcela de área de P_0P_k é dada por:

$\frac{1}{2}\text{sen}\left(\theta\left(P_k\right) - \theta\left(P_0\right)\right) = \frac{1}{2}\text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}k\right)$ Com isso, já é possível desenvolver um somatório que resulta na resposta:

$$A=\sum_{k=1}^{n-2} n\cdot(n-k-1)\cdot\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}k\right)$$

Agora iremos resolver o somatório utilizando $\operatorname{sen}\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ e soma de progressão geométrica.

Para facilitar façamos $\alpha=\dfrac{2\pi}{n}$.

$$A=\frac{n}{2}\sum_{k=1}^{n-2}(n-k-1)\cdot\operatorname{sen}(\alpha k)=\frac{n}{2}\sum_{k=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-k-1}\operatorname{sen}(\alpha k)$$

Trocando a ordem das somatórias e substituindo $\operatorname{sen}(\alpha k)$ tem-se:

$$A=\frac{n}{4i}\sum_{j=1}^{n-2}\sum_{k=1}^{n-j-1}\left(e^{ik\alpha}-e^{-ik\alpha}\right)$$

Com soma de progressão geométrica, tem-se:

$$A=\frac{n}{4i}\sum_{j=1}^{n-2}\left[\frac{e^{i\alpha}\left(e^{i(n-j-1)\alpha}-1\right)}{e^{i\alpha}-1}-\frac{e^{-i\alpha}\left(e^{-i(n-j-1)\alpha}-1\right)}{e^{-i\alpha}-1}\right]$$

Como $e^{in\alpha}=e^{-in\alpha}=1$:

$$A=\frac{n}{4i}\sum_{j=1}^{n-2}\left[\frac{e^{-ij\alpha}-e^{i\alpha}}{e^{i\alpha}-1}-\frac{e^{ij\alpha}-e^{-i\alpha}}{e^{-i\alpha}-1}\right]$$

Utilizando mais uma vez progressão geométrica e soma de termo constante tem-se:

$$A=\frac{n}{4i}\left[\frac{e^{-i\alpha}\left(e^{-i(n-2)\alpha}-1\right)}{\left(e^{i\alpha}-1\right)\left(e^{-i\alpha}-1\right)}-\frac{(n-2)e^{i\alpha}}{\left(e^{i\alpha}-1\right)}-\frac{e^{i\alpha}\left(e^{i(n-2)\alpha}-1\right)}{\left(e^{i\alpha}-1\right)\left(e^{-i\alpha}-1\right)}+\frac{(n-2)e^{-i\alpha}}{\left(e^{-i\alpha}-1\right)}\right]$$

$$A=\frac{n}{4i}\left[\frac{\left(e^{-i(n-1)\alpha}-e^{-i\alpha}\right)-\left(e^{i(n-1)\alpha}-e^{i\alpha}\right)}{1-e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}+1}-\frac{(n-2)e^{i\alpha}}{e^{i\alpha}-1}+\frac{(n-2)e^{-i\alpha}}{e^{-i\alpha}-1}\right]$$

$$A=\frac{n}{4i}\left[\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}-e^{-i\alpha}+e^{i\alpha}-(n-2)+(n-2)e^{i\alpha}+(n-2)-(n-2)e^{-i\alpha}}{1-e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}+1}\right]$$

$A=\dfrac{n}{4i}\left[\dfrac{n\left(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}\right)}{2-2\cos\alpha}\right]$, Voltando para $\operatorname{sen}\alpha$:

$$A=\frac{n}{2}\frac{n\cdot\operatorname{sen}\alpha}{(2-2\cos\alpha)}\Rightarrow A=\frac{n^2}{4}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{(1-\cos\alpha)}\Rightarrow A=\frac{n^2\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{4\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)}=\frac{n^2}{4}\cot\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

PROBLEMA 3:

SOLUÇÃO ADAPTADA DA SOLUÇÃO DE RÉGIS PRADO BARBOSA (FORTALEZA – CE)

a) Dado $A\subset\mathbb{Z}/(n)$ com $|A|=m,$ digamos $A=\{x_1,x_2,...,x_m\}$,

Construímos uma matriz $M_{n\times m}=(m_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}}$ dada por $m_{ij}=\begin{cases}1 \text{ se } x_j+i\in A\\0 \text{ caso contrário}\end{cases}$

Como dado $j\le m,$ $\{x_j+i,1\le i\le n\}$ percorre todo o $\mathbb{Z}/(n)$, temos $\left|\{1\le i\le n|x_j+i\in A\}\right|=m,\forall j\le m,$ e, como $x_j+n=x_j\in A,$ $\left|\{1\le i\le n-1|x_j+i\in A\}\right|=m-1,\forall j\le m.$ Assim, o número de 1´s em M é $m(m-1)$, e logo $\sum_{i=1}^{n-1}\left|\{1\le j\le m-1|x_j+i\in A\}\right|=m(m-1)$, donde existe $i\le n-1$ tal que $|A\cap(A+i)|=\left|\{1\le j\le m|x_j+i\in A\}\right|\le\left\lfloor\frac{m(m-1)}{n-1}\right\rfloor.$ Para $m=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,\frac{m(m-1)}{n-1}\le\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}{n-1}<\frac{n}{4},$ donde $\left\lfloor\frac{m(m-1)}{n-1}\right\rfloor\le\left\lceil n/4\right\rceil-1.$ Assim, $g(n)\le\left\lceil n/4\right\rceil-1.$

b) Vamos mostrar que se $n\equiv3(\operatorname{mod}4)$ é primo então

$A=\left\{x^2(\operatorname{mod}n),1\le x\le\frac{n-1}{2}\right\}$ é um conjunto com $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ elementos tal que $f(A)=\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1,$ donde $g(n)=\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil-1.$ Isso resolve o problema, pois existem infinitos primos $n\equiv3(\operatorname{mod}4).$

Dado t com $1 \le t \le n-1$, estimemos o número de pares $(x, x+k)$, $1 \le k \le n-1$, $x, x+k \in (\mathbb{Z}/(n)) \setminus \{0\}$ tais que $x^2 + 2kx + k^2 = (x+k)^2 = x^2 + t \pmod{n}$. Isso equivale a $2kx \equiv t - k^2 \pmod{n}$, que tem uma única solução em $\mathbb{Z}/(n)$, que é distinta de 0 desde que $k^2 \not\equiv t \pmod{n}$.

Note que se $x + k = 0$ em $\mathbb{Z}/(n)$, então $x = -k$, e $-2k^2 = 2kx \equiv t - k^2 \pmod{n} \Rightarrow t \equiv -k^2 \pmod{n}$, e se $x = 0$ em $\mathbb{Z}/(n), 0 = 2kx = t - k^2 \pmod{n}$, donde $t \equiv k^2 \pmod{n}$. Note que para um mesmo t não podem existir $1 \le r, k \le n-1$ com $t \equiv r^2 \pmod{n}$ e $t \equiv -k^2 \pmod{n}$, senão, pelo pequeno teorema de Fermat teríamos, em $\mathbb{Z}/(n), 1 = r^{n-1} = (r^2)^{\frac{n-1}{2}} = (-k^2)^{\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot (k^2)^{\frac{n-1}{2}} = -k^{n-1} = -1$, absurdo (note que $\dfrac{n-1}{2}$ é ímpar, pois $n \equiv 3 \pmod{4}$).

Agora, dados $a, b \in (\mathbb{Z}/(n)) \setminus \{0\}$, existem no máximo 4 pares $(x, x+k)$ com $x, x+k \in (\mathbb{Z}/(n)) \setminus \{0\}$ tais que $x^2 = a$ e $(x+k)^2 = b$. Como dado t com $1 \le t \le n-1$, existem no máximo dois valores de r com $1 \le r \le n-1$ tais que $r^2 \equiv t \pmod{n}$, e no máximo dois valores de k com $1 \le k \le n-1$ tais que $k^2 \equiv -t \pmod{n}$, há pelo menos $n-3$ pares $(x, x+k)$ com $x, x+k \in (\mathbb{Z}/(n)) \setminus \{0\}$ e $(x+k)^2 = x^2 + t$. Portanto,

$$|A \cap (A+t)| = \left| \left\{ (u,v) \;\middle|\; 1 \le u, v \le \frac{n-1}{2}, u \ne v, v^2 \equiv u^2 + t \pmod{n} \right\} \right| \ge \frac{n-3}{4} =$$

$$= \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil - 1, \forall t \in (\mathbb{Z}/(n)) \setminus \{0\}.$$

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DE LEANDRO FARIAS MAIA (RIO DE JANEIRO – RJ)

a) É fácil perceber que 0 não é raiz do polinômio. Seja *r* uma raiz de *f*. Queremos mostrar que *p* é raiz de *f*, onde $p = r^2 + r - 3$

Note que:

$$r^3 + r^2 - 4r + 1 = 0 \Rightarrow r\left(r^2 + r\right) = 4r - 1 \Rightarrow r^2 + r = 4 - \frac{1}{r}$$

Logo,

$$p = \left(r^2 + r\right) - 3 = \left(4 - \frac{1}{r}\right) - 3 \Rightarrow \boxed{p = 1 - \frac{1}{r}} \ (*)$$

Temos,

$$p^3 + p^2 - 4p + 1 = \left(1 - \frac{3}{r} + \frac{3}{r^2} - \frac{1}{r^3}\right) + \left(1 - \frac{2}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \left(4 - \frac{4}{r}\right) + 1 =$$

$$= \frac{-1}{r^3} + \frac{4}{r^2} - \frac{1}{r} - 1 = \frac{-1 + 4r - r^2 - r^3}{r^3} = \frac{0}{r^3} = 0.$$

Logo, provamos que *p* é raiz de *f*.

b) Vamos mostrar que $p^2 + p - 3$ é outra raiz de *f*, diferente de *r* e *p*. Temos:

i) $p \neq r,$ pois caso $p = r \Rightarrow r^2 + r - 3 = r \Rightarrow r = \pm\sqrt{3}.$ Porém $+\sqrt{3}$ nem $-\sqrt{3}$ são raízes de *f*.

ii) $p^2 + p - 3 \neq p,$ pois caso $p^2 + p - 3 = p \Rightarrow p^2 = 3 \Rightarrow p = \pm\sqrt{3}$ e, da mesma forma, como *p* também é uma raiz, nem $+\sqrt{3}$ nem $-\sqrt{3}$ é raiz de *f*.

iii) $p^2 + p - 3 \neq r.$ Esta parte é apenas mais trabalhosa.

iv) Sabemos que $p = 1 - \frac{1}{r},$ assim.

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{r}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{r}\right) - 3 = r \Leftrightarrow \left\{1 - \frac{2}{r} + \frac{1}{r^2}\right\} + \left\{1 - \frac{1}{r}\right\} - 3 = r$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r^2} - \frac{3}{r} - 1 - r = 0 \Leftrightarrow \left(1 - 3r\right) - \left(r^2 + r^3\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - 3r\right) - \left(4r - 1\right) = 0 \Leftrightarrow 2 = 7r, \text{ porém, } r = \frac{2}{7} \text{ não é raiz de } f.$$

Vamos agora achar os possíveis valores para a expressão do problema. Vamos dividir em casos.

Caso 1: Se $\beta = \alpha^2 + \alpha - 3$

Perceba que $\beta^2 + \beta - 3 \neq \alpha(\text{passo } iii)$ e $\beta^2 + \beta - 3 \neq \beta(\text{passo } 2)$, assim $\gamma = \beta^2 + \beta - 3.$ Do mesmo raciocínio, tiramos que $\alpha = \gamma^2 + \gamma - 3$

Relações de Girard $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -1 \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -4 \\ \alpha\beta\gamma = -1 \end{cases}$

Logo, $T = \dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\gamma} + \dfrac{\gamma}{\alpha} = \left(\dfrac{\gamma^2 + \gamma - 3}{\beta}\right) + \left(\dfrac{\alpha^2 + \alpha - 3}{\gamma}\right) + \left(\dfrac{\beta^2 + \beta - 3}{\alpha}\right)$

Sabemos que se *r* é raiz, então: $r^2 + r - 3 = 1 - \dfrac{1}{r}$ (de *),

Assim,

$$T = \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta\gamma}\right) + \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\alpha\gamma}\right) + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha\beta}\right) = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) - \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\alpha\gamma}\right) =$$

$$= \left(\frac{\alpha\beta + \alpha\gamma + \gamma\beta}{\alpha\beta\gamma}\right) - \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma}\right) = \frac{(-4)}{(-1)} - \frac{(-1)}{(-1)} = 3.$$

Caso 2: Se $\gamma = \alpha^2 + \alpha - 3$

Do mesmo modo no caso 2, concluímos: $\gamma^2 + \gamma - 3 = \beta$ e $\beta^2 + \beta - 3 = \alpha.$

Portanto

$$T = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha} = \left(\frac{\beta^2 + \beta - 3}{\beta}\right) + \left(\frac{\gamma^2 + \gamma - 3}{\gamma}\right) + \left(\frac{\alpha^2 + \alpha - 3}{\alpha}\right) =$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma) + 3 - 3\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) = -1 + 3 - 3\left(\frac{\alpha\beta + \alpha\gamma + \gamma\beta}{\alpha\beta\gamma}\right)$$

$$= -1 + 3 - 3 \cdot \frac{(-4)}{(-1)} = -1 + 3 - 12 = -10.$$

Resposta: –10 e +3.

PROBLEMA 5: SOLUÇÃO DE RAFAEL TUPYNAMBÁ DUTRA (BELO HORIZONTE – MG)

Com 3 vetores, é impossível gerar $\mathbb{R}^3$ (através do cone). Ou seja, $C(v_1, v_2, v_3) \neq \mathbb{R}^3.$

Prova: se $-v_1 \in C(v_1, v_2, v_3)$, então $= -v_1 = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 \Rightarrow -v_1 = \frac{a_2}{1+a_1}v_2 + \frac{a_3}{1+a_1}v_3$ (ou seja, precisamos ter $-v_1 \in C(v_2, v_3)$), Assim, $\{v_1, v_2, v_3\}$ são L.D. $\Rightarrow$ obviamente não geram $\mathbb{R}^3$.

Usando o mesmo argumento, se 4 vetores geram $\mathbb{R}^3$ (através do cone), precisamos ter $-v_1 = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 \Rightarrow -v_1 = \frac{a_2}{1+a_1}v_2 + \frac{a_3}{1+a_1}v_3 + \frac{a_4}{1+a_1}v_4.$ Ou seja, $-v_1 \in C(v_2, v_3, v_4)$ é condição necessária $\Rightarrow -v_i \in \underset{j \neq i}{C}\left(\{v_j\}\right)$. Se tivermos $-v_1 \in C(v_2, v_3)$, então $\{v_1, v_2, v_3\}$ serão L.D.. Mas precisamos ter $-v_4 \in C(v_1, v_2, v_3)$. Mas isso implicaria que v_4 está no plano gerado por $\{v_1, v_2, v_3\} \Rightarrow$ os quatro vetores v_1, v_2, v_3, v_4 estão no mesmo plano e, assim, obviamente eles não geram $\mathbb{R}^3$. Concluímos que não podemos ter $-v_1 \in C(v_2, v_3)$. Ou analogamente, não podemos ter $-v_i \in C(v_j, v_k)$.

Mas isso implica que $-v_1 = a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4$ com coeficientes a_2, a_3, a_4 todos não nulos $\Rightarrow$ esses coeficientes a_2, a_3, a_4 são todos positivos $\Rightarrow$ temos $v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 = 0$. Assim, para termos $C(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathbb{R}^3$, é necessário que exista combinação linear de v_1, v_2, v_3, v_4, com todos os coeficientes positivos que é igual a 0.

Suponha que existem $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ positivos tais que $\sum_{i=1}^{4} \beta_i v_i = 0$.

A partir disso, é evidente que $-v_i \in \underset{j \neq i}{C}\left(\{v_j\}\right)$. Temos $-v_i = \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{4} \frac{\beta_j}{\beta_i} v_j$.

Conjectura: Se os vetores v_1, v_2, v_3, v_4 forem três a três L.I. (não há 3 coplanares) e existem $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ positivos tais que $\sum_{i=1}^{4} \beta_i v_i = 0$, estão $C(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathbb{R}^3$.

Note que a recíproca da conjectura já foi provada.

Prova da conjectura: Como $\{v_1, v_2, v_3\}$ são L.I., qualquer vetor $v \in \mathbb{R}$ pode ser escrito como $\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \alpha_3v_3$. Se algum dos α_i for negativo, trocamos $\alpha_i v_i$ por

$(-\alpha_i)\cdot\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{4}\frac{\beta_j}{\beta_i}v_j$. Fazendo esse processo, obteremos v como combinação linear de v_1, v_2, v_3, v_4 com coeficientes todos não negativos.

Sorteamos v_1 na esfera S^2. Depois sorteamos v_2. Temos probabilidade 1 de que $v_2 \notin \{-v_1, v_1\}$.

Então, sorteamos v_3 e v_4. Há probabilidade 1 de que não haverá três vetores coplanares em $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Então, vamos supor que esse é o caso. Sendo assim, teremos $C(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathbb{R}^3$ se e só se existem $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ positivos tais que $\sum_{i=1}^{4}\beta_i v_i = 0$, o que acontece se e só se $-v_4 \in C(v_1, v_2, v_3)$.

Então, queremos calcular a probabilidade de $(-v_4) \in C(v_1, v_2, v_3)$. Isso depende apenas do ângulo esférico (área sobre a esfera) do cone $C(v_1, v_2, v_3)$.

A esfera S^2 fica dividida em 8 regiões, cada uma coberta por um cone da forma $C(\pm v_1, \pm v_2, \pm v_3)$.

Assim, é fácil ver que o valor esperado para o ângulo esférico Ω do cone $C(v_1, v_2, v_3)$ é um oitavo do ângulo total $E(\Omega) = \frac{1}{8}\cdot 4\pi = \frac{\pi}{2}$.

Sejam $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_7$ os oito ângulos esféricos dos cones $C(v_1, v_2, v_3), C(v_1, v_2, -v_3), C(v_1, -v_2, v_3), C(-v_1, v_2, v_3), C(v_1 - v_2, -v_3), ...$

Temos sempre $\sum_{k=0}^{7}\Omega_k = 4\pi$, pois as regiões da esfera delimitadas por esses ângulos têm interseção de área nula e a união delas é toda a esfera (*). Mas, por simetria, é obvio que os valores esperados de Ω_i, Ω_j são iguais. Assim, $\sum_{k=0}^{7}E(\Omega_k) = 4\pi \Rightarrow 8\cdot E(\Omega_0) = 4\pi \Rightarrow E(\Omega_0) = \frac{\pi}{2}$.

O valor esperado do ângulo esférico do cone $C(v_1, v_2, v_3)$ é $\frac{\pi}{2}$.

Depois de sortear v_1, v_2, v_3, quando sorteamos v_4, a probabilidade de termos $-v_4 \in C(v_1, v_2, v_3)$ é $\frac{\Omega_0}{4\pi}$. Assim, a probabilidade procurada (de que $C(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathbb{R}^3$) é $E\left(\frac{\Omega_0}{4\pi}\right) = \frac{\frac{\pi}{2}}{4\pi} = \boxed{\frac{1}{8}}$.

(*) Estamos supondo $\{v_1, v_2, v_3\}$ $L.I.$ Todo $v \in S^2$ é escrito como $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$. Então, se $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \neq 0$ (o que acontece quase certamente) temos $v \in C(sign(\alpha_1)v_1, sign(\alpha_2)v_2, sign(\alpha_3)v_3)$, sendo $sign(x) = \frac{x}{|x|}$.

Assim, *v* está em exatamente 1 dos 8 cones.

b)Temos $C(v_1, v_2, v_3) = C(v_1, v_2, v_3, v_4) \Leftrightarrow v_4 \in C(v_1, v_2, v_3)$.

No item a), calculamos a probabilidade de termos $(-v_4) \in C(v_1, v_2, v_3)$ e obtivemos $\frac{1}{8}$.

Suponha que v_1, v_2, v_3 já foram escolhidos e eles são L.I. Novamente a esfera está dividida em 8 regiões ("quadrantes") gerados pelas cores $C(\pm v_1, \pm v_2, \pm v_3)$. Vamos analisar em quais desses quadrantes o vetor v_4 pode ser colocado de forma a satisfazer o enunciado.

Se $v_4 \in C(v_1, v_2, v_3)$, então obviamente o enunciado não é satisfeito.

Se $v_4 \in C(-v_1, -v_2, v_3)$, então temos

$v_4 = -a_1 v_1 - a_2 v_2 + a_3 v_3 \Rightarrow v_3 = \frac{a_1}{a_3} v_2 + \frac{a_2}{a_3} v_2 + \frac{1}{a_3} v_4 \in C(v_1, v_2, v_4)$ e o enunciado não é satisfeito.

Analogamente, se $v_4 \in C(-v_1, v_2, -v_3)$, temos $v_2 \in C(v_1, v_3, v_4)$ e se $v_4 \in C(v_1, -v_2, -v_3)$, temos $v_1 \in C(v_2, v_3, v_4)$.

Afirmo que, em qualquer outro caso o enunciado é satisfeito.

De fato, podemos supor que v_1, v_2, v_3, v_4 são vetores três a três L.I. (não coplanares), pois isso ocorre com probabilidade 1.

Se $v_4 \in C(-v_2,-v_2,-v_3)$, temos $v_4 + a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$ para certos a_1, a_2, a_3 positivos.

Então, escrevemos v_1 como combinação linear (com coeficientes negativos) de v_2, v_3, v_4. Mas essa escrita é única, pois $\{v_2, v_3, v_4\}$ é L.I.. Então v_1 não pode ser expresso como combinação linear de v_2, v_3, v_4 com coeficientes positivos $\Rightarrow v_1 \notin C(v_2, v_3, v_4)$. Com argumento análogo para v_2 e v_3, concluímos que o enunciado é satisfeito.

Já se $v_4 \in C(-v_1, v_2, v_3)$, temos $v_4 + a_1v_1 - a_2v_2 - a_3v_3 = 0,\ a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}_+^*$.

Assim, $v_1 = -\frac{1}{a_1}v_4 + \frac{a_2}{a_1}v_2 + \frac{a_3}{a_1}v_3,\ \ v_2 = -\frac{1}{a_2}v_4 + \frac{a_2}{a_2}v_2 + \frac{a_3}{a_2}v_3,$

$v_3 = -\frac{1}{a_3}v_4 + \frac{a_2}{a_3}v_2 + \frac{a_3}{a_3}v_2 \Rightarrow$ essas combinações lineares não têm todos os coeficientes positivos. Logo, o enunciado é satisfeito.

Analogamente, os casos $v_4 \in C(v_1, -v_2, v_3)$ e $v_4 \in C(v_1, v_2, -v_3)$ também satisfazem o enunciado.

Então 4 dos 8 quadrantes possíveis para v_4 satisfazem e os outros 4 não satisfazem.

E mais. Por simetria, o ângulo esférico de dois quadrantes opostos é igual.

Por exemplo, $C(v_2, v_2, v_3)$ e $C(-v_2, -v_2, -v_3)$ têm mesmo âgulo esférico. E os quadrantes que não satisfazem são sempre opostos aos quadrantes que satisfazem.

Assim, a soma dos âgulos esféricos dos quadrantes que satisfazem é obviamente $\frac{1}{2} \cdot 4\pi = 2\pi$ e a probabilidade procurada é $\frac{2\pi}{4\pi} = \boxed{\frac{1}{2}}$.

PROBLEMA 6: SOLUÇÃO DA BANCA

Devemos supor que a sequência (x_n) não é identicamente nula.

Notemos inicialmente que os vetores

$(x_0, x_1, ..., x_{k-1}),\ (x_1, x_2, ..., x_k), ..., (x_{k-1}, x_k, ..., x_{2k-2}) \in \mathbb{R}^k$ são linearmente independentes. De fato, se para algum inteiro *r* com $1 \le r \le k-1$ tivéssemos

$x_{j+r} = \sum_{i=1}^{r} d_i x_{j+r-i},$ para $0 \le j \le k-1,$ por indução em $n \ge k$ teríamos

$$x_{n+r}=\sum_{s=1}^{k}c_s x_{n+r-s}=\sum_{s=1}^{k}c_s\sum_{i=1}^{r}d_i x_{n-s+r-i}=\sum_{i=1}^{r}d_i\sum_{s=1}^{k}c_s x_{n+r-i-s}=\sum_{i=1}^{r}d_i x_{n+r-i},$$ ou seja, (x_n) satisfaz uma recorrência linear de ordem $r<k$, $x_{n+r}=\sum_{i=1}^{r}d_i x_{n+r-i}, \forall n\geq 0,$ absurdo.

Seja agora $A:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ a transformação linear dada por $A(y_1,y_2,...,y_k)=\left(y_2,...,y_k,\sum_{s=1}^{k}c_s y_{k+1-s}\right)$. Se $v_j:=(x_j,x_{j+1},...,x_{j+k-1})$, para $j\geq 0$, temos $A\cdot v_j=v_{j+1}$, para todo $j\geq 0$, donde $A^r\cdot v_j=v_{j+r},\forall j,r\geq 0.$

Como $v_o,v_1,...,v_{k-1}$ têm coordenadas inteiras e formam uma base de $\mathbb{R}^k$, e, para todo $r\geq 1$, $A^r\cdot v_0=v_r, A^r\cdot v_1=v_{r+1},...,A^r\cdot v_{k-1}=v_{r+k-1}$, a matriz de A^r na base $v_0,v_1,...,v_{k-1}$ tem entradas racionais com denominadores uniformemente limitados (independentemente de *r*).

Se $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$ são os autovalores de *A*, os autovalores de A^r são $\alpha_1^r,\alpha_2^r,...,\alpha_k^r$ e, pelo parágrafo anterior, o polinômio característico de A^r, que é $(x-\alpha_1^r)(x-\alpha_2^r)...(x-\alpha_k^r)$, tem coeficientes racionais com denominadores uniformemente limitados (por um inteiro positivo independente de *r*), e portanto as funções simétricas $\sigma_j^{(r)}:=\sigma_j\left(\alpha_1^r,\alpha_2^r,...,\alpha_k^r\right)=\sum_{1\leq i_1<i_2<...<i_j\leq k}\alpha_{i_1}^r\alpha_{i_2}^r...\alpha_{i_j}^r, 1\leq j\leq k$ são racionais com denominadores uniformente limitados.

Veremos agora, por indução em *m* + *k*, que qualquer polinômio simétrico de grau *m* em $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$ com coeficientes inteiros pode ser escrito como um polinômio de coeficientes inteiros e grau menor ou igual a *k* nas funções simétricas $\sigma_j^{(r)}, j,r\geq 1$ (de modo que em cada monômio do tipo $c\prod_{i=1}^{s}(\sigma_{j_i}^{(r_i)})^{\beta_i}$ temos $\sum_{i=1}^{s}\beta_i\leq k$ e $\sum_{i=1}^{s}\beta_i r_i j_i\leq n$) – mais especificamente, o polinômio se escreve como um polinômio em $\sigma_k^{(1)}$ cujos coeficientes são polinômios de graus menores que *k* nos $\sigma_j^{(r)}, 1\leq j\leq k-1, r\geq 1$. Em particular, no nosso caso, os polinômios simétricos com coeficientes inteiros em $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$ terão valores racionais com denominadores uniformemente limitados (independente do polinômio simétrico). Para provar nossa afirmação, abusando de notação para supor agora que $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ são variáveis, se $f(\alpha_1, ..., \alpha_k)$ é o nosso polinômio, $f(\alpha_1, ..., \alpha_{k-1}, 0)$ é um polinômio simétrico em $k-1$ variáveis de grau $\leq m,$ logo pode ser escrito como um polinômio *g* de coeficientes inteiros e grau menor ou igual a $k-1$ nas funções simétricas $\sigma_j^{(r)}(\alpha_1, ..., \alpha_{k-1})$. Subtraindo de $f(\alpha_1, ..., \alpha_k)$ esse polinômio *g* nas funções simétricas $\sigma_j^{(r)} = \sigma_j^{(r)}(\alpha_1, ..., \alpha_k),$ cujo grau nos α_i é menor ou igual a *m*, obtemos um polinômio que se anula se $\alpha_k = 0,$ e logo é múltiplo de $\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_k$.

Dividindo esse polinômio por $\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_k$, obtemos um polinômio de grau menor que *m*, que, por hipótese de indução, se escreve como um polinômio em $\sigma_k^{(1)}$ cujos coeficientes são polinômios de graus menores que *k* nos $\sigma_j^{(r)}, 1 \leq j \leq k-1, r \geq 1.$

Portanto, podemos escrever nosso polinômio $f(\alpha_1, ..., \alpha_k)$ como um polinômio em $\sigma_k^{(1)} = \alpha_1 ... \alpha_k$ cujos coeficientes são polinômios simétricos em $\alpha_1, ..., \alpha_k$ que podem ser escritos como polinômios de coeficientes inteiros de graus menores ou iguais a $k-1$ nas funções simétricas $\sigma_j^{(r)}(\alpha_1, ..., \alpha_k), j, r \geq 1,$ o que implica nossa afirmação, pois, para todo $s \geq 1$, $(\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_k)^s = \sigma_k^{(s)}$.

Aplicando esse resultado aos polinômios simétricos $\left(\sigma_j^{(1)}(\alpha_1, ..., \alpha_k)\right)^n, j \leq k, n \in \mathbb{N},$ e voltando a tomar $\alpha_1, ..., \alpha_k$ como sendo os autovalores de *A*, vamos que esses números têm valores racionais com denominadores uniformemente limitados (independentemente de *n*), e logo, para $1 \leq j \leq k,$ $c_j = -\sigma_j^{(1)}(\alpha_1, ..., \alpha_k)$ é um inteiro, c.q.d..

XXXIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Premiados

NÍVEL 1 (6º e 7º anos)

Nome	Cidade – Estado	Total	Prêmio
Pedro Henrique Sacramento de Oliveira	Louveira – SP	297	Ouro
Rogerio Aristida Guimarães Junior	Teresina – PI	267	Ouro
Mateus Siqueira Thimóteo	Mogi das Cruzes – SP	266	Ouro
William Hideki Kondo	São Paulo – SP	253	Ouro
Bruna Malvar Castello Branco	Rio de Janeiro – RJ	251	Ouro
Nathan Bonetti Teodoro	Curitiba – PR	248	Ouro
Mariana Miwa Okuma Miyashiro	São Paulo – SP	240	Prata
Lucas dos Anjos Dantas Teixeira	São Paulo – SP	233	Prata
Maria Júlia Costa Medeiros	Fortaleza – CE	232	Prata
Mateus Pereira	Belo Horizonte – MG	232	Prata
Carolina Carvalho Silva	Rio de Janeiro – RJ	231	Prata
Laura Mello D´Urso Vianna	Rio de Janeiro – RJ	227	Prata
Henrique Gontijo Chiari	Belo Horizonte – MG	222	Prata
Nicolas Wolaniuk do Amaral Carvalho	Curitiba – PR	219	Prata
Lucas Diniz Gonçalves Villas Boas	Salvador – BA	216	Prata
Leonardo de Matos Fellippetti Mariano	Curitiba – PR	213	Bronze
Lúcia Verônica Copque Aguiar de Souza	Rio de Janeiro – RJ	213	Bronze
Adriana Mayumi Shiguihara	São Paulo – SP	212	Bronze
Daniel Akira Hasimoto	Salto – SP	211	Bronze
Rodrigo Gonçalves Correa	Rio de Janeiro – RJ	210	Bronze
César Ricardo Silva Filippi	Jundiaí – SP	209	Bronze
Marina Maciel Ansanelli	São Paulo – SP	209	Bronze
Henrique Bittencourt Netto Monteiro	São Paulo – SP	207	Bronze
Julia Perdigão Saltiel	Rio de Janeiro – RJ	207	Bronze
Jonathan Pereira Maria	Ribeirão Pires – SP	202	Bronze
Lucas Tokio Kawahara	São Paulo – SP	201	Bronze
Sandra Ayumi Nihama	São Paulo – SP	201	Bronze
João Guilherme Madeira Araújo	Sobral – CE	200	Bronze
Andrey Jhen Shan Chen	Campinas – SP	199	Bronze
Bruno Brasil Meinhart	Fortaleza – CE	199	Bronze

Daniel Quintão de Moraes	Rio de Janeiro – RJ	198	Bronze
Diene Xie	Curitiba – PR	198	Bronze
Felipe Reyel Feitosa	Teresina – PI	196	Menção Honrosa
Henrique Corato Zanarella	Amparo – SP	195	Menção Honrosa
Alícia Fortes Machado	Teresina – PI	194	Menção Honrosa
André Yuji Hisatsuga	São Paulo – SP	194	Menção Honrosa
Bernardo Puetter Schaeffer	Rio de Janeiro – RJ	193	Menção Honrosa
Bruno Teixeira Gomes	Fortaleza – CE	192	Menção Honrosa
Eduardo Reis Cavalcante de Farias	Teresina – PI	191	Menção Honrosa
Bruno Vinicius da Silva Alves	Curitiba – PR	190	Menção Honrosa
Adriano Henrique de C. A. e Silva	Rio de Janeiro – RJ	184	Menção Honrosa
Fernando Seiji B. dos Santos	São Paulo – SP	184	Menção Honrosa
Alba Clara Vasconcelos Leopoldo Feitosa	Teresina – PI	183	Menção Honrosa
Bruno Kenzo Ozaki	São Paulo – SP	182	Menção Honrosa
Eduardo Lennert Rammé	Joinville – SC	181	Menção Honrosa
Iara Rohn Kombrink Davies	Rio Claro – SP	179	Menção Honrosa
Victor Alves Benevides	Fortaleza – CE	179	Menção Honrosa
Samuel Sena Galvão	Brasília – DF	178	Menção Honrosa
Vitor Thomaz da Cruz	São Paulo – SP	178	Menção Honrosa
Francisco Bruno Dias Ribeira da Silva	Teresina – PI	177	Menção Honrosa
Bryan Diniz Borck	Porto Alegre – RS	176	Menção Honrosa
Jonathan Aires Pinheiro	Fortaleza – CE	176	Menção Honrosa
Nicolas Meira Sinott Lopes	Salvador – BA	176	Menção Honrosa
Rafael Tchen Yin Hang Wei	Rio de Janeiro – RJ	174	Menção Honrosa
João Alberto Moreira Serôdio	Brasília – DF	173	Menção Honrosa
Loïc Dominguez	Fortaleza – CE	173	Menção Honrosa
Vinícius Soares de Abreu Silva	Rio de Janeiro – RJ	173	Menção Honrosa
Breno Maia Baptista	Fortaleza – CE	172	Menção Honrosa
Luísa Höller Lee	Curitiba – PR	172	Menção Honrosa
Brendon Diniz Borck	Porto Alegre – RS	171	Menção Honrosa
Eduardo Emilio Costa Trunci	Curitiba – PR	170	Menção Honrosa
Bernardo Gabriele Collaço	Fortaleza – CE	168	Menção Honrosa
Lucas Hideki Takeuchi Okamura	Suzano – SP	168	Menção Honrosa
Plinio Melo Guimarães Valério	Belo Horizonte – MG	166	Menção Honrosa
Rodrigo Vieira Casanova Monteiro	Rio de Janeiro – RJ	166	Menção Honrosa
Victor M.K. Tsuda	São Paulo – SP	165	Menção Honrosa
Arthur Henrique Craveiro Costa	Natal – RN	163	Menção Honrosa
Pedro Orii Antonácio	São Paulo – SP	163	Menção Honrosa

Gabriel Moura Braúna	Fortaleza – CE	162	Menção Honrosa
Victória Santos Duarte Ramos	Rio de Janeiro – RJ	162	Menção Honrosa
Ítalo Rennan Lima	Fortaleza – CE	161	Menção Honrosa
Amanda Barbosa Schirmbeck	Brasília – DF	160	Menção Honrosa
Thiago Ferreira Teixeira	Vinhedo – SP	160	Menção Honrosa
Gabriel Dante Cawamura Seppelfelt	São Caetano do Sul – SP	159	Menção Honrosa
Lucas Siqueira Aragão	Vitória – ES	159	Menção Honrosa
Milena Delarete Drummond Marques	Belo Horizonte – MG	159	Menção Honrosa
Rodrigo Moutinho Faria	Belém – PA	159	Menção Honrosa
Daniel Lopes de Castro	Brasília – DF	158	Menção Honrosa
João Vitor Vaz Oliveira	Recife – PE	158	Menção Honrosa
Matheus Bevilacqua	Campinas – SP	158	Menção Honrosa

Nível 2 (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

Nome	**Cidade - Estado**	**Total**	**Prêmio**
Alessandro A.P. de Oliveira Pacanowski	Rio de Janeiro – RJ	364	Ouro
Gabriel Fazoli Domingos	Urupês – SP	357	Ouro
Daniel Santana Rocha	Rio de Janeiro – RJ	337	Ouro
Vitor Dias Gomes Barrios Marin	Presidente Prudente – SP	315	Ouro
Luíze Mello D´Urso Vianna	Rio de Janeiro – RJ	307	Ouro
Daniel Lima Braga	Eusébio – CE	279	Prata
Fábio da Silva Soares	Planaltina – DF	278	Prata
João Pedro Sedeu Godoi	Rio de Janeiro – RJ	271	Prata
Murilo Corato Zanarella	Amparo – SO	259	Prata
Bruno Eidi Nishimoto	Sales – SP	252	Prata
Mariana Teatini Ribeiro	Belo Horizonte – MG	246	Prata
Samuel Brasil de Albuquerque	Fortaleza – CE	243	Prata
Lucas Mioranci	S. J. do Rio Preto – SP	225	Prata
Mateus Bezrutchka	Taboão da Serra – SP	223	Prata
Ana Karoline Borges Carneiro	Fortaleza – CE	221	Prata
Ana Emília Hernandes Dib	S. J. do Rio Preto – SP	217	Prata
Pedro Henrique Alencar Costa	Fortaleza – CE	211	Bronze
Pedro Augusto Brasileiro Lins Barbosa	J. dos Guararapes – PE	207	Bronze
Gabriel Mayrink Verdun	Rio de Janeiro – RJ	203	Bronze
Leonardo Santos Matiello	Campo Grande – MS	201	Bronze
Matheus Cariús Castro	Fortaleza – CE	198	Bronze
Lucca Morais de Arruda Siaudzionis	Fortaleza – CE	195	Bronze
Luiz Cláudio Sampaio Ramos	Rio de Janeiro – RJ	188	Bronze

Matheus Carioca Sampaio	Fortaleza – CE	187	Bronze
José Wanderclesson Nobre Damasceno Filho	Fortaleza – CE	181	Bronze
Suzane Eberhart Ribeiro da Silva	Campo Grande – MS	179	Bronze
Estevão Waldow	Piraquara – PR	178	Bronze
Erika Rizzo Aquino	Goiânia – GO	177	Bronze
Pedro Jorge Luz Alves Cronemberger	Teresina – PI	175	Bronze
Alexandre Mendonça Cardoso	Salvador – BA	173	Bronze
Ricardo Ken Wang Tsuzuki	São Paulo – SP	172	Bronze
Leonardo Alves Ramalho	Curitiba – PR	170	Menção Honrosa
Ana Paula Lopes Schuch	Porto Alegre – RS	168	Menção Honrosa
Flávia Nakazato Hokama	São Paulo – SP	168	Menção Honrosa
Lucas Bastos Germano	Fortaleza – CE	168	Menção Honrosa
Helena Veronique Rios	São Carlos – SP	166	Menção Honrosa
Isabelle Ferreira de Oliveira	Fortaleza – CE	164	Menção Honrosa
Rafael Wilton Barboza Coracini	Rinópolis – SP	164	Menção Honrosa
Eduardo Serpa	Caucaia – CE	161	Menção Honrosa
Giovana Sachett Maia	Belém – PA	161	Menção Honrosa
Paulo Henrique Omena de Freitas	São Paulo – SP	159	Menção Honrosa
Amanda Vidotto Cerqueira	São Paulo – SP	158	Menção Honrosa
Bruno Cicone de Almeida	S. J. dos Campos – SP	158	Menção Honrosa
Gabriel Picanço Costa	Fortaleza – CE	156	Menção Honrosa
Guilherme Anitele Silva	Presidente Prudente – SP	152	Menção Honrosa
Mateus Arraes Feitosa Borges	Fortaleza – CE	152	Menção Honrosa
Rodrigo Zanette de Magalhães	São Paulo – SP	152	Menção Honrosa
Luis Eduardo de Sousa Lima	Fortaleza – CE	150	Menção Honrosa
Gabriel Vidigal de Paula Santos	Rio de Janeiro – RJ	148	Menção Honrosa
Bruno Almeida Costa	Fortaleza – CE	147	Menção Honrosa
João Baptista de Paula e Silva	Belo Horizonte – MG	144	Menção Honrosa
Gabriel Ribeiro Barbosa	Fortaleza – CE	143	Menção Honrosa
Kevin Eiji Inashita	São Paulo – SP	142	Menção Honrosa
Dimas Macedo de Albuquerque	Fortaleza – CE	140	Menção Honrosa
Mauricio Najjar da Silveira	São Paulo – SP	139	Menção Honrosa
Juliano Petry Pesarico	Laguna Carapã – MS	137	Menção Honrosa
Bruna Caroline Pimentel Gonçalves	Fortaleza – CE	134	Menção Honrosa
Gustavo Torres da Silva	São Paulo – SP	134	Menção Honrosa
Artur Corassa Martins	Brasília – DF	132	Menção Honrosa
Italo Lesione de Paiva Rocha	Fortaleza – CE	132	Menção Honrosa
Nathan Antonio de Azevedo Milagres	Belo Horizonte – MG	131	Menção Honrosa

Juliana Amoedo Amoedo Plácido	Salvador – BA	128	Menção Honrosa
Victória Moreira Reis Cogo	Teresina – PI	128	Menção Honrosa
Leandro Alves Cordeiro	Ribeirão Pires – SP	126	Menção Honrosa
Rômulo Gabriel Lima da Costa	Fortaleza – CE	125	Menção Honrosa
Bruno Vasconcelos Silva	Fortaleza – CE	121	Menção Honrosa
Alexandro Vítor Serafim de Carvalho	Maceió – AL	120	Menção Honrosa
Cristhian Mafalda	Leme – SP	120	Menção Honrosa
Douglas Matos Gomes	São Paulo – SP	120	Menção Honrosa
Gabriel Diniz Vieira e Sousa	Fortaleza – CE	118	Menção Honrosa
Enrico Pascucci Löffel	S. B. do Campo – SP	116	Menção Honrosa
Ricardo Vidal Mota Peixoto	Vassouras – RJ	116	Menção Honrosa

Nível 3 (Ensino Médio)

Nome	Cidade – Estado	Total	Prêmio
João Lucas Camelo Sá	Fortaleza – CE	295	Ouro
Henrique Gasparini Fiuza do Nascimento	Brasília – DF	286	Ouro
Rafael Kazuhiro Miyazaki	São Paulo – SP	285	Ouro
André Macieira Braga Costa	Belo Horizonte – MG	273	Ouro
Rodrigo Sanches Angelo	São Paulo – SP	270	Ouro
Maria Clara Mendes Silva	Pirajuba – MG	263	Ouro
Victor de Oliveira Bitaraes	Betim – MG	245	Prata
Tadeu Pires de Matos Belfort Neto	Fortaleza – CE	245	Prata
Rafael Rodrigues Rocha de Melo	Fortaleza – CE	237	Prata
Gustavo Haddad Francisco e Sampaio Braga	S. J. dos Campos – SP	234	Prata
Daniel Eiti Nishida Kawai	Itibaia – SP	234	Prata
Henrique Vieira G. Vaz	São Paulo – SP	218	Prata
Carlos Henrique de Andrade Silva	Fortaleza – CE	196	Prata
Victor Hugo Corrêa Rodrigues	Rio de Janeiro – RJ	189	Prata
Franco Matheus de Alencar Severo	Rio de Janeiro – RJ	184	Prata
Gabriel Ilharco Magalhães	Rio de Janeiro – RJ	183	Prata
Lucas Lourenço Hernandes	São Paulo – SP	177	Bronze
Ivan Tadeu Ferreira Antunes Filho	Lins – SP	174	Bronze
Kayo de França Gurgel	Fortaleza – CE	173	Bronze
Michel Rozenberg Zelazny	São Paulo – SP	173	Bronze
Alexandre Perozim de Faveri	Neves Paulista – SP	171	Bronze
Davi Coelho Amorim	Fortaleza – CE	169	Bronze
Marcos Massayuki Kawakami	São Paulo – SP	169	Bronze
Daniel dos Santos Bossle	Porto Alegre – RS	167	Bronze

Gabriel Militão Vinhas Lopes	Fortaleza – CE	167	Bronze
Mateus Henrique Ramos de Souza	Pirapora – MG	162	Bronze
Victor Venturi	Campinas – SP	157	Bronze
Ramon Silva de Lima	São Paulo – SP	156	Bronze
Gabriel José Moreira da Costa Silva	Maceió – AL	152	Bronze
Otávio Augusto de Oliveira Mendes	Pilar do Sul – SP	152	Bronze
Marcelo Luiz Gonçalves	Franca – SP	150	Bronze
Artur Dubeux Duarte	Recife – PE	145	Menção Honrosa
Natan Lima Viana	Fortaleza – CE	142	Menção Honrosa
Bruno Silva Mucciaccia	Vitória – ES	141	Menção Honrosa
Juliana Lemes Arai	S. J. dos Campos – SP	138	Menção Honrosa
Matheus Henrique Alves Moura	Itapipoca – CE	138	Menção Honrosa
Felipe Sampaio Lima	Fortaleza – CE	137	Menção Honrosa
Davi Sampaio de Alencar	Fortaleza – CE	135	Menção Honrosa
Pedro Morais de Arruda Siaudzionis	Fortaleza – CE	135	Menção Honrosa
Luiz Castelo Branco Cavalcante	Fortaleza – CE	134	Menção Honrosa
Glauber de Lima Guarinello	São Paulo – SP	134	Menção Honrosa
Victor Oliveira Reis	Recife – PE	133	Menção Honrosa
José Ney Alves Feitosa Neto	Fortaleza – CE	132	Menção Honrosa
Andre Bandeira Pinheiro	Fortaleza – CE	131	Menção Honrosa
Fernando Lima Saraiva Filho	Eusébio – CE	130	Menção Honrosa
Rafael Tedeschi Eugênio Pontes Barone	Araçatuba – SP	130	Menção Honrosa
Vinícius Canto Costa	Rio de Janeiro – RJ	130	Menção Honrosa
Lincoln de Queiroz Vieira	Fortaleza – CE	128	Menção Honrosa
Thiago Poeiras Silva	Belo Horizonte – MG	128	Menção Honrosa
André Amaral de Souza	Diadema – SP	124	Menção Honrosa
Carlos Alexandre Silva dos Santos	Fortaleza – CE	124	Menção Honrosa
Felipe Viana Sousa	Fortaleza – CE	124	Menção Honrosa
Liara Guinsberg	São Paulo – SP	122	Menção Honrosa
Otavio Araújo de Aguiar	Fortaleza – CE	121	Menção Honrosa
Rodolfo Rodrigues da Costa	Fortaleza – CE	121	Menção Honrosa
Caíque Porto Lira	Fortaleza – CE	117	Menção Honrosa
Kelvin Azevedo Santos	S. J. dos Campos – SP	117	Menção Honrosa
Eric Tada de Souza	São Paulo – SP	116	Menção Honrosa
Marcelo Cargnelutti Rossato	Santa Maria – RS	115	Menção Honrosa
Marina Pessoa Mota	Fortaleza – CE	115	Menção Honrosa

Nível Universitário

Nome	Cidade – Estado	Total	Prêmio
Renan Henrique Finder	Rio de Janeiro – RJ	278	Ouro
Rafael Tupynambá Dutra	Belo Horizonte – MG	271	Ouro
Régis Prado Barbosa	Fortaleza – CE	269	Ouro
Guilherme Rodrigues Nogueira de Souza	São Paulo – SP	252	Ouro
Davi Lopes Alves de Medeiros	Fortaleza – CE	231	Ouro
Gabriel Luis Mello Dalalio	S. J. dos Campos – SP	207	Prata
Felipe Gonçalves Assis	Campina Grande – PB	205	Prata
Darcy Gabriel Augusto de Camargo Cunha	Campinas – SP	202	Prata
Hugo Fonseca Araújo	Rio de Janeiro – RJ	202	Prata
Matheus Secco Torres da Silva	Rio de Janeiro – RJ	192	Prata
Erik Fernando de Amorim	Araraquara – SP	180	Prata
Lucas Colucci Cavalcante de Souza	São Paulo – SP	175	Prata
José Leandro Pinheiro	Fortaleza – CE	165	Bronze
Reinan Ribeiro Souza Santos	Lagarto – SE	162	Bronze
Daniel de Barros Soares	São Gonçalo – RJ	158	Bronze
Rafael Endlich Pimentel	Vitória – ES	157	Bronze
Carlos Henrique Melo Souza	Ap. de Goiânia – GO	156	Bronze
Ivan Guilhon Mitoso Rocha	Fortaleza – CE	155	Bronze
Thiago Ribeiro Ramos	Varginha – MG	153	Bronze
Lucas de Freitas Smaira	Guaxupé – MG	151	Bronze
Paulo Sérgio de Castro Moreira	S. J. dos Campos – SP	149	Bronze
Alexandre Azevedo César	Rio de Janeiro – RJ	148	Bronze
Ricardo Turolla Bortolotti	Rio de Janeiro – RJ	147	Bronze
Robério Soares Nunes	Ribeirão Preto – SP	145	Bronze
Marcelo Matheus Gauy	S. J. do Rio Preto – SP	144	Bronze
Charles Barbosa de Macedo Brito	Natal – RN	143	Bronze
Renato Dias Costa	Rio de Janeiro – RJ	139	Menção Honrosa
Felipe Vincent Yannik Romero Pereira	Brasília – DF	139	Menção Honrosa
Rafael Alves da Ponte	Fortaleza – CE	136	Menção Honrosa
Carlos Coelho Lechner	Rio de Janeiro – RJ	135	Menção Honrosa
João Fernando Doriguello Diniz	Santo André – SP	134	Menção Honrosa
Luiz Filipe Martins Ramos	Niterói – RJ	134	Menção Honrosa
Guilherme de Sena Brandine	Fortaleza – CE	133	Menção Honrosa
Bruno de Nadai Sarnaglia	Vila Velha – ES	132	Menção Honrosa

Iuri Rezende Souza	Mineiros – GO	132	Menção Honrosa
Pedro Veras Bezerra da Silva	Rio de Janeiro – RJ	131	Menção Honrosa
Douglas Machado dos Santos	Eldorado do Sul – RS	130	Menção Honrosa
Leandro Farias Maia	Rio de Janeiro – RJ	128	Menção Honrosa
Willy George do Amaral Petrenko	Rio de Janeiro – RJ	127	Menção Honrosa
Cassio Henrique Vieira Morais	Belo Horizonte – MG	124	Menção Honrosa
Michel Faleiros Martins	Campinas – SP	124	Menção Honrosa
José Armando Barbosa Filho	Fortaleza – CE	123	Menção Honrosa
Alysson Espíndola de Sá Silveira	Fortaleza – CE	115	Menção Honrosa
Fernando Nascimento Coelho	Fortaleza – CE	114	Menção Honrosa
Gabriel Caser Brito	Rio de Janeiro – RJ	113	Menção Honrosa
Fernando Fonseca Andrade Oliveira	Belo Horizonte – MG	113	Menção Honrosa
Breno Vieira de Aguiar	Fortaleza – CE	110	Menção Honrosa
Thales Graça Athanásio	São Paulo – SP	108	Menção Honrosa
Tiago Fonseca	São Carlos – SP	107	Menção Honrosa
Gabriel Queiroz de Brito Melo	Recife – PE	107	Menção Honrosa
Rafael Pereira de Paula de Lucas Simon	Recife – PE	105	Menção Honrosa

COORDENADORES REGIONAIS

Alberto Hassen Raad	(UFJF)	Juiz de Fora – MG
Américo López Gálvez	(USP)	Ribeirão Preto – SP
Antonio Carlos Nogueira	(UFU)	Uberlândia – MG
Benedito Tadeu Vasconcelos Freire	(UFRN)	Natal – RN
Bruno Holanda	(CAEN – UFC)	Fortaleza – CE
Carmen Vieira Mathias	(UNIFRA)	Santa María – RS
Claus Haetinger	(UNIVATES)	Lajeado – RS
Cláudio de Lima Vidal	(UNESP)	S.J. do Rio Preto – SP
Denice Fontana Nisxota Menegais	(UNIPAMPA)	Bagé – RS
Disney Douglas Lima de Oliveira	(UFAM)	Manaus – AM
Edson Roberto Abe	(Colégio Objetivo de Campinas)	Campinas – SP
Edney Aparecido Santulo Jr.	(UEM)	Maringá – PR
Fábio Brochero Martínez	(UFMG)	Belo Horizonte – MG
Florêncio Ferreira Guimarães Filho	(UFES)	Vitória – ES
Francinildo Nobre Ferreira	(UFSJ)	São João del Rei – MG
Genildo Alves Marinho	(Centro Educacional Leonardo Da Vinci)	Taguatingua – DF
Herivelto Martins	(USP – São Carlos)	São Carlos – SP
Gilson Tumelero	(UTFPR)	Pato Branco – PR
Ivanilde Fernandes Saad	(UC. Dom Bosco)	Campo Grande – MS
João Benício de Melo Neto	(UFPI)	Teresina – PI
João Francisco Melo Libonati	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Diogo Diniz	(UFPB)	Campina Grande – PB
José Luiz Rosas Pinho	(UFSC)	Florianópolis – SC
José Vieira Alves	(UFPB)	Campina Grande – PB
José William Costa	(Instituto Pueri Domus)	Santo André – SP
Krerley Oliveira	(UFAL)	Maceió – AL
Licio Hernandes Bezerra	(UFSC)	Florianópolis – SC
Luciano G. Monteiro de Castro	(Sistema Elite de Ensino)	Rio de Janeiro – RJ
Luzinalva Miranda de Amorim	(UFBA)	Salvador – BA
Marcelo Dias	(Grupo Educacional Etapa)	São Paulo – SP
Marcelo Antonio dos Santos	FACOS	Osório – RS
Marcelo Rufino de Oliveira	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Newman Simões	(Cursinho CLQ Objetivo)	Piracicaba – SP
Nivaldo Costa Muniz	(UFMA)	São Luis – MA
Osnel Broche Cristo	(UFLA)	Lavras – MG
Uberlândio Batista Severo	(UFPB)	João Pessoa – PB
Raul Cintra de Negreiros Ribeiro	(Colégio Anglo)	Atibaia – SP
Reginaldo de Lima Pereira	(Escola Técnica Federal de Roraima)	Boa Vista – RR
Reinaldo Gen Ichiro Arakaki	(UNIFESP)	SJ dos Campos – SP
Ricardo Amorim	(Centro Educacional Logos)	Nova Iguaçu – RJ
Ronaldo Alves Garcia	(UFGO)	Goiânia – GO
Rogério da Silva Ignácio	(Col. Aplic. da UFPE)	Recife – PE
Rosangela Ramon	(UNOCHAPECÓ)	Chapecó – SC
Seme Gebara Neto	(UFMG)	Belo Horizonte – MG
Tadeu Ferreira Gomes	(UEBA)	Juazeiro – BA
Tomás Menéndez Rodrigues	(U. Federal de Rondônia)	Porto Velho – RO
Valdenberg Araújo da Silva	(U. Federal de Sergipe)	São Cristóvão – SE
Wagner Pereira Lopes	(CEFET – GO)	Jataí – GO
Wanderson Breder	(CEFET – RJ)	Nova Friburgo – RJ
William Serafim dos Reis	(UFT – TO)	Arraias – TO