CONTEÚDO

Esta edição é dedicada à memória do professor Sergio Plaza Salinas da Universidad de Santiago de Chile, que colaborou como membro do comitê editorial da revista Eureka! desde 1998, e que nos deixou neste ano de 2011.

Os editores

XXXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Problemas e soluções da Primeira Fase

PROBLEMAS – NÍVEL 1

1. Qual dos números a seguir **não** é múltiplo de 15?
A) 135 **B)** 315 **C)** 555 **D)** 785 **E)** 915

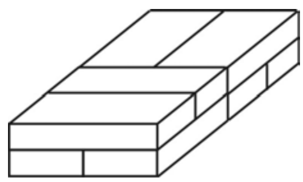
2. Ana, Esmeralda e Lúcia têm, juntas, 33 reais. Ana e Esmeralda, juntas, têm 19 reais e Esmeralda e Lúcia, juntas, têm 21 reais. Quantos reais tem Esmeralda?
A) 6 **B)** 7 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 14

3. Aumentando 2% o valor um número inteiro positivo, obtemos o seu sucessor. Qual é a soma desses dois números?

A) 43 **B)** 53 **C)** 97 **D)** 101 **E)** 115

4. Qual é o maior número de fichas que podemos colocar em um tabuleiro 5×5, no máximo uma em cada casa, de modo que o número de fichas em cada linha e cada coluna seja múltiplo de 3?
A) 6 **B)** 9 **C)** 12 **D)** 15 **E)** 24

5. Carlos tem 2010 blocos iguais de 10 cm de largura por 20 cm de comprimento e 1,5 cm de espessura e resolveu empilhá-los formando uma coluna de 20 cm de largura por 40 cm de comprimento, como na figura. Qual dos valores a seguir, em metros, é o mais próximo da altura dessa coluna?

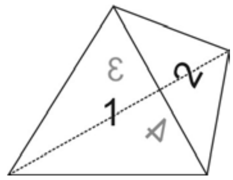


A) 7 **B)** 7,5 **C)** 8 **D)** 8,5 **E)** 9

6. Qual das alternativas apresenta um divisor de $3^5 \cdot 4^4 \cdot 5^3$?
A) 42 **B)** 45 **C)** 52 **D)** 85 **E)** 105

7. Dividindo-se o número $4^{\left(4^2\right)}$ por 4^4 obtemos o número:
A) 2 **B)** 4^3 **C)** 4^4 **D)** 4^8 **E)** 4^{12}

8. As quatro faces de um dado são triângulos equiláteros, numerados de 1 a 4, como no desenho. Colando-se dois dados iguais, fazemos coincidir duas faces, com o mesmo número ou não. Qual dos números a seguir **não** pode ser a soma dos números das faces visíveis?

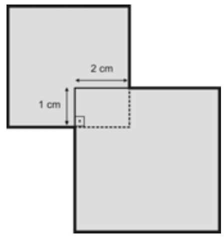


A) 12 **B)** 14 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 19

9. Quantos divisores positivos de 120 são múltiplos de 6?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 12

10. O desenho mostra dois quadrados de papel sobrepostos, um de lado 5 cm e outro de lado 6 cm. Qual é o perímetro da figura formada (linha grossa no contorno do desenho), em centímetros?

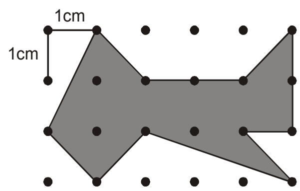


A) 31 **B)** 34 **C)** 36 **D)** 38 **E)** 41

11. O horário indicado pelo relógio ao lado está correto. A partir desse momento, porém, o relógio começa a atrasar exatamente 5 minutos a cada hora real. Depois de quantos dias o relógio voltará a apresentar um horário correto?

A) 1 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 12

12. No reticulado a seguir, pontos vizinhos na vertical ou na horizontal estão a 1 cm de distância.



Qual é a área da região sombreada?

A) 7 **B)** 8 **C)** 8,5 **D)** 9 **E)** 9,5

13. Um jornal publicou a tabela de um campeonato de futebol formado por quatro times, apresentando os gols marcados e os gols sofridos por cada time. Por uma falha de impressão, a tabela saiu com dois números borrados, conforme reprodução a seguir.

	Gols marcados	**Gols sofridos**
Craques do Momento	8	4
Independentes	1	6
EC Boleiros	4	***
Esmeralda FC	5	***

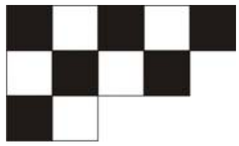
Sabe-se que o time Esmeralda FC sofreu dois gols a mais que o time EC Boleiros. Quantos gols sofreu o time Esmeralda FC?
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

14. Ana começou a descer uma escada no mesmo instante em que Beatriz começou a subi-la. Ana tinha descido $\frac{3}{4}$ da escada quando cruzou com Beatriz. No momento em que Ana terminar de descer, que fração da escada Beatriz ainda terá que subir?
A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{12}$ **D)** $\frac{5}{12}$ **E)** $\frac{2}{3}$

15. Alguns números inteiros positivos, não necessariamente distintos, estão escritos na lousa. A soma deles é 83 e o produto é 1024. O menor número é igual a:
A) 1 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 8 **E)** 16

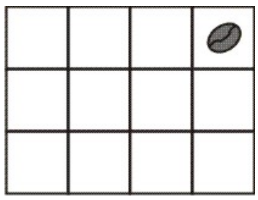
16. Numa sala do 6º ano, todos gostam de pelo menos uma das duas matérias: Matemática ou Português. Sabe-se que $\frac{3}{4}$ dos alunos gostam de Matemática e $\frac{5}{7}$ dos alunos gostam de Português. A sala tem 56 alunos. Quantos alunos gostam dessas duas matérias ao mesmo tempo?
A) 4 **B)** 8 **C)** 13 **D)** 24 **E)** 26

17. O desenho representa um canto de um tabuleiro retangular convencional, formado por quadradinhos de lado 1 cm. Nesse tabuleiro, 17 quadradinhos são brancos. Qual é a área do tabuleiro, em centímetros quadrados?



A) 29 **B)** 34 **C)** 35 **D)** 40
E) 150

18. A figura representa uma barra de chocolate que tem um amendoim apenas num pedaço. Elias e Fábio querem repartir o chocolate, mas nenhum deles gosta de amendoim. Então combinam dividir o chocolate quebrando-o ao longo das linhas verticais ou horizontais da barra, um depois do outro e retirando o pedaço escolhido, até que alguém tenha que ficar com o pedaço do amendoim. Por sorteio, coube a Elias começar a divisão, sendo proibido ficar com mais da metade do chocolate logo no começo. Qual deve ser a primeira divisão de Elias para garantir que Fábio fique com o amendoim ao final?



A) Escolher a primeira coluna à esquerda.

B) Escolher as duas primeiras colunas à esquerda.

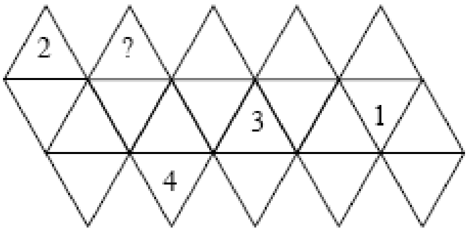
C) Escolher a terceira linha, de cima para baixo.

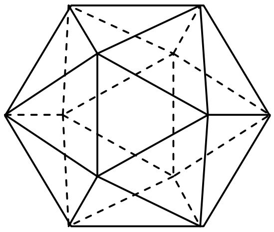
D) Escolher as duas últimas linhas, de cima para baixo.

E) Qualquer uma, já que Fábio forçosamente ficará com o amendoim.

19. Quatro amigos, Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo e Dernaldo estão jogando cartas. São 20 cartas diferentes, cada carta tem uma entre 4 cores (azul, amarelo, verde, vermelho) e um número de 1 a 5. Cada amigo recebe cinco cartas, de modo que todas as cartas são distribuídas. Eles fazem as seguintes afirmações:
Arnaldo: "Eu tenho quatro cartas com o mesmo número."
Bernaldo: "Eu tenho as cinco cartas vermelhas."
Cernaldo: "As minhas cinco cartas são de cores que começam com a letra V."
Dernaldo: "Eu tenho três cartas de um número e duas cartas de outro número."
Sabe-se que somente uma das afirmações é falsa. Quem fez essa afirmação?
A) Arnaldo **B)** Bernaldo **C)** Cernaldo **D)** Dernaldo
E) Não é possível definir.

20. A figura a seguir foi recortada em cartolina e depois dobrada para formar um icosaedro. As faces em branco foram numeradas de modo que ao redor de cada vértice (pontas do sólido) apareçam os números de 1 a 5. Qual número está na face com a interrogação?





ICOSAEDRO

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

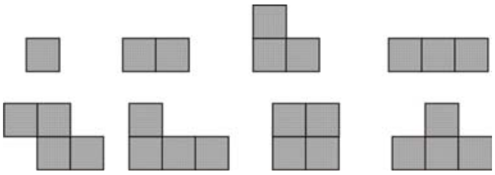
PROBLEMAS – NÍVEL 2

1. Veja o problema No. 6 do Nível 1.

2. Aumentando em 2% o valor do menor de dois números consecutivos, obtém-se o maior deles. Qual é a soma desses números?
A) 43 **B)** 53 **C)** 97 **D)** 101 **E)** 115

3. Veja o problema No. 7 do Nível 1

4. Cecília pegou uma cartolina e recortou as 8 peças à direita, formadas por quadradinhos de mesmo tamanho.



De quantas maneiras diferentes ela pode escolher 3 dessas peças para montar o quadrado 3×3 à esquerda?
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

5. Os números x e y são distintos e satisfazem $x-\frac{1}{x}=y-\frac{1}{y}$. Então xy é igual a

A) 4 **B)** 1 **C)** –1 **D)** –4
E) é preciso de mais dados.

6. Sônia calculou a média aritmética de dois diferentes números de dois dígitos e obteve 98. Qual é a diferença entre esses números?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4
E) um número maior que 4

7. Veja o problema No. 17 do Nível 1.

8. Quantos inteiros da lista 100, 101, 102, ..., 999 não possuem algarismos iguais a 2, 5, 7 ou 8?
A) 160 **B)** 170 **C)** 180 **D)** 190 **E)** 200

9. No triângulo ABC, $m(B\hat{A}C) = 140^o$. Sendo M o ponto médio de BC, N o ponto médio de AB e P o ponto sobre o lado AC tal que MP é perpendicular a AC, qual é a medida do ângulo $N\hat{M}P$?
A) 40^o **B)** 50^o **C)** 70^o **D)** 90^o **E)** 100^o

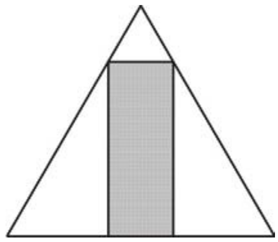
10. Veja o problema No. 4 do Nível 1

11. Para quantos inteiros n o número $\frac{n}{100-n}$ é também inteiro?
A) 1 **B)** 6 **C)** 10 **D)** 18 **E)** 100

12. Ana começou a descer uma escada de 24 degraus no mesmo instante em que Beatriz começou a subi-la. Ana tinha descido $\frac{3}{4}$ da escada quando cruzou com Beatriz. No momento em que Ana terminar de descer, quantos degraus Beatriz ainda terá que subir?
A) 2 **B)** 6 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 16

13. Veja o problema 19 do Nível 1.

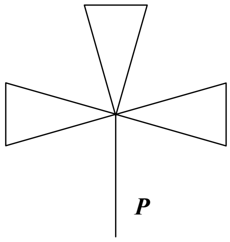
14. No desenho, o retângulo cinza tem seus vértices sobre os lados do triângulo equilátero de área 40 cm^2. O menor lado do retângulo é um quarto do lado do triângulo. A área do retângulo em cm^2 é:



A) 5 **B)** 10 **C)** 15 **D)** 18 **E)** 22

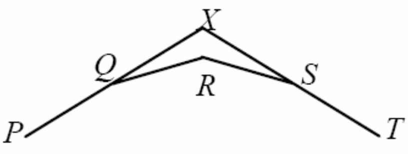
15. Veja o problema No. 15 do Nível 1.

16. De quantas maneiras é possível desenhar a figura a seguir sem tirar o lápis do papel (ou qualquer outro utensílio, se você preferir!) começando de P e sem passar sobre o mesmo ponto mais de uma vez, com exceção do ponto comum aos três triângulos?



A) 48 **B)** 24 **C)** 16 **D)** 108 **E)** 27

17. Os pontos P, Q, R, S e T são vértices de um polígono regular. Os lados PQ e TS são prolongados até se encontrarem em X, como mostra a figura, e $Q\hat{X}S$ mede 140^o. Quantos lados o polígono tem?



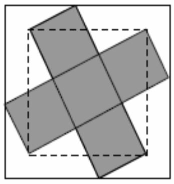
A) 9 **B)** 18 **C)** 24 **D)** 27 **E)** 40

18. Veja o Problema No. 20 do Nível 1.

19. O professor Piraldo tem dois relógios, ambos digitais de 24 horas. Nenhum dos dois funciona: um muda de horário com o dobro da velocidade normal e o outro vai de trás para frente, na velocidade normal. Ambos mostram corretamente 13:00. Qual é a hora certa na próxima vem em que os dois relógios mostrarem o mesmo horário?

A) 05:00 **B)** 09:00 **C)** 13:00 **D)** 17:00 **E)** 21:00

20. Uma figura no formato de cruz, formada por quadrados de lado 1, está inscrita em um quadrado maior, cujos lados são paralelos aos lados do quadrado tracejado, cujos vértices são vértices da cruz. Qual é a área do quadrado maior?



A) 9 **B)** $\frac{49}{5}$ **C)** 10 **D)** $\frac{81}{8}$ **E)** $\frac{32}{3}$

21. Quantos são os pares (x, y) de inteiros positivos tais que $x^2 - y^2 = 2^{2010}$?

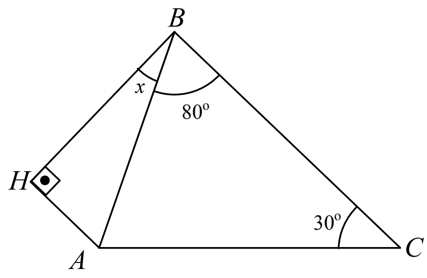
A) 1000 **B)** 1001 **C)** 1002 **D)** 1003 **E)** 1004

22. Quatro números inteiros positivos $a < b < c < d$ são tais que o mdc entre quaisquer dois deles é maior do que 1, mas mdc$(a, b, c, d) = 1$. Qual é o menor valor possível para d?

A) 10 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 30 **E)** 105

23. Veja o problema No. 8 do Nível 1.

24. Na figura, $BC = 2BH$.



A) 10º **B)** 15º **C)** 16º **D)** 20º **E)** 25º

25. Os números a e b são reais não negativos tais que $a^3 + a < b - b^3$. Então

A) $b < a < 1$ **B)** $a = b = 1$ **C)** $a < 1 < b$
D) $a < b < 1$ **E)** $1 < a < b$

PROBLEMAS – NÍVEL 3

1. Dividindo-se o número $4^{\left(4^2\right)}$ por 4^4 obtemos o número:

A) 2 **B)** 4^3 **C)** 4^4 **D)** 4^8 **E)** 4^{12}

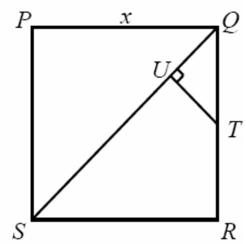
2. Qual dos seguintes números é um divisor de $3^5 \cdot 4^4 \cdot 5^3$?

A) 42 **B)** 45 **C)** 52 **D)** 85 **E)** 105

3. Veja o Problema No. 8 do Nível 1.

4. Veja o Problema No. 14 do Nível 1.

5. Um quadrado *PQRS* tem lados medindo x. T é o ponto médio de *QR* e U é o pé da perpendicular a *QS* que passa por T. Qual é a medida de *TU*?



A) $\frac{x}{2}$ **B)** $\frac{x}{3}$ **C)** $\frac{x}{\sqrt{2}}$ **D)** $\frac{x}{2\sqrt{2}}$ **E)** $\frac{x}{4}$

6. Os números x e y são distintos e satisfazem $x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y}$. Então xy é igual a

A) 4 **B)** 1 **C)** –1 **D)** –4
E) é preciso de mais dados

7. Considere todos os números de três algarismos *distintos*, cada um igual a 0, 1, 2, 3 ou 5. Quantos desses números são múltiplos de 6?

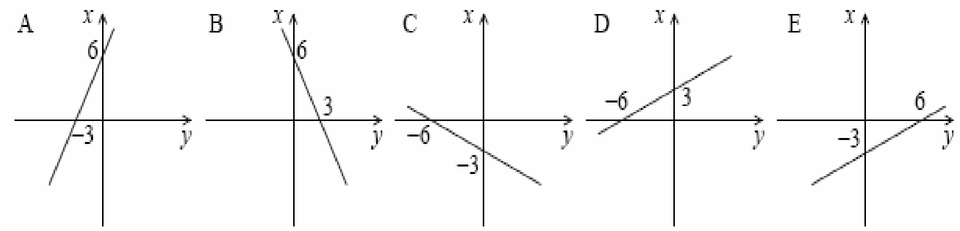
A) 4 **B)** 7 **C)** 10 **D)** 15 **E)** 20

8. O máximo divisor comum de todos os números que são o produto de cinco ímpares positivos consecutivos é
A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 15 **E)** 105

9. Veja o problema 17 do Nível 2.

10. Veja o problema 19 do Nível 1.

11. Esmeralda ia desenhar o gráfico de $y = 2x + 6$ mas trocou os eixos de lugar. Como fica o desenho dessa relação com os eixos trocados de lugar?



12. Qual das seguintes frações é mais próxima de $\sqrt{7}$?
A) $\frac{3}{1}$ **B)** $\frac{5}{2}$ **C)** $\frac{8}{3}$ **D)** $\frac{13}{5}$ **E)** $\frac{18}{7}$

13. No triângulo ABC, $m(B\hat{A}C) = 140º$. Sendo M o ponto médio de BC, N o ponto médio de AB e P o ponto sobre o lado AC tal que MP é perpendicular a AC, qual é a medida do ângulo $N\hat{M}P$?
A) 40º **B)** 50º **C)** 70º **D)** 90º **E)** 100º

14. Veja o problema 16 do Nível 2.

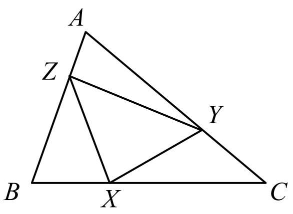
15. Veja o problema No. 20 do Nível 1.

16. Os números a e b são reais não negativos tais que $a^3 + a < b - b^3$. Então
A) $b < a < 1$ **B)** $a = b = 1$ **C)** $a < 1 < b$
D) $a < b < 1$ **E)** $1 < a < b$

17. Quantos são os pares (x, y) de inteiros positivos tais que $x^2 - y^2 = 2^{2010}$?
A) 1000 **B)** 1001 **C)** 1002 **D)** 1003 **E)** 1004

18. Veja o problema No. 8 do Nível 1.

19. Seja *ABC* um triângulo e *X*, *Y* e *Z* pontos sobre os lados *BC*, *CA*, *AB* tais que $\frac{CX}{XB} = \frac{AY}{YC} = \frac{BZ}{ZA} = 2$.



A razão entre as áreas do triângulo *XYZ* e do triângulo cujos lados são congruentes às medianas de *ABC* é:
Obs.: as medianas de um triângulo são os segmentos que ligam os vértices do triângulo aos pontos médios dos lados opostos.

A) $\frac{2}{3}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{4}{9}$ **D)** $\frac{1}{3}$ **E)** $\frac{1}{4}$

20. Para cada subconjunto *A* de $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$, seja $p(A)$ o produto de seus elementos. Por exemplo, $p(\{1;2;4;5\}) = 40$ e $p(A) = 10! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 10$. Por convenção, adote $p(\varnothing) = 1$. A soma de todos os 2^{10} produtos $p(A)$ é igual a:

A) 2^{11} **B)** $11!$ **C)** 11^{11} **D)** $2^{11!}$ **E)** $11^{2!}$

21. Sendo $n = 2010^{2010}$ e $\log n$ é igual ao número *m* tal que $10^m = n$, então

A) $n! < n^{\log n} < (\log n)^n$
B) $n^{\log n} < n! < (\log n)^n$
C) $(\log n)^n < n^{\log n} < n!$
D) $(\log n)^n < n! < n^{\log n}$
E) $n^{\log n} < (\log n)^n < n!$

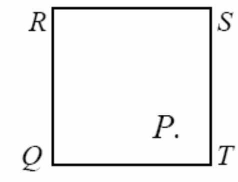
22. Quatro números inteiros positivos $a < b < c < d$ são tais que o mdc entre quaisquer dois deles é maior do que 1, mas mdc$(a, b, c, d) = 1$. Qual é o menor valor possível para *d*?

A) 10 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 30 **E)** 105

23. Qual é o maior valor de xy^2 se *x* e *y* são reais positivos cuja soma é 3?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

24. Um ponto P é escolhido ao acaso no interior de um quadrado $QRST$. Qual é a probabilidade do ângulo $R\hat{P}Q$ ser agudo?



A) $\frac{3}{4}$ **B)** $\sqrt{2}-1$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{\pi}{4}$ **E)** $1-\frac{\pi}{8}$

25. Qual é o menor valor positivo de $21m^2 - n^2$ para m e n inteiros positivos?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 7

GABARITO

NÍVEL 1 (6º. ou 7º. Anos do Ensino Fundamental)

1) D	6) B	11) D	16) E
2) B	7) E	12) B	17) C
3) D	8) E	13) D	18) A
4) D	9) C	14) E	19) B
5) B	10) D	15) A	20) D

NÍVEL 2 (8º. ou 9º. Anos do Ensino Fundamental)

1) B	6) B	11) D	16) A	21) E
2) D	7) C	12) E	17) D	22) C
3) E	8) C	13) B	18) D	23) E
4) E	9) D	14) C	19) E	24) Anulada
5) C	10) D	15) A	20) B	25) D

NÍVEL 3 (Ensino Médio)

1) E	6) C	11) E	16) D	21) E
2) B	7) B	12) C	17) E	22) C
3) E	8) D	13) D	18) A	23) B
4) E	9) D	14) A	19) C	24) E
5) D	10) B	15) D	20) B	25) C

XXXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e soluções da Segunda Fase

PROBLEMAS – NÍVEL 1 – PARTE A
(Cada problema vale 5 pontos)

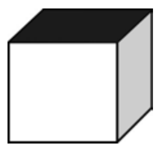
01. Uma jarra contém $\frac{1}{4}$ de sua capacidade em água. Despejando um copo cheio de água na jarra, o volume de água atinge $\frac{1}{3}$ da sua capacidade. Quantos copos cheios mais ainda serão necessários para acabar de encher a jarra?

02. Joãozinho tem que fazer uma multiplicação como lição de casa, mas a chuva molhou o caderno dele, borrando alguns algarismos, que estão representados por $\square$ (cada algarismo borrado pode ser diferente dos outros).

$$\begin{array}{cccccc}
 & & \square & 1 & \square \\
 & \times & 2 & \square & 3 \\
\cline{2-6}
 & & \square & \square & 4 & \square \\
 & 4 & \square & 2 & \square & + \\
\square & 0 & \square & \square & & \\
\hline
1 & \square & 0 & \square & 0 & 2
\end{array}$$

Qual é a soma dos algarismos que foram borrados?

03. Soninha pintou as seis faces de um cubo da seguinte maneira: uma face preta e a face oposta vermelha, uma face amarela e a face oposta azul, uma face branca e a oposta verde. Ao olhar para o cubo, de modo a ver três faces, como na figura, e considerando apenas o conjunto das cores das três faces visíveis, de quantas maneiras diferentes pode ser visto esse cubo?



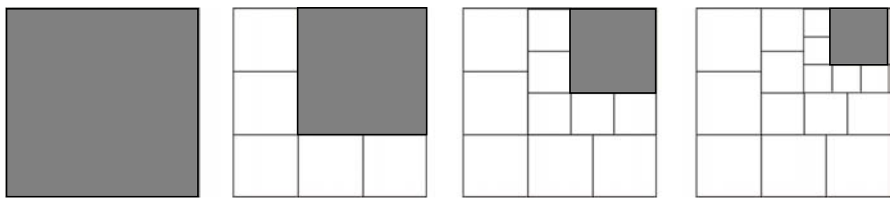
04. Esmeralda foi escrevendo os quadrados dos números inteiros positivos um em seguida ao outro formando o número 149162536... e parou quando chegou no centésimo algarismo. Qual foi o último algarismo que ela escreveu?

05. Carlinhos escreve números inteiros positivos diferentes e menores do que 1000 em várias bolas e coloca-as numa caixa, de modo que Mariazinha possa pegar ao acaso duas dessas bolas. Quantas bolas no máximo Carlinhos irá colocar na caixa se os números das duas bolas deverão ter um divisor comum maior do que 1?

06. Num concurso com 10 questões, cada resposta correta valia 3 pontos, cada resposta errada valia 1 ponto negativo e cada questão não respondida valia 0 ponto. Não houve dois candidatos que apresentassem a mesma nota, feitas as correções. Quantos candidatos no máximo fizeram essa prova?

PROBLEMAS – NÍVEL 1 – PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1
Com cinco quadrados com lados de 27 cm, formamos uma sequência de figuras, das quais as quatro primeiras são:

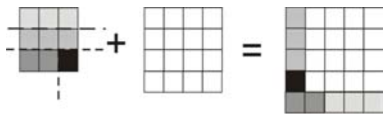


a) Na 4ª figura, qual é a área do quadrado cinza?
b) Na 5ª figura, qual é a área do quadrado cinza?

PROBLEMA 2
Maria tem 90 cartões. Ela numerou os cartões de 10 a 99 numa das faces e, para cada número escrito, escreveu a soma dos seus algarismos na outra face. Por exemplo, o cartão de número 43 tem o número 7 escrito no verso. Em quais cartões um número de uma face é o dobro do número escrito na outra face?

PROBLEMA 3

Fazendo três cortes num quadrado 3×3 e juntando as quatro partes resultantes a um quadrado 4×4, obtemos um quadrado 5×5, conforme indicado na figura. Os cortes devem ser paralelos aos lados dos quadrados e não pode haver sobreposição de figuras para a realização dos cortes.



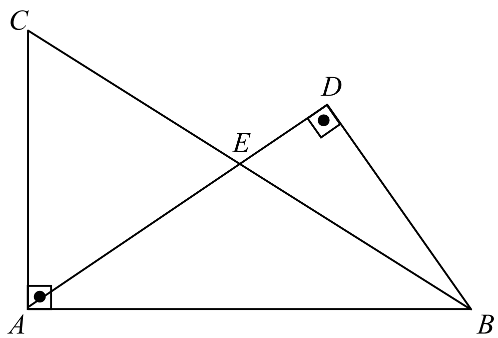
a) Transforme um quadrado de lado 8 cm e um quadrado de lado 15 cm num único quadrado de lado 17 cm, fazendo quatro cortes apenas no quadrado de 8 cm.

b) Qual é o menor número de cortes para transformar três quadrados, de áreas respectivamente iguais a 4 cm^2, 9 cm^2 e 36 cm^2, num único quadrado?

PROBLEMAS – NÍVEL 2 – PARTE A
(Cada problema vale 5 pontos)

01. Seja N o menor número inteiro positivo que multiplicado por 33 resulta em um número cujos algarismos são todos iguais a 7. Determine a soma dos algarismos de N.

02. Na figura seguinte, os triângulos ABC e ABD são retângulos em A e D, respectivamente. Sabendo que AC = 15 cm, AD = 16 cm e BD = 12 cm, determine, em cm^2, a área do triângulo ABE.



03. Sejam p, q números reais satisfazendo as relações $2p^2 - 3p - 1 = 0$, $q^2 + 3q - 2 = 0$ e $pq \neq 1$. Ache o valor de $\dfrac{pq + p + 1}{q}$.

04. Em uma cidade arbitrária o prefeito organizou uma rifa com bilhetes numerados de 100 a 999. O prêmio de cada bilhete é determinado pela soma dos algarismos do número do bilhete. Para que ninguém leve três prêmios iguais, estabeleceu-se que quem retirar três bilhetes com as três somas iguais tem direito a um superprêmio. Qual é o menor número de bilhetes que um cidadão deve comprar para ter a certeza de que vai receber um superprêmio?

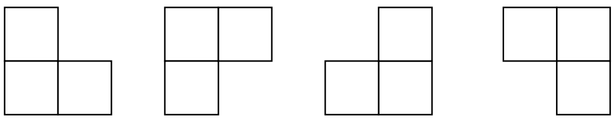
05. Sejam r e s números inteiros. Sabe-se que a equação do segundo grau

$$x^2 - (r + s)x + rs + 2010 = 0$$

tem as duas soluções inteiras. Quantos são os possíveis valores de $|r - s|$?

PROBLEMAS – NÍVEL 2 – PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1
Joãozinho deseja colorir um tabuleiro 2×2010 com duas cores A e B. Uma coloração é dita *legal* se não é possível encontrar um L-triminó, como na figura abaixo, com todos os seus quadradinhos de mesma cor. Determine o número de colorações legais.



L – Triminó

Veja abaixo duas colorações que não são legais:

PROBLEMA 2
Determine todos os números primos m e n tais que $0 < m < n$ e os três números

$$2m + n,\ m + 2n \text{ e } m + n - 18$$

sejam também primos.]

PROBLEMA 3
Chamaremos de *imagem* de um número natural de dois algarismos o número que se

obtém trocando a ordem de seus algarismos. Por exemplo, a imagem de 34 é 43. Quais são os números de dois algarismos que somados com sua imagem resultam em um quadrado perfeito?

PROBLEMA 4

As bissetrizes internas dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ do triângulo *ABC* cortam-se no ponto *I*. Sabe-se que $AI = BC$ e que $m(I\hat{C}A) = 2m(I\hat{A}C)$. Determine a medida do ângulo $A\hat{B}C$.

PROBLEMAS – NÍVEL 3 – PARTE A
(Cada problema vale 4 pontos)

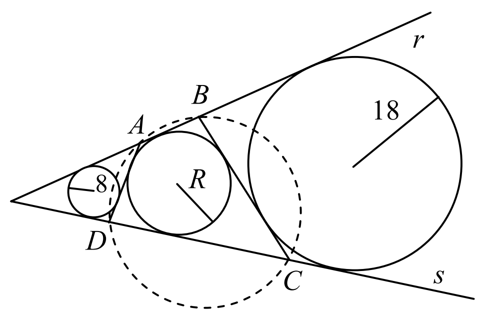
01. Seja *N* o menor número inteiro positivo que multiplicado por 33 resulta em um número cujos algarismos são todos iguais a 7. Determine a soma dos algarismos de *N*.

02. Sejam *r* e *s* números inteiros. Sabe-se que a equação do segundo grau

$$x^2 - (r + s)x + rs + 2010 = 0$$

tem as duas soluções inteiras. Quantos são os possíveis valores de $|r - s|$?

03. Na figura a seguir, as três circunferências em traço contínuo são tangentes às retas *r* e *s* e a circunferência tracejada passa pelos pontos *A*, *B*, *C* e *D*. Além disso, a circunferência menor é tangente também a *AD* e a circunferência maior é também tangente a *BC*. Se os raios das circunferências externas ao quadrilátero *ABCD* são 8 e 18, calcule o raio *R* da circunferência inscrita em *ABCD*.



04. Cada uma das oito casas de um retângulo de duas linhas e quatro colunas é pintada de uma entre três cores. Uma coluna é chamada de *corte* se as suas duas casas são da mesma cor. De quantas maneiras é possível pintar o retângulo de modo que haja exatamente um corte?

05. Calcule

$$\frac{(2^4+2^2+1)(4^4+4^2+1)(6^4+6^2+1)\ldots(32^4+32^2+1)}{(1^4+1^2+1)(3^4+3^2+1)(5^4+5^2+1)\ldots(31^4+31^2+1)}$$

PROBLEMAS – NÍVEL 3 – PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1
As bissetrizes internas dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ do triângulo *ABC* cortam-se no ponto *I*. Sabe-se que $AI = BC$ e que $m(I\hat{C}A) = 2m(I\hat{A}C)$. Determine a medida do ângulo $A\hat{B}C$.

PROBLEMA 2
Diamantino gosta de jogar futebol, mas se jogar dois dias seguidos ele fica com dores musculares. De quantas maneiras Diamantino pode escolher em quais de dez dias seguidos ele vai jogar bola sem ter dores musculares? Uma maneira é não jogar futebol em nenhum dos dias.

PROBLEMA 3
Resolva o sistema

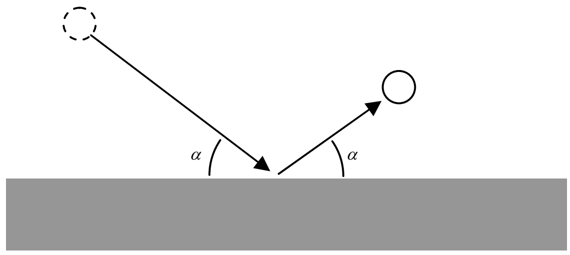
$$\begin{cases} x+y+z=77 \\ xy+yz+zx+xyz=946 \end{cases}$$

sendo $x \le y \le z$ inteiros não negativos.

PROBLEMA 4
Uma mesa de bilhar tem o formato de um quadrado *ABCD*. SuperPablo tem uma missão especial: ele deve dar uma tacada em uma bola de bilhar, inicialmente colocada no vértice *A*, de modo que, após bater exatamente 2010 vezes nos lados do quadrado, a bola chegue, pela primeira vez, a um vértice do quadrado.

Quantos são os possíveis valores do ângulo formado pelo lado AB com a trajetória inicial da bola?

Observação: ao bater nos lados do quadrado, a bola sofre reflexão perfeita, ou seja, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. Suponha também que a bola seja um ponto.



SOLUÇÕES NÍVEL 1 – SEGUNDA FASE – PARTE A

Problema	01	02	03	04	05	06
Resposta	8	60	8	9	499	38

01. Volume de um copo de água é igual a $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{4-3}{12}=\frac{1}{12}$ do volume da jarra.

Falta encher $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ da jarra. Para isso são necessários $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{12}}=\frac{2}{3}\times 12=8$ copos.

02. Como o algarismo das unidades do produto é 2, o algarismo das unidades do multiplicando é 4. Assim, obtemos o algarismo da direita da 3ª linha do algoritmo e também os dois últimos algarismos da 5ª linha, conforme figura à direita. Como o algarismo das dezenas do produto é 0, o algarismo da direita na 4ª linha do algoritmo deve ser 6. Logo o algarismo das dezenas do multiplicador é 9, conforme figura à esquerda. Como o 2º algarismo à direita 5ª linha é 0, o algarismo das centenas

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & \square & 1 & \mathbf{4} \\
 & & \times & 2 & \mathbf{9} & 3 \\
\cline{3-6}
 & & \square & \square & 4 & \mathbf{2} \\
 & 4 & \square & 2 & \mathbf{6} & + \\
\square & 0 & \mathbf{2} & \mathbf{8} & & \\
\hline
1 & \square & 0 & \square & 0 & 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
 & & & \square & 1 & \mathbf{4} \\
 & & \times & 2 & \square & 3 \\
\cline{3-6}
 & & \square & \square & 4 & \mathbf{2} \\
 & 4 & \square & 2 & \square & + \\
\square & 0 & \mathbf{2} & \mathbf{8} & & \\
\hline
1 & \square & 0 & \square & 0 & 2
\end{array}$$

do multiplicando é 5. A partir do algoritmo completo, mostrado à direita, concluímos que a soma dos algarismos que foram borrados é

$$5+4+9+1+5+2+6+6+1+2+8+5+6=60$$

			5	1	4
		×	2	9	3
		1	5	4	2
	4	6	2	6	+
1	0	2	8		
1	5	0	6	0	2

03. Cada 3 faces que podem ser vistas ao mesmo tempo compartilham um vértice. Como o cubo tem 8 vértices, o número de composições de cores percebidas visualmente é 8.

04. Os números 1^2, 2^2, 3^2 possuem um algarismo. Os números 4^2, 5^2, ..., 9^2 possuem dois algarismos. Os números 10^2, 11^2, ..., 31^2 possuem três algarismos. Assim, ao escrever o quadrado do número 31, o número de algarismos escritos é $1\times 3+2\times 6+3\times 22=81$, faltando escrever 19 algarismos. Com os quadrados de 32, 33, 34 e 35, temos mais $4\times 4=16$ algarismos, faltando ainda escrever apenas três algarismos. Como o quadrado de 36 é 1296, concluímos que o último algarismo escrito foi o 9, o centésimo algarismo escrito por Esmeralda.

05. Não podemos colocar o número 1 em nenhuma bola, pois o MDC entre 1 e qualquer outro número é 1, assim temos 998 números disponíveis. Além disso, se forem usadas 500 bolas ou mais, haverá duas com números consecutivos, sempre primos entre si, então não podemos colocar mais que 499 bolas. Mas existe uma forma de colocar 499 bolas, usando os números pares de 2 a 998.

06. Quem acerta a questões e erra b obtém $3a - b$ pontos, com $a+b\le 10$. Obtemos os números de 0 a –10 com $a = 0$, ao todo 11 inteiros. Obtemos os números de 1 a 30 usando os valores 0, 1 ou 2 para b, não obtendo apenas 3.9 – 2 = 25, 3.10 – 1 = 29 e 3.10 – 2 = 28, pois nesses casos ficamos com $a + b > 10$, ao todo 30 – 3 = 27 inteiros. Logo, o número máximo de candidatos nas condições apresentadas é 11 + 27 = 38.

SOLUÇÕES NÍVEL 1 – SEGUNDA FASE – PARTE B

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

Em cada figura, a área do quadrado cinza é uma fração da área do quadrado original. Nas figuras apresentadas, a partir da segunda, as áreas são iguais,

$$\frac{4}{9}\times 27\times 27$$

respectivamente, a $\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}\times 27\times 27$

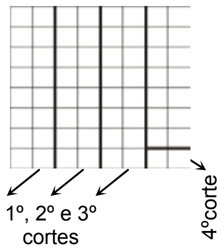
$$\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}\times 27\times 27 = 64$$

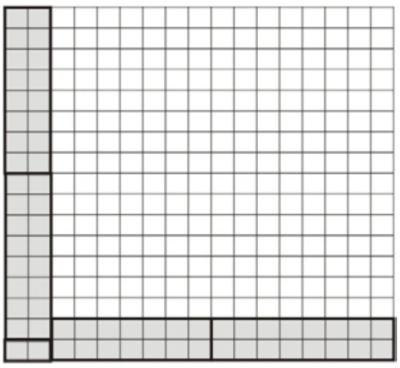
a) Na 4ª figura, a área do quadrado cinza é igual a 64, segundo os produtos acima.

b) Na 5ª figura, admitindo que a obtenção do quadrado cinza seja feita da mesma maneira, a sua área é igual a $\frac{4}{9}$ da área do quadrado cinza da 4ª figura, ou seja, é igual a $\frac{4}{9}\times 64 = \frac{256}{9}$ cm^2.

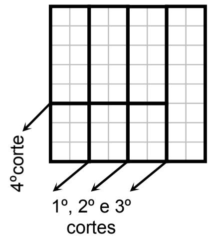
SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:
Para um número cujo algarismo das dezenas é ***a*** e cujo algarismo das unidades é ***b***, temos $10a + b = 2(a+b)$ ou $a + b = 2(10a+b)$. A segunda equação não tem soluções positivas, e na primeira equação temos $10a + b = 2(a+b) \Leftrightarrow 10a + b = 2a + 2b \Leftrightarrow 8a = b$. Necessariamente temos a = 1 e b = 8. De fato, no cartão de número 18 a soma dos algarismos é 9.

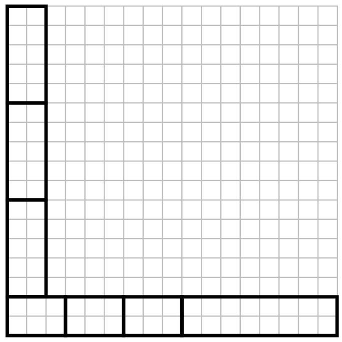
SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:
a) Bastam 4 cortes no quadrado de lado 8 cm, conforme ilustrado nos desenhos à direita.



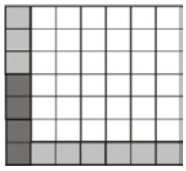


Ou ainda, como a figura a seguir.



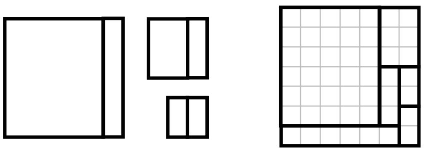


b) Uma possibilidade **(exemplo 1)** é juntar ao quadrado maior pedaços dos quadrados menores, obtendo-se um quadrado de área 4 + 9 + 36 = 49 cm^2. Para isso, dividimos o quadrado de lado 3 em três tiras 3×1 com dois cortes e o quadrado de lado 2 em duas tiras 2×1 com um corte, num total de 3 cortes, conforme desenho à esquerda. Menos que 3 cortes não formam peças que se encaixam na região sombreada.

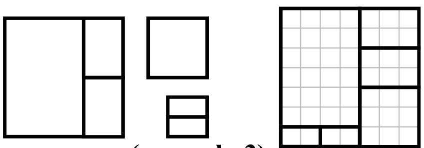


(exemplo 1)

Outras maneiras **(exemplos 2 e 3)** demontar o quadrado também com três cortes são apresentadas ao lado.



(exemplo 2)



(exemplo 3)

SOLUÇÕES NÍVEL 2 – SEGUNDA FASE – PARTE A

Problema	01	02	03	04	05
Resposta	25	75	1	53	8

01. O critério de divisibilidade por 11 nos diz que se o número 33N possui todos os seus algarismos iguais e é divisível por 11, então ele deve possuir um número par da algarismos. O critério de divisibilidade por 3 também nos diz que a soma dos algarismos deve ser múltipla de 3 e isso obriga que a quantidade de algarismos 7 seja divisível por 3. O menor número que cumpre essas condições é 777777, ou seja, N = 777777/33 = 23569.

02. Pelo teorema de Pitágoras, temos que $AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=20$ e que $CB=\sqrt{AC^2+AB^2}=25$. Os triângulos *ABC* e *ADB* são semelhantes pois os seus lados são proporcionais e consequentemente temos $\widehat{EAB=EBA}$ e $\widehat{ACB}=90-\widehat{EBA}=90-\widehat{EAB}=\widehat{CAE}.$. Concluímos assim que *E* é o ponto médio de *CB* e a área procurada é metade da área do triângulo *CAB*, ou seja, $\dfrac{15\cdot 20}{4}=75.$

03. Como p não pode ser zero, podemos dividir a primeira equação por $-p^2$ e obter $\dfrac{1}{p^2}+3\dfrac{1}{p}-2.$ Isto nos diz que as raízes da primeira equação são os inversos das raízes da segunda equação. Como $pq\neq 1.$, p é igual ao inverso da outra raíz da segunda equação que é diferente de q, ou seja, $p=\dfrac{1}{-3-q}$ pois a soma das raízes da segunda equação é igual a –3. Substituindo na expressão procurada:

$$\frac{pq+p+1}{q}=\frac{-q-1+3+q}{3q+q^2}=\frac{2}{3q+q^2}=\frac{2}{2}=1$$

04. A soma dos dígitos dos bilhetes é no mínimo 1 e no máximo 27. Para as somas 1 e 27 existem apenas dois bilhetes, enquanto que para qualquer outro valor existem pelo menos três bilhetes. Então retirando $1+1+2\times(27-2)+1=53$ iremos escolher pelo menos três números com mesma soma.

05. Para que as soluções sejam inteiras, o discriminante da equação do segundo grau deve ser o quadrado de um inteiro positivo, digamos t^2. Assim

$$(r+s)^2 - 4rs - 4\times 2010 = t^2$$

$$(r-s)^2 - t^2 = 4\times 2010$$

$$\frac{((r-s)+t)}{2}\times\frac{((r-s)-t)}{2} = 2010$$

Como os números $((r-s)+t)$ e $((r+s)+t)$ possuem a mesma paridade e 2010 é inteiro, concluímos que os termos no produto anterior são inteiros. A cada para de divisores do tipo $\left(d, \frac{2010}{d}\right)$ do número 2010, temos uma solução para t e $|r-s|$ na última equação. Como 2010 possui 16 divisores, o número de soluções é 8.

SOLUÇÕES NÍVEL 2 – SEGUNDA FASE – PARTE B

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

A pintura da primeira coluna 2 x 1 do tabuleiro limita o número de maneiras de pintarmos o restante do tabuleiro. Temos dois casos a considerar:

Primeiro caso: As casas desta coluna são pintadas com a mesma cor. Necessariamente a próxima coluna terá ambas casa da cor oposta à aquela da primeira coluna e. Pela mesma razão, teremos que as cores das colunas do tabuleiro devem ser alternadas. Assim, neste caso, temos apenas 2 pinturas diferentes.

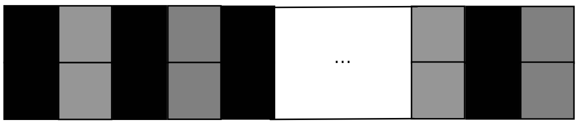


Figura 1

Segundo caso: As casas desta coluna são pintadas com cores diferentes. Necessariamente a próxima coluna é igual à primeira ou tem as cores opostas. O mesmo se passará com as próximas colunas. Como para cada coluna sempre teremos duas escolhas a fazer, incluindo a coluna inicial, temos 2^{2010} pinturas diferentes.

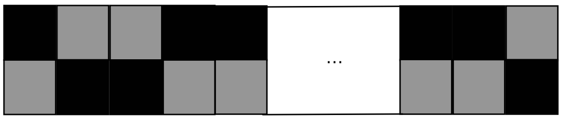


Figura 2

O total de pinturas é: $2+2^{2010}$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:

Como os primos $2m + n$ e , $m + 2n$ são maiores que dois, temos que ambos são ímpares e consequentemente $2m+n+m+2n=3m+3n$ é um número par. Assim $m+n$ é par e $m+n-18$ é um primo par, ou seja, dois. O único par de primos (m,n) que cumpre $m+n=20$ e satisfaz o enunciado é $(m,n)=(3,17)$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

A soma de um número de dois algarismos com a sua imagem é da forma $(10a+b)+(10b+a)=11(a+b)$, onde a e b são seus algarismos. Se $11(a+b)$ é um quadrado perfeito, devemos ter outro fator primo 11 na soma $a + b$. Além disso, como a e b são menores que 10, concluímos que $a + b$ é um múltiplo de 11 menor que 20 e maior que 0, ou seja, é igual à 11. Os pares de dígitos (a,b) que verificam $a+b=11$ são: $(2,9),(3,8),(4,7),(5,6),(6,5),(7,4),(8,3)$ e $(9,2)$.

Portanto, existem 8 números de dois algarismos que cumprem o enunciado.

PRIMEIRA SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:

Seja N o ponto de encontro da bissetriz do ângulo $\angle ACD$ com o lado AB. Pelo caso $A.L.A$, os triângulos $\triangle NCA$ e $\triangle ADC$ são congruentes. Consequentemente $NC=AD=BC$.

Pelo teorema do ângulo externo, $\angle BNC=NAC+ACN=\angle NCB$. portanto $BN=BC=NC$ e $\triangle BNC$ é equilátero. Daí $\angle ABC=60, \angle BCA=80$ e $\angle BAC=40$

SEGUNDA SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:

Lema 1: Se $\triangle ABC$ é um triângulo com $\angle ACB=2\angle BAC$ então $a(a+b)=c^2$.

Lema 2: A bissetriz do vértice C do triângulo $\triangle ABC$ tem comprimento $\dfrac{2ab\cos\dfrac{\angle ACB}{2}}{a+b}$

Sejam $\alpha = \angle BAD$ e P o ponto de encontro da bissetriz do ângulo $\angle C$ com o lado AB. Pelo segundo lema temos $\dfrac{cb}{a+b} = \dfrac{2ab\cos 2\alpha}{a+b}$ e daí $c = 2a\cos 2\alpha$.

Pelo lema 1 temos $a(a+b) = c^2 = 4a^2\cos^2 2\alpha$ e daí $b = a(4\cos^2 2\alpha - 1)$. Como $AD = BC$ temos que $p - a = AD\cos\alpha = a\cos\alpha$ e daí $a + b + c = 2a(\cos\alpha + 1)$. Substituindo os valores encontrados anteriormente temos

$$a + a(4\cos^2 2\alpha - 1) + 2a\cos 2\alpha = 2a(\cos\alpha + 1) \Rightarrow$$
$$1 + 2\cos 4\alpha + 1 + 2\cos 2\alpha = 2\cos\alpha + 2 \Rightarrow$$
$$\cos 4\alpha + \cos 2\alpha = \cos\alpha \Rightarrow$$
$$\cos\alpha(1 - 2\cos 3\alpha) = 0 \Rightarrow \cos 3\alpha = \frac{1}{2}$$

E consequentemente $\angle ABC = 3\alpha = 60$.

SOLUÇÕES NÍVEL 3 – SEGUNDA FASE – PARTE A

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**
Resposta	25	8	12	2592	1057

01. Queremos o menor múltiplo de 33 formado apenas por algarismos 7. Teremos

$$33 \cdot N = 7777...77, \text{ com } k \text{ algarismos } 7.$$

Para ser múltiplo de 33, deve ser múltiplo de 11 e de 3. Assim, k deve ser par (pelo critério de divisibilidade por 11) e, também, k deve ser múltiplo de 3, pois a soma dos algarismos de $33N$ é $7k$. Logo, o menor N procurado satisfaz $33 \cdot N = 777.777$, o que nos dá $N = 23.569$. A soma dos algarismos de N é $2 + 3 + 5 + 6 + 9 = 25$.

02. A expressão $x^2 - (r + s)x + rs$ pode ser escrita como $(x - r)(x - s)$. Logo, devemos ter $(r - x)(x - s) = 2010$.

Fazendo $r - x = a$ e $x - s = b$, a e b com o mesmo sinal, devemos encontrar $a + b = r - s$ sabendo que a e b são inteiros positivos tais que $a \cdot b = 2010$. O número de pares $\{a, b\}$ que satisfazem esta equação é igual a oito, sendo $\{a, b\} = \{1, 2010\}$, $\{2, 1005\}$, $\{3, 670\}$, $\{5, 402\}$, $\{6, 335\}$, $\{10, 201\}$, $\{15, 134\}$, $\{30, 67\}$.

03. Seja O o ponto de interseção entre as retas AB e CD. Veja que os triângulos ODA e OBC são semelhantes, pois $\angle OAD = 180° - \angle DAB = \angle BCA$. Logo, podemos igualar a razão de semelhança à razão entre os raios das circunferências inscritas, bem como das ex-inscritas, obtendo:

$$\frac{8}{R} = \frac{R}{18} \Leftrightarrow R^2 = 144 \Leftrightarrow R = 12.$$

04. Em primeiro lugar, escolhemos a coluna que conterá o **corte.** Isso pode ser feito de 4 modos. Em seguida, escolhemos a cor das casas do corte, o que pode ser feito de 3 modos. Ficamos, então, com três colunas restantes para preencher. Preencheremos primeiramente as casas da primeira linha. Temos 3 modos de colorirmos cada casa da primeira linha, ou seja, 3^3 modos. Finalmente, resta-nos colorir as casas da segunda linha, o que pode ser feito de 2^3 modos, já que as cores das casas dessas colunas devem ser diferentes das cores das casas imediatamente superiores. O total de colorações é $4 \cdot 3 \cdot 3^3 \cdot 2^3 = 2592$.

05. Em primeiro lugar, veja que cada termo do produto é do tipo $\dfrac{(k+1)^4 + (k+1)^2 + 1}{k^4 + k^2 + 1}$. Além disso, podemos escrever

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$$

Assim, ficamos com

$\dfrac{(k+1)^4 + (k+1)^2 + 1}{k^4 + k^2 + 1} = \dfrac{[(k+1)^2 - (k+1) + 1].[(k+1)^2 + (k+1) + 1]}{(k^2 - k + 1)(k^2 + k + 1)}$. Agora, veja que $(k + 1)^2 - (k + 1) + 1 = k^2 + k + 1$ e $k^2 - k + 1 = (k - 1)^2 + (k - 1) + 1$. Logo, a última expressão fica

$$\frac{(k+1)^4 + (k+1)^2 + 1}{k^4 + k^2 + 1} = \frac{(k+1)^2 + (k+1) + 1}{(k-1)^2 + (k-1) + 1}.$$

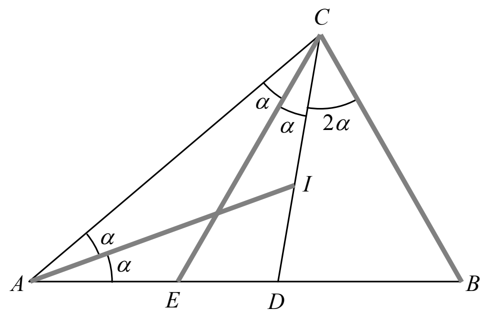
Logo, o produto pedido é igual a

$$\frac{2^2 + 2 + 1}{0^2 + 0 + 1} \cdot \frac{4^2 + 4 + 1}{2^2 + 2 + 1} \cdot \frac{6^2 + 6 + 1}{4^2 + 4 + 1} \cdot \ldots \cdot \frac{32^2 + 32 + 1}{30^2 + 30 + 1} = 32^2 + 32 + 1 = 1057 .$$

SOLUÇÕES NÍVEL 3 – SEGUNDA FASE – PARTE B

PROBLEMA 1:

Seja $\alpha = m(I\hat{A}C)$. Então $m(I\hat{C}A) = 2\alpha$. Prolongue a reta CI até encontrar o lado AB em D. Como $m(C\hat{A}D) = 2m(I\hat{A}C) = 2\alpha$, o triângulo ACD é isósceles e, portanto, suas bissetrizes AI e CE são congruentes.



Logo, sendo $m(C\hat{E}B) = \alpha + 2\alpha = 3\alpha = m(E\hat{C}B)$ e $CE = AI = BC$, o triângulo BCE é equilátero. Assim, $m(A\hat{B}C) = 60^\circ$.

Outra solução: Considere a mesma figura acima. Aplicando a lei dos senos nos triângulos ACI e ABC, obtemos

$$\frac{AC}{\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha - 2\alpha)} = \frac{AI}{\operatorname{sen} 2\alpha} \Leftrightarrow \frac{AC}{AI} = \frac{\operatorname{sen} 3\alpha}{\operatorname{sen} 2\alpha}$$

$$\text{e} \quad \frac{AC}{\operatorname{sen}(180^\circ - 2\alpha - 4\alpha)} = \frac{BC}{\operatorname{sen} 2\alpha} \Leftrightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{\operatorname{sen} 6\alpha}{\operatorname{sen} 2\alpha}$$

Como $AI = BC$ e $0 < 3\alpha < 6\alpha < 180^\circ$,

$$\operatorname{sen} 3\alpha = \operatorname{sen} 6\alpha \Leftrightarrow 3\alpha + 6\alpha = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha = 20^\circ. \quad \text{Logo} \quad m(A\hat{B}C) = 180^\circ - 6\alpha = 60^\circ.$$

PROBLEMA 2:

Note que Diamantino pode jogar futebol no máximo 5 vezes; caso contrário ele necessariamente joga dois dias seguidos. Suponha que ele joga k dias. Então os k dias em que ele joga devem ser imediatamente seguidos por dias em que ele não joga. Assim, acrescentando um dia ao período, podemos dividir os 11 dias em k blocos de dois dias e $11 - 2k$ blocos de um dia. Podemos permutar os $k + 11 - 2k = 11 - k$ blocos de $\frac{(11-k)!}{k!(11-2k)!} = \binom{11-k}{k}$ maneiras.

Assim, o total de maneiras de Diamantino escolher os dias em que vai jogar é

$$\binom{11-0}{0}+\binom{11-1}{1}+\binom{11-2}{2}+\binom{11-3}{3}+\binom{11-4}{4}+\binom{11-5}{5}=1+10+36+56+35+6=144.$$

Outra solução:

Seja a_n o número de maneiras de Diamantino escolher os dias em que vai jogar entre n dias. Se ele jogar no dia n ele não pode ter jogado no dia $n - 1$, mas não há restrições aos demais $n - 2$ dias; assim, nesse caso há a_{n-2} maneiras de escolher os dias em que vai jogar; se ele não jogar no dia n não há restrições aos demais $n - 1$ dias, então nesse caso há a_{n-1} maneiras de escolher os dias.

Assim, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, com $a_0 = 1$ (a única opção é não jogar) e $a_1 = 2$ (ele joga ou não no único dia). Dessa forma, podemos encontrar os valores de a_n a partir dos anteriores:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Logo Diamantino pode escolher os dias de 144 maneiras.

Comentários:

- Temos que $a_n = F_{n+2}$, em que F_n é a famosa sequência de Fibonacci (clique no link para saber algumas de suas muitas propriedades!)
- Comparando e generalizando as duas soluções você pode obter a identidade

  $$F_{n+1} = \binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\binom{n-3}{3}+\cdots$$

  que soma as outras diagonais do triângulo de Pascal.

PROBLEMA 3:
Observando que $(1 + x)(1 + y)(1 + z) = 1 + x + y + z + xy + yz + zx + xyz$,

$$\begin{cases} x+y+z=77 \\ xy+yz+zx+xyz=946 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=77 \\ 1+x+y+z+xy+yz+zx+xyz=1024 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1+x)+(1+y)+(1+z)=80 \\ (1+x)(1+y)(1+z)=1024=2^{10} \end{cases}$$

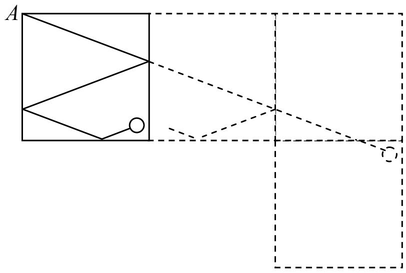
Como x, y e z são inteiros não negativos, $1 + x$, $1 + y$ e $1 + z$ são potências de 2.

Considerando que $80 = 2^6 + 2^4 > 3\cdot 2^4$, $80 < 2^7$ e $x \le y \le z$, temos $2^4 < 1 + z < 2^7$, ou seja, $1 + z = 2^5 = 32$ ou $1 + z = 2^6 = 64$.
Se $1 + z = 32$, temos $1 + x + 1 + y = 48$ e $(1 + x)(1 + y) = 2^5 = 32$. Mas, sendo $1 + x$ e $1 + y$ potências de 2 com soma par, temos $1 + x \ge 2$ e, portanto, $1 + y \le 16$.

Então $1 + x \le 16$ e $1 + x + 1 + y \le 32 < 48$, e não há soluções nesse caso. Se $1 + z = 64$, temos $1 + x + 1 + y = 16$ e $(1 + x)(1 + y) = 2^4 = 16$.

Desse modo, $1 + x$ e $1 + y$ são soluções da equação do segundo grau $t^2 - 16t + 16 = 0$, que não tem soluções inteiras. Logo não há soluções.

PROBLEMA 4:
Como a bola sofre reflexão perfeita, ao refletir a mesa em relação a cada lado em que a bola bate obtém-se uma linha reta. Repetindo as reflexões obtemos a seguinte figura, em que a trajetória da bola é reta:



Assim, o problema é equivalente a encontrar uma trajetória em um retângulo de dimensões inteiras m e n, dividido em mn quadradinhos unitários, que começa em um vértice, termina no vértice oposto e corte os lados dos quadradinhos unitários 2010 vezes, sem passar por nenhum dos vértices internos dos quadrados unitários (pois se passasse, a bola chegaria a um vértice do quadrado antes de 2010 rebatidas nos lados).

Como a bola deve atravessar $m - 1$ quadrados em um sentido e $n - 1$ no outro, $m - 1 + n - 1 = 2010 \Leftrightarrow m + n = 2012$; como a bola não passa por vértices do quadrado unitário, $\text{mdc}(m, n) = 1 \Leftrightarrow \text{mdc}(m, m + n) = 1 \Leftrightarrow \text{mdc}(m, 2012) = 1$. Assim, o número pedido é a quantidade de números coprimos com 2012 menores do que 2012, que é $\phi(2012) = \phi(2^2 \cdot 503) = 2012\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{503}\right) = 1004$.

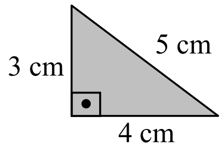
XXXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e soluções da Terceira Fase

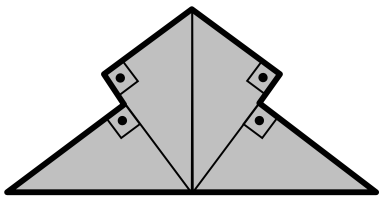
TERCEIRA FASE – NÍVEL 1

PROBLEMA 1

Esmeralda tem muitos triângulos retângulos iguais aos da figura.



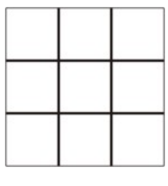
a) Fazendo coincidir partes dos lados, sem sobrepor triângulos, Esmeralda montou a figura a seguir. Qual é a área e qual é o perímetro dessa figura?



b) Usando o mesmo processo, Esmeralda montou o menor quadrado possível com lado de medida inteira. Mostre, através de uma figura, como Esmeralda pode fazer isso.

PROBLEMA 2

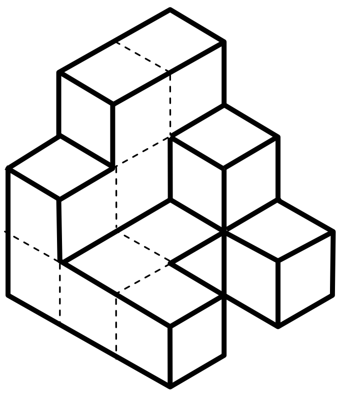
As casas de um tabuleiro 3×3 são numeradas de 1 a 9, cada número sendo utilizado exatamente uma vez. Em cada linha horizontal, pintamos de vermelho a casa com o maior número e, de verde, a casa com o menor número. Seja A o menor dos números das casas vermelhas e B o maior dos números das casas verdes.

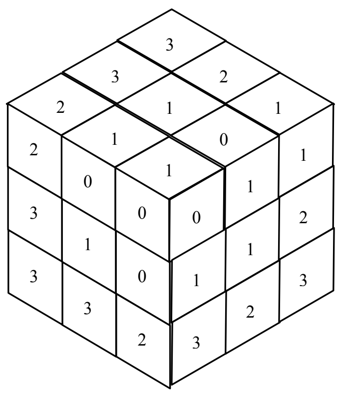


a) Mostre uma maneira de preencher o tabuleiro de forma que $A - B = 4$.
b) Mostre uma maneira de preencher o tabuleiro de forma que $A - B = -3$.
c) É possível obter $A = 4$ e $B = 3$? Não se esqueça de justificar a sua resposta.

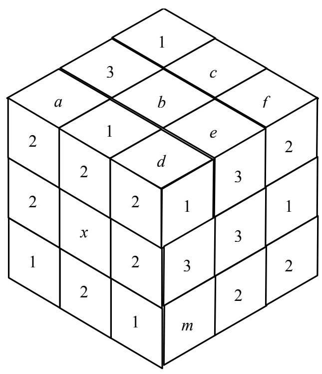
PROBLEMA 3

Dado um sólido formado por cubos de 1 cm de aresta, como mostra a figura 1, podemos indicar a quantidade de cubos em cada direção, como mostra a figura 2.





Esmeraldino montou um sólido com cubos de 1 cm de aresta e fez uma figura similar à figura 2.



Encontre os valores de a, b, c, d, e, f, x e m.

PROBLEMA 4

Dizemos que um número inteiro positivo n é *abestado* se ao lermos da direita para esquerda obtivermos um inteiro maior que n. Por exemplo, 2009 é abestado porque 9002 é maior que 2009, por outro lado, 2010 não é abestado pois 0102, que é o número 102, é menor que 2010 e 3443 não é abestado pois quando lido da direita para esquerda é exatamente igual ao original. Quantos inteiros positivos de quatro algarismos são abestados?

PROBLEMA 5

a) Exiba um número inteiro positivo menor ou igual a 1000 com pelo menos 20 divisores positivos.

b) Existe um número inteiro positivo menor ou igual a 11000 com pelo menos 200 divisores positivos? Não se esqueça de justificar a sua resposta.

TERCEIRA FASE – NÍVEL 2

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Dizemos que um número inteiro positivo n é *abestado* se ao lermos da direita para esquerda obtivermos um inteiro maior que n. Por exemplo, 2009 é abestado porque 9002 é maior que 2009, por outro lado, 2010 não é abestado pois 0102, que é o número 102, é menor que 2010 e 3443 não é abestado pois quando lido da direita para esquerda é exatamente igual ao original. Quantos inteiros positivos de quatro algarismos são abestados?

PROBLEMA 2

Seja $ABCD$ um paralelogramo e Γ a circunferência circunscrita ao triângulo ABD. Se E e F são as interseções de Γ com as retas BC e CD respectivamente, prove que o circuncentro do triângulo CEF está sobre Γ.

PROBLEMA 3

Arnaldo e Bernaldo participam do seguinte jogo em um tabuleiro $m \times n$, m, $n \geq 2$. Arnaldo começa escolhendo uma casinha e colocando um cavalo na casinha escolhida; em seguida, Bernaldo e Arnaldo movem alternadamente o cavalo, começando por Bernaldo, com a restrição de que o cavalo não pode cair em casinhas que já foram visitadas. Perde quem não poder mover o cavalo. Determinar, em função de m e n, qual jogador tem uma estratégia para ganhar o jogo, não importando os movimentos do outro jogador e mostrar como ele deve jogar para ganhar.

Observação: Cada movimento de um cavalo consiste em ir duas casas na vertical ou na horizontal e, em seguida, uma casa na direção perpendicular.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4
Sejam a, b e c reais tais que $a \neq b$ e $a^2(b + c) = b^2(c + a) = 2010$. Calcule $c^2(a + b)$.

PROBLEMA 5
As diagonais de um quadrilátero inscritível $ABCD$ se intersectam em O. Os círculos circunscritos aos triângulos AOB e COD intersectam as retas BC e AD, pela segunda vez, nos pontos M, N, P e Q. Prove que o quadrilátero $MNPQ$ está inscrito em um círculo de centro O.

PROBLEMA 6
Os três lados e a área de um triângulo são números inteiros. Qual é o menor valor da área desse triângulo?

TERCEIRA FASE – NÍVEL 3

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1
Encontre todas as funções f do conjunto dos reais nos conjuntos dos reais tais que

$$f(a + b) = f(ab)$$

para todos a, b irracionais.

PROBLEMA 2
Seja $P(x)$ um polinômio com coeficientes reais. Prove que existem inteiros positivos n e k tais que k tem n dígitos e mais de $P(n)$ divisores positivos.

PROBLEMA 3
Qual é a maior sombra que um cubo sólido de aresta 1 pode ter, no sol a pino?
Observação: Entende-se "maior sombra de uma figura no sol a pino" como a maior área possível para a projeção ortogonal da figura sobre um plano.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4
Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e M e N os pontos médios dos lados CD e AD, respectivamente. As retas perpendiculares a AB passando por M e a BC

passando por N cortam-se no ponto P. Prove que P pertence à diagonal BD se, e somente se, as diagonais AC e BD são perpendiculares.

PROBLEMA 5
Determine todos os valores de n para os quais existe um conjunto S de n pontos, sem que haja três deles colineares, com a seguinte propriedade: é possível pintar todos os pontos de S de modo que todos os ângulos determinados por três pontos de S, todos da mesma cor ou de três cores diferentes, não sejam obtusos. A quantidade de cores disponíveis é ilimitada.

PROBLEMA 6
Encontre todos os pares (a, b) de inteiros positivos tais que $3^a = 2b^2 + 1$.

SOLUÇÕES DA TERCEIRA FASE – NÍVEL 1

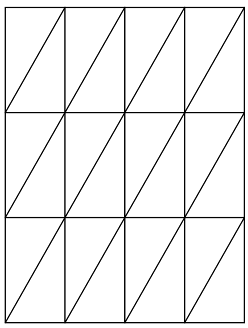
PROBLEMA 1: SOLUÇÃO DE HELENA VERONIQUE RIOS (SÃO CARLOS – SP)
a) Perímetro

$3+3+4+4+5+5+(4-3)+(4-3)=26.$
O perímetro da figura é 26cm.

Área de um triângulo:
$\frac{b\cdot h}{2} \to \frac{4\cdot 3}{2} = \frac{12}{2} = 6\text{cm}^2$
Cada triângulo tem 6cm^2 de área.
Se na figura temos 4 desses triângulos, a área da figura é $4\cdot 6$, ou seja, 24cm^2.

b) 6cm^2 – área de cada triângulo
Qual o menor múltiplo de 6 que é um quadrado perfeito? 36 $(6\cdot 6)$
O quadrado deverá ter 36cm^2 e 6cm de lado, se possível.
Este quadrado, porém, é impossível de ser formado por causa da forma do triângulo. Teriam de ter dois lados medindo 3cm em cada lado do quadrado, o que seria impossível já que precisariam de 8 lados de 3cm sendo que só tem 6. $(4+3\neq 6; 4+5\neq 6; 5+3\neq 6)$
O próximo menor quadrado possível de ser feito com formas de 6cm^2 é o de lado 12, cuja área é $12\times 12\left(144\text{cm}^2\right)$.
36cm^2 – lado 6,

49cm^2 – lado 7,
64cm^2 – lado 8,
81cm^2 – lado 9,
100cm^2 – lado 10,
121cm^2 – lado 11,
144cm^2 – lado 12; 49, 64, 81, 100 e 121 não são divisíveis por 6 (área do triângulo). 144 é divisível por 6 $(6 \cdot 24 = 144)$.



Quadrado de lado 12cm, área 144cm2 com 24 triângulos retângulos de lados 3, 4 e 5 cm.

PROBLEMA 2: SOLUÇÃO DE LUCCA MORAIS DE ARRUDA SIAUDZIONIS (FORTALEZA – CE)

a)

Verde **1**	**5**	**Vermelho** **7**
Verde **2**	**4**	**Vermelho** **8**
Verde **3**	**6**	**Vermelho** **9**

$A = 7$
$B = 3$
$A - B = 4$

b)

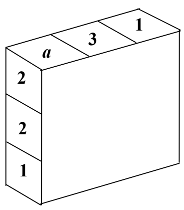
Verde **1**	**2**	Vermelho **3**
Verde **4**	**5**	Vermelho **7**
Verde **6**	**8**	Vermelho **9**

$A = 3$
$B = 6$
$A - B = -3$

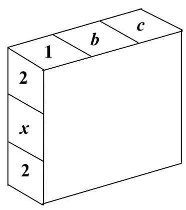
c) Para a ser igual a 4 os dois números que estarão juntos com ele na fileira devem ser $(1,2);(2,3)$ ou $(1,3)$. Porém o 3 não pode estar junto com ele na fileira, senão ele não seria pintado de verde. Então uma fileira horizontal é: 1, 2, 4. Porém, para que o 3 seja o *B*, as outras duas casas verdes teriam que ser 1 e 2. Porém, 1 e 2 estão na mesma fileira, então casas verdes são $(1,3)$, já que o 2 não é verde, a terceira casa verde é um número ≥ 4, ocasionando o fato de $B \neq 3$. Portanto, não é possível.

PROBLEMA 3: SOLUÇÃO DE VICTÓRIA MOREIRA REIS COGO (TERESINA – PI)

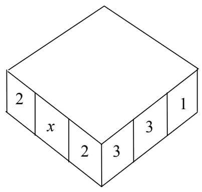
Nesse cubo, podemos formar expressões a partir das placas $3 \times 3 \times 1$ e a partir delas, encontramos o resultado. Veja:



$a + 3 + 1 = 2 + 2 + 1$
$a = 5 - 4$
$a = 1$

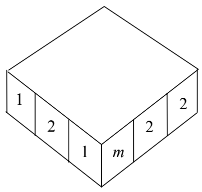


$1 + b + c = 2 + x + 2$
$1 + b + c = 2 + 3 + 2$
$b + c = 7 - 1$
$b + c = 6$

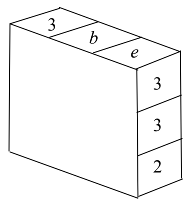


$2 + 2 + x = 3 + 3 + 1$
$x = 7 - 4$
$x = 3$

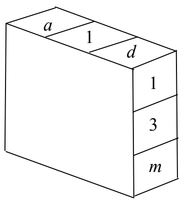
Como os resultados só podem ser de 0 a 3, e a única soma que dá 6 é 3 + 3, então: $b = 3$ e $c = 3$



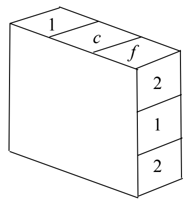
$1 + 2 + 1 = m + 2 + 2$
$m = 4 - 4$
$m = 0$



$3 + b + e = 3 + 3 + 2$
$3 + 3 + e = 3 + 3 + 2$
$e = 8 - 6$
$e = 2$



$a + 1 + d = 1 + 3 + m$
$1 + 1 + d = 1 + 3 + 0$
$d = 4 - 2$
$d = 2$



$1 + c + f = 2 + 1 + 2$
$1 + 3 + f = 5$
$f = 5 - 4$
$f = 1$

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DE LUCCA MORAIS DE ARRUDA SIAUDZIONIS (FORTALEZA – CE)

Chamamos o primeiro algarismo de A, o segundo de B o terceiro de C e o quarto de D.

Testamos os casos:

1º. Caso: o último algarismo é maior que o primeiro.

Se $A = 1$, temos: $1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 8 = 800$
Se $A = 2$, temos: $1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 7 = 700$
Se $A = 3$, temos: $1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 6 = 600$
Se $A = 4$, temos: $1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 500$
Se $A = 5$, temos: $1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 4 = 400$
Se $A = 6$, temos: $1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 3 = 300$
Se $A = 7$, temos: $1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 200$
Se $A = 8$, temos: $1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 = 100$

Total de 3600 casos.

2º. Caso: $A = D,\ \ C > B.$
Se B = 0, Temos: $9\cdot 1\cdot 9\cdot 1 = 81$
Se B = 1, Temos: $9\cdot 1\cdot 8\cdot 1 = 72$
Se B = 2, Temos: $9\cdot 1\cdot 7\cdot 1 = 63$
Se B = 3, Temos: $9\cdot 1\cdot 6\cdot 1 = 54$
Se B = 4, Temos: $9\cdot 1\cdot 5\cdot 1 = 45$
Se B = 5, Temos: $9\cdot 1\cdot 4\cdot 1 = 36$
Se B = 6, Temos: $9\cdot 1\cdot 3\cdot 1 = 27$
Se B = 7, Temos: $9\cdot 1\cdot 2\cdot 1 = 18$
Se B = 8, Temos: $9\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 9$

Total de 405 casos.
Resposta final: 4005 números.

PROBLEMA 5: SOLUÇÃO DA BANCA

a) Por exemplo, $900 = 2^2\cdot 3^2\cdot 5^2,$ que tem $(2+1)\cdot(2+1)\cdot(2+1) = 27$ divisores positivos.

b) Não, não existe. Seja n um número com pelo menos 200 divisores. Se o i-ésimo menor divisor é d, então o i-ésimo maior divisor é $\frac{n}{d}$. Seja m o centésimo menor divisor. Temos $m \ge 100$ e $\frac{n}{m} > m,$ donde $n > m^2 \ge 10000.$ Chegamos perto, mas isso ainda não resolve o problema. Consideremos o 98º., o 99º. e o 100º. menores divisores de n, que chamaremos de k, l, e m. Note que, se $m \ge 105,$ teremos como antes $\frac{n}{m} > m,$ donde $n > m^2 \ge 105^2 = 11025 > 11000.$

Podemos supor então que $98 \le k < l < m \le 104.$ Como para quaisquer inteiros positivos distintos a, b temos $mdc(a,b) \le |b-a|$, e $mmc(a,b) = \dfrac{a\cdot b}{mdc(a,b)}$, concluímos que $n \ge mmc(k,l,m) = mmc(k, mmc(l,m)) =$

$$= \frac{k\cdot mmc(l,m)}{mdc(k, mmc(l,m))} \ge \frac{k\cdot mmc(l,m)}{mdc(k,l)\cdot mdc(k,m)} =$$

$$= \frac{klm}{mdc(l,m)mdc(k,l)mdc(k,m)} \ge \frac{klm}{(m-l)(l-k)(m-k)} \ge \frac{98\cdot 99\cdot 100}{(m-l)(l-k)(m-k)}.$$

Como $(m-l)+(l-k)=m-k\le 104-98=6,$ temos $(m-l)(l-k)\le 3\cdot 3=9$ e $(m-l)(l-k)(m-k)\le 9\cdot 6=54,$ donde $n\ge \dfrac{98\cdot 99\cdot 100}{54}>11000.$

SOLUÇÕES DA TERCEIRA FASE – NÍVEL 2

PROBLEMA 1: SOLUÇÃO DE LIARA GUINSBERG (SÃO PAULO – SP)

Considere o número da forma *ABCD*. Temos 3 possibilidades:

- $A>D\Rightarrow$ o número não é abestado.
- $A=D\Rightarrow$ o número é abestado somente se $C>B$: calculando o número de casos temos:

$A=D$: 9 possibilidades, pois $A=D\ne 0,$ senão o número teria somente 3 algarismos.
$C>D$: 45 possibilidades, pois é o resultado do somatório $9+8+7+\ldots+1,$ já que *C* pode assumir o valor zero.

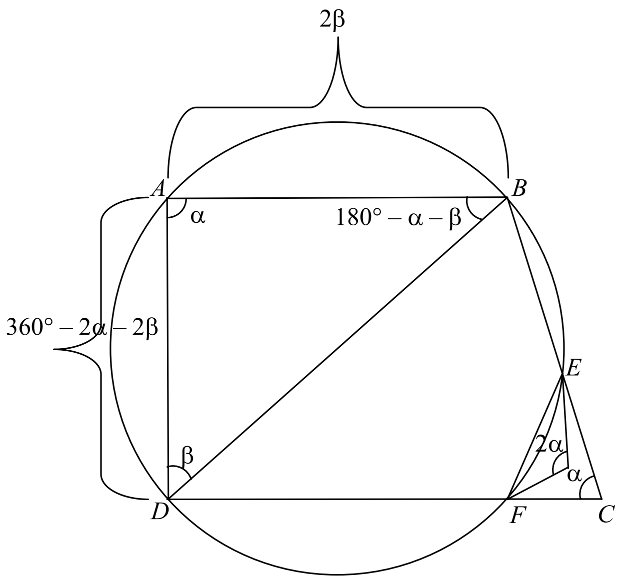
Totalizando $9\times 45=405$ números abestados.

- $A<D\Rightarrow$ o número é abestado, independentemente dos valores *B* e *C*. Novamente calculando o número de casos:

$A<D$: 36 possibilidades, pois é o somatório de $8+7+6+\ldots+1,$ já que *A* não pode assumir o valor zero.
B e C : 100 possibilidades, já que *B* pode assumir 10 valores diferentes, assim como *C*.
Total: $36\times 100=3600$ números abestados.
Finalizando, teremos 405 + 3600 = 4005 números abestados de quatro algarismos.

PROBLEMA 2: SOLUÇÃO DE PEDRO MORAIS DE ARRUDA SIAUDZIONIS (FORTALEZA – CE)

Seja $B\hat{A}D=\alpha$, logo $B\hat{C}D=\alpha,$ pois em um paralelogramo os ângulos opostos são iguais.
Seja $B\hat{D}A=\beta.$ Assim $A\hat{B}D=180°-\alpha-\beta.$ Veja que o arco $\overset{\frown}{AB}=2B\hat{D}A=2\beta$ e $\overset{\frown}{AD}=2A\hat{B}D\Rightarrow \overset{\frown}{AD}=360°-2\alpha-2\beta.$



Note que $B\hat{C}D = \dfrac{\overset{\frown}{BAD} - \overset{\frown}{EF}}{2} \Rightarrow 2\alpha = 360° - 2\alpha - \overset{\frown}{EF} \Rightarrow \overset{\frown}{EF} = 360° - 4\alpha$

Com isso $\overset{\frown}{EBAF} = 4\alpha$.

Seja O o circuncentro do ΔFCE. Sabemos que $F\hat{O}E = 2F\hat{C}E \Rightarrow F\hat{O}E = 2\alpha$.

Como $\dfrac{\overset{\frown}{EBAF}}{2} = 2\alpha \Rightarrow F\hat{O}E = \dfrac{\overset{\frown}{EBAF}}{2} \Rightarrow O \in \Gamma,$ pois $F\hat{O}E$ é ângulo inscrito.

PROBLEMA 3: SOLUÇÃO DA BANCA

Chamaremos Arnaldo de A e Bernaldo de B. Suponha, sem perda de generalidade, $m \le n$. Vamos mostrar que para $m = 2$, A tem estratégia vencedora se e somente se n não é múltiplo de 4; para $m \ge 3$, A tem estratégia vencedora se e somente se m e n são ímpares.

Estudemos o caso $m = 2$. Se 4 não divide n, A pode vencer colocando o cavalo na primeira coluna se $n = 4k + 1$ e na segunda coluna se $n = 4k + r$, para $r = 2$ ou $r = 3$. O cavalo deve ser movido sempre duas colunas à direita em cada jogada, permitindo $2k$ jogadas a mais.

Considere agora o caso $n = 4k$. Divida o tabuleiro em tabuleiros 2×4, e forme pares de casas de modo que é possível mover o cavalo entre casas do mesmo par:

1	2	3	4
3	4	1	2

Como todo o tabuleiro está dividido em pares, B consegue jogar, não importando onde A coloque o cavalo: basta mover o cavalo para a outra casa do par. Quando A jogar, colocará o cavalo numa casa de outro par, e B repete a estratégia. Deste modo, se $n = 4k$ o jogador B tem estratégia ganadora.

Isto termina o caso $m = 2$. O caso $m \geq 3$ segue de modo semelhante, dividindo o tabuleiro em vários tabuleiros menores. Considere as seguintes maneiras de se formar pares, além da descrita anteriormente:

1	2	3	4
3	6	1	5
2	5	4	6

1	2	3	4	5	6
3	4	1	7	8	9
2	7	8	9	6	5

1	2	3
4	*A*	1
2	3	4

1	2	3	4	5
3	4	6	*A*	7
2	1	7	5	6

Juntando esses tabuleiros se prova que B tem estratégia vencedora para tabuleiros $3 \times n$, n par e A tem estratégia vencedora para tabuleiros $3 \times n$, n ímpar: divida o tabuleiro num 3×3 ou 3×5 e tabuleiros 3×4; basta colocar o cavalo na casa marcada com A e seguir a mesma estratégia de B.

Para verificar o caso $m = 4$, basta juntar tabuleiros 4×2 se n é par e um tabuleiro 4×3 e vários tabuleiros 4×2 se n é ímpar. Isso também prova que se A ou B tem estratégia vencedora para um tabuleiro $m \times n$ então tem estratégia vencedora também para tabuleiros $(m + 4) \times n$, $m \geq 3$. Então basta resolver o problema para $m \in \{3,4,5,6\}$.
Esses tabuleiros resolvem o caso $m = 5$:

1	2	3	4	5	6
3	4	1	7	8	9
2	10	11	9	6	5
12	13	14	15	7	8
10	11	12	13	14	15

1	2	3	4	5
3	4	5	6	7
2	1	10	8	9
11	*A*	12	7	6
12	10	11	9	8

Note que B tem estratégia vencedora para o tabuleiro 5×4 e A tem estratégia vencedora para o tabuleiro 5×3. Então, para o caso $5 \times n$, n par, juntamos tabuleiros 5×4 se n é múltiplo de 4 e um tabuleiro 5×6 e tabuleiros 5×4 se n é na forma $4k + 2$; se n é ímpar, juntamos vários tabuleiros 5×4 ao tabuleiro 5×3 ou 5×5, se $n = 4k + 3$ ou $n = 4k + 1$, respectivamente. O caso $6 \times n$ segue diretamente do caso $3 \times n$ se n é par (basta juntar dois tabuleiros $3 \times n$) e juntando tabuleiros 6×4 a um tabuleiro 6×3 ou 6×5, se $n = 4k + 3$ ou $n = 4k + 1$, respectivamente. Com isso, todos os casos estão cobertos.

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DE PAULO HENRIQUE OMENA DE FREITAS (SÃO PAULO – SP)

Vamos trabalhar com a equação:

$$\left| \begin{array}{l} a^2(b+c) = 2010 \\ b^2(c+a) = 2010 \end{array} \right. \quad a \neq b$$

Usando o método da subtração:

$$a^2(b+c) - b^2(c+a) = 0$$
$$\Leftrightarrow a^2b + a^2c - b^2c - b^2a = 0$$
$$\Leftrightarrow ab(a-b) + c(a^2 - b^2) = 0$$
$$\Leftrightarrow ab(a-b) + c(a+b)(a-b) = 0$$
$$\Leftrightarrow (a-b)(ab+ac+bc) = 0$$
$$\Leftrightarrow a = b \text{ ou } ab+ac+bc = 0.$$

Já que, do enunciado, $a \neq b,\ ab+ac+bc = 0.$

Colocando c em evidência:

$$c(a+b) = -ab$$
$$\Leftrightarrow c^2(a+b) = -abc\,.$$

Colocando a em evidência:

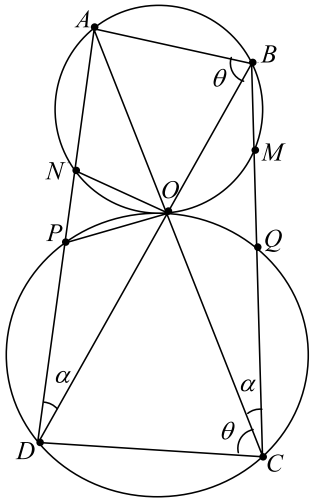
$$a(b+c) = -bc$$
$$\Leftrightarrow a^2(b+c) = -abc\,.$$

Assim, temos a igualdade:

$$c^2(a+b) = -abc = a^2(b+c) = 2010\,.$$

Finalmente, $c^2(a+b) = 2010.$

PROBLEMA 5: SOLUÇÃO DE FELLIPE SEBASTIAM S. P. PEREIRA (RIO DE JANEIRO – RJ)



Observe que como $ABCD$ é um quadrilátero inscritível temos que os ângulos ACB e BDA são iguais. Temos também que $OQCDP$ é inscritível, logo, como $A\hat{C}B$ e $B\widehat{D}A$ são iguais, segue que os arcos $\widehat{OQ}$ e $\widehat{OP}$ são iguais. Podemos concluir que os segmentos $\overline{OQ}$ e $\overline{OP}$ são iguais também. Analogamente, fazendo tudo com o quadrilátero $ANOMB$, chegamos à conclusão que $\overline{OM}$ e $\overline{ON}$ são iguais. Agora para provar que O é o centro da circunferência que passa pelos vértices do quadrilátero $MNQP$ (não sabemos ainda se ela existe), basta provarmos que $\overline{OP} = \overline{ON}$, pois assim teremos $\overline{OM} = \overline{ON} = \overline{OP} = \overline{OQ}$, concluindo assim que existe uma circunferência de centro O que passa pelos vértices do quadrilátero $MNQP$. Para provarmos isto façamos o seguinte: chamemos o ângulo $A\widehat{C}D$ de θ. Como o quadrilátero $ABCD$ é inscritível segue que $D\widehat{B}A = \theta$. Temos também que $O\widehat{P}N = \theta$, pois $O\widehat{P}D = 180° - \theta$ (pois o quadrilátero $OPDC$ é inscritível).

Temos também que $P\widehat{N}O = \theta$, pois $NOBA$ é inscritível. Logo os ângulos $O\widehat{N}P$ e $O\widehat{P}N$ são iguais, donde segue que $\overline{OM} = \overline{OP}$, c.q.d.

PROBLEMA 6: SOLUÇÃO DE TADEU PIRES DE MATOS BELFORT NETO (FORTALEZA – CE)

Sabemos pela fórmula de Heron que a área de um triângulo é:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p=\frac{a+b+c}{2}$$

$$S=\sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)}$$

$$S=\sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)}$$

$$16S^2=(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$$

sabemos que a,b,c , $S\in\mathbb{Z}^+$ e a,b e c são lados de um triângulo.

Podemos ver que $a+b+c$ é par. Caso contrário $a+b+c,(a+b+c)-2a,(a+b+c)-2c$ e $(a+b+c)-2b$ seriam ímpares e teriam o produto par, o que é claramente um absurdo.

O valor mínimo para essa soma é 4, mas no caso a única tripla de interiros positivos que têm essa soma é $(1,1,2)$. Mas desobedecem a desigualdade triangular: 1 + 1 não é maior que 2.

Essa soma também não pode ser 6. Porque nesse caso o produto teria um fator 3, mas como é um quadrado perfeito teria que ter dois ou mais fatores 3, Assim, $(b+c-a),(a+c-b)$ ou $(a+b-c)$ teriam esse fator 3. Mas eles são pares e menores que 6, logo não há como isso acontecer (absurdo!).

Se $a+b+c=8,$ nenhum dos outros fatores poderia ser 6, caso contrário teria que haver dois fatores iguais a 6. Sem perda de generalidade supomos que

$b+c-a=6$

$a+c-b=6$

$2c=12\Rightarrow c=6\rightarrow a+b=2\rightarrow c>a+b.$ Absurdo.

Assim, temos alguns casos a analisar, pois cada fator só pode ser 2 ou 4.

I) $\left.\begin{matrix}a+b-c=4\\ a+c-b=4\\ b+c-a=4\end{matrix}\right\rangle a+b+c=12$. Absurdo!

II) $\left.\begin{matrix}a+b-c=4\\ a+c-b=4\\ b+c-a=2\end{matrix}\right\rangle a+b+c=10$. Absurdo!

$$\text{III)}\quad \left.\begin{matrix} a+b+c=8 \\ a+b-c=4 \\ a+c-b=2 \\ b+c-a=2 \end{matrix}\right\rangle (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)=128\,.$$

128 não é da forma $16S^2$ com $S\in\mathbb{Z}^+$, Absurdo!

$$\text{IV)}\quad \left.\begin{matrix} a+b-c=2 \\ a+c-b=2 \\ b+c-a=2 \end{matrix}\right\rangle a+b+c=6\,.\ \text{Absurdo!}$$

Podemos ver que a soma não pode ser 10, por um argumento análogo ao do 6. Pois teria que haver outro fator 5, o que faria com que um dos fatores fosse 10, o que é um absurdo!

Já que para $a+b+c=12$ é possível, basta tornar a= 5, b= 4, c = 3.

Vale a desigualdade triangular e a área é dada por

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$p=6,\ a=5,\ b=4,\ c=3$

$S=\sqrt{6\cdot 1\cdot 2\cdot 3}$

$S=\sqrt{6^2}=6.$

Vamos provar que o valor mínimo de $(p-a)(p-b)(p-c)$ é 6, caso o produto $p(p-a)(p-b)(p-c)$ fosse menor que 36.

Supondo que não fosse, teríamos as seguintes possibilidades:

$$(p-a)(p-b)(p-c)=5\Rightarrow\frac{b+c-a}{2}=5,\quad \frac{a+b-c}{2}=1,\quad \frac{a+c-b}{2}=1\Rightarrow$$

$p=5+1+1=7$ e $p(p-a)(p-b)(p-c)=7\cdot 5=35,$ que não é quadrado perfeito. Absurdo!

$(p-a)(p-b)(p-c)=4$. Para o produto disso com p ser menor que 36 e quadrado perfeito, p seria 4 e já vimos anteriormente que isso é um absurdo.

$(p-a)(p-b)(p-c)=3$. Nesse caso p seria 3, para o produto ser menor que 36 e quadrado perfeito, mas nesse caso $a+b+c=6$ e já analisamos esse caso.

$$(p-a)(p-b)(p-c)=2\qquad \frac{a+b-c}{2}=1\qquad \frac{a+c-b}{2}=1\qquad \frac{b+c-a}{2}=2$$

$p=1+1+2=4,\ S=\sqrt{8}$. Absurdo!

Logo os valores de $(p-a)(p-b)(p-c)$ e p são mínimos e portanto o produto é mínimo. Assim, a área mínima é 6.

SOLUÇÕES DA TERCEIRA FASE – NÍVEL 3

PROBLEMA 1: SOLUÇÃO DE DAVI COELHO AMORIM (FORTALEZA – CE)

Temos que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $\boxed{f(a+b)=f(a\cdot b)}^{(1)}$ $,\forall a,b$ irracionais.

Logo, temos:

$f(a+b)=f(a\cdot b)=f((-a)\cdot(-b))=f(-a-b)\Rightarrow f(a+b)=f(-a-b).$

Lema: Todo número real pode ser representado como a soma de dois números irracionais.

1º. Caso: Número irracional.

Seja x um racional e α um irracional. Logo, sendo $\beta=x-\alpha,$ β é um irracional, pois se β for racional, $\alpha=x-\beta$ e α seria racional. Absurdo!

Logo, como $x=\alpha+(x-\alpha)=\alpha+\beta,$ todo racional pode ser escrito como a soma de dois irracionais.

2º. Caso: Número irracional

Seja x esse irracional. Vamos supor que para todo $0<\alpha<1$ irracional, $x-\alpha=\beta,$ onde β é racional. Logo temos:

$$\begin{cases} x-\alpha=\varphi \\ x-(1-\alpha)=\theta \end{cases}, \text{ onde } \varphi=\frac{p}{q} \text{ e } \theta=\frac{r}{s}, p,q,r,s\in\mathbb{Z}$$

Somando obtemos $2x-1=\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\Rightarrow x=\frac{ps+rq+sq}{2qs}\Rightarrow x$ é racional. Absurdo!

Logo, todo irracional pode ser escrito como a soma de dois irracionais.

Com o lema provado, temos que $\boxed{f(x)=f(-x),\forall x\in\mathbb{R}}^{(2)}$

Em (1), fazendo $a=-b,$ temos:

$f(0)=f(-b^2)\overset{(2)}{=}f(b^2).$ Seja $f(0)=k\Rightarrow$ $\boxed{f(b^2)=k,\forall b \text{ irracional.}}$

Logo, provamos que $\forall x\in\mathbb{R}^+$ tal que $\sqrt{x}\notin\mathbb{Q}, f(x)=k.$ Basta provarmos agora que os números $y\in\mathbb{R}^+$ tais que $\sqrt{y}\in\mathbb{Q}$ também satisfazem $f(y)=k.$ Porém, isso não é difícil de provar: seja y tal que $\sqrt{y}\in\mathbb{Q}$. Temos um $0<\theta<1$ irracional tal que $y=(y-\theta)+\theta\Rightarrow f(y)=f((y-\theta)\cdot\theta)$ e também

$y=(y+\theta)+(-\theta)\Rightarrow f(y)=f((y+\theta)(-\theta))$. Como, para todo x irracional, $f(x)=r,$ vamos provar que um dos números $(y-\theta)\cdot\theta$ e $(y+\theta)\cdot(-\theta)$ é irracional, fazendo assim com que todo número tenha imagem r. Vamos supor o contrário, ou seja, que os dois são racionais:

$$\begin{cases}(y-\theta)\theta=\dfrac{p}{q}\\[2ex](y+\theta)(-\theta)=\dfrac{r}{s}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y\theta-\theta^2=\dfrac{p}{q}\\[2ex]-y\theta-\theta^2=\dfrac{r}{s}\end{cases}\text{, onde } p,q,r,s\in\mathbb{Z}$$

$$2y\theta=\frac{p}{q}-\frac{r}{s}$$

Como $\sqrt{y}\in\mathbb{Q}\Rightarrow y\in\mathbb{Q}\Rightarrow\boxed{y=\dfrac{t}{u}}$, onde $t,u\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow\dfrac{2t}{u}\cdot\theta=\dfrac{ps-rq}{qs}\Rightarrow\theta=\dfrac{psu-rqu}{2qst}\Rightarrow\theta$ é racional. Absurdo!

Com isso, provamos que $\boxed{f(x)=k,\forall x\in\mathbb{R}}$, onde k é uma constante qualquer. Para qualquer k, essa função serve, de acordo com a questão, pois $f(a+b)=f(a\cdot b)\Leftrightarrow k=k$. OK!

PROBLEMA 2: SOLUÇÃO DE CARLOS HENRIQUE DE ANDRADE SILVA (FORTALEZA – CE)

Seja d = grau do polinômio p.

Agora vamos numerar os primos em ordem crescente, Logo $P_1=2,\ P_2=3,\ P_3=5,\ P_4=7,...$ Então seja b inteiro positivo tal que $10^{b-1}<P_{2d+2}<10^b$. Vamos definir k como sendo $k=P_1^a\cdot P_2^a...P_{2d+2}^a<\left(\left(10^b\right)^{2d+2}\right)^a$.

Logo $n\le ab\cdot(2d+2)$. Podemos supor que para x suficientemente grande $p(x+1)>p(x)$. Se isso não ocorre então p é constante ou $\lim\limits_{n\to\infty}p(n)=-\infty$, e então claramente $p(n)<d(k)$ se a é suficientemente grande, onde $d(k)=$ número de divisores positivos de k.

Então basta provarmos que $d(k)>p(ab(2d+2))$ para a suficientemente grande já que teremos $p(ab(2d+2))\ge p(n)$.

Então vamos às contas: $d(k)=(a+1)^{2d+2}$; e como o polinômio tem grau d então $p(x)<x^{d+1}$ para x suficientemente grande. Como no nosso problema

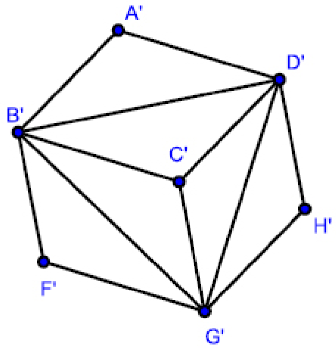
$x = ab \cdot (2d+2)$ com "a" variável então nosso "x" pode ser tão grande quanto quisermos. Então basta provar que:

$(a+1)^{2d+2} > (ab \cdot (2d+2))^{d+1} > p(n) \leftrightarrow (a+1)^2 > ab(2d+2)$. Como b, d são constantes então a única variável é "a" e como no lado direito "a" tem menor grau, então para "a" suficientemente grande a desigualdade é válida, mostrando que existem k, n que satisfazem a condição do enunciado.

PROBLEMA 3: SOLUÇÃO DA BANCA

Sejam $ABCD$ e $EFGH$ duas faces opostas, AE, BF, CG e DH sendo lados do cubo. Denotaremos por X' a projeção ortogonal do ponto X no plano. Note que $\{A,G\},\{B,H\},\{C,E\}$ e $\{D,F\}$ são pares de vértices opostos. Suponha, sem perda de generalidade, que A' pertence à fronteira da projeção do cubo. Então, considerando a simetria do cubo em relação ao seu centro, o simétrico G' de A' também pertence à fronteira. Dois dos três vértices vizinhos de A serão projetados em vértices vizinhos de A' na fronteira (a menos que, digamos, a face $AEHD$ seja projetada em um segmento, mas nesse caso podemos considerar um vértice degenerado nesse segmento).

Suponha, sem perda de generalidade que esses vizinhos são B' e D'. Então E' é interior à projeção. Novamente pela simetria, H' e F' pertencem à fronteira da projeção e C' pertence ao interior da projeção. Finalmente, como $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}$, a projeção do cubo é $A'D'H'G'F'B'$.



As faces $ABCD$, $BCGF$ e $CDHG$ são projetadas sobre paralelogramos (ou segmentos) $A'B'C'D'$, $B'C'G'F'$ e $C'D'H'G'$. Trace diagonais $B'D'$, $B'G'$ e $D'G'$. A área da projeção é portanto o dobro da área do triângulo BDG. Esse triângulo é equilátero de lado $\sqrt{2}$, e logo o máximo desejado é

$2\cdot\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}.$ Uma projeção ortogonal num plano paralelo ao plano BDG realiza a igualdade.

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DE GUSTAVO LISBÔA EMPINOTTI (FLORIANÓPOLIS – SC)

Na verdade a recíproca é verdadeira, mas a implicação direta nem sempre vale, como veremos a seguir.

$(\Leftarrow)$ Suponha $AC\perp BD.$

Então podemos tornar um sistema de coordenadas em que AC é o eixo x e BD o eixo y. Sejam $A = (a, 0)$, $B = (0, b)$, $C = (c, 0)$ e $D = (0, d)$. Claramente $abcd \neq 0.$

O coeficiente angular de PM é $\frac{a}{b}$ (pois $AC\perp BD$). Como $M=\left(\frac{c}{2},\frac{d}{2}\right)$, a equação da reta PM é $y-\frac{d}{2}=\frac{a}{b}\left(x-\frac{c}{2}\right).$ Analogamente, a equação de PN é $y-\frac{d}{2}=\frac{c}{b}\left(x-\frac{a}{2}\right).$ Como $P\left(x_p,y_p\right)=PM\cap PN,$ temos

$$a\left(x_p-\frac{c}{2}\right)=c\left(x_p-\frac{a}{2}\right)\to x_p\left(c-a\right)=0 \text{ e } a\neq c$$

$$\to x_p=0\to P\in BD \text{ (eixo } y\text{).}$$

$(\Rightarrow)$ Suponha $P\in BD.$

Então podemos tomar um sistema de coordenadas em que $P=\left(0,0\right),\ B=\left(0,b\right),\ D=\left(0,d\right).$ Sejam $A=\left(x_a,y_a\right)$ e $C=\left(x_c,y_c\right)$

$$\to M=\left(\frac{x_c}{2},\frac{y_c+d}{2}\right),\ N=\left(\frac{x_a}{2},\frac{y_a+d}{2}\right).$$

O coeficiente angular de PM é $\frac{y_c+d}{x_c}$ (claramente $x_c\neq 0$) e o de AB, $\frac{y_a-b}{x_a}$ (também temos $x_a\neq 0$).

$$PM\perp AB\Rightarrow\left(\frac{y_c+d}{x_c}\right)\cdot\left(\frac{y_a-b}{x_a}\right)=-1\to\left(y_c+d\right)\left(y_a-b\right)=-x_a\cdot x_c \quad (*)$$

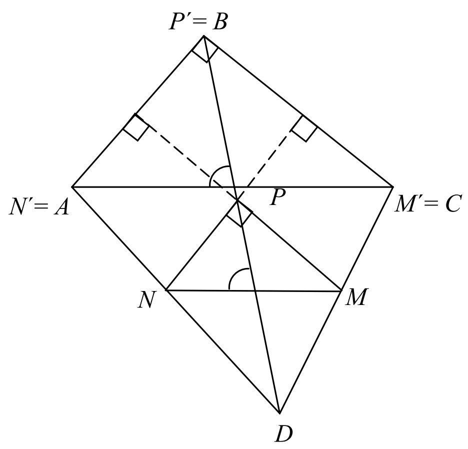
Analogamente, $PN\perp BC\to\left(y_a+d\right)\left(y_c-b\right)=-x_a\cdot x_c$

$\rightarrow (y_a + d)(y_c - b) = (y_c + d)(y_a - b) \leftrightarrow y_a \cdot y_c - b \cdot y_a + d \cdot y_c - bd = y_a \cdot y_c - by_c + d \cdot y_a - bd$
$\leftrightarrow y_a (b+d) = y_c (b+d) \leftrightarrow y_a = y_c$ ou $b + d = 0.$

Se $y_a = y_c$, AC é paralelo ao eixo *x* e, portanto, perpendicular a *BD*, que é o eixo *y*.

Se $b + d = 0,$ (*) vira $\left(\dfrac{y_c - b}{x_c}\right) \cdot \left(\dfrac{y_a - b}{x_a}\right) = -1,$ o que implica $BC \perp AB$ (pois $\dfrac{y_c - b}{x_c}$ e $\dfrac{y_a - b}{x_a}$ são, respectivamente, os coeficientes angulares de *BC* e *AB*), ou seja, $\angle ABC = 90°.$ Isso caracteriza todos os contra exemplos:

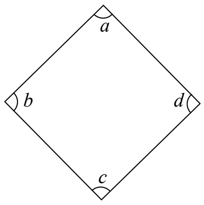
A partir de um triângulo ΔPNM retângulo em *P*, tome um ponto *D* dentro do ângulo $\angle NPM$ mas fora do triângulo $\Delta NPM,$ e tal que $\angle(DP, NM) \neq 90°.$ Aplique uma homotetia de centro em *D* e razão 2. Fazemos $N' = A,\ M' = C$ e $P' = B.$ Temos um quadrilátero *ABCD* convexo no qual M e o ponto médio de *CD; N* , o de *AD*; e *P*, o de *BD*. Como $PN /\!/ AB$ e $PM \perp PN,$ temos $PM \perp AB$ e da mesma forma $PN \perp BC.$ $\angle ABC = \angle NPM = 90°.$ Esse é o contraexemplo, pois pela escolha de $D,\ P \in BD$ mas *BD* não é perpendicular a *AC*.



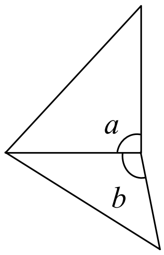
PROBLEMA 5: SOLUÇÃO DE ANDRÉ SARAIVA NOBRE DOS SANTOS (FORTALEZA – CE)

Se tivermos 4 pontos, todos da mesma cor ou todos de cores diferentes, teremos o seguinte:

1º. Caso: Eles formam um quadrilátero convexo:



$a + b + c + d = 360°$ logo, se eles forem diferentes, haverá um deles maior que 90° (pois se todos forem menores, a soma não daria 360°), logo, todos têm que ser de 90°, ou seja, $\boxed{\text{eles têm que formar um retângulo}}$.

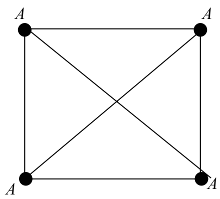


2º. Caso: Eles formam um quadrilátero côncavo:

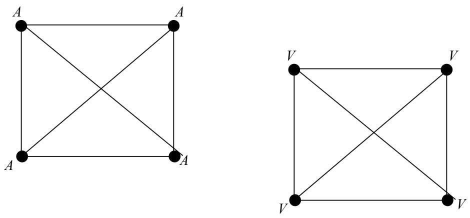
Como $a + b > 180°$, garanto que um deles é maior que 90°, logo, isso não pode acontecer.

Então, como 4 pontos de cores diferentes têm que formar um retângulo, não temos mais como ter 5 pontos de 5 cores diferentes nesse conjunto. Sendo assim, podemos ter 1, 2, 3 ou 4 cores:

1 cor: só podemos ter até 4 pontos, pois 3 deles só definem a posição do próximo, só que os 4 têm que formar um retângulo:
ex:

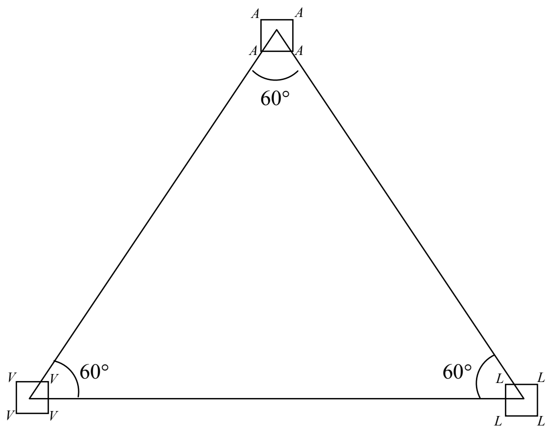


2 cores: podemos ter até 8 pontos, de cada cor 4:
ex:



3 cores: conseguimos uma configuração com até 12 pontos, basta eles ficarem muito afastados, cada retângulo acutângulo, pois assim, ao escolhermos 3 cores diferentes, os ângulos do triângulo vão ser aproximadamente os do triângulo acutângulo:

ex:



4 cores: já mostramos que só conseguimos 4 pontos: de fato, 3 pontos de cores diferentes determinam uma única posição possível para os pontos da outra cor, e logo há apenas um ponto de cada cor.

Logo, como checamos todos os casos, vimos que não conseguimos mais de 12 pontos e achamos um exemplo com 12, qualquer n menor também satisfaz, pois tirar pontos de uma configuração faz com que a restante também satisfaça.

Logo, n de 0 até 12 é solução, não existindo mais nenhuma.

PROBLEMA 6: SOLUÇÃO DA BANCA

As soluções são (1,1), (2,2) e (5,11).

Se a é par e maior que 2, a equação equivale a $(3^{a/2} - 1) \cdot (3^{a/2} + 1) = 2b^2$. Porém $\text{mcd}(3^{a/2} - 1, 3^{a/2} + 1) = \text{mcd}(3^{a/2} - 1, 2) = 2$ e se conclui que $3^{a/2} + 1 = 4u^2$ e $3^{a/2} - 1 = 2v^2$ ou $3^{a/2} + 1 = 2u^2$ e $3^{a/2} - 1 = 4v^2$.

No primeiro caso, $3^{a/2} = (2v - 1)(2v + 1)$, e como $\text{mcd}(2v - 1, 2v + 1) = \text{mcd}(2v - 1, 2) = 1$, $2v - 1 = 1 \Leftrightarrow v = 1$ e $a/2 = 1 \Leftrightarrow a = 2$ e portanto $b = 2$.

No segundo caso, $3^{a/2} = 4v^2 + 1 \Rightarrow 0 \equiv v^2 + 1 \pmod 3 \Leftrightarrow v^2 \equiv -1 \pmod 3$, o que é impossível.

Se a é ímpar, a equação é equivalente a $3 \cdot (3^{(a-1)/2})^2 - 2b^2 = 1$. Seja $c = 3^{(a-1)/2}$. Encontremos as soluções de $3c^2 - 2b^2 = 1$ (*).

Como $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 1 \Rightarrow (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2k+1}(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2k+1} = 1$

e

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2k+1} = c_k\sqrt{3} + b_k\sqrt{2} \quad \text{y} \quad (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2k+1} = c_k\sqrt{3} - b_k\sqrt{2} \quad (**)$$

(c_k, b_k) são soluções de (*), para $k \geq 0$ inteiro. Suponha que existe uma solução (α, β) distinta com $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. Então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2k-1} < \alpha\sqrt{3} + \beta\sqrt{2} < (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2k+1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}+\sqrt{2} < \frac{\alpha\sqrt{3}+\beta\sqrt{2}}{(5+2\sqrt{6})^{k-1}} < 9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}+\sqrt{2} < (\alpha\sqrt{3}+\beta\sqrt{2})(5-2\sqrt{6})^{k-1} < 9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}$$

É possível provar por indução que $(\alpha\sqrt{3}+\beta\sqrt{2})(5-2\sqrt{6})^{k-1} = \theta\sqrt{3} + \phi\sqrt{2}$, θ e ϕ ambos inteiros satisfazendo $3\theta^2 - 2\phi^2 = 1$. Além disso, $\theta\sqrt{3}+\phi\sqrt{2} > 1 > \frac{1}{\theta\sqrt{3}+\phi\sqrt{2}} = \theta\sqrt{3} - \phi\sqrt{2} > 0$, e portanto $\theta\sqrt{3} > \phi\sqrt{2} > 0$.

Portanto (θ, ϕ) é solução de (*), com $1 < \theta < 9$. Porém é possível verificar (testando) que não há soluções com $1 < \theta < 9$, contradição.

Para $k = 0$ temos $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2k+1} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$, o que nos dá a solução $(c, b) = (1,1)$ de (*), e, para $k = 1$, temos $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2k+1} = 9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}$, o que nos dá a solução

$(c, b) = (9, 11)$ de (*).

Suponha que $c > 9$, ou seja, $k > 1$. Por (**) e pelo teorema do binômio temos

$$c = \sum_{m=0}^{k} \binom{2k+1}{2m+1} \cdot 3^m \cdot 2^{k-m} = (2k+1)\cdot 2^k + \binom{2k+1}{3} \cdot 3 \cdot 2^{k-1} + \cdots \quad (***)$$

Logo 3 divide $2k + 1$. Seja 3^t a maior potência de 3 que divide $2k + 1$. Como $\binom{2k+1}{3}\cdot 3\cdot 2^{k-1} = (2k+1)\cdot k\cdot(2k-1)\cdot 2^{k-1}$, a maior potência de 3 que divide o segundo termo de (***) é também 3^t. Para $m > 1$, sendo 3^s a maior potência de 3 que divide $2m + 1$, o m-ésimo termo, $\binom{2k+1}{2m+1}\cdot 3^m\cdot 2^{k-m} = \frac{2k+1}{2m+1}\binom{2k}{2m}\cdot 3^m\cdot 2^{k-m}$ tem pelo menos $t + m - s$ fatores 3 (t de $2k + 1$, m de 3^m, subtraindo s de $2m + 1$).

Temos $m-s\ge 2$ para todo $m>1$. De fato, para $m = 2$ e $m = 3$ temos $s = 0$ e, para $m\ge 4, m-s\ge m-\lfloor log_3(2m+1)\rfloor\ge 2$ (isso segue da desigualdade $\frac{3^r-1}{2}\ge r+2, \forall r\ge 2,$ que pode ser facilmente provada por indução).

Então, como $k > 1$, todos os termos a partir do terceiro tem pelo menos $t + 2$ fatores 3, e

$$c = (2k+1)\cdot 2^k + (2k+1)\cdot k\cdot(2k-1)\cdot 2^{k-1} + 3^{t+2}\cdot N$$
$$\Leftrightarrow 3^{(a-1)/2} = (2k+1)\cdot 2^{k-1}\cdot[(2k+1)(k-1)+3] + 3^{t+2}\cdot N$$

Note que como 3 divide $2k + 1$ então também divide $(2k + 1)(k - 1) + 3$; além disso, 9 divide $(2k + 1)(k - 1)$, e portanto a maior potência de 3 que divide $(2k + 1)(k - 1) + 3$ é 3. Portanto a maior potência de 3 que divide $(2k+1)\cdot 2^{k-1}\cdot[(2k+1)(k-1)+3]$ é 3^{t+1} (t fatores de $2k+1$ e 1 de $(2k + 1)(k - 1) + 3$). Finalmente, $3^{(a-1)/2} = c = 3^{t+1}(1 + 3N)$, que não é possível pois $N > 0$.

Dessa forma, não há mais soluções.

XXXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e soluções da Primeira Fase – Nível Universitário

PROBLEMA 1:

Há muito tempo em uma galáxia muito distante, utilizavam-se como referência para viagens espaciais os pontos *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, vértices de um cubo de ares igual a um ano-luz tendo os quadrados *ABCD* e *EFGH* como faces e tendo os segmentos *AE*, *BF*, *CG* e *DH* como arestas. Uma nave espacial viaja com velocidade constante em trajetória retilínea de *B* para *C*. Outra nave viaja com velocidade constante igual ao triplo da velocidade da primeira, em trajetória retilínea de *A* para *G*. Sabendo que a primeira atinge o ponto *C* no mesmo instante em que a segunda atinge o ponto *G*, determine a menor distãncia entre as naves durante esse deslocamento.

PROBLEMA 2:

Quantos são os pares ordenados (*x*, *y*) com $x, y \in \{0,1,2,...,142\}$ tais que $5x^2 + 7y^2 - 1$ é múltiplo de 143?

PROBLEMA 3:

Dados os polinômios com coeficientes complexos em uma variável $f(x)$ e $h(x)$, prove que existe um polinômio $g(x)$ tal que $f(x) = g(h(x))$ se, e somente se, existe um polinômio com coeficientes complexos em duas variáveis $q(x,y)$ tal que $f(x) - f(y) = q(x,y)(h(x) - h(y))$.

PROBLEMA 4:

Seja *n* um inteiro positivo.

Seja A_n o subconjunto do plano definido por $1 \le x \le n, 0 \le y \le ln(x)$. Seja B_n o polígono convexo de vértices $(1,0) = (1,ln(1)), (2,ln(2)), (3,ln(3)), ..., (n,ln(n)), (n,0)$.

Seja $C_n = A_n - B_n$, o complemento de B_n em relação a A_n.

a) Calcule as áeas de A_n, B_n e C_n. Simplifique sua resposta.

b) Mostre que a área de C_n é menor que 1, para qualquer inteiro positivo *n*.

Obs: ln representa o logaritmo na base *e*.

PROBLEMA 5:
Suponha que temos um grafo com $n+1 \geq 4$ vértices e queremos pintar suas arestas com duas cores de forma que não haja duas arestas disjuntas da mesma cor. Mostre que há no máximo 2^n tais colorações.

Observações: Um grafo é formado por um conjunto de vértices e um conjunto de arestas, cada aresta unindo dois vértices distintos e cada para de vértices sendo unido por no máximo uma aresta. Arestas disjuntas são arestas que não têm vértices em comum.

PROBLEMA 6:
Cada um dos itens a seguir apresenta um valor diferente para a matriz *B*. Para cada um desses valores, determine quantas matrizes reais *A* existem tais que $A^3 - 3A = B$.

a) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

c) $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

SOLUÇÕES NÍVEL UNIVERSITÁRIO – PRIMEIRA FASE

PROBLEMA 1
Dando coordenadas, suponha sem perda de generalidade que
$A = (0,0,0),\ B = (1,0,0),\ C = (1,1,0),\ D = (0,1,0),$
$E = (0,0,1),\ F = (1,0,1),\ G = (1,1,1),\ H = (0,1,1).$
Se as posições (em função do tempo) das duas naves são $\alpha(t)$ e $\beta(t)$, respectivamente, se $t = 0$ é o instante em que $\alpha(t) = C$ e $\beta(t) = G$ e $t = -1$ é o instante em que $\alpha(t) = B$ temos
$\alpha(t) = (1,1,0) + t(0,1,0), \beta(t) = (1,1,1) + \sqrt{3}\ t(1,1,1).$
Assim o quadrado da distância em função do tempo é

$$h(t) = \left((1) - \left(1 + \sqrt{3}t\right)\right)^2 + \left((1+t) - \left(1 + \sqrt{3}t\right)\right)^2 + \left(0 - \left(1 + \sqrt{3}t\right)\right)^2$$
$$= 3t^2 + \left(\sqrt{3} - 1\right)^2 t^2 + 1 + 2\sqrt{3}t + 3t^2 = \left(10 - 2\sqrt{3}\right)t^2 + 2\sqrt{3}t + 1.$$

Temos

$$h'(t) = \left(20 - 4\sqrt{3}\right)t + 2\sqrt{3}.$$

Para $t_0 = -2\sqrt{3}\Big/\left(20-4\sqrt{3}\right) = -\left(3+5\sqrt{3}\right)\Big/44 \approx -0,265$ temos $h'(t_0) = 0;$ para $t < t_0$ temos $h'(t) < 0$ e para $t > t_0$ temos $h'(t) > 0.$

Assim o mínimo do quadrado da distância é

$h(t_0) = \left(29 - 3\sqrt{3}\right)\Big/44 \approx 0,541$

e a distância mínima é

$$\sqrt{\left(29-3\sqrt{3}\right)\Big/44} \approx 0,7355$$

PROBLEMA 2

Note que $143 = 11 \times 13$. Se N_p é o número de pares ordenados (*x*, *y*) com $x, y \in \{0,1,...,p-1\}$ tais que $5x^2 + 7y^2 - 1$ é múltiplo de *p*, então a resposta do problema será $N_{11} \cdot N_{13}$. de fato, $5x^2 + 7y^2 - 1$ é múltiplo de 143 se, e somente se, é múltiplo de 11 e 13. Por outro lado, pelo teorema chinês dos restos, dados pares ordenados (x', y') com $x', y' \in \{`0,1,...,10\}$ e $(x'', y'')$ com $x'', y'' \in \{0,1,...,12\}$, existe um único par ordenado $(x, y)$ com $x, y \in \{`0,1,...,142\}$ tal que $x \equiv x'(mod\,11), x \equiv x''(mod\,13), y \equiv y'(mod\,11)$ e $y \equiv y''(mod\,13)$.

Vamos agora calcular N_{11} e N_{13}. Os possíveis valores de $x^2\,(mod\,11)$ são 0, 1, 4, 9, 5, 3, sendo cada valor não nulo atingido para duas classes de congruência módulo 11. Assim, 5 é quadrado módulo 11 mas 7 não é, e portanto $5x^2\,(mod\,11)$ assume os valores 0, 1, 3, 4, 5, 9, enquanto $7x^2\,(mod\,11)$ assume os valores 0, 2,6,7,8,10 (nos dois casos os valores não nulos são assumidos duas vezes). Temos que 1 é o resultado módulo 11 da soma de números dessas duas listas nas formas 1 + 0,4 + 8 e 5 + 7, o que dá 2 + 4 + 4 = 10 soluções módulo 11 de $5x^2 + 7y^2 = 1,$ e portanto $N_{11} = 10.$ Analogamente, os possíveis valores de $x^2\,(mod\,13)$ são 0, 1, 4, 9, 3, 12, 10, sendo cada valor não nulo atingido para duas classes de congruência módulo 13. Assim, 5 e 7 não são quadrados módulo 13, e portanto $5x^2\,(mod\,13)$ e $7x^2\,(mod\,13)$ assumen os valores 0, 2, 5, 6, 7, 8, 11 (os valores não nulos são assumidos duas vezes). Temos que 1 é o resultado módulo 13 da soma de dois números dessa lista nas formas 6 + 8,8 + 6 e 7 + 7, o que dá 4 + 4 + 4 = 12 soluções módulo 13 de $5x^2 + 7y^2 = 1,$ e portanto $N_{13} = 12.$

Assim, a resposta do problema é $N_{11} \cdot N_{13} = 10 \cdot 12 = 120.$

PROBLEMA 3

Note que, se $g(x) = a_n x^n + ... + a_{1x} + a_0$, então

$g(u) - g(v) = a_n(u^n - v^n) + ... + a_1(u - v) = (u - v)\left(a_n u^{n-1} + u^{n-2}v + ... + v^{n-1}\right) + ... + a_1)$

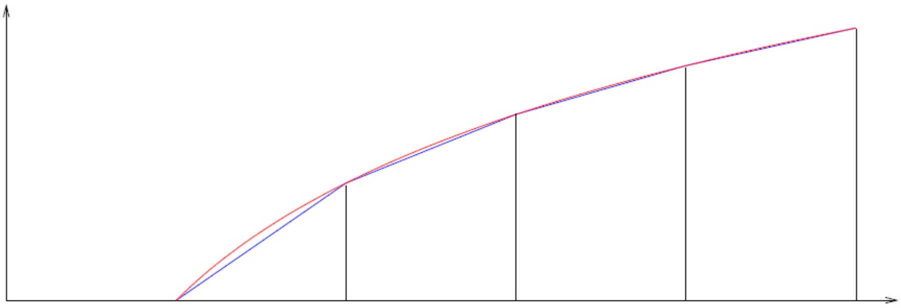
$= R(u,v) \cdot (u - v)$, para um certo polinômio em duas variáveis $R(x, y)$, e logo, se $f(x) = g(h(x))$, então

$f(x) - f(y) = g(h(x)) - g(h(y)) = R(h(x), h(y)) \cdot (h(x) - h(y) = q(x, y)(h(x) - h(y)))$,

com $q(x, y) := R(h(x), h(y))$, o que mostra a primeira implicação.

Vamos provar a volta por indução no grau de *f*. Se o grau de *f* for 0, as duas afirmações são verdadeiras. Suponha agora que *f* não é constante e que $f(x) - f(y) = q(x, y)(h(x) - h(y))$ (daí segue que *h* não é constante). Fazendo *y* = 0, obtemos $f(x) - f(0) = q(x,0)(h(x) - h(0))$, para todo *x*, e portanto, $f(y) - f(0) = q(y,0)(h(y) - h(0))$, para todo *y*. Substraindo, obtemos $q(x, y)(h(x) - h(y)) = f(x) - f(y) = q(x,0)(h(x) - h(0)) - q(y,0)(h(y) - h(0)) =$ Assim, $h(x) - h(y)$ divide o polinômio $(q(x,0) - q(y,0))(h(y) - h(0))$. Como *h* não é constante e $h(y) - h(0)$ é um polinômio só na variável *y*, segue que $h(x) - h(y)$ não tem nenhum fator comum (não constante) com $h(y) - h(0)$, e portanto $h(x) - h(y)$ divide o polinômio $q(x,0) - q(y,0)$. Seja $\tilde{q}(x) := q(x) - q(0)$. Temos $f(x) - f(0) = q(x,0)(h(x) - h(0)) = \tilde{q}(x)(h(x) - h(0))$, donde o grau de $\tilde{q}$ é menor que o grau de *f*. Por outro lado, $h(x) - h(y)$ divide o polinômio $q(x,0) - q(y,0) = \tilde{q}(x) - \tilde{q}(y)$, e portanto, por hipótese de indução, existe um polinômio $\tilde{g}(x)$ tal que $\tilde{q}(x) = \tilde{g}(h(x))$, donde $f(x) = f(0) + \tilde{q}(x)(h(x) - h(0)) = f(0) + \tilde{g}(h(x))(h(x) - h(0)) = g(h(x))$, onde $g(x) := f(0) + \tilde{g}(x)(x - h(0))$, o que completa a demonstração.

PROBLEMA 4



A figura mostra as regiões A_5 (abaixo da curva vermelha), B_5 (abaixo da poligonal azul), e C_5 (entre a poligonal azul e a curva vermelha).

Temos

Área $(A_n) = \int_1^n ln(t)\,dt = n\,ln(n) - n + 1$;

Área $(B_n) = ln(2) + ln(3) + \ldots + ln(n-1) + \frac{1}{2}ln(n) = ln(n!) - \frac{1}{2}ln(n)$;

Área $(C_n) = n\,ln(n) - n + \frac{1}{2}ln(n) + 1 - ln(n!)$.

Para estimar Área Área (C_n) escreva

$a_k = \int_k^{k+1} ln(t) - ln(k) - (t-k)\big(ln(k+1) - ln(k)\big)\,dt$;

note que a_k é a área da k-ésima 'bochechinha" entre a poligonal azul e a curva vermelha.

Assim,

$$\text{Área } (C_n) = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1};$$

Queremos estimar a_k para mostrar que a série abaixo converge para $S < 1$:

$$0 < S = a_1 + a_2 + \ldots + c_k + \ldots < 1.$$

Seja $u_k(t) = ln(t) - ln(k) - (t-k)\big(ln(k+1) - ln(k)\big)$; temos $u_k(k) = u_k(k+1) = 0$.

Note que $u_k''(t) = -t^{-2}$. Integrando por partes temos

$$a_k = \int_k^{k+1} u_k(t)\,dt$$

$$= -\int_k^{k+1}\left(t - k - \frac{1}{2}\right)u_k'(t)\,dt$$

$$= -\left[\frac{1}{2}\left(t-k-\frac{1}{2}\right)^2 u_k'(t)\right]_k^{k+1} + \int_k^{k+1}\frac{1}{2}\left(t-k-\frac{1}{2}\right)^2 u_k''(t)\,dt$$

$$= \int_k^{k+1}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\left(t-k-\frac{1}{2}\right)^2\right)\left(-u_k''(t)\right)dt$$

Para $k \le t \le k+1$ temos $\left(-u_k''(t)\right)dt$ donde

$$a_k \le k^{-2}\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\left(t-k-\frac{1}{2}\right)^2\right)dt = \frac{1}{12k^2}.$$

Temos portanto

$$S \le \frac{1}{12}\left(1+1/2^2+\ldots+1/k^2+\ldots\right)$$

$$\le \frac{1}{12}\left(1+\int_1^{+\infty} t^{-2}dt\right) \le \frac{1}{6};$$

Completando a demonstração.

Observação: Este problema mostra como obter estimativas como a de Stirling: temos $0 \le$ Área $\left(C_n\right) \le 1/6$ donde

$$0 \le n\,ln(n) - n + \frac{1}{12}ln(n) + 1 - ln(n!) \le \frac{1}{6}$$

$$n\,ln(n) - n + \frac{1}{12}ln(n) + \frac{5}{6} \le ln(n!) \le n\,ln(n) - n + \frac{1}{2}ln(n) + 1$$

$$n^n e^{-n}\sqrt{e^{5/3}n} \le n! \le n^n e^{-n}\sqrt{e^2 n}$$

Sabemos por Stirling que a melhor aproximação é

$$n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n};$$

note que $e^{5/3} < 2\pi < e^2$.

PROBLEMA 5

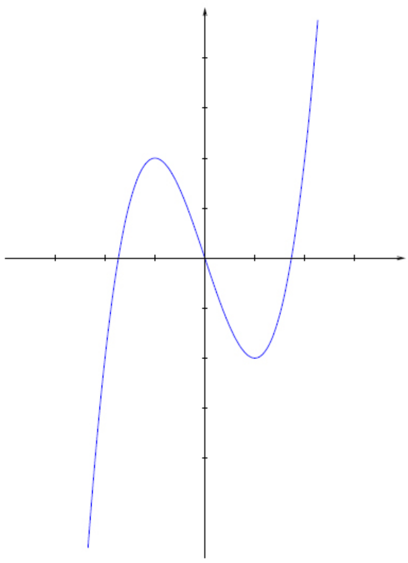
Suponha que algum vértice do grafo esteja contido em todas as arestas do grafo. Então o grafo é uma estrela com n pontas, e o resultado segue (há exatamente 2^n colorações para este exemplo).

Suponha que o grafo tenha um vértice x de grau ≥ 3 (i.e., que pertença a pelo menos 3 arestas) e que exista uma aresta disjunta de x, digamos e. Devido à hipótese sobre o grau de x, para aqualquer aresta e, há uma aresta $f = f(e)$ que incide em x que é disjunta de e. Então, em qualquer coloração das arestas que

incidem em x, a cor de f define a cor de e (a cor de f é a oposta de e). Assim, há no máximo $2^{grau(x)} \le 2^n$ colorações.
Se o grafo tem um vértice x de grau 2, ligado a dois outros vértices y e z, então para toda aresta e disjunta de x que não seja a (possível) aresta yz, há uma aresta $f = f(e)$ que incide em x que é disjunta de e, cuja cor determina a cor de e. Assim, as cores de xy, xz e de yz (se existir) determinam todas as outras. Assim, há no máximo $2^3 \le 2^n$ colorações.
Finalmente, se todo vértice tem grau no máximo 1, todas as arestas são disjuntas, e nesse caso, pelas hipótese do problema, o grafo pode máximo duas arestas e há no máximo $2^2 < 2^n$ colorações.

PROBLEMA 6

Antes de mais nada vamos esboçar o gráfico de $f(x) = x^3 - 3x$.



Vemos que para $-2 < y < 2$ a equação $f(x) = y$ admite três soluções reais enquanto para $y < -2$ ou $y > 2$ ela admite uma solução real e duas complexas conjugadas.

a) Os autovalores de B são 1 e – 1 donde podemos escrever $B = XDX^{-1}$ para X inversível e

$$D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Sejam c_1,c_2,c_3 (resp. d_1,d_2,d_3) as soluções reais de $f(x)=1\left(\text{resp.} f(x)=-1\right)$. Se $f(A)=B$ temos $f\left(X^{-1}AX\right)=D$ donde $X^{-1}AX$ é da forma

$$X^{-1}AX=\begin{pmatrix}c_1 & 0\\ 0 & d_j\end{pmatrix}$$

Para i, j escolhidos independentemente. Há portanto 9 matrizes reais A que satisfazem $f(A)=B$.

b) Sejam $z,\overline{z}$ as raízes complexas de $f(x)=4$. Seja $v=(w_1,w_2)\in\mathbb{C}^2$ um vetor linearmente independente com $\overline{v}=\left(\overline{w_1},\overline{w_2}\right)$ e considere A unicamente definida por $Av=zv, A\overline{v}=\overline{z}\overline{v}$. Em outras palavras,

$$A=\begin{pmatrix}w_1 & \overline{w_1}\\ w_2 & \overline{w_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z & 0\\ 0 & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1 & \overline{w_1}\\ w_2 & \overline{w_2}\end{pmatrix}^{-1}.$$

Para qualquer tal A temos $f(A)=4I=B$. Temos além disso A real: há portanto infinitas matrizes reais A que satisfazem $f(A)=B$.

c) Se M é diagonalmente então $f(M)$ também o é. Como B não é diagonalmente então A também não o é. Assim A deve ter autovalor com multiplicidade algébrica igual a 2 logo o único autovalor de A é o único real c com $f(c)=4$. Além disso qualquer autovetor de A é autovetor de B; como e_1 é (a menos de múltiplo escalar) o único autovalor de B então e_1 deve ser autovetor de A. Já e_2 deve ser autovetor generalizado, isto é, devemos ter $Ae_2=ce_2+ye_1$ (para algum real y). Assim

$$A=\begin{pmatrix}c & y\\ 0 & c\end{pmatrix}$$

$$f(A)=A^3-3A=\begin{pmatrix}4 & \left(3c^2-3\right)y\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

e devemos ter $y=1\big/\left(3c^2-3\right)$. Há portanto uma única solução.

XXXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Problemas e soluções da Segunda Fase – Nível Universitário

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1:

Calcule $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{x}{(\operatorname{sen} x + \cos x)\cos x}\,dx.$

PROBLEMA 2:
Qual a maior área possível para a sombra de um cubo de aresta 1?

(Obs.: supomos que o sol está a pino, isto é, a sombra é uma projeção ortogonal; o cubo pode estar em qualquer posição).

PROBLEMA 3:
Sejam n_1 e n_2 inteiros positivos e $n = n_1 n_2$.
Considere a matriz real simétrica $n \times n$, $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$, tal que para todo *i*,

$a_{i,i} = 4,$

$a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = -1$ para $1 \le i \le n-1$ tal que $(i+1)$ não é múltiplo de n_1,

$a_{i,i+n_1} = a_{i+n_1,i} = -1,$

e as demais entradas $a_{i,j}$ são iguais a 0.

Prove que *A* é invertível e todas as entradas de A^{-1} são positivas.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4:

Definimos os polinômios $\binom{x}{j} = \frac{x(x-1)(x-2)...(x-j+1)}{j!}$ para todo j natural, com $\binom{x}{0} = 1$.

a) Prove que todo polinômio não identicamente nulo pode ser escrito como uma combinação linear desses $\binom{x}{j}$ de forma única;

b) Seja $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ o coeficiente de $\binom{x}{k}$ no desenvolvimento de x^n (como no item *a*)). Calcule

$$\frac{\left\langle {n \atop k} \right\rangle + \left\langle {n \atop k+1} \right\rangle}{\left\langle {n+1 \atop k+1} \right\rangle}.$$

PROBLEMA 5:

Se F é um subconjunto finito de $\mathbb{R}^3$, denotamos por $V_r(F)$ a vizinhança de raio r de F (i.e., a união das bolas abertas de raio r com centros pertencentes a F).
Prove que, se $0 < r < R$, $\operatorname{vol}(V_R(F)) \le (R/r)^3 . \operatorname{vol}(V_r(F))$.

PROBLEMA 6:

Prove que se $10^{2n} + 8.10^n + 1$ tem um fator primo da forma $60k + 7$ então n e k são pares.

PROBLEMA 1: SOLUÇÃO DE BRUNO DA SILVA SANTOS (BELFORD ROXO – RJ)

$$I=\int_0^{\pi/4}\frac{x}{(\operatorname{sen}x+\cos x)\cos x}dx=\int_0^{\pi/4}x\cdot\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg}x+1}dx.$$

Fazendo: $x=u;\, dv=\dfrac{\sec^2 x}{1+\operatorname{tg}x}dx \to du=dx$ e $v=\ln(1+\operatorname{tg}x)$

como $\int u\, dv=u\cdot v-\int v\, du:$

$$I=x\cdot\ln(1+\operatorname{tg}x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\pi/4}\ln(1+tgx)dx=\frac{\pi}{4}\ln 2-\int_0^{\pi/4}\ln(1+\operatorname{tg}x)dx$$

Seja $I_2=\int_0^{\pi/4}\ln(1+\operatorname{tg}x)dx.$ Fazendo $u=\pi/4-x$ e $du=-dx:$

$$I_2=\int_0^{\pi/4}\ln(1+\operatorname{tg}(\pi/4-u))du=\int_0^{\pi/4}\ln\left(1+\frac{1-tgu}{1+tgu}\right)du$$

$$I_2=\int_0^{\pi/4}(\ln 2-\ln(1+tgu))du=\frac{\pi}{4}\ln 2-\int_0^{\pi/4}\ln(1+tgu)du$$

$$I_2=\frac{\pi}{4}\ln 2-I_2\to I_2=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

Portanto $I=\dfrac{\pi}{4}\ln 2-\int_0^{\pi/4}ln(1+tgx)dx=\dfrac{\pi}{4}\ln 2-\dfrac{\pi}{8}\ln 2=\dfrac{\pi}{8}\ln 2.$

$$\boxed{I=\frac{\pi}{4}\ln 2.}$$

PROBLEMA 2: SOLUÇÃO DE RAFAELTUPYNAMBÁ DUTRA (BELO HORIZONTE – MG)

Sendo A o vértice do cubo que está mais em baixo (um vértice com altura mínima), as três faces que contêm A estão no escuro. Colocamos os eixos de forma que os vetores unitários normais a essas três faces sejam $\hat{i}=(1,0,0)$; $\hat{j}=(0,1,0)$; $\hat{k}=(0,0,1)$, e consideramos o vetor unitário $N=(N_x,N_y,N_z)$, com $N_x^2+N_y^2+N_z^2=1$, paralelo à direção dos raios solares.

Projetando as faces escuras do cubo sobre o plano horizontal, vemos que a área da sombra do cubo é igual à soma das áreas das projeções das três faces escuras. Mas a área da projeção de uma face é igual à área da face original (que é 1) multiplicada pelo módulo do produto escalar entre o vetor normal à face e o vetor normal ao plano de projeção. Assim, a área da sombra é $\left|N\cdot\hat{i}\right|+\left|N\cdot\hat{j}\right|+\left|N\cdot\hat{k}\right|=\left|N_x\right|+\left|N_y\right|+\left|N_z\right|$.

Como a média aritmética é menor ou igual à média quadrática, temos

$$\frac{\left|N_x\right|+\left|N_y\right|+\left|N_z\right|}{3}\le\sqrt{\frac{N_x^2+N_y^2+N_z^2}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left|N_x\right|+\left|N_y\right|+\left|N_z\right|\le\sqrt{3}.$$

Logo, a maior área possível é $\sqrt{3}$, que ocorre quando a direção N dos raios solares é paralela à reta HA que liga dois vértices opostos do cubo.

PROBLEMA 3: SOLUÇÃO DA BANCA

Precisamos supor que $n_2>1$. De fato, se $n_1=2$ e $n_2=1$, nem todas as entradas de A^{-1} são positivas. Pedimos desculpas...

Vamos encontrar o inverso de $A/4=I-X$, onde todas as entradas de X são 0 ou $1/4$. Vamos usar a série $(I-X)^{-1}=I+X+X^2+X^3+\ldots$ (note que $(I-X)(I+X+X^2+\ldots+X^n)=I-X^{n+1}$). Vamos mostrar inicialmente que essa série converge. Para isso, vamos mostrar (ao final da solução) que o menor $M\in\mathbb{R}$ tal que $\|Xv\|\le M\|v\|$ para todo vetor v em $\mathbb{R}^n$ (aqui $\|.\|$ denota a norma euclidiana usual) é menor que 1. Daí segue que $\|X^kv\|\le M^k\|v\|$ para todo vetor v em $\mathbb{R}^n$ e todo inteiro positivo k, e logo a série claramente converge.

Considere o grafo cujos vértices são $v_1,v_2,\ldots,v_n$ e conectamos v_i e v_j se e somente se a entrada X_{ij} em X é $1/4$. Pela definição da matriz A, esse grafo pode ser decomposto em diversos caminhos, como os seguintes: $(v_1,v_2,\ldots,v_{n_1-1})$, $(v_{kn_1},v_{kn_1+1},\ldots,v_{(k+1)n_1-1}), 1\le k\le n_2-1$ e $(v_r,v_{r+n_1},v_{r+2n_1},\ldots v_{r+n-n_1}), 1\le r\le n_1$.

Claramente esse grafo é conexo. Como a entrada m_{ij} em X^k é não nula se e somente se existe um caminho de i a j com k lados, para quaisquer i, j existe k tal que a entrada correspondente m_{ij} em X^k é não nula (e logo positiva). Isso prova que todas as entradas de A^{-1} são positivas.

Finalmente, para mostrar que o menor $M\in\mathbb{R}$ tal que $\|Xv\|\le M\|v\|$ para todo vetor v em $\mathbb{R}^n$ é menor que 1, consideremos um vetor $v=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ tal que

$\|Xv\| = M\|v\|$. Note que, como X é simétrica e não-negativa, podemos tomar um tal v com $Xv=Mv$. Temos que, para cada $j \le n$, a j-ésima coordenada de Xv é da forma $\dfrac{a_{r_{j1}} + a_{r_{j2}} + \ldots + a_{r_{js(j)}}}{4}$, onde $s(j) \le 4$, cujo quadrado é menor ou igual a $s(j)\dfrac{a_{r_{j1}}{}^2 + a_{r_{j2}}{}^2 + \ldots + a_{r_{js(j)}}{}^2}{16} \le \dfrac{a_{r_{j1}}{}^2 + a_{r_{j2}}{}^2 + \ldots + a_{r_{js(j)}}{}^2}{4}$, e, se vale a igualdade, todos os $a_{r_{ji}}$ devem ser iguais. Somando os termos $\dfrac{a_{r_{j1}}{}^2 + a_{r_{j2}}{}^2 + \ldots + a_{r_{js(j)}}{}^2}{4}$ para todos os $j \le n$, o resultado é menor ou igual a $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$, pois em cada coluna de X há no máximo 4 elementos não nulos. Daí segue que $\|Xv\|^2 \le \|v\|^2$ e portanto $M \le 1$. Suponha por absurdo que $M = 1$, isto é, que valha a igualdade. Para cada j com $a_j \ne 0$, todos os $a_{r_{ji}}$ devem ser iguais a a_j (e portanto não nulos). Pela conexidade do grafo definido acima , deveríamos ter então todos os a_j iguais, mas nesse caso não vale a igualdade, pois nem todas as colunas têm 4 entradas não nulas.

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DE MATEUS OLIVEIRA DE FIGUEIREDO (FORTALEZA – CE)

a)

i) O polinômio $\binom{x}{j}$ possui grau j já que é o produto de j polinômios de grau 1.

ii) Dado $n \in \mathbb{Z}_+$ provemos que todo polinômio de grau n pode ser escrito de maneira única como combinação linear dos $\binom{x}{j}$.

Seja P_n o espaço vetorial de todos os polinômios de grau $\le n$.

Uma base trivial para esse espaço é:

$\{x^0, x^1, x^2, \ldots, x^n\}$, já que $a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots + a_nx^n \equiv 0 \Rightarrow a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ e qualquer polinômio de grau menor ou igual a n pode ser escrito como combinação linear deles. Assim, a dimensão de P_n é $n + 1$.

iii) Se escrevermos os $\binom{x}{j}$ nessa base temos:

$$\binom{x}{j} = \frac{1}{j!}x^j + b_{j-1}x^{j-1} + b_{j-2}x^{j-2} + \ldots + b_0x^0$$

Assim, note que para escrever $\binom{x}{j}$ só precisamos dos vetores $\{x^0, x^1, x^2, \ldots, x^j\}$ pois por i) ele possui grau j e o coeficiente de x^j é $\frac{1}{j!}$.

Escrevendo matricialmente

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1/n! & b_{j-1} & b_{j-2} & \cdots \\ 0 & 1/(n-1)! & c_{j-2} & c_{j-3} \\ 0 & 0 & 1/n-2! & d_{j-3} \\ & \vdots & \ddots & \\ & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} x^n \\ x^{n-1} \\ x^{n-2} \\ \\ x^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \binom{x}{n} \\ \binom{x}{n-1} \\ \binom{x}{n-2} \\ \vdots \\ \binom{x}{0} \end{bmatrix}$$

Como abaixo da diagonal principal só temos zeros, utilizando Laplace é fácil ver que o determinante da matriz é:

det M = $\frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{(n-2)!} \ldots \frac{1}{1!} \neq 0$

Como Det $M \neq 0$ a matriz possui inversa, ou seja, os x^j podem ser escritos como combinação linear dos $\binom{x}{j}$. Logo o conjunto $S = \left\{\binom{x}{0}, \binom{x}{1}, \ldots, \binom{x}{n}\right\}$ gera P_n e como possui n + 1 elementos é base. Portanto, todo polinômio de P_n pode ser escrito como combinação linear dos elementos de *S*.

Podemos estender a propriedade para $S' = \left\{\binom{x}{j} \middle| j \geq 0\right\}$ já que, para $j > n$, $deg\left[\binom{x}{j}\right] > n$ e portanto não aparecerá na combinação linear para escrever um polinômio de P_n.

Mas como n foi pego genérico, qualquer polinômio pode ser escrito de manera única como combinação dos $\binom{x}{j}$.

b)

i) Vamos escrever $x\binom{x}{i}$ na base S'.

$$x\binom{x}{i}=\frac{x\cdot x(x-1)(x-2)...(x-i-1)}{i!}=\frac{(x-i+i)x(x-1)(x-2)...(x-i+1)}{i!}=$$

$$=\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)...(x-i+1)(x-i)}{i!}+i\overbrace{\frac{x(x-1)(x-2)...(x-i+1)}{i!}}^{\binom{x}{i}}=$$

$$=\underbrace{\frac{x(x-1)(x-2)...(x-i+1)(i+1)}{(i+1)!}}_{\binom{x}{i+1}}+i\binom{x}{i}=(i+1)\binom{x}{i+1}+i\binom{x}{i}$$

$$\boxed{\Rightarrow x\binom{x}{i}=(i+1)\binom{x}{i+1}+i\binom{x}{i}}.$$

ii) Sabemos que:

$x^n=\sum_{i=0}^{n}\left\langle {n \atop i} \right\rangle\binom{x}{i}$. Multiplicando por x temos:

$$x^{n+1}=\sum_{i=0}^{n}\left\langle {n \atop i} \right\rangle x\binom{x}{i}=\sum_{i=0}^{n}\left(\left\langle {n \atop i} \right\rangle\left[(i+1)\binom{x}{i+1}+i\binom{x}{i}\right]\right)\ \text{(I)}$$

Por outro lado, $x^{n+1}=\sum_{i=0}^{n+1}\left\langle {n+1 \atop i} \right\rangle\binom{x}{i}$ (II)

Como todo polinômio não nulo pode ser escrito de maneira única por S', (I) e (II) devem ter os mesmos coeficientes.

Olhando para o coeficiente de $\binom{x}{k+1}$ em (I) temos $(k+1)\left(\left\langle {n \atop k} \right\rangle+\left\langle {n \atop k+i} \right\rangle\right)$.

E em II o coeficiente é $\left\langle {n+1 \atop k+1} \right\rangle$.

Logo $(k+1)\left(\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle + \left\langle \begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix} \right\rangle\right) = \left\langle \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\rangle \Rightarrow \boxed{\dfrac{\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle + \left\langle \begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\rangle} = \dfrac{1}{k+1}}.$

PROBLEMA 5: SOLUÇÃO DE RAMON MOREIRA NUNES (FORTALEZA – CE)

Vamos proceder por indução em $\#F$. No caso inicial F tem um elemento.

Trivial:

$$Vol(V_r(F)) = \frac{9}{3}\pi r^3, \forall r \in \mathbb{R} \Rightarrow Vol(V_r(F)) = \left(\frac{R}{r}\right)^3 \cdot Vol(V_r(F)), \forall 0 < r < R.$$

Agora, suponha que se F possui k pontos então vale o resultado. Se F é um conjunto de $(k+1)$ pontos, escreva $F = \{x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}\}$.

Se $\widetilde{F} = \{x_1, \ldots, x_k\}$, vale o resultado para $\widetilde{F}$ i.e.

$\dfrac{Vol\left(V_r\left(\widetilde{F}\right)\right)}{r^3}$ é função decrescente de r.

Como $\dfrac{Vol(V_r(F))}{r^3} = \underbrace{\dfrac{Vol\left(V_r\left(\widetilde{F}\right)\right)}{r^3}}_{\text{decrescente}} + \underbrace{\dfrac{Vol(B_r(x_{k+1}))}{r^3}}_{\text{constante}} - \dfrac{Vol\left(V_r\left(\widetilde{F}\right) \cap B_r(x_{k+1})\right)}{r^3}$

E a primeira função é decrescente, a segunda é constante igual a $\frac{4}{3}\pi$, basta provar que a última é crescente $\left(\dfrac{Vol\left(V_r\left(\widetilde{F}\right) \cap B_r(x_{k+1})\right)}{r^3}\right)$. Para fazer isso suponha sem perda de generalidade que x_{k+1} é a origem de $\mathbb{R}^3$ i.e. $x_{k+1} = (0,0,0) = 0$.

Considere a homotetia T_r de centro O e razão $\frac{1}{r}$. Temos $T_r(B_r(x)) = B_1\left(\frac{x}{r}\right), T_r\left(V_r\left(\widetilde{F}\right)\right) = V_1\left(\widetilde{F}_r\right)$, onde $\widetilde{F}_r = \left\{\frac{x_1}{r}, \ldots, \frac{x_k}{r}\right\}$. Como $Vol(T_r A) = \frac{1}{r^3} Vol(A)$ para qualquer A pois

$Vol\left(T_r\left(A\right)\right)=\int_{T_rA}dx=\int_A\left|\det \mathrm{T}_r\right|\,dx=\int_A\frac{1}{r^3}dx=\frac{1}{r^3}Vol\left(A\right),$ temos $\frac{Vol\left(V_r\left(\widetilde{F}\right)\cap B_r\left(0\right)\right)}{r^3}=Vol\left(V_1\left(\widetilde{F_r}\right)\cap B_1\left(0\right)\right).$ Portanto, basta mostrar que $r\to Vol\left(V_1\left(\widetilde{F_r}\right)\cap B_1\left(0\right)\right)$ é crescente. Basta para isso mostrar que $V_1\left(\widetilde{F}_r\right)\cap B_1\left(0\right)\subset V_1\left(\widetilde{F}_R\right)\cap B_1\left(0\right)$ se $r<R.$ Para isso, usaremos o seguinte lema:

Lema: Dado $y\in\mathbb{R}^3$ fixado, a função $x\to\left|x-y\right|$ é convexa, isto é, $\left|\left(tx_1+\left(1-t\right)x_2\right)-y\right|\le t\left|x-y\right|+\left(1-t\right)\left|x_2-y\right|,t\in\left[0,1\right].$

Prova: Dados $x_1,x_2\in\mathbb{R}^3,$ temos $\left|\left(tx_1+\left(1-t\right)x_2\right)-y\right|=\left|tx_1+\left(1-t\right)x_2-ty-\left(1-t\right)y\right|=\left|t\left(x_1-y\right)+\left(1-t\right)\left(x_2-y\right)\right|.$

Pela desigualdade triangular, isso é menor ou igual a $\left|t\left(x_1-y\right)\right|+\left|\left(1-t\right)\left(x_2-y\right)\right|.$ Como a norma é homogênea, $\left|\left(tx_1+\left(1+t\right)x_2\right)-y\right|\le t\left|x_1-y\right|+\left(1-t\right)\left|x_2-y\right|.$

Agora voltemos à prova de que $V_1\left(\widetilde{F}_r\right)\cap B_1\left(0\right)\subset V_1\left(\widetilde{F}_R\right)\cap B_1\left(0\right).$ Tome $a\in V_1\left(\widetilde{F_r}\right)\cap B_1\left(0\right).$ Então, $\exists\, i\le k$ tal que $\left|a-\frac{x_i}{r}\right|<1$ e $\left|a\right|<1.$

Como $R>r,$ $\frac{x_i}{R}$ está no intervalo $\left[0,\frac{x_i}{r}\right].$ Vamos usar a convexidade de $x\to\left|x-a\right|;$ escolha $t=\frac{r}{R}\in\left[0,1\right]$ tal que $\frac{x_i}{R}=t\frac{x_i}{r}+\left(1-t\right)\cdot 0.$ Temos $\left|a-\frac{x_i}{R}\right|\le t\left|a-\frac{x_i}{r}\right|+\left(1-t\right)\left|a-0\right|<t\cdot 1+\left(1-t\right)\cdot 1=1.$ Ou seja, $a\in B_1\left(\frac{x_i}{R}\right)\subset V_1\left(\widetilde{F}_R\right).$ Como $a\in B_1\left(0\right),a\in V_1\left(\widetilde{F}_R\right)\cap B_1\left(0\right).$

Ou seja, acabamos de provar que $V_1\left(\widetilde{F}_r\right)\cap B_1\left(0\right)\subset V_1\left(\widetilde{F_R}\right)\cap B_1\left(0\right).$ Como já vimos, isso implica que $r\to\frac{Vol\left(V_r\left(\widetilde{F}\right)\cap B_r\left(x_{k+1}\right)\right)}{r^3}$ é crescente, e como também já vimos isso implica que $r\to\frac{Vol\left(V_r\left(F\right)\right)}{r^3}$ é decrescente. Concluímos.

PROBLEMA 6: SOLUÇÃO DE RÉGIS PRADO BARBOSA (FORTALEZA – CE)

Temos $n,k \in \mathbb{Z}_+$ e p primo com $p = 60k + 7$ tal que $p \mid 10^{2n} + 8 \cdot 10^n + 1$. Queremos provar que n,k são pares.

Temos

$$10^{2n} + 8 \cdot 10^n + 1 = \left(10^{2n} + 2 \cdot 10^n + 1\right) + 6 \cdot 10^n = \left(10^n + 1\right)^2 + 6 \cdot 10^n \Rightarrow \left(10^n + 1\right)^2 \equiv$$

$$\equiv -6 \cdot 10^n \left(mod\ p\right) \Rightarrow \boxed{\left(\frac{-6 \cdot 10^n}{p}\right) = 1}$$ onde

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0, \text{ se } p \mid a \\ 1, \text{ se } a \text{ é resíduo quadrático módulo } p. \\ -1, \text{ se } a \text{ não é resíduo quadrático módulo } p. \end{cases}$$

Veja que claramente $p \nmid -6 \cdot 10^n = -2^{n+1} \cdot 3 \cdot 5^n$ pois $p = 60k + 7 \rightarrow 2 \mid 60, 3 \mid 60, 5 \mid 60$ e $2 \nmid 7, 3 \nmid 7, 5 \nmid 7 \rightarrow p \neq 2,3$ e 5.

Sabemos que o símbolo de Legendre possui a seguinte propriedade: $\left(\frac{a \cdot b}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \cdot \left(\frac{b}{p}\right)$.

Logo: $\boxed{\left(\frac{-6 \cdot 10^n}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) \cdot \left(\frac{2}{p}\right)^{n+1} \left(\frac{3}{p}\right)\left(\frac{5}{p}\right)^n = 1}$ (simplesmente separei os fatores).

Calculemos cada um deles:

$$\rightarrow \left(\frac{-1}{p}\right) = \left(-1\right)^{\frac{p-1}{2}} = \left(-1\right)^{\frac{60k+7-1}{2}} \rightarrow \left(\frac{-1}{p}\right) = \left(-1\right)^{30k+3} = \left(-1\right) \Rightarrow \boxed{\left(\frac{-1}{p}\right) = \left(-1\right)} \text{ (I)}$$

$\rightarrow \left(\frac{2}{p}\right) = \left(-1\right)^{\frac{p^2-1}{8}}$. Temos $p = 60k + 7 \Rightarrow p^2 = 3600k^2 + 2 \cdot 60k \cdot 7 + 49 \Rightarrow$

$$\frac{p^2 - 1}{8} = \frac{3600k^2 + 840k + 48}{8}.$$

$\Rightarrow \frac{p^2 - 1}{8} = 450k^2 + 105k + 6 = \left(\underbrace{450k^2 + 104k + 6}_{\text{par}}\right) + k.$ Assim,

$$\left(-1\right)^{\frac{p^2-1}{8}} = \left(-1\right)^{\left(450k^2+104k+6\right)+k} \Rightarrow \left(-1\right)^{\frac{p^2-1}{8}} = \left(-1\right)^{\left(450k^2+104k+6\right)} \cdot \left(-1\right)^k \Rightarrow \boxed{\left(\frac{2}{p}\right) = \left(-1\right)^k} \text{ (II)}$$

Para calcular $\left(\frac{3}{p}\right)$ e $\left(\frac{5}{p}\right)$ precisaremos da lei da Reciprocidade Quadrática: dados p, q primos ímpares: $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$

Assim: com $q = 3$, $\left(\frac{3}{p}\right)\cdot\left(\frac{p}{3}\right)=(-1)^{\frac{3-1}{2}\cdot\frac{p-1}{2}}\Rightarrow\left(\frac{3}{p}\right)\cdot\left(\frac{p}{3}\right)=(-1)^{1\cdot(30k+3)}=(-1)$.

Assim precisamos de calcular $\left(\frac{p}{3}\right)=\left(\frac{60k+7}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)=1\rightarrow\left(\frac{p}{3}\right)=1$ (usando que $60k+7\equiv 1\equiv 1^2\,(mod\,3)$).

Substituindo acima tem-se: $\left(\frac{3}{p}\right)\cdot 1=(-1)\Rightarrow\boxed{\left(\frac{3}{p}\right)=(-1)}$ (III)

Com $q = 5$, $\left(\frac{5}{p}\right)\cdot\left(\frac{p}{5}\right)=(-1)^{\frac{5-1}{2}\cdot\frac{p-1}{2}}\Rightarrow\left(\frac{5}{p}\right)\cdot\left(\frac{p}{5}\right)=(-1)^{2\cdot(30k+3)}=1$. Assim precisamos calcular o valor de $\left(\frac{p}{5}\right)=\left(\frac{60k+7}{5}\right)=\left(\frac{2}{5}\right)=(-1)\rightarrow\left(\frac{p}{5}\right)=(-1)$ (pois $60k+7\equiv 2(mod\,5)$ e os resíduos quadráticos módulo 5 são 0, 1, 4 já que $x\equiv 0,1,2,3,4(mod\,5)\rightarrow\ x^2\equiv 0,1,4,4,1(mod\,5)$).

Substituindo acima $\left(\frac{5}{p}\right)\cdot\left(\frac{p}{5}\right)=1\rightarrow\left(\frac{5}{p}\right)\cdot(-1)=1\rightarrow\boxed{\left(\frac{5}{p}\right)=(-1)}$ (IV)

Juntam-se (I), (II), (III) e (IV) em (*):

$$\left(\frac{-1}{p}\right)\cdot\left(\frac{2}{p}\right)^{n+1}\cdot\left(\frac{3}{p}\right)\left(\frac{5}{p}\right)^{n}=1\Rightarrow(-1)\cdot(-1)^{k(n+1)}\cdot(-1)\cdot(-1)^{n}=1\Rightarrow(-1)^{k(n+1)+n}=1$$

$\Rightarrow k(n+1)+n$ é par.

$\Rightarrow$ se n é ímpar $\rightarrow(n+1)$ par $\rightarrow k(n+1)$ par $\Rightarrow k(n+1)+n$ ímpar. Absurdo!

Logo $\boxed{n \text{ é par}}$ $\rightarrow(n+1)$ ímpar.

$\Rightarrow$ se k é ímpar $\rightarrow k(n+1)$ ímpar $\rightarrow k(n+1)+n$ ímpar. Absurdo!

Logo $\boxed{k \text{ é par}}$.

Assim, dados $n,k\in\mathbb{Z}_+$ com $p=60k+7$ primo tal que $p\,|\,10^{2n}+8\cdot 10^{n}+1$ então n e k são pares.

XXXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Premiados

NÍVEL 1 (6º. e 7º. Anos)

NOME	CIDADE – ESTADO	PRÊMIO
Ana Emília Hernandes Dib	S.J. do Rio Preto - SP	Ouro
Pedro Henrique Alencar Costa	Fortaleza - CE	Ouro
Ryunosuke Watanabe Tagami	Rio Claro - SP	Ouro
Helena Veronique Rios	São Carlos - SP	Ouro
Italo Lesione de Paiva Rocha	Fortaleza - CE	Ouro
José Henrique Carvalho	Curitiba - PR	Ouro
Juliana Bacelar de Freitas	Brasília - DF	Prata
Daniel Lima Braga	Eusébio - CE	Prata
Hermes Lins e Nascimento	Fortaleza - CE	Prata
Laís Monteiro Pinto	Rio de Janeiro - RJ	Prata
Lucca Morais de Arruda Siaudzionis	Fortaleza - CE	Prata
Leandro Alves Cordeiro	Ribeirão Pires - SP	Prata
Henrique Gontijo Chiari	Belo Horizonte - MG	Prata
André Akinaga Benites	São Paulo - SP	Prata
Gabriel Diniz Vieira e Sousa	Fortaleza - CE	Prata
Rafael Seiji Uezu Higa	São Paulo - SP	Prata
Adriana de Sousa Figueiredo	Porto Alegre - RS	Prata
Gustavo Figueiredo Serra	São Paulo - SP	Prata
Matheus Uchôa Constante	Goiânia - GO	Bronze
Kristian Holanda Nogueira	Manaus - AM	Bronze
Fábio Itikama	São Paulo - SP	Bronze
Loic Dominguez	Fortaleza - CE	Bronze
Jiang Zhi	São Paulo - SP	Bronze
Ricardo Ken Wang Tsuzuki	São Paulo - SP	Bronze
Ana Caroline Obana da Cruz	Curitiba - PR	Bronze
Ana Paula Lopes Schuch	Porto Alegre - RS	Bronze
José Marcio Machado de Brito	Cocal dos Alves - PI	Bronze
Lucas Bastos Germano	Fortaleza - CE	Bronze
Victória Moreira Reis Cogo	Teresina - PI	Bronze
Thiago Araujo Oliveira	Jaboatão dos Guararapes - PE	Bronze
Gabriel Toneatti Vercelli	Osasco - SP	Bronze
Nathan Bonetti Teodoro	Curitiba - PR	Bronze
Jefferson Daxian Hong	São Paulo - SP	Bronze
Cristóbal Sciutto Rodriguez	São Paulo - SP	Bronze
Aruana Almeida Correa	Porto Alegre - RS	Bronze
Cynthia Lacroix Herkenhoff	Vitória - ES	Bronze
Kaíque Maestrini Sacchi	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Igor de Lacerda	Curitiba - PR	Menção Honrosa

Rafael Reple Geromee	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Leonardo de Matos Felippetti Mariano	Curitiba - PR	Menção Honrosa
Gabriel Passamani Correa	Vitória - ES	Menção Honrosa
Daniel de Almeida Souza	Brasília - DF	Menção Honrosa
Diego Teixeira Nogueira Fidalgo	Salvador - BA	Menção Honrosa
Natan Novellu Tu	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Ricardo Borsari Brinati	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Rafael Neves Vieira	Brasília - DF	Menção Honrosa
Juliano Pecica Negri	Piracicaba - SP	Menção Honrosa
Gustavo Rodrigues Machado	Sorocaba - SP	Menção Honrosa
Zoltan Flamarion Glueck Carvalho	Belo Horizonte - MG	Menção Honrosa
Gabriel Ribeiro Barbosa	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Pedro Henrique Rocha de Freitas	Brasília - DF	Menção Honrosa
Pedro Henrique Sacramento de Oliveira	Loureira - SP	Menção Honrosa
Guilherme Goulart Kowalczuk	Porto Alegre - RS	Menção Honrosa
Pedro de Vasconcellos Oporto	Nova Lima - MG	Menção Honrosa
Aryssa Victoria Shitara	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Ives Vaz Caldeira Lopes	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Marcos Vinícius de Oliveira Soares	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Jéssica Carolina Zilio	Piracicaba - SP	Menção Honrosa
João Pedro Graça Melo Vieira	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Henrique Medici Pontieri	Campo Grande - MS	Menção Honrosa
Gabriel Caino Castilho Rodrigues	Salvador - BA	Menção Honrosa
Tamara P. de A. Moraes	Feira de Santana - BA	Menção Honrosa
Karine Quaresma Lima	Taguatinga - DF	Menção Honrosa
Natália Brasileiro Lins Barbosa	Jaboatão dos Guararapes - PE	Menção Honrosa
Lucki Li	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Heloísa Antunes de Medeiros	Itamogi - MG	Menção Honrosa
Iuri Grangeiro Carvalho	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Lara Sampaio Pinheiro de Freitas	Olinda - PE	Menção Honrosa
Maria Júlia Costa Medeiros	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Kevin Korpasch	Guarapuana - PR	Menção Honrosa
Sofía Leite Correia Lima	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
João Baptista de Paula e Silva	Belo Horizonte - MG	Menção Honrosa
Bernardo Puetter Schaeffer	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Júlia Bertelli	Joinville - SC	Menção Honrosa
Rafael Purim de Azevedo	Pirassunga - SP	Menção Honrosa
Pedro Henrique da Silva Dias	Porto Alegre - RS	Menção Honrosa
Marcelo Bandeira de Melo Boavista	Teresina - PI	Menção Honrosa
Gabriel Branco Frizzo	Curitiba - PR	Menção Honrosa
Maria Eduarda Müller Eyng	Porto Alegre - RS	Menção Honrosa
Henrique Martínez Rocamora	São Bernardo do Campo - SP	Menção Honrosa
Felipe Roz Barscevicius	Sorocaba - SP	Menção Honrosa
João Vitor Vaz Oliveira	Recife - PE	Menção Honrosa
Mateus Siqueira Thimoteo	Mogi das Cruzes - SP	Menção Honrosa

Ebenezeer Pinto Banoeira Neto	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Maria Clara Vasconcelos Andrade	Brasília - DF	Menção Honrosa
Rafael Beck	Salvador - BA	Menção Honrosa
Arthur Monteiro Dos Santos	Salvador - BA	Menção Honrosa
Júlia Wotzasek Pereira	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Gabriel Oliveira Rigo	Cotia - SP	Menção Honrosa
Leonardo Galante Barco	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Bruno Scatolini	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Lucas Pereira Galvão de Barros	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Vítor Ossamu Rodrigues Okamura	Brasília DF	Menção Honrosa

NÍVEL 2 (8º. e 9º. Anos)

NOME	CIDADE – ESTADO	PRÊMIO
Rafael Rodrigues Rocha de Melo	Caucaia - CE	Ouro
Vinícius Canto Costa	Rio de Janeiro - RJ	Ouro
Henrique Vieira G. Vaz	São Paulo - SP	Ouro
Fellipe Sebastiam da Silva P. Pereira	Rio de Janeiro - RJ	Ouro
Roberto Tadeu Abrantes de Araújo	Rio de Janeiro - RJ	Ouro
Pedro Victor Falci de Rezende	Santo Antonio - MG	Ouro
Alessandro A. de Oliveira Pacanowski	Rio de Janeiro - RJ	Prata
Lincoln de Queiroz Vieira	Fortaleza - CE	Prata
Tadeu Pires de Matos Belford Neto	Fortaleza - CE	Prata
Vitor Ramos de Paula	Belo Horizonte - MG	Prata
Francisco Markan N. de Souza Filho	Fortaleza - CE	Prata
Jair Gomes Soares Júnior	Montes Claros - MG	Prata
Breno Soares da Costa Vieira	J. dos Guararapes - PE	Prata
Gabriel José Moreira da Costa Silva	Maceió - AL	Prata
Pedro Morais de Arruda Siaudzionis	Fortaleza - CE	Prata
Gabriel Sena Galvão	Guará - DF	Prata
Fabio da Silva Soares	Planaltina - DF	Prata
Michel Rozenberg Zelazny	São Paulo - SP	Prata
Bruno Eidi Nishimoto	Jales - SP	Prata
Franco Matheus de Alencar Severo	Rio de Janeiro - RJ	Prata
Aimê Parente de Sousa	Fortaleza - CE	Prata
Marcos Paulo Nunes de Lima Silva	Rio de Janeiro - RJ	Bronze
Gabriel N. Coelho de Togni de Souza	Rio de Janeiro - RJ	Bronze
Rafael T. Eugênio Pontes Barone	Aracatuba - SP	Bronze
Murilo Corato Zanarella	Amparo - SP	Bronze
Rodrigo Sanches Angelo	São Paulo - SP	Bronze
Alexandre Perozim de Faveri	Neves Paulista - SP	Bronze
Luíze Mello D'urso Vianna	Rio de Janeiro - RJ	Bronze
Maria Clara Cardoso	São Paulo - SP	Bronze
Liara Guinsberg	São Paulo - SP	Bronze
Lucas Cawai Julião Pereira	Caucaia - CE	Bronze

Luis Guilherme Gomes Aguiar	Rio de Janeiro - RJ	Bronze
Carlos Adriano Vieira	Igarapé - MG	Bronze
Daniel Santana Rocha	Rio de Janeiro - RJ	Bronze
Raphael Mendes de Oliveira	Rio de Janeiro - RJ	Bronze
Samuel Brasil de Albuquerque	Fortaleza - CE	Bronze
Gustavo Souto Henriques Campelo	João Pessoa - PB	Bronze
Lucas de Moura Herlin	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Vitor Dias Gomes Barrios Marin	Presidente Prudente - SP	Menção Honrosa
João Pedro Sedeu Godoi	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Suzane Eberhart Ribeiro da Silva	Campo Grande - MS	Menção Honrosa
Ícaro Sampaio Viana	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Pedro Henrique Bortolozo Maria	Colombo - PR	Menção Honrosa
Fábio Kenji Arai	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Guilherme de Oliveira Rodrigues	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Alexandre Mendonça Cardoso	Salvador - BA	Menção Honrosa
Leyberson Pereira Assunção	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Rubens Martins Bezerra Farias	Sobral - CE	Menção Honrosa
João Vítor Fernandes Paiva	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Bruno Almeida Costa	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Daniel Lima Santanelli	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Marília Nascimento Monteiro	Recife - PE	Menção Honrosa
Igor Albuquerque Araujo	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Josué Knorst	Picada Café - RS	Menção Honrosa
Ricardo Vieira Marques	Brasília - DF	Menção Honrosa
Júlio César de Barros	Santo André - SP	Menção Honrosa
Thomas Akio Ikeda Valvassori	Mogi das Cruzes - SP	Menção Honrosa
Gabriel Fazoli Domingos	Urupês - SP	Menção Honrosa
Henrique Luan Gomes Pereira Braga	Belem - PA	Menção Honrosa
Beatriz Yumi Ota	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Kiane Sassaki Menezes	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Eric Gripa Marques	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Samuel Kuo Chen Shao	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Pedro Henrique Jagosenit Vilaça	Santa Branca - SP	Menção Honrosa
Caio de Souza Câmara	Manaus - AM	Menção Honrosa
Lucas David Noveline	Belem - PA	Menção Honrosa
Lucas Rebelo Vieira da Silva	Recife - PE	Menção Honrosa
Elias Brito Oliveira	Brasília - DF	Menção Honrosa
Guilherme Ryu Odaguiri Kobori	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Mariana Souza de Araújo	Recife - PE	Menção Honrosa
Francisco Cláudio Coelho	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Murilo Leão Pereira	Belem - PA	Menção Honrosa
Jadi Diniz Guimarães de Queiroz	Recife - PE	Menção Honrosa
Caio Lima Albuquerque	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Carolina Lima Guimarães	Vitória - ES	Menção Honrosa

Nível 3 (Ensino Médio)

NOME	CIDADE – ESTADO	PRÊMIO
Gustavo Lisbôa Empinotti	Florianópolis - SC	Ouro
Marcelo Tadeu de Sá Oliveira Sales	Salvador - BA	Ouro
João Lucas Camelo Sá	Fortaleza - CE	Ouro
Hanon Guy Lima Rossi	São Paulo - SP	Ouro
Maria Clara Mendes Silva	Pirajuba - MG	Ouro
Matheus Secco Torres da Silva	Rio de Janeiro - RJ	Prata
Lucas Lourenço Hernandes	São Paulo - SP	Prata
Deborah Barbosa Alves	São Paulo - SP	Prata
Henrique G. Fiuza do Nascimento	Brasília - DF	Prata
Luiz Filipe Martins Ramos	Niterói - RJ	Prata
André Macieira Braga Costa	Belo Horizonte - MG	Prata
Thiago Saksanian Hallak	São Paulo - SP	Prata
Victor Juca Martins	Fortaleza - CE	Prata
Caíque Porto Lira	Fortaleza - CE	Prata
Gustavo H. F. e Sampaio Braga	São José dos Campos-SP	Prata
Alvaro Lopes Pedroso	Santa Isabel - SP	Prata
André Amaral de Sousa	Diadema - SP	Prata
Marcos Massayuki Kawakami	São Paulo - SP	Bronze
Carlos Henrique de Andrade Silva	Fortaleza - CE	Bronze
Rafael Kazuhiro Miyazaki	São Paulo - SP	Bronze
André Saraiva Nobre dos Santos	Fortaleza - CE	Bronze
Daniel Eiti Nishida Kawai	Atibaia - SP	Bronze
Lucas de Freitas Smaira	Guaxupé - MG	Bronze
Cássio dos Santos Sousa	Osasco - SP	Bronze
Alessandro Macêdo de Araújo	Fortaleza - CE	Bronze
Breno Vieira da Silva Passos	Aracaju - SE	Bronze
Iago Dalmaso Brasil Dias	Rio de Janeiro - RJ	Bronze
Isabella Amorim Gonçalez	Marília - SP	Bronze
Daniel dos Santos Bossle	Porto Alegre - SP	Bronze
Davi Coelho Amorim	Fortaleza - CE	Bronze
Lucas Mestres Mendes	Fortaleza - CE	Bronze
Vinícius Gomes Pereira	Rio de Janeiro - RJ	Bronze
Renan Pablo da Cruz	Fortaleza - CE	Bronze
Jonas Rocha Lima Amaro	Fortaleza - CE	Bronze
Iuri Rezende Souza	Mineiros - GO	Bronze
Matheus Araújo Marins	São Gonçalo - RJ	Menção Honrosa
Felipe Vieira de Paula	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Rafael Farias Marinheiro	Recife - PE	Menção Honrosa
Elvis Falcao de Araujo	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Pablo Almeida Gomes	Santana de Pirapama - MG	Menção Honrosa
Paulo Gabriel Ramos Monteiro	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Victor de Oliveira Bitarães	Betim - MG	Menção Honrosa

Daniel Caueh Dunaiski Figueira Leal	Curitiba - PR	Menção Honrosa
Raphael Julio Barcelos	Taguatinga - DF	Menção Honrosa
Fernando Fonseca Andrade Oliveira	Belo Horizonte - MG	Menção Honrosa
Felipe Mendes dos Santos	Gama - DF	Menção Honrosa
Felipe Abella C. Mendonça de Souza	João Pessoa - PB	Menção Honrosa
Francisco Raul Lobo Rodrigues	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Gabriel Leite de Carvalho	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
André Austregesilo Scussel	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Victorio Takahashi Chu	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Victor José Tiburtius Franco	Recife - PE	Menção Honrosa
Matheus Cavalcante Lima	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Cleberton de Santana Oliveira	São Miguel do Aleixo - SE	Menção Honrosa
Mauro Brito Júnior	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Gabriel José Guimarães Barbosa	Pequi - MG	Menção Honrosa
Lucas Colucci Cavalcante de Souza	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Sarah Villanova Borges	Juiz de Fora - MG	Menção Honrosa
Ivan Tadeu Ferreira Antunes Filho	Lins - SP	Menção Honrosa
Dalton Felipe de Menezes	São José dos Campos-SP	Menção Honrosa
Thiago de Paula Vasconcelos	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Jardiel Freitas Cunha	Recife - PE	Menção Honrosa
Ana Beatriz Prudêncio de A. Rebouças	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Rafael Sussumu Yamaguti Miada	Valinhos - SP	Menção Honrosa
Davi Sampaio de Alencar	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Bruno Ferri de Moraes	São Paulo - SP	Menção Honrosa

Nível Universitário

NOME	CIDADE – ESTADO	PREMIO
Rafael Tupynambá Dutra	Belo Horizonte - MG	Ouro
Renan Henrique Finder	Rio de Janeiro - RJ	Ouro
Regis Prado Barbosa	Fortaleza - CE	Ouro
Ramon Moreira Nunes	Fortaleza - CE	Ouro
Thomás Yoiti Sasaki Hoshina	Rio de Janeiro - RJ	Ouro
Guilherme Rodrigues N. de Souza	S.J. dos Campos - SP	Prata
Jorge Henrique Craveiro de Andrade	Rio de Janeiro - RJ	Prata
Rafael Assato Ando	Campinas - SP	Prata
Gabriel Luís Mello Dalalio	S.J. dos Campos - SP	Prata
Charles Barbosa de Macedo Brito	Rio de Janeiro - RJ	Prata
Leonardo Ribeiro de Castro Carvalho	S.J. dos Campos - SP	Prata
Marcelo Matheus Gauy	São José do Rio Preto-SP	Prata
Leandro Farias Maia	Rio de Janeiro - RJ	Prata
Adenilson Arcajo de Moura Júnior	Fortaleza - CE	Bronze
Paulo André Carvalho de Melo	Piedade - RJ	Bronze
Joas Elias dos Santos Rocha	Muribeca - SE	Bronze

Guilherme Lourenço Mejia	S.J. dos Campos - SP	Bronze
Reinan Ribeiro Souza Santos	Lagarto - SE	Bronze
Rafael Alves da Ponte	Fortaleza - CE	Bronze
Davi Lopes Alves de Medeiros	Fortaleza - CE	Bronze
Luca Mattos Moller	Nova Friburgo - RJ	Bronze
Renato Rebouças de Medeiros	Fortaleza - CE	Bronze
Danilo Furlan Kaio	São Paulo - SP	Bronze
Rafael Endlich Pimentel	Vitória - ES	Bronze
Paulo Sérgio de Castro Moreira	Fortaleza - CE	Bronze
Carlos Coelho Lechner	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Thiago Ribeiro Ramos	Varginha - MG	Menção Honrosa
Hugo Fonseca Araújo	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Alysson Espíndola de Sá Silveira	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Jordan Freitas Piva	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Érik Fernando de Amorim	Araraquara - SP	Menção Honrosa
Daniel Ungaretti Borges	Belo Horizonte - MG	Menção Honrosa
Antônio Deromir Neves Silva Júnior	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Rafael Parpinel Cavina	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Isaque Santa Brigida Pimentel	Barcarena - PA	Menção Honrosa
Mateus Oliveira de Figueiredo	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Davi Dos Santos Lima	Maceió - AL	Menção Honrosa
Bruno da Silva Santos	Belford Roxo - RJ	Menção Honrosa
Francisco Osman Pontes Neto	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Breno Vieira de Aguiar	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Ricardo Turolla Bortolotti	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Guilherme Philippe Figueiredo	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Daniel de Barros Soares	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Hudson do Nascimento Lima	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Eduardo Fischer	Encantado - RS	Menção Honrosa
Luty Rodrigues Ribeiro	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
José Leandro Pinheiro	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Caio Ishizaka Costa	S.J. dos Campos - SP	Menção Honrosa
Gabriel Caser Brito	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Leonardo Donisete da Silva	Campinas - SP	Menção Honrosa
Alan Anderson da Silva Pereira	União dos Palmares - AL	Menção Honrosa
Diego Andrés de Barros Lima Barbosa	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Renato Dias Costa	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Ivan Guilhon Mitoso Rocha	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Willy George do Amaral Petrenko	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Leonardo Borges Avelino	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Jose Armando Barbosa Filho	Fortaleza - CE	Menção Honrosa

AGENDA OLÍMPICA

XXXIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

NÍVEIS 1, 2 e 3
Primeira Fase – sábado, 18 de junho de 2011
Segunda Fase – sábado, 3 de setembro de 2011
Terceira Fase – sábado, 15 de outubro de 2011 (níveis 1, 2 e 3)
domingo, 16 de outubro de 2011 (níveis 2 e 3 - segundo dia de prova)

NÍVEL UNIVERSITÁRIO
Primeira Fase – sábado, 3 de setembro de 2011
Segunda Fase – sábado, 15 e domingo, 16 de outubro de 2011

IV ROMANIAN MASTER OF MATHEMATICS (RMM)
23 a 28 de fevereiro de 2011(Bucareste, Romênia)

ASIAN PACIFIC MATH OLYMPIAD (APMO)
12 de março de 2011

XVII OLIMPÍADA DE MAIO
7 de maio de 2011

XXII OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL
14 a 20 de agosto de 2011(La Paz, Bolívia)

LII OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA
13 a 24 de julho de 2011(Amsterdam, Holanda)

I OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DA LUSOFONIA
20 a 31 de julho de 2011(Coimbra, Portugal)

XVII OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA (IMC)
24 a 30 de julho de 2011(Blagoevgrad, Bulgária)

XXV OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA
23 de setembro a 1 de outubro de 2011(São José, Costa Rica)

III COMPETIÇÃO IBEROAMERICANA INTERUNIVERSITÁRIA DE MATEMÁTICA
2 a 8 de outubro de 2011(Quito, Equador)

XIII OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
26 de novembro de 2011

COORDENADORES REGIONAIS

Alberto Hassen Raad	(UFJF)	Juiz de Fora – MG
Américo López Gálvez	(USP)	Ribeirão Preto – SP
Antonio Carlos Nogueira	(UFU)	Uberlândia – MG
Benedito Tadeu Vasconcelos Freire	(UFRN)	Natal – RN
Bruno Holanda	(CAEN – UFC)	Fortaleza – CE
Carmen Vieira Mathias	(UNIFRA)	Santa María – RS
Claus Haetinger	(UNIVATES)	Lajeado – RS
Cláudio de Lima Vidal	(UNESP)	S.J. do Rio Preto – SP
Denice Fontana Nisxota Menegais	(UNIPAMPA)	Bagé – RS
Disney Douglas Lima de Oliveira	(UFAM)	Manaus – AM
Edson Roberto Abe	(Colégio Objetivo de Campinas)	Campinas – SP
Edney Aparecido Santulo Jr.	(UEM)	Maringá – PR
Fábio Brochero Martínez	(UFMG)	Belo Horizonte – MG
Florêncio Ferreira Guimarães Filho	(UFES)	Vitória – ES
Francinildo Nobre Ferreira	(UFSJ)	São João del Rei – MG
Genildo Alves Marinho	(Centro Educacional Leonardo Da Vinci)	Taguatingua – DF
Herivelto Martins	(USP – São Carlos)	São Carlos – SP
Gilson Tumelero	(UTFPR)	Pato Branco – PR
Ivanilde Fernandes Saad	(UC. Dom Bosco)	Campo Grande – MS
João Benício de Melo Neto	(UFPI)	Teresina – PI
João Francisco Melo Libonati	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Diogo Diniz	(UFPB)	Campina Grande – PB
José Luiz Rosas Pinho	(UFSC)	Florianópolis – SC
José Vieira Alves	(UFPB)	Campina Grande – PB
José William Costa	(Instituto Pueri Domus)	Santo André – SP
Krerley Oliveira	(UFAL)	Maceió – AL
Licio Hernandes Bezerra	(UFSC)	Florianópolis – SC
Luciano G. Monteiro de Castro	(Sistema Elite de Ensino)	Rio de Janeiro – RJ
Luzinalva Miranda de Amorim	(UFBA)	Salvador – BA
Marcelo Dias	(Grupo Educacional Etapa)	São Paulo – SP
Marcelo Antonio dos Santos	FACOS	Osório – RS
Marcelo Rufino de Oliveira	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Newman Simões	(Cursinho CLQ Objetivo)	Piracicaba – SP
Nivaldo Costa Muniz	(UFMA)	São Luis – MA
Osnel Broche Cristo	(UFLA)	Lavras – MG
Uberlândio Batista Severo	(UFPB)	João Pessoa – PB
Raul Cintra de Negreiros Ribeiro	(Colégio Anglo)	Atibaia – SP
Reginaldo de Lima Pereira	(Escola Técnica Federal de Roraima)	Boa Vista – RR
Reinaldo Gen Ichiro Arakaki	(UNIFESP)	SJ dos Campos – SP
Ricardo Amorim	(Centro Educacional Logos)	Nova Iguaçu – RJ
Ronaldo Alves Garcia	(UFGO)	Goiânia – GO
Rogério da Silva Ignácio	(Col. Aplic. da UFPE)	Recife – PE
Rosangela Ramon	(UNOCHAPECÓ)	Chapecó – SC
Sérgio Cláudio Ramos	(IM-UFRGS)	Porto Alegre – RS
Seme Gebara Neto	(UFMG)	Belo Horizonte – MG
Tadeu Ferreira Gomes	(UEBA)	Juazeiro – BA
Tomás Menéndez Rodrigues	(U. Federal de Rondônia)	Porto Velho – RO
Valdenberg Araújo da Silva	(U. Federal de Sergipe)	São Cristóvão – SE
Wagner Pereira Lopes	(CEFET – GO)	Jataí – GO
Wanderson Breder	(CEFET – RJ)	Nova Friburgo – RJ
William Serafim dos Reis	(UFT – TO)	Arraias – TO