CONTEÚDO

XXXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e soluções da Primeira Fase

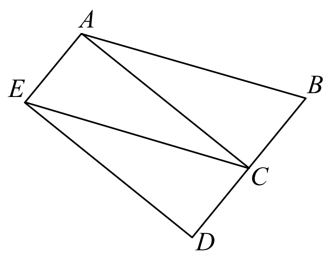
PROBLEMAS – NÍVEL 1

1. Se $\frac{1}{8}$ de um número é $\frac{1}{5}$, quanto vale $\frac{5}{8}$ desse número?

A) $\frac{1}{8}$ **B)** $\frac{1}{5}$ **C)** 1 **D)** $\frac{8}{5}$ **E)** 2

2. Na figura, C é um ponto do segmento BD tal que $ACDE$ é um retângulo e $ABCE$ é um paralelogramo de área 22 cm^2. Qual é a área de $ABDE$, em cm^2?

A) 28 **B)** 33 **C)** 36
D) 42 **E)** 44



3. Numa festa, o número de pessoas que dançam é igual a 25% do número de pessoas que não dançam. Qual é a porcentagem do total de pessoas na festa que não dançam?

A) 50% **B)** 60% **C)** 75% **D)** 80% **E)** 84%

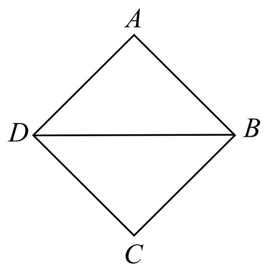
4. De quantas maneiras dois casais podem sentar-se em quatro cadeiras em fila se marido e mulher devem sentar-se em cadeiras vizinhas?

A) 2 **B)** 4 **C)** 8 **D)** 12 **E)** 24

5. Eliana tem 27 cubos iguais em tamanho, mas 4 são brancos e os demais, pretos. Com esses 27 cubos, ela monta um cubo maior. No máximo, quantas faces inteiramente pretas ela poderá obter?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

6. A figura abaixo é o mapa de um bairro: os pontos A, B, C e D são as casas e os segmentos são as ruas. De quantas casas é possível fazer um caminho que passa exatamente uma vez por cada uma das ruas? É permitido passar mais de uma vez por uma mesma casa.

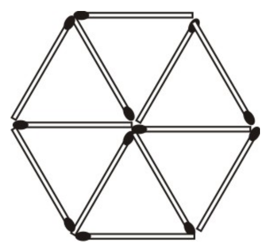


A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

7. Se $a = 2^{40}$, $b = 3^{20}$ e $c = 7^{10}$, então:
A) $c < b < a$ **B)** $a < c < b$ **C)** $b < a < c$ **D)** $b < c < a$ **E)** $c < a < b$

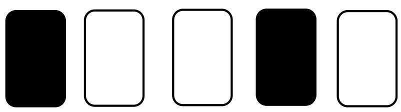
8. Esmeralda lançou um dado dez vezes e obteve 57 como soma de todos os pontos obtidos nesses lançamentos. No mínimo, quantas vezes saíram 6 pontos?
A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

9. Usando palitos de fósforos, podemos construir um hexágono regular, formado por seis triângulos equiláteros unitários, como mostra a figura. Juntando mais palitos a esse hexágono, queremos obter outro hexágono regular com o quádruplo da área, também formado por triângulos equiláteros unitários. Quantos palitos deverão ser acrescentados?



A) 12 **B)** 24 **C)** 30
D) 36 **E)** 48

10. Cinco cartas iguais têm um lado branco e um lado preto. Elas se encontram em fila com a face branca para cima. Um movimento consiste em escolher um único par de cartas vizinhas e virá-las. No mínimo, quantos movimentos são necessários para que as cartas fiquem como na figura ao lado?

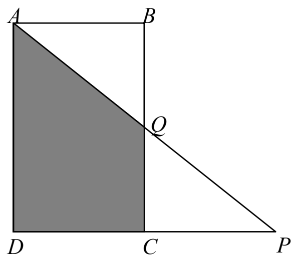


A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** Não é possível obter a configuração acima.

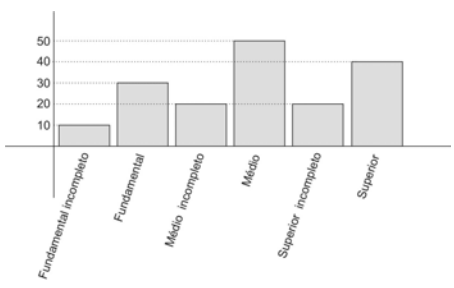
11. Uma barra de chocolate é dividida entre Nelly, Penha e Sônia. Sabendo que Nelly ganha $\frac{2}{5}$ da barra, Penha ganha $\frac{1}{4}$ e Sônia ganha 70 gramas, o peso da barra, em gramas, é:
A) 160 **B)** 200 **C)** 240 **D)** 280 **E)** 400

12. Numa fila para compra de ingressos para um jogo da seleção brasileira, havia 49 pessoas: 25 corintianos, 14 flamenguistas e 10 gremistas. Sabendo que cada pessoa da fila torce para um único time, dois torcedores do mesmo time não estão em posições consecutivas, podemos concluir que:
A) tal fila não existe.
B) algum dos torcedores das extremidades da fila é gremista.
C) algum dos torcedores das extremidades da fila é flamenguista.
D) algum flamenguista é vizinho de um gremista.
E) algum gremista é vizinho de dois corintianos.

13. Na figura, P é um ponto da reta CD. A região cinza é comum ao retângulo $ABCD$ e ao triângulo ADP.
Se $AB = 5$ cm, $AD = 8$ cm e a área da região cinza é $\frac{3}{4}$ da área do retângulo, quanto vale a distância PC?
A) 1 cm **B)** 2 cm **C)** 3 cm
D) 4 cm **E)** 5 cm



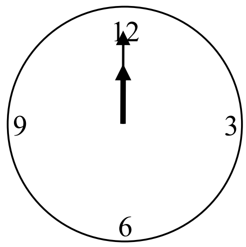
14. Numa pesquisa sobre o grau de escolaridade, obtiveram-se os resultados expressos no gráfico abaixo:
Que fração do total de entrevistados representa o total de pessoas que terminaram pelo menos o Ensino Fundamental?



A) $\frac{1}{17}$ **B)** $\frac{3}{13}$ **C)** $\frac{5}{16}$ **D)** $\frac{11}{13}$ **E)** $\frac{16}{17}$

15. Um número natural A de três algarismos *detona* um número natural B de três algarismos se cada algarismo de A é maior do que o algarismo correspondente de B. Por exemplo, 876 detona 345; porém, 651 não detona 542 pois $1 < 2$. Quantos números de três algarismos detonam 314?
A) 120 **B)** 240 **C)** 360 **D)** 480 **E)** 600

16. O relógio de parede indica inicialmente meio-dia. Os ponteiros das horas e dos minutos irão formar um ângulo de 90 graus pela primeira vez:
A) entre 12h e 12h10min.
B) entre 12h10min e 12h15min.
C) entre 12h15min e 12h20min.
D) entre 12h20min e 12h25min.
E) após as 12h25min.



17. Eduardo escreveu todos os números de 1 a 2009 numa folha de papel. Com os amigos, combinou o seguinte: cada um deles poderia apagar quantos números quisesse e escrever, no fim da lista, o algarismo das unidades da soma dos números apagados. Por exemplo, se alguém apagasse os números 28, 3, 6, deveria escrever no fim da lista o número 7, pois $28 + 3 + 6 = 3\underline{7}$. Após algum tempo, sobraram somente dois números. Se um deles era 2000, qual dos números a seguir poderia ser o outro?
A) 0 **B)** 1 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 6

18. Uma folha de caderno de Carlos é um retângulo com dois lados (bordas) amarelos de 24 cm e dois lados (bordas) vermelhos de 36 cm. Carlos pinta cada ponto do retângulo na mesma cor do lado mais próximo desse ponto. Qual é a área da região pintada de amarelo?
A) 144 cm^2 **B)** 288 cm^2 **C)** 364 cm^2 **D)** 442 cm^2 **E)** 524 cm^2

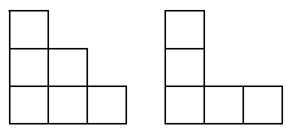
19. O professor Piraldo aplicou uma prova de 6 questões para 18 estudantes. Cada questão vale 0 ou 1 ponto; não há pontuações parciais. Após a prova, Piraldo elaborou uma tabela como a seguinte para organizar as notas, em que cada linha representa um estudante e cada coluna representa uma questão.

Questões→ Estudantes ↓	1	2	3	4	5	6
Arnaldo	0	1	1	1	1	0
Bernaldo	1	1	1	0	0	1
Cernaldo	0	1	1	1	1	0
⋮			⋮			

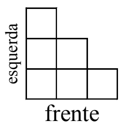
Piraldo constatou que cada estudante acertou exatamente 4 questões e que cada questão teve a mesma quantidade *m* de acertos. Qual é o valor de *m*?

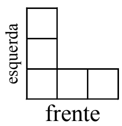
A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 14

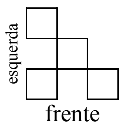
20. Alguns cubos foram empilhados formando um bloco. As figuras ao lado representam a vista da esquerda e da frente desse bloco. Olhando o bloco de cima, qual das figuras a seguir **não** pode ser vista?

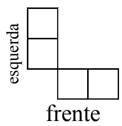


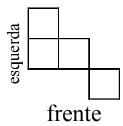
vista da esquerda **vista da frente**

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

PROBLEMAS – NÍVEL 2

1. Veja o Problema No. 1 do Nível 1.
2. Veja o Problema No. 9 do Nível 1.
3. Veja o problema No. 4 do Nível 1.
4. Se $\frac{1}{x+5} = 4,$ o valor de $\frac{1}{x+6}$ é:

A) $\frac{1}{5}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{2}{3}$ **D)** $\frac{4}{5}$ **E)** 1

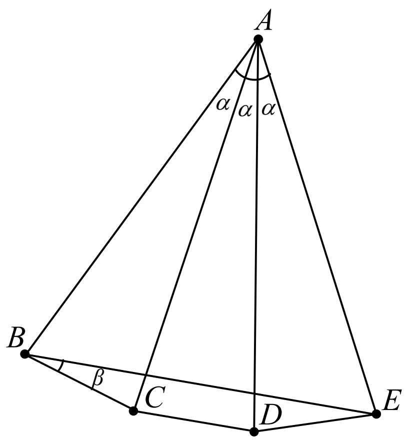
5. Veja o Problema No. 6 do Nível 1.

6. Os inteiros positivos *m* e *n* satisfazem 15*m* = 20*n*. Então é possível afirmar, com certeza, que *mn* é múltiplo de:

A) 5 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 15 **E)** 20

7. Veja o problema No. 15 do Nível 1.
8. Veja o Problema No. 11 do Nível 1.
9. Veja o Problema No. 8 do Nível 1.

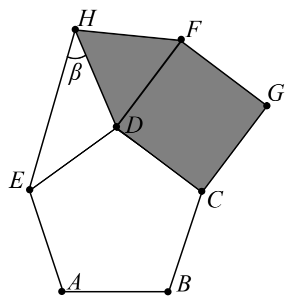
10. Na figura abaixo, $\alpha = 18^\circ$ e $AB = AC = AD = AE$. O valor do ângulo β é:



A) 18º **B)** 36º **C)** 15º **D)** 20º **E)** 30º

11. Veja o Problema No. 10 do Nível 1.

12. Na figura abaixo, *ABCDE* é um pentágono regular, *CDFG* é um quadrado e *DFH* é um triângulo equilátero. O valor do ângulo β é:

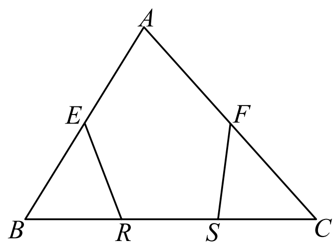


A) 30º **B)** 36º **C)** 39º **D)** 45º **E)** 60º

13. Veja o problema No. 12 do Nível 1.
14. Veja o Problema No. 13 do Nível 1.

15. A famosa *Conjectura de Goldbach* diz que todo número inteiro par maior que 2 pode ser escrito como a soma de dois números primos. Por exemplo, 18 pode ser representado por 5 + 13 ou, ainda, por 7 + 11. Considerando todas as possíveis representações de 126, qual a maior diferença entre os dois primos que a formam?
A) 112 **B)** 100 **C)** 92 **D)** 88 **E)** 80

16. Na figura ao lado, E é o ponto médio de AB, F é o ponto médio de AC e $BR = RS = SC$. Se a área do triângulo ABC é 252, qual é a área do pentágono $AERSF$?
A) 168
B) 189
C) 200
D) 210
E) 220



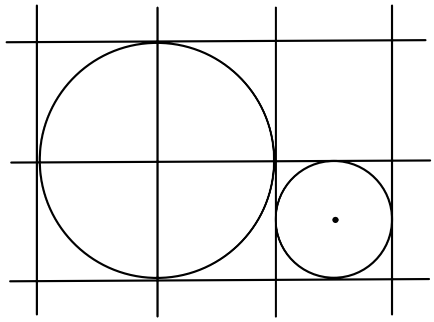
17. Quantos pares ordenados (x, y) de números reais satisfazem a equação
$$\left(x-y^2\right)^2+\left(x-y-2\right)^2=0?$$
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** infinitos

18. Veja o Problema No. 19 do Nível 1.

19. Entre os inteiros positivos $n+4018$, $n=1,2,...,2009^2$, quantos são quadrados perfeitos?
A) 1945 **B)** 1946 **C)** 1947 **D)** 1948 **E)** 1949

20. Para cada número natural n, seja S_n a soma dos dez primeiros múltiplos positivos de n. Por exemplo, S_2 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20. Quanto é $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{10}$?
A) 2925 **B)** 3025 **C)** 3125 **D)** 3225 **E)** 3325

21. Em uma folha quadriculada em que cada quadrado tem lado 2cm, são desenhados dois círculos como na figura ao lado. A distância mínima entre os dois círculos mede:



A) 3cm
B) $\sqrt{10}$ cm
C) $\left(\sqrt{10}+3\right)$cm
D) $\left(\sqrt{10}-2\right)$ cm
E) $\left(\sqrt{10}-3\right)$cm

22. Quantos números naturais de 1 a 100, inclusive, podem ser escritos na forma de potência a^b, com $a, b \in \mathbb{N}$ e $a, b > 1$?
A) 10 **B)** 12 **C)** 14 **D)** 16 **E)** 18

23. Veja o Problema No. 18 do Nível 1.

24. Os inteiros $0 < x < y < z < w < t$ são tais que $w = z(x + y)$ e $t = w(y + z)$. Sendo $w = 9$, então t é igual a
A) 45 **B)** 54 **C)** 63 **D)** 72 **E)** 81

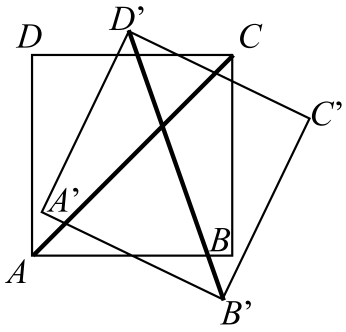
25. Veja o Problema No. 20 do Nível 1.

PROBLEMAS – NÍVEL 3

1. Veja o problema No. 15 do Nível 1.
2. Veja o problema No. 6 do Nível 2.

3. Se $x^2 = x + 3$ então x^3 é igual a:
A) $x^2 + 3$ **B)** $x + 4$ **C)** $2x + 2$ **D)** $4x + 3$ **E)** $x^2 - 2$

4. Na figura, o quadrado *A*'*B*'*C*'*D*' foi obtido a partir de uma rotação no sentido horário do quadrado *ABCD* de 25 graus em torno do ponto médio de *AB*. Qual é o ângulo agudo, em graus, entre as retas *AC* e *B*'*D*'?

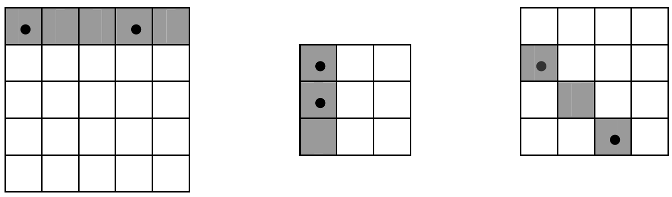


A) 5 **B)** 25 **C)** 45 **D)** 65 **E)** 85

5. Um dos cinco números a seguir é divisor da soma dos outros quatro. Qual é esse número?
A) 20 **B)** 24 **C)** 28 **D)** 38 **E)** 42

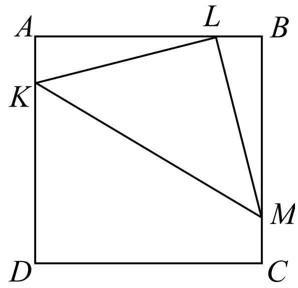
6. Sempre que Agilulfo volta para casa depois da escola com uma advertência, se sua mãe está em casa, ela o coloca de castigo. Sabendo-se que ontem à tarde Agilulfo não foi colocado de castigo, qual das seguintes afirmações é certamente verdadeira?
A) Agilulfo recebeu advertência ontem.
B) Agilulfo não recebeu advertência ontem.
C) Ontem à tarde a sua mãe estava em casa.
D) Ontem à tarde a sua mãe não estava em casa.
E) Nenhuma das afirmações acima é certamente verdadeira.

7. Qual é o menor valor de $n > 1$ para o qual é possível colocar n peças sobre um tabuleiro $n \times n$ de modo que não haja duas peças sobre a mesma linha, mesma coluna ou mesma diagonal? As figuras a seguir mostram pares de peças na mesma linha, na mesma coluna e na mesma diagonal em diversos tabuleiros.



A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

8. Na figura a seguir, $ABCD$ é um quadrado de lado 4, K pertence ao lado AD, L pertence ao lado AB, M pertence ao lado BC e KLM é um triângulo retângulo isósceles, sendo L o ângulo reto. Então a área do quadrilátero $CDKM$ é igual a



A) 6
B) 8
C) 10
D) 12
E) 14

9. Veja o Problema No. 6 do Nível 1.
10. Veja o Problema No. 16 do Nível 1.

11. Considere o número inteiro positivo n tal que o número de divisores positivos do dobro de n é igual ao dobro do número de divisores positivos de n. Podemos concluir que n é
A) um número primo **B)** um número par **C)** um número ímpar
D) um quadrado perfeito **E)** potência inteira de 2

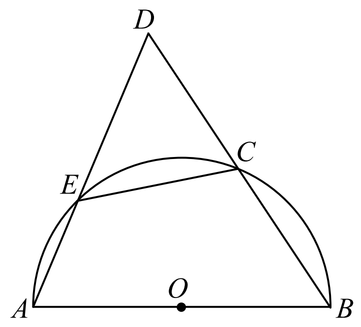
12. Esmeralda tem cinco livros sobre heráldica em uma estante. No final de semana, ela limpou a estante e, ao recolocar os livros, colocou dois deles no lugar onde estavam antes e os demais em lugares diferentes de onde estavam. De quantas maneiras ela pode ter feito isso?
A) 20 **B)** 25 **C)** 30 **D)** 34 **E)** 45

13. Veja o Problema No. 19 do Nível 1.

14. Seja $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ uma função tal que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ e $f(x + 12) = f(x + 21) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{Z}$. Então $f(2009)$ é:
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 2009

15. Na figura, $CD = BC$, $\angle BAD = 72^\circ$, AB é o diâmetro e O o centro do semicírculo. Determine a medida do ângulo $\angle DEC$.

A) 36º
B) 42º
C) 54º
D) 63º
E) 18º



16. Sabe-se que $2x^2 - 12xy + ky^2 \geq 0$ para todos x, y reais. O menor valor real de k é

A) 9 **B)** 16 **C)** 18 **D)** 27 **E)** 36

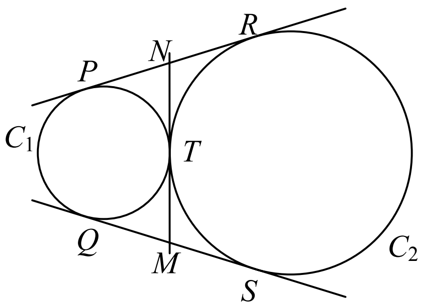
17. Veja o problema No. 15 do Nível 2.

18. Um subconjunto de $\{1,2,3,\ldots,20\}$ é *superpar* quando quaisquer dois de seus elementos têm produto par. A maior quantidade de elementos de um subconjunto superpar é:

A) 3 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 11

19. Veja o problema No. 20 do Nível 2.

20. Os círculos C_1 e C_2, de raios 3 e 4, respectivamente, são tangentes externamente em T. As tangentes externas comuns tocam C_1 em P e Q e C_2 em R e S. A tangente interna comum em T corta as tangentes externas nos pontos M e N, como mostra a figura. A razão entre as áreas dos quadriláteros $MNPQ$ e $MNRS$ é:



A) $\frac{1}{7}$ **B)** $\frac{9}{16}$ **C)** $\frac{3}{4}$ **D)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **E)** $\frac{13}{15}$

21. Dois carros deixam simultaneamente as cidades A e B indo de uma cidade em direção à outra, com velocidades constantes, e em sentidos opostos. As duas cidades são ligadas por uma estrada reta. Quando o carro mais rápido chega ao ponto médio M de AB, a distância entre os dois carros é de 96 km. Quando o carro mais lento chega ao ponto M, os carros estão a 160 km um do outro. Qual a distância, em km, entre as duas cidades?

A) 320 **B)** 420 **C)** 480 **D)** 520 **E)** 560

22. Seja $N = 8^{8^{\cdot^{\cdot^{8}}}}$, em que aparecem 2009 números 8. Agilulfo ficou de castigo: ele deve escrever a soma dos dígitos de N, obtendo um número M; em seguida, deve calcular a soma dos dígitos de M; e deve repetir o procedimento até obter um número de um único dígito. Vamos ajudar Agilulfo: esse dígito é

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 7 **E)** 8

23. Veja o Problema No. 20 do Nível 1.
24. Veja o Problema No. 18 do Nível 1.

25. Os lados de um triângulo formam uma progressão aritmética de razão t. Então a distância entre o incentro e o baricentro deste triângulo é:

A) t **B)** $\frac{t}{2}$ **C)** $\frac{t}{3}$ **D)** $\frac{2t}{3}$ **E)** faltam dados

GABARITO

NÍVEL 1 – (6º. ou 7º. Anos)

1) C	6) C	11) B	16) C
2) B	7) A	12) E	17) D
3) D	8) C	13) E	18) B
4) C	9) C	14) E	19) D
5) D	10) B	15) B	20) C

NÍVEL 2 – (8º. ou 9º. Anos)

1) C	6) C	11) B	16) A	21) E
2) C	7) B	12) C	17) C	22) B
3) C	8) B	13) E	18) D	23) B
4) D	9) C	14) E	19) B	24) A
5) C	10) A	15) B	20) B	25) C

NÍVEL 3 – (Ensino Médio)

1) B	6) E	11) C	16) C	21) C
2) C	7) B	12) A	17) B	22) A
3) D	8) B	13) D	18) E	23) C
4) D	9) C	14) C	19) B	24) B
5) D	10) E	15) C	20) E	25) C

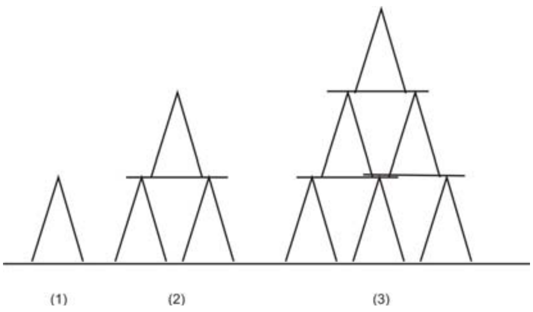
XXXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e soluções da Segunda Fase

PROBLEMAS – NÍVEL 1 – PARTE A
(Cada problema vale 5 pontos)

01. A figura ao lado mostra castelos de cartas de 1, 2 e 3 andares. Para montar esses castelos, foram usadas 2, 7 e 15 cartas, respectivamente.

Quantas cartas serão necessárias para montar um castelo de 5 andares?



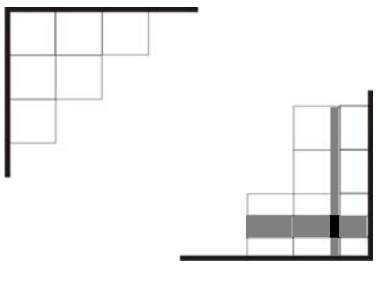
02. Numa classe do 6º ano, de cada 11 estudantes, 4 são meninas. Se há 15 meninos a mais que meninas, quantos alunos há na classe?

03. Num curso com duração de cinco dias, a frequência dos alunos foi registrada na tabela abaixo:

Dia de aula	1º dia	2º dia	3º dia	4º dia	5º dia
Quantidade de alunos presentes	271	296	325	380	168

Cada aluno faltou exatamente dois dias. No dia de menor frequência, de quantos por cento foi o total de faltas?

04. Mariazinha deseja cobrir o tampo de uma mesa retangular de 88 cm por 95 cm colando quadrados de cartolina de lado 10 cm, a partir de um canto, como mostrado na figura. Ela cola os quadrados sem buracos nem superposições, até chegar às bordas opostas. Aí, em vez de cortar as folhas para não ultrapassar as bordas, ela as sobrepõe, formando regiões retangulares com duas folhas de espessura (região cinza) e uma pequena região retangular com quatro folhas de espessura (região preta). Qual é a área da região coberta por quatro folhas?



05. O número 200920092009... 2009 tem 2008 algarismos. Qual é a menor quantidade de algarismos que devem ser apagados, de modo que a soma dos algarismos que restarem seja 2008?

06. Dizemos que dois ou mais números, com a mesma quantidade de algarismos, são membros da mesma família, quando todos possuem pelo menos um algarismo comum. Por exemplo, os números 72, 32, 25 e 22 pertencem à mesma família, pois todos possuem o algarismo 2, enquanto que os números 123, 245 e 568 não pertencem à mesma família, pois não há um algarismo que apareça nesses três números. Qual é a maior quantidade de membros de uma família, cujos elementos têm três algarismos?

PROBLEMAS – NÍVEL 1 – PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1
Carlinhos tem folhas iguais na forma de triângulos retângulos de lados 6 cm, 8 cm e 10 cm. Em cada triângulo, o ângulo assinalado opõe-se ao menor lado. Fazendo coincidir lados iguais desses triângulos sobre uma mesa, sem superpor as folhas, ele desenha o contorno de cada figura obtida (linha grossa), como nos exemplos ao lado. O perímetro de uma figura é o *comprimento* do seu contorno.

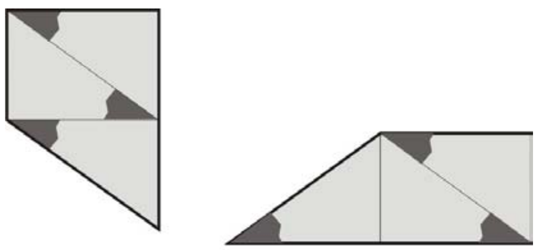


fig 1 fig 2

a) Qual é a diferença entre os perímetros das figuras 1 e 2 do exemplo?
b) Com figuras de três triângulos, qual é o maior perímetro que pode ser obtido?

PROBLEMA 2
Esmeralda ia multiplicar um número A de três algarismos por outro número B de dois algarismos, mas na hora de multiplicar inverteu a ordem dos dígitos de B e obteve um resultado 2034 unidades maior.
a) Qual era o número A, se os dígitos de B eram consecutivos?
b) Qual seria o número A, se os dígitos de B não fossem consecutivos?

PROBLEMA 3

Um campeonato de xadrez de 7 rodadas, com 4 jogos por rodada, tem 8 participantes, cujas pontuações por jogo são as usuais: um ponto por vitória, meio ponto por empate e nenhum ponto por derrota. Cada par de jogadores se enfrenta exatamente uma vez.

a) Ao término da terceira rodada, é possível que um grupo de jogadores esteja em primeiro lugar e o restante dos jogadores esteja em segundo lugar? Explique por meio de um exemplo.

b) Ao término da terceira rodada, é possível que todos os jogadores tenham pontuações diferentes? Explique.

PROBLEMAS – NÍVEL 2 – PARTE A
(Cada problema vale 5 pontos)

01. Esmeralda tem uma garrafa com 9 litros de uma mistura que tem 50% de álcool e 50% de água. Ela quer colocar água na garrafa de tal forma que apenas 30% da mistura seja de álcool. Quantos litros de água ela irá colocar?

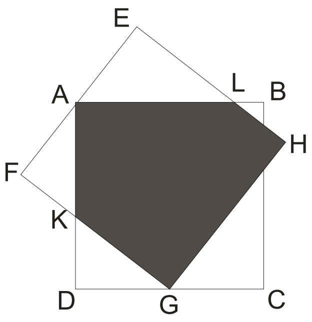
02. Se a, b, c e d são, em alguma ordem, 1, 2, 3 e 4. Qual é o maior valor possível de

$$ab + bc + cd + da?$$

03. Dizemos que dois ou mais números, com a mesma quantidade de algarismos, são membros da mesma família, quando todos possuem pelo menos um algarismo em comum. Por exemplo, os números 32, 25 e 22 pertencem à mesma família, enquanto que 123, 245 e 568 não pertencem à mesma família, pois 123 e 568 não pertencem à mesma família. Qual é a maior quantidade de membros de uma família, cujos elementos têm três algarismos?

04. Determine a quantidade de inteiros de dois algarismos que são divisíveis pelos seus algarismos.

05. Na figura abaixo, *ABCD* e *EFGH* são quadrados de lado 48 cm. Sabendo que *A* é o ponto médio de *EF* e *G* é o ponto médio de *DC*, determine a área destacada em cm^2.



PROBLEMAS – NÍVEL 2 – PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1
Sejam m e n dois inteiros positivos primos entre si. O *Teorema Chinês dos Restos* afirma que, dados inteiros i e j com $0 \le i < m$ e $0 \le j < n$, existe exatamente um inteiro a, com $0 \le a < m \cdot n$, tal que o resto da divisão de a por m é igual a i e o resto da divisão de a por n é igual a j. Por exemplo, para $m = 3$ e $n = 7$, temos que 19 é o único número que deixa restos 1 e 5 quando dividido por 3 e 7, respectivamente. Assim, na tabela a seguir, cada número de 0 a 20 aparecerá exatamente uma vez.

Restos por 7 / Restos por 3	0	1	2	3	4	5	6
0							
1						19	
2							

Qual a soma dos números das casas destacadas?

PROBLEMA 2
Observe:

$$(x - r)(x - s) = x^2 - (r + s)x + rs$$

Assim, substituindo x por r e por s, obtemos

$$\left|\begin{array}{l} r^2 - (r+s)r + rs = 0 \\ s^2 - (r+s)s + rs = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} a(r^{n+2} - (r+s)r^{n+1} + rs \cdot r^n) = 0 \\ b(s^{n+2} - (r+s)s^{n+1} + rs \cdot s^n) = 0 \end{array}\right.$$

Somando as duas equações e sendo $S_n = a \cdot r^n + b \cdot s^n$, verifica-se que

$$S_{n+2} = (r+s)S_{n+1} - rsS_n$$

Dados $S_1 = ar + bs = 1$, $S_2 = ar^2 + bs^2 = 2$, $S_3 = ar^3 + bs^3 = 5$ e $S_4 = ar^4 + bs^4 = 6$, determine $S_5 = ar^5 + bs^5$.

PROBLEMA 3

Seja N é o ponto do lado AC do triângulo ABC tal que $AN = 2NC$ e M o ponto do lado AB tal que MN é perpendicular a AB. Sabendo que AC = 12 cm e que o baricentro G do triângulo ABC pertence ao segmento MN, determine o comprimento do segmento BG.
OBS: Baricentro é o ponto de interseção das medianas do triângulo.

PROBLEMA 4

Um campeonato de xadrez de 7 rodadas, com 4 jogos por rodada, tem 8 participantes, cujas pontuações por jogo são as usuais: um ponto por vitória, meio ponto por empate e nenhum ponto por derrota. Cada par de jogadores se enfrenta exatamente uma vez.

a) Ao término da terceira rodada, é possível que todos os jogadores tenham pontuações distintas?

b) Se no final do campeonato todos os jogadores têm pontuações distintas qual o menor número possível de pontos obtidos pelo primeiro colocado?

PROBLEMAS – NÍVEL 3 – PARTE A
(Cada problema vale 5 pontos)

01. Veja o problema No. 1 do Nível 2.

02. No triângulo retângulo ABC, $\angle A = 90°$, AB = 5cm e BC = 9cm. Se I é o incentro de ABC, determine o comprimento do segmento CI.

03. Seja c a maior constante real para a qual

$$x^2 + 3y^2 \geq c\cdot(x^2 + xy + 4y^2).$$

para todos x, y reais.

Determine o inteiro mais próximo de $2009\cdot c$.

04. No programa de auditório *Toto Bola*, o apresentador *Ciço Magallanes* dispõe de duas caixas idênticas. Um voluntário da platéia é chamado a participar da seguinte brincadeira: ele recebe dez bolas verdes e dez bolas vermelhas e as distribui nas duas caixas, sem que o apresentador veja, e de modo que em cada caixa haja pelo menos uma bola. Em seguida, o apresentador escolhe uma das caixas e retira uma bola. Se a bola for VERDE, o voluntário ganha um carro. Se for VERMELHA, ele ganha uma banana. A máxima probabilidade que o voluntário tem de ganhar um carro é igual a $\frac{m}{n}$, em que m e n são inteiros positivos primos entre si. Determine o valor de $m + n$.

05. Determine o maior inteiro n menor que 10000 tal que $2^n + n$ seja divisível por 5.

PROBLEMAS – NÍVEL 3 – PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1
Determine a quantidade de números $n = a_1a_2a_3a_4a_5a_6$, de seis algarismos distintos, que podemos formar utilizando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas simultaneamente:
i) $a_1 + a_6 = a_2 + a_5 = a_3 + a_4$;
ii) n é divisível por 9.

PROBLEMA 2
Encontre todos os inteiros $a > 0$ e $b > 0$ tais que

$$4 \cdot 3^a = 11 + 5^b$$

PROBLEMA 3
Para cada inteiro positivo n, seja $A_n = \{x \in R_+ ; x \cdot \lfloor x \rfloor = n\}$, em que R_+ é o conjunto dos reais positivos e $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x.
Determine a quantidade de elementos do conjunto

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_{2009}.$$

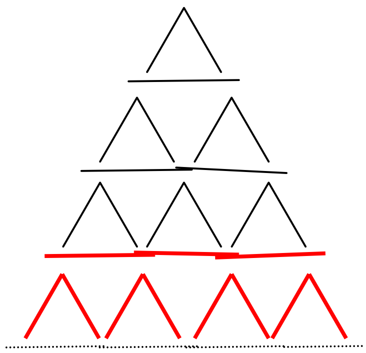
PROBLEMA 4
No triângulo ABC, temos $\angle A = 120°$ e $BC = 12\,\text{cm}$. A circunferência inscrita em ABC tangencia os lados AB e AC, respectivamente, nos pontos D e E. Sejam K e L os pontos onde a reta DE intersecta a circunferência de diâmetro BC. Determine a distância entre os pontos médios dos segmentos BC e KL.

SOLUÇÕES NÍVEL 1 – SEGUNDA FASE – PARTE A

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**
Resposta	40	55	65	10	392	252

01. Para fazer um novo andar num castelo já construído, precisamos de três cartas para cada andar anterior mais duas para o topo. Assim, a partir do castelo de 3 andares, para fazer o de 4 andares, precisamos de mais $3 \times 3 + 2 = 11$ cartas, num total de 15 + 11 = 26 cartas. Portanto, para fazer o castelo de 5 andares, precisamos de $26 + 4 \times 3 + 2 = 40$ cartas.

Solução alternativa:
Para acrescentarmos um quarto andar a um castelo de 3 andares, precisamos de 3 cartas para separar a base dos demais andares e 4 pares de cartas para a base, totalizando 3 + 2.4 = 11 cartas a mais. Veja a figura a seguir:



Analogamente, para acrescentarmos um quinto andar a um castelo de 4 andares, precisamos de 4 cartas para separar a base dos demais andares e 5 pares de cartas para a base, totalizando 4 + 2.5 = 14 cartas a mais. Assim, para montar um castelo de 5 andares, precisamos de 15 + 11 + 14 = 40 cartas.
Observação: De fato, o acréscimo de um n-ésimo andar necessita de $n-1$ cartas para apoiar a base anterior, e n pares de cartas para a nova base. Portanto, são acrescentadas $n-1+2\cdot n = 3n-1$ cartas por andar.

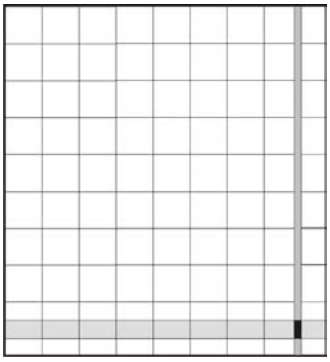
02. Seja x a quantidade de meninas. Assim, a quantidade de meninos é $x+15$ e a quantidade total de alunos será $2x+15$. Fazendo a proporção, temos:

$$\frac{x}{2x+15} = \frac{4}{11}$$

Resolvendo a equação, obtemos $x = 20$.

03. Se cada aluno compareceu exatamente três dias, o número total de alunos do curso é $\frac{271+296+325+380+168}{3}=\frac{1440}{3}=480$. A menor frequência foi de 168 alunos, num total de 480 – 168 = 312 faltas. Portanto, o percentual de faltas nesse dia foi $\frac{312}{480}=0,65=65\%$.

04. Na direção da medida 88 cm, Mariazinha irá usar 9 folhas e na direção da medida 95 cm, irá usar 10 folhas. Mariazinha começa colando as folhas sem sobreposição da esquerda para a direita e de cima para baixo (como na figura) e ao chegar às bordas direita e inferior, desloca, respectivamente, 2 cm à esquerda e 5 cm para cima (as regiões em cinza representam as sobreposições de 2 folhas). A região retangular preta é a intersecção dessas duas faixas de sobreposição, logo é coberta por 4 folhas. Sua área é de 10 cm^2.



05. No número existem 502 algarismos 2 e 502 algarismos 9. Para retirar a menor quantidade possível de algarismos, devemos tentar deixar a maior quantidade possível de algarismos 2. Porém, a soma de todos os algarismos 2 é 1004. Ainda falta 1004 para completar a soma 2008. Como $1004=9\times111+5$ devemos deixar pelo menos 111 algarismos 9. Porém, é impossível deixar exatamente 111 algarismos 9. Se deixarmos 112 algarismos 9, devemos deixar 500 algarismos 2. Portanto, deve-se retirar no mínimo $2+390=392$ algarismos.

06. Como todos os membros de uma família devem possuir pelo menos um algarismo comum, a maior quantidade de membros de uma família cujos elementos têm três algarismos é igual ao número de elementos de qualquer conjunto formado por todos os números de três algarismos que possuem um determinado algarismo em sua representação decimal. O algarismo das centenas não pode ser zero. Vamos contar então todos os números que têm um determinado algarismo a, não nulo, pois há mais deles. Há $9 \times 9 = 81$ números em que a aparece uma única vez, como algarismo das centenas. Há $8 \times 9 = 72$ números em que a aparece uma única vez, como algarismo das dezenas (lembre-se que o das centenas não pode ser 0) e há 72 números em que o a aparece uma única vez, como algarismo das unidades.

Há 9 números com a na centena e na dezena, menos na unidade, 9 números com a na centena e na unidade, menos na dezena e 8 números com a na dezena e na unidade, menos na centena e um único número formado inteiramente de a. A quantidade total de números em que figura o algarismo não nulo a é 81 + 72 + 72 + 9 + 9 + 8 + 1 = 252.

Solução alternativa:

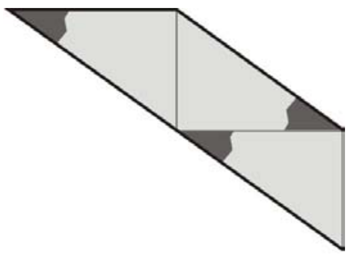
Para simplificar o raciocínio, vamos contar quantos números de três algarismos <u>não</u> contêm um algarismo *a,* não nulo, fixado. Assim, nessa situação, existem 8 escolhas para o algarismo das centenas (não pode ser 0 ou a), 9 escolhas para o algarismo das dezenas (não pode ser a), e 9 escolhas para os algarismos das unidades (não pode ser a). Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, há 8.9.9 = 648 números que não possuem o algarismo *a.* Assim, como existem 900 números de 3 algarismos, há 900 – 648 = 252 números que possuem o algarismo a ($a \neq 0$). Essa é a maior quantidade de membros que uma família pode ter.

Observação:

Podemos verificar que a família formada por todos os números de três algarismos que possuem o zero tem $900 - 9 \cdot 9 \cdot 9 = 171$ membros.

SOLUÇÕES NÍVEL 1 – SEGUNDA FASE – PARTE B

PROBLEMA 1



a) O perímetro da primeira figura é $8+6+6+10+6=36$ e da segunda figura é $10+8+6+8+8=40$. Portanto a diferença é $40-36=4$.

b) A figura de maior perímetro é obtida quando fazemos coincidir os dois menores lados de cada um dos triângulos. Isso é mostrado na figura ao lado cujo perímetro é $10+10+10+8+6=44$ (há outras com o mesmo perímetro).

PROBLEMA 2

Seja A o número de três dígitos e $B=10x+y$ o número de dois dígitos. Portanto, ao trocar a ordem dos dígitos de B, obtemos o número $10y+x$. Montando a equação segundo as condições do problema, temos:

$$A(10x+y)-A(10y+x)=9A(x-y)=2034$$

Com isso,

$$A(x-y)=226=2\cdot 113$$

Daí, se x, y são consecutivos, $A=226$, caso contrário $A=113$.

PROBLEMA 3

a) Sim, é possível. Por exemplo (há outros), podem existir quatro jogadores com pontuação 2 e outros quatro com pontuação 1. Fazendo A, B, C, D o primeiro grupo e E, F, G, H o segundo grupo, temos:

1ª Rodada
A vence E
B vence F
C vence G
D vence H

2ª Rodada
A empata com B
E empata com F
C empata com D
G empata com H

3ª Rodada
A empata com F
B empata com E
C empata com H
D empata com G

b) Após três rodadas, um jogador pode acumular no máximo 3 pontos. Como as pontuações são múltiplos inteiros de $\frac{1}{2}$, os possíveis valores de pontuação após a terceira rodada são: $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3$ (7 resultados possíveis)

Como existem 8 jogadores e apenas 7 possibilidades, dois jogadores terão pontuações iguais.

SOLUÇÕES NÍVEL 2 – SEGUNDA FASE – PARTE A

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**
Resposta	06	25	252	14	1704

01. Inicialmente temos 4,5 litros de água e 4,5 litros de álcool. Colocados *x* litros de água, para termos 30% de álcool na mistura, basta que $\frac{30}{100}(9+x) = 4{,}5$, então $x = 6$.

02. É fácil ver que $ab + bc + cd + da = b(a+c) + b(c+a) = (a+c)(b+d)$. Suponha sem perda de generalidade que $a = 1$.. Com isso, $\{a,c\} = \{1,2\}, \{1,3\}$ ou $\{1,4\}$ e conseqüentemente $\{b,d\} = \{3,4\}, \{2,4\}$ ou $\{2,3\}$, respectivamente. Assim os possíveis valores do produto são 21, 24 e 25 e o máximo é 25.

03. O algarismo das centenas não pode ser zero. Vamos contar então todos os números que têm um determinado algarismo *x*, não nulo, pois há mais deles. Há $9 \times 9 = 81$ números em que *x* aparece uma única vez, como algarismo das centenas. Há $8 \times 9 = 72$ números em que *x* aparece uma única vez, como algarismo das dezenas (lembre-se que o das centenas não pode ser 0) e há 72 números em que o *x* aparece uma única vez, como algarismo das unidades. Há 9 números com *x* na centena e na dezena, menos na unidade, 9 números com *x* na centena e na unidade, menos na dezena e 8 números com *x* na dezena e na unidade, menos na centena e um único número formado inteiramente de *x*. A quantidade total de números em que figura o algarismo não nulo *x* é 81 + 72 + 72 + 9 + 9 + 8 + 1 = 252

04. Seja $n = 10A + B$ o número de dois dígitos. Se A divide n, então A divide B. Se $A > 5$, então $B = A$, pois B não pode ser 0 e $B < 10 < 2A$.

Listemos as possibilidades:

Se $A = 1$ então AB pode ser 11, 12, 15.
Se $A = 2$, então AB pode ser 22, 24.
Se $A = 3$, então AB pode ser 33, 36.
Se $A = 4$, então AB pode ser 44, 48.
Se $A = 5$, então AB pode ser 55.
Se $A = 6$, então AB pode ser 66.
Se $A = 7$, então AB pode ser 77.
Se $A = 8$, então AB pode ser 88.
Se $A = 9$, então AB pode ser 99.

Logo, o total de números é 3 + 2 + 2 + 2 + 5 = 14.

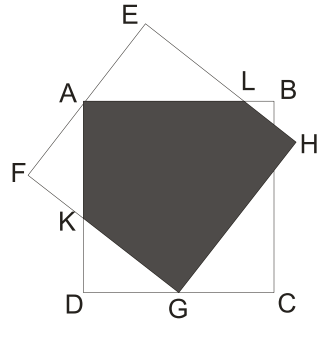
05. Sejam K a interseção dos lados AD e FG, e L a interseção dos lados AB e EH. Por simetria, veja que $KD = KF$ e $AK = KG$. Considere $FK = x$. Dessa forma, $AK = 48 - x$. Usando teorema de Pitágoras no triângulo AFK, temos:

$$24^2 + x^2 = (48 - x)^2.$$

Que nos dá $x = 18$.
Agora, veja que os triângulos AFK e ALE são semelhantes. Portanto,

$$\frac{AE}{FK} = \frac{EL}{AF}.$$

Assim, $EL = 32$.
Para achar a área procurada, basta subtrair a área do quadrado $EFGH$ das áreas dos triângulos AFK e AEL. Portanto a área será 1704.



SOLUÇÕES NÍVEL 2 – SEGUNDA FASE – PARTE B

PROBLEMA 1:

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	0	15	9	3	18	12	6
1	7	1	16	10	4	19	13
2	14	8	2	17	11	5	20

A resposta é 15 + 8 + 10 + 11 + 12 + 13 = 69.

PROBLEMA 2:

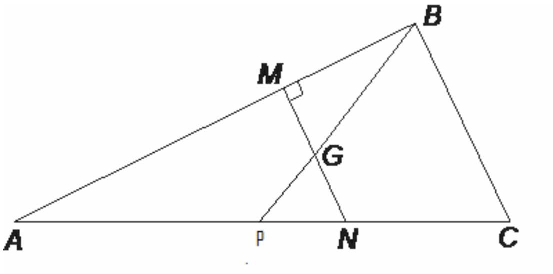
$S_4 = (r+s)S_3 - rsS_2 = (r+s).5 - rs.2 = 5r + 5s - 2rs = 6$

$S_3 = (r+s)S_2 - rsS_1 = (r+s).2 - rs.1 = 2r + 2s - rs = 5$

Com isso, encontramos que $r + s = -4$ e $rs = -13$.

Daí, $S_5 = (r+s)S_4 - rsS_3 = -24 + 65 = 41$.

PROBLEMA 3:



Se BP é uma mediana do triângulo então $AP = CP = 6$ e $PN = 2$. Como G é o baricentro do triângulo então $\frac{PG}{GB} = \frac{1}{2}$ e $\frac{PN}{NC} = \frac{1}{2}$, assim, pela recíproca do teorema de Tales, GN é paralelo a BC e $\angle B = 90^o$. Como o triângulo ABC é retângulo então $AP = CP = BP = 6$. Com isso, $BG = 4$ e $GP = 2$.

PROBLEMA 4:

a) Após três rodadas, um jogador pode acumular no máximo 3 pontos. Como as pontuações são múltiplos inteiros de ½ , os possíveis valores de pontuação após a terceira rodada são:

0,1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, 3

Como existem 8 jogadores e apenas 7 possibilidades, dois jogadores terão pontuações iguais.

b) Se k é a pontuação do primeiro colocado e todas as pontuações são distintas, a soma das pontuações dos oito jogadores será no máximo:

$$k+\left(k-\frac{1}{2}\right)+(k-1)+\left(k-\frac{3}{2}\right)+(k-2)+\left(k-\frac{5}{2}\right)+(k-3)+\left(k-\frac{7}{2}\right)=8k-14$$

Como foram disputados exatamente $4\times 7=28$ pontos, temos

$$8k-14\geq 28$$

Logo, $k\geq 5+\frac{1}{2}$ pois as pontuações são múltiplos inteiros de $\frac{1}{2}$. Basta mostrarmos um exemplo onde este valor é atingido.

Na tabela abaixo, marcamos na interseção da linha A_i com a coluna A_j o número de pontos que A_i ganhou na partida disputada contra A_j.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	Total
A_1	X	1	1	1	1	1	½	0	5+½
A_2	0	x	1	1	1	1	1	0	5
A_3	0	0	x	1	1	1	1	½	4+½
A_4	0	0	0	X	1	1	1	1	4
A_5	0	0	0	0	X	0	0	0	0
A_6	0	0	0	0	1	X	½	1	2+½
A_7	½	0	0	0	1	½	x	1	3
A_8	1	1	½	0	1	0	0	x	3+½

SOLUÇÕES NÍVEL 3 – SEGUNDA FASE – PARTE A

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**
Resposta	0069	0006	1339	0033	9993

01. [RESPOSTA: 0069]

SOLUÇÃO:

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	0	15	9	3	18	12	6
1	7	1	16	10	4	19	13
2	14	8	2	17	11	5	20

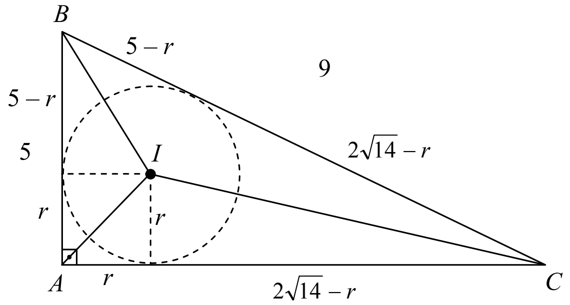
A resposta é 15 + 8 + 10 + 11 + 12 + 13 = 69.

02. [RESPOSTA: 0006]

SOLUÇÃO: Pelo teorema de Pitágoras, é imediato que

$$AC^2 = 9^2 - 5^2 = 56 \therefore AC = 2\sqrt{14}\ .$$

Seja r o raio do círculo inscrito, como mostrado na figura abaixo.



Como os comprimentos das tangentes ao círculo inscrito partindo de cada vértice são iguais, ficamos com a equação

$$(5 - r) + (2\sqrt{14} - r) = 9,$$

de onde obtemos $r = \sqrt{14} - 2$. Novamente pelo teorema de Pitágoras, obtemos:

$$CI^2 = r^2 + (2\sqrt{14} - r)^2 = (\sqrt{14} - 2)^2 + (\sqrt{14} + 2)^2 = 36 \therefore CI = 6.$$

03. [RESPOSTA: 1339]

SOLUÇÃO: Fazendo $x = t\cdot y$, a equação inicial reduz-se a

$$t^2 + 3 \geq c\cdot(t^2 + t + 4).$$

Logo, devemos ter $(c - 1)t^2 + ct + (4c - 3) \leq 0$, para todo t real. Para isto, devemos ter $c - 1 < 0$ e o discriminante $\Delta = c^2 - 4\cdot(c - 1)\cdot(4c - 3) \leq 0$.

Da última inequação, obtemos $-15c^2 + 28c - 12 \leq 0$, cuja solução é $c \leq \frac{2}{3}$ ou $c \geq \frac{6}{5}$. Como $c < 1$, o maior valor possível de c é 2/3. Daí, $2009\cdot c = 1339,333...$.

04. [RESPOSTA: 0033]

SOLUÇÃO: Seja $P(a, b)$ a probabilidade de o voluntário ganhar o carro no caso em que ele tenha colocado a bolas VERDES e b bolas VERMELHAS na caixa 1. Então, necessariamente haverá $(10 - a)$ bolas VERDES e $(10 - b)$ bolas VERMELHAS na caixa 2. Segue que

$$P(a,b) = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{a+b} + \frac{1}{2}\cdot\frac{10-a}{20-a-b}.$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $a + b \leq 10$, já que as caixas são idênticas. Suponha, ainda, que haja alguma bola VERMELHA na caixa 1. Vejamos o que acontece com essa probabilidade se transferirmos uma bola VERDE da caixa 2 para a caixa 1 e uma bola VERMELHA da caixa 1 para a caixa 2. Ficamos com

$$P(a+1,b-1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{a+1}{a+b} + \frac{1}{2}\cdot\frac{9-a}{20-a-b}.$$

Dessa forma,

$$P(a+1,b-1) - P(a,b) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{20-a-b}\right) \geq 0,$$

pois $a + b \leq 10$.

Assim, o voluntário sabe que, enquanto houver bola VERMELHA na caixa que contém menos bolas, a probabilidade pode ser aumentada, bastando, para isto, que ele troque uma das bolas VERMELHAS desta caixa com uma VERDE da outra. Por isso, para maximizarmos a probabilidade, basta considerarmos o caso em que a caixa 1 contém apenas bolas VERDES e a caixa 2 contém o restante das bolas. Teremos

$$\begin{aligned} P(a,0) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{10-a}{20-a} \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{10-a}{20-a}\right) = \frac{1}{2}\left(2-\frac{10}{20-a}\right) = 1-\frac{5}{20-a}. \end{aligned}$$

Logo, a probabilidade será máxima quando a for mínimo. Como em cada caixa deve haver pelo menos uma bola, devemos ter $a = 1$. Neste caso, a probabilidade é:

$$P(1,0) = 1-\frac{5}{19} = \frac{14}{19}.$$

Segue que $m = 14$, $n = 19$ e $m + n = 33$.

05. [RESPOSTA: 9993]

SOLUÇÃO: Vamos analisar os restos das divisões de 2^n e n por 5.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
$\boldsymbol{n}$	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0
$\mathbf{2^n}$	2	4	3	1	2	4	3	1	2	4	3	1	2	4	3	1	2	4	3	1
$\mathbf{2^n + n}$	3	1	1	0	2	0	0	4	1	4	4	3	0	3	3	2	4	2	2	1

Veja que os restos das divisões de 2^n por 5 formam uma seqüência de período 4, enquanto que os restos das divisões de n por 5 formam uma seqüência de período 5. Logo, os restos das divisões de $2^n + n$ formam uma seqüência de período 20, dada pela última linha da tabela acima. Dessa forma, tomando os números de 1 a 10000 em intervalos de tamanho 20, o maior n tal que $2^n + n$ deixa resto zero na divisão por 5 é o 13º termo do ultimo intervalo, ou seja, o número 9980 + 13 = 9993.

SOLUÇÕES NÍVEL 3 – SEGUNDA FASE – PARTE B

PROBLEMA 1:

Seja $k = a_1 + a_6 = a_2 + a_5 = a_3 + a_4$. Temos $3k = a_1 + a_2 + \ldots + a_6$ é múltiplo de 9, uma vez que n é múltiplo de 9. Daí, segue que k é múltiplo de 3. Mas, como os algarismos são distintos, perceba que

$1 + 2 + ... + 6 \leq a_1 + a_2 + ... + a_6 \leq 4 + 5 + ... + 9 \Leftrightarrow 21 \leq 3k \leq 39 \Leftrightarrow 7 \leq k \leq 13$.

Como k é múltiplo de 3, temos dois casos: $k = 9$ e $k = 12$.

1º caso: $k = 9$. Veja que é suficiente escolhermos a_1, a_2 e a_3, pois $a_4 = 9 - a_3$, $a_5 = 9 - a_2$ e $a_6 = 9 - a_1$. Como os dígitos devem ser distintos, devemos escolher a_1, a_2 e a_3 de modo que haja no máximo um dígito em cada um dos conjuntos {1, 8}, {2, 7}, {3, 6} e {4, 5}. Esta escolha pode ser feita da seguinte forma:

• Escolhemos três dos quatro conjuntos: 4 maneiras;
• Em cada um dos três conjuntos acima, escolhemos um dos dois dígitos: $2^3 = 8$ maneiras;
• Permutamos os dígitos escolhidos: $3! = 6$ maneiras.
Logo, o total de números, neste caso, é igual a $4\times8\times6 = 192$.

2º caso: $k = 12$. Neste caso, os dígitos a_1, a_2 e a_3 devem ser escolhidos do conjunto {3, 4, 5, 7, 8, 9} de modo que haja no máximo um dígito em cada um dos conjuntos
{3, 9}, {4, 8} e {5, 7}. Esta escolha pode ser feita da seguinte maneira:

• Em cada um dos três conjuntos acima, escolhemos um dos dois dígitos: $2^3 = 8$ maneiras;
• Permutamos os dígitos escolhidos: $3! = 6$ maneiras.

Logo, o total de números, neste caso, é igual a $8 \times 6 = 48$.

O total de números é, portanto, $192 + 48 = 240$.

PROBLEMA 2:
Analisando a equação módulo 5, obtemos $4 \cdot 3^a \equiv 1(mod\,5) \Leftrightarrow 3^a \equiv 4(mod\,5)$.
Mas os valores de $3^a\ mod\,5$ são periódicos de período 4:

a	0	1	2	3	4	5	6	7
3^a mod 5	1	3	4	2	1	3	4	2

Assim, concluímos que $3^a \equiv 4(mod\,5) \Leftrightarrow a = 2 + 4t$ para $t \in \mathbb{N}$.
Agora, analisando a equação módulo 3, obtemos $11 + 5^b \equiv 0(mod\,3) \Leftrightarrow (-1)^b \equiv 1(mod\,3)$ o que ocorre se, e só se, b é par. Portanto a

e b são ambos pares, digamos $a = 2c$ e $b = 2d$ para dois inteiros positivos c, d. Assim,

$$4\cdot 3^a = 11 + 5^b \Leftrightarrow \left(2\cdot 3^c\right)^2 - 5^{2d} = 11$$

$$\Leftrightarrow \left(2\cdot 3^c - 5^d\right)\left(2\cdot 3^c + 5^d\right) = 11$$

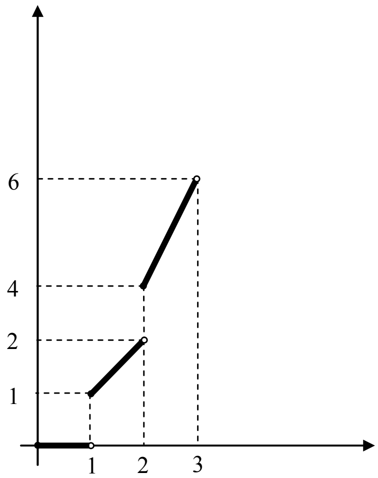
$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2\cdot 3^c - 5^d = 1 \\ 2\cdot 3^c + 5^d = 11 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3^c = 3 \\ 5^d = 5 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a = 2\cdot c = 2 \\ b = 2\cdot d = 2 \end{vmatrix}$$

Assim, a única solução é: $\left(A, B\right) = \left(2, 2\right)$

PROBLEMA 3:

Vamos fazer o gráfico da função $f(x) = x\cdot\lfloor x\rfloor$. Para cada k natural, se $k \le x \le k+1$, temos $\lfloor x\rfloor = k$. Logo, o gráfico de f é formado por segmentos de reta $y = k\cdot x$, como mostra a figura ao lado:



Assim, para um n fixo, a equação $f(x) = n$ tem no máximo uma solução. Portanto, a quantidade de elementos de

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_{2009}$$

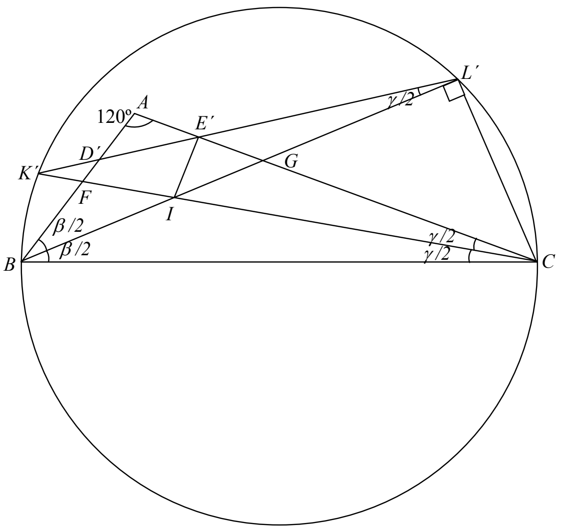
é igual à quantidade de inteiros n, tais que $1 \le n \le 2009$, para os quais $f(x) = n$ admite solução, isto é, os n tais que

$$f(k) = k^2 \le n < k(k+1) = k^2 + k,$$

para algum $k \in N$.

PROBLEMA 4

Vamos mostrar inicialmente que BL e CK são as bissetrizes dos ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ do ΔABC. Para isto, sejam K' e L' as intersecções das bissetrizes de $\widehat{C}$ e $\widehat{B}$ com a circunferência de diâmetro $\overline{BC}$, como na figura. Seja ainda I o incentro de ΔABC e β e γ as medidas de $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$, respectivamente, de modo que $\beta + \gamma = 60°$.



Sejam D' e E' as intersecções de $\overline{K'L'}$ com os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ do triângulo. Para mostrar que $\overline{K'L'} = \overline{KL},$ basta mostrar que E' e D' são as projeções ortogonais de I aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$. Como $\overline{BC}$ é diâmetro, temos que $\measuredangle BL'C$ é reto, assim se mostrarmos que o quadrilátero $IE'L'C$ é cíclico, provaremos que $IE'C$ é reto, e analogamente para D'.

Denote por F e G os encontros das bissetrizes de $\widehat{C}$ e $\widehat{B}$ com os lados opostos. Temos $m\left(G\hat{I}C\right) = m\left(F\hat{I}B\right) = m\left(A\widehat{F}C\right) - m\left(F\widehat{B}I\right) = \beta + \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2} = \frac{\beta+\gamma}{2} = 30°.$ da mesma forma, temos $m\left(G\widehat{E'}L'\right) = m\left(B\widehat{G}A\right) - m\left(GL'E'\right) = \frac{\beta}{2} + \gamma - \frac{\gamma}{2} = \frac{\beta+\gamma}{2} = 30°$ pois $m\left(GL'E'\right) = m\left(B\widehat{L'}K'\right) = m\left(B\widehat{C}K'\right)$ já que ambos os ângulos subtendem o mesmo arco $\overset{\frown}{BK'}$. Assim, $m\left(G\widehat{E'}L'\right) = m\left(G\hat{I}C\right),$ provando que $IE'L'C$ é cíclico. Sendo O o ponto médio de $BC,$ temos $m\left(K\hat{O}L\right) = 180° - m\left(L\hat{O}C\right) - m\left(K\hat{O}B\right) = 180° - \beta - \gamma = 120°$

Assim a distância pedida é $LO \cdot cos\dfrac{m\left(L\hat{O}K\right)}{2} = \dfrac{BC}{2} \cdot cos\, 60° = 3cm.$

XXXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e soluções da Terceira Fase

TERCEIRA FASE – NÍVEL 1

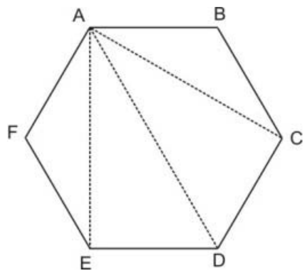
PROBLEMA 1

A sequência 121, 1221, 12221, ... contém todos os números da forma $1\underbrace{22\ldots2}_{n\text{ dígitos }2}1$. A quantidade de dígitos 2 indica a posição do número na sequência. Por exemplo, o número 122222221 é o sétimo termo da sequência.

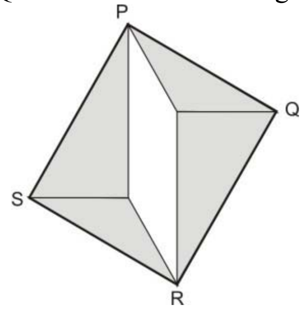
a) Dentre os 2009 primeiros termos da sequência, quantos são divisíveis por 3?
b) Qual é o menor número múltiplo de 1001 da sequência?

PROBLEMA 2

O hexágono regular *ABCDEF* tem área de 12 cm^2.
a) Traçando segmentos a partir de um vértice, o hexágono *ABCDEF* foi repartido em 4 triângulos, conforme figura. Calcule as áreas desses triângulos.



b) Usando os quatro triângulos em que foi dividido o hexágono, podemos montar o retângulo *PQRS*, na figura. Qual é a área desse retângulo?



PROBLEMA 3

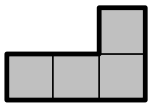
As casas de um tabuleiro 4 × 4 devem ser numeradas de 1 a 16, como mostrado parcialmente no desenho, formando um Quadrado Mágico, ou seja, as somas dos números de cada linha, de cada coluna e de cada uma das duas diagonais são iguais.

14	11	5	X
	8		
12		3	
			Y

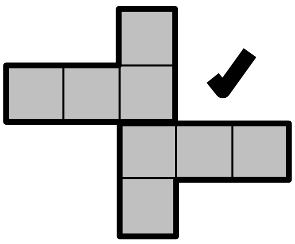
a) Que números devem ser escritos no lugar de X e de Y?
b) Apresente o Quadrado Mágico completo na sua folha de respostas.

PROBLEMA 4

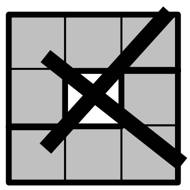
Carlinhos tem várias peças formadas por quatro quadradinhos de lado unitário, na forma de L:



Ele forma figuras maiores com essas peças, fazendo coincidir um ou mais lados dos quadradinhos, como no exemplo, em que foram usadas duas dessas peças, fazendo coincidir um lado unitário. Não é permitido formar buracos nas figuras.



Permitido

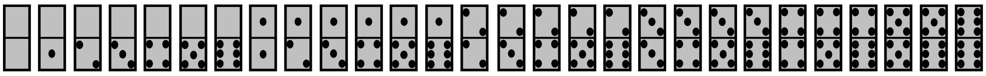


Não permitido

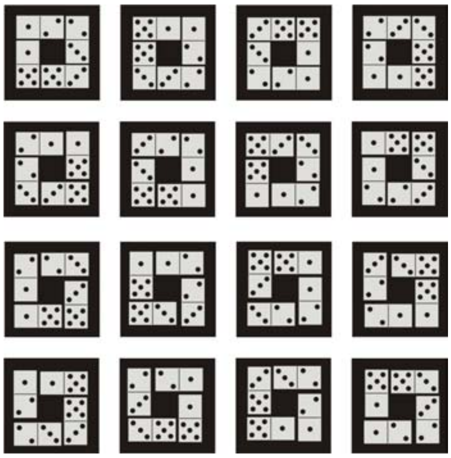
a) Desenhe uma figura cujo perímetro é 14.
b) Descreva como formar uma figura de perímetro 2010.
c) É possível formar uma figura de perímetro ímpar? Justifique sua resposta.

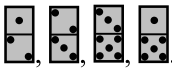
PROBLEMA 5

Um dominó é formado por 28 peças diferentes. Cada peça tem duas metades, sendo que cada metade tem de zero a seis pontos:



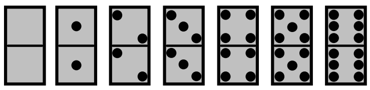
Esmeralda coloca 4 peças de dominó dentro de um estojo, respeitando as regras do jogo, isto é, peças vizinhas se tocam em metades com as mesmas quantidades de pontos. Caso seja possível guardar as quatro peças no estojo, dizemos que o conjunto de quatro peças é *precioso*.



Por exemplo, a figura acima mostra as maneiras de guardar o conjunto precioso formado pelas peças .

a) Mostre que um conjunto precioso não pode conter duas peças duplas.

A figura abaixo mostra as peças duplas.



b) Quantos conjuntos preciosos contêm uma peça dupla?

c) Determine a quantidade total de conjuntos preciosos.

TERCEIRA FASE – NÍVEL 2

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1
Veja o problema No. 5 do Nível 1.

PROBLEMA 2
Seja A um dos pontos de interseção de dois círculos com centros X e Y. As tangentes aos círculos em A intersectam novamente os círculos em B e C. Seja P o ponto de plano tal que $PXAY$ é um paralelogramo. Prove que P é o circuncentro do triângulo ABC.

PROBLEMA 3
Prove que não existem inteiros positivos x e y tais que $x^3 + y^3 = 2^{2009}$.

SEGUNDO DIA

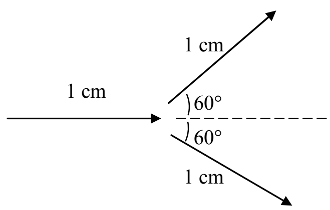
PROBLEMA 4
Resolva, em números reais, o sistema

$$x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$$

$$xyz=1.$$

PROBLEMA 5
Uma formiga caminha no plano da seguinte maneira: inicialmente, ela anda 1cm em qualquer direção. Após, em cada passo, ela muda a direção da trajetória em 60° para a esquerda ou direita e anda 1cm nessa direção. É possível que ela retorne ao ponto de onde partiu em

(a) 2008 passos?
(b) 2009 passos?



PROBLEMA 6

Seja ABC um triângulo e O seu circuncentro. As retas AB e AC cortam o circuncírculo de OBC novamente em $B_1 \neq B$ e $C_1 \neq C$, respectivamente, as retas BA e BC cortam o circuncírculo de OAC em $A_2 \neq A$ e $C_2 \neq C$, respectivamente, e as retas CA e CB cortam o circuncírculo de OAB em $A_3 \neq A$ e $B_3 \neq B$, respectivamente. Prove que as retas A_2A_3, B_1B_3 e C_1C_2 passam por um mesmo ponto.

TERCEIRA FASE – NÍVEL 3

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Esmeralda escreve 2009^2 números inteiros em uma tabela com 2009 linhas e 2009 colunas, colocando um número em cada casa da tabela. Ela soma corretamente os números em cada linha e em cada coluna, obtendo 4018 resultados. Ela percebeu que os resultados são todos distintos. É possível que esses resultados sejam todos quadrados perfeitos?

PROBLEMA 2

Considere um primo q da forma $2p + 1$, sendo $p > 0$ um primo. Prove que existe um múltiplo de q cuja soma dos algarismos na base decimal é menor ou igual a 3.

PROBLEMA 3

São colocadas 2009 pedras em alguns pontos (x, y) de coordenadas inteiras do plano cartesiano. Uma operação consiste em escolher um ponto (a, b) que tenha quatro ou mais pedras, retirar quatro pedras de (a, b) e colocar uma pedra em cada um dos pontos

$$(a, b-1),\ (a, b+1),\quad (a-1, b),\quad (a+1, b).$$

Mostre que, após um número finito de operações, cada ponto terá no máximo três pedras. Além disso, prove que a configuração final não depende da ordem das operações.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4
Mostre que existe um inteiro positivo n_0 com a seguinte propriedade: para qualquer inteiro $n \geq n_0$ é possível particionar um cubo em n cubos menores.

PROBLEMA 5
Seja ABC um triângulo e O seu circuncentro. As retas AB e AC cortam o circuncírculo de OBC novamente em $B_1 \neq B$ e $C_1 \neq C$, respectivamente, as retas BA e BC cortam o circuncírculo de OAC em $A_2 \neq A$ e $C_2 \neq C$, respectivamente, e as retas CA e CB cortam o circuncírculo de OAB em $A_3 \neq A$ e $B_3 \neq B$, respectivamente. Prove que as retas A_2A_3, B_1B_3 e C_1C_2 passam por um mesmo ponto.

PROBLEMA 6
Seja $n > 3$ um inteiro fixado e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reais positivos. Encontre, em função de n, todos os possíveis valores reais de

$$\frac{x_1}{x_n + x_1 + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3} + \frac{x_3}{x_2 + x_3 + x_4} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_{n-2} + x_{n-1} + x_n} + \frac{x_n}{x_{n-1} + x_n + x_1}$$

SOLUÇÕES DA TERCEIRA FASE – NÍVEL 1

PROBLEMA 1: SOLUÇÃO DE PEDRO HENRIQUE ALENCAR COSTA (FORTALEZA – CE)
(a) Um número divisível por 3 tem a soma de seus algarismos como múltiplo de 3. Assim, o primeiro termo múltiplo de 3 é 1221, pois 1 + 2 + 2 + 1 = 6, que é múltiplo de 3.
O próximo é o mesmo com 3 algarismos 2 a mais. Então, para saber quantos múltiplos de 3 escritos dessa forma existem até n, fazemos: $\frac{n-2}{3}+1$. Sendo n= 2009, fica: $\frac{2009-2}{3}+1=\frac{2007}{3}+1=669+1=670$.
(b) Vejamos inicialmente um exemplo de como multiplicar por 1001. Temos 1001 vezes 80 = 80080, pois:

$$\begin{array}{r} 0080 \\ +\underline{0080} \\ \underbrace{0080080}_{7\ \text{algarismos}} \end{array}$$

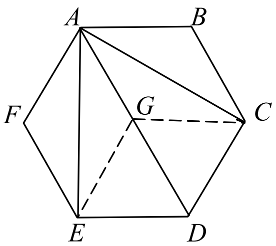
O primeiro termo da sequencia que é múltiplo de 1001 possui 7 algarismos, sendo ele desta forma 1222221, que é igual a 1221 × 1001, pois:

$$\begin{array}{r} 1221 \\ +\underline{1221} \\ 1222221 \end{array}$$

É fácil verificar que os termos anteriores não são múltiplos de 1001.

PROBLEMA 2: SOLUÇÃO DE ANA BEATRIZ MOTTA ARAGÃO CORTEZ (CAMPINAS – SP)

a)



Seja G o centro do hexágono. A área GDE e GCD é igual a de AFE.

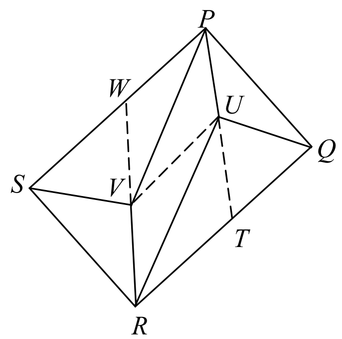
Tomando a figura como desenho representativo, podemos dividir o hexágono em seis figuras de áreas iguais: AFE; AGE; GDE; GCD; AGC; ABC. Sabendo que sua área é de 12 cm^2, dividimos-na por 6 (número de partes em que o hexágono foi fracionado; assim, cada fração tem 2 cm^2 de área (12 cm^2 : 6). Para calcularmos a área dos triângulos pedidos, é só fazer:

$$AFE \to 2\text{cm}^2$$
$$AED \to AGE + EGD \to 2\text{cm}^2 + 2\text{cm}^2 \to 4\text{cm}^2$$
$$ADC \to AGC + GCD \to 2\text{cm}^2 + 2\text{cm}^2 \to 4\text{cm}^2$$
$$ABC \to 2\text{cm}^2$$

Temos então a área dos dois triângulos iguais *AFE* e *ABC* como 2cm^2 (cada um) e a área dos outros dois triângulos iguais *AED* e *ADC* como 4cm^2 (cada um), totalizando 12cm^2.

Obs. Há outras formas de resolver o problema com este mesmo raciocínio. Poderíamos dividi-lo em 3 losangos, ou 12 pequenos triângulos por exemplo.

b) Dividimos a figura, com um raciocínio parecido com o da letra a).



Cada triângulo acima possui a mesma área. Utilizando a informação de que o triângulo em questão (*SVR* ou *PQU*) possui área de 2cm^2, calculamos a área do quadrilátero multiplicando 2cm^2 pelo número em que foi fracionada a figura, o que dá $2\text{cm}^2 \cdot 8 = 16\text{cm}^2$, que é a área do retângulo *PQRS.*

PROBLEMA 3: SOLUÇÃO DE DIMAS MACEDO DE ALBUQUERQUE (FORTALEZA – CE)

a) Veja os quadrados mágicos:

a_1	a_2	a_3	a_4
a_5	a_6	a_7	a_8
a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}

=

14	11	5	*X*
	8		
12		3	
			Y

Vendo-os, posso afirmar que a soma total do quadrado é $a_1 + a_2 + \cdots + a_{16}$ o que equivale a $1 + 2 + \cdots + 16$ que é igual a $(16 \cdot 17) \div 2 = 136$. Sabendo que em cada linha a soma é a mesma, a soma de cada uma delas será $136 \div 4 = 34$. Como em cada linha, coluna e diagonal a soma será 34 os valores de X e Y serão:

$X = 34 - (14 + 11 + 5) = 34 - 30 = 4$

$Y = 34 - (14 + 8 + 3) = 34 - 25 = 9.$

b) Vamos denominar os espaços vazios do quadrado de: $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7$ e b_8 como mostra a figura:

D_1	C_1	C_2	C_3	C_4
L_1	14	11	5	4
L_2	b_1	8	b_2	b_3
L_3	12	b_4	3	b_5
L_4	b_6	b_7	b_8	9

D_2

Sabendo que em cada linha, coluna ou diagonal a soma é 34, temos as seguintes equações:

$b_3 + b_5 = 22$ (as raízes só podem ser 15 e 6, pois alguns dos números dos outros pares já aparecem).

$b_2 + b_8 = 26$ (as raízes só podem ser 16 e 10, pois alguns dos números dos outros pares já aparecem).

$b_4 + b_7 = 15$ (as raízes só podem ser 13 e 2, pois alguns dos números dos outros pares já aparecem).

$b_1 + b_6 = 8$ (as raízes só podem ser 7 e 1, pois se fossem 6 e 2 não daria certo, pois o 2 já aparece em b_4 ou b_7).

Sendo assim, na linha 3 a única combinação qua dá certo é $b_4 = 13$ e $b_5 = 6$, caso fossem valores diferentes a soma da linha não daria 34. Tendo descoberto esses dois valores eu posso descobrir os outros:

Se b_3 não é 6, só pode ser 15.

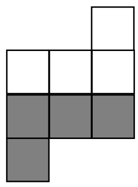
Se b_7 não é 13, só pode ser 2.

Na linha 2 a única combinação que dá certo é $b_1 = 1$ e $b_2 = 10$, pois caso fossem outros valores a soma não daria 34.

Tendo descoberto esses outros dois valores posso descobrir mais outros: Se $b_1 = 1$, b_6 só pode ser 7. Logo se b_6 é 7 e b_7 é 2, b_8 só pode ser 16.
Sabendo todos os valores desconhecidos, o quadrado mágico completo é assim:

14	11	5	4
1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9

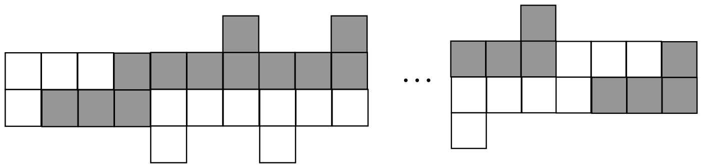
PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DE ISABELLA AYRES PINHEIRO DE LIMA (GOIÂNIA – GO)
a)



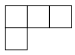
$P = 14$

b) Primeiro, vamos utilizar figuras de perímetro 12, nas 'pontas' da figura:

Esses dois lados estarão no meio da figura, e por isso, não serão contados, ou seja, o perímetro que essa figura vai ocupar na "grande" figura será de apenas 10. Como são duas desses figuras (nas 'pontas"), já conseguimos 20 de perímetro dos 2010 que precisamos.
Agora colocamos figuras de perímetro 14 no "meio"



Como 4 lados de cada figura estarão no meio da grande figura, cada uma delas ocupará 10, no perímetro 2010.
Teremos que usar 199 destas figuras de perímetro 14, no meio; e 2 figuras de perímetro 12, nas pontas. Ao todo: $2 \times 10 + 199 \times 10 = 2010$.

c) Não é possível formar uma figura de perímetro ímpar, porque uma simples peça  tem perímetro par e, toda vez que adicionamos outra peça, o perímetro aumentou em 10 – 2. (número de lados usados na colagem), que é sempre par.

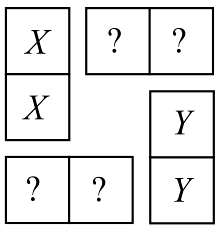
PROBLEMA 5

Veja a solução do problema 1 do nível 2.

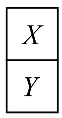
SOLUÇÕES DA TERCEIRA FASE – NÍVEL 2

PROBLEMA 1: SOLUÇÃO DE VINÍCIUS CANTO COSTA (SALVADOR – BA)

a) Supondo o contrário, isto é, que seja possível um conjunto precioso com 2 peças duplas, elas estariam intercaladas por uma peça, pois caso contrário, elas se encaixariam e isto não é possível pois não tem números em comum e isto não seria de acordo com a regra. Assim, as peças estariam arrumadas dessa forma:

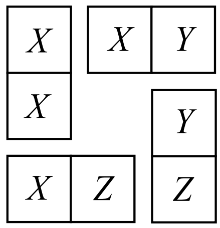


e as outras duas como iriam se encaixar com as peças duplas de *X* e *Y*, seriam da forma



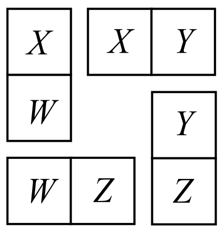
Mas isto é um absurdo, pois não existem peças iguais no jogo (c.q.d).

b) Se formarmos um conjunto precioso com uma peça dupla, ele seria organizado dessa forma, seguindo as regras do jogo:

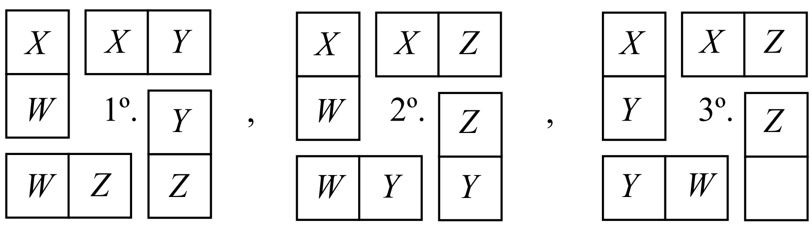


Logo, se nós escolhermos as peças duplas e as que não têm contato com ela, nós formamos o conjunto: Apenas pegamos a peça com o número da peça dupla e um dos números da que não é dupla e a outra com o número da peça dupla e o outro número da que não é dupla e organizamos da maneira certa, que é única, como podemos observar. Logo, a quantidade será $7 \cdot \binom{6}{2} = 105$, pois são 7 peças duplas e a outra peça deve ter números diferentes entre si e da peça dupla também, logo, são 2 números para escolher em 6, já que uma não pode ser usada.

c) A quantidade total de conjuntos preciosos será a quantidade que inclui uma peça dupla mais a que não tem esse tipo de peça. Já temos pelo item b) que com peça dupla é 105. Basta contar os conjuntos sem peça dupla.
Esses conjuntos serão da forma



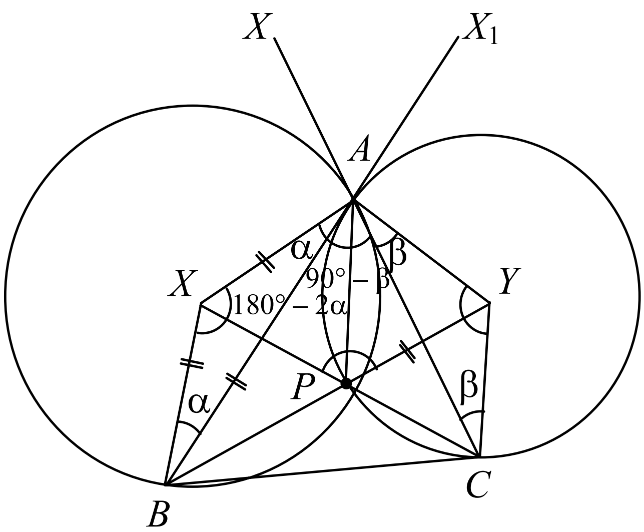
com todos os números diferentes dois a dois. Repare que para cada conjunto de 4 números de 0 a 6 temos 3 conjuntos preciosos que seriam:



Logo os conjuntos preciosos sem peça dupla totalizam $\binom{7}{4}\cdot 3,$ que são as maneiras de escolher 4 números dentre 7 vezes 3. Assim,

$105+\binom{7}{4}\cdot 3 = 105+\dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot 3 = 105+7\cdot 5\cdot 3 = 105+105 = 210$ é a quantidade total de conjuntos preciosos.

PROBLEMA 2: SOLUÇÃO DE FRANCISCO MARKAN NOBRE DE SOUZA FILHO (FORTALEZA – CE)



Se P é circuncentro de ABC, então ele deve ser a interseção entre as mediatrizes dos segmentos AB e AC. Como AB e AC *são* tangentes às circunferências, $B\widehat{A}Y = C\widehat{A}X = 90°$. Esses dois ângulos têm $B\widehat{A}C$ em comum e portanto $B\widehat{A}X = C\widehat{A}Y,$ que chamarei de α :

$$\left|\begin{array}{l} B\widehat{A}X = C\widehat{A}Y = \alpha \\ B\widehat{A}C = 90° - \alpha \\ X\widehat{A}Y = 90° + \alpha \end{array}\right.$$

Da última igualdade, como $PXAY$ é paralelogramo, temos $P\widehat{X}A = 90° - \alpha$. Por outro lado, como o triângulo BXA é isósceles $(XA = XB)$, temos $A\widehat{X}B = 180° - 2\alpha$, ou seja, PX é bissetriz do ângulo $A\widehat{X}B$. Usando mais uma vez que BXA é isósceles, PX também é a mediana e altura relativa ao lado AB. Assim, PX é a mediatriz do segmento AB.
Pela mesma rzão, PY é a mediatriz do segmento AC, o que conclui a prova.

PROBLEMA 3: SOLUÇÃO DE LUCAS CAWAI JULIÃO PEREIRA (CAUCAIA – CE)
Para provarmos o que o enunciado quer, basta analisar a equação módulo 7.
Queremos descobrir, então, quais os restos que um cubo qualquer i^3 deixa na divisão por 7. Conseguimos isso elevando ao cubo os possíveis restos que um número qualquer deixa por 7, que são 0, 1, 2, 3, 4, 5, e 6. Concluímos que os possíveis restos que um cubo pode deixar são 0, 1 e 6.
Agora analisemos as potências de 2 módulo 7.

$$2^1 \equiv 2 \pmod 7$$
$$2^2 \equiv 4 \pmod 7$$
$$2^3 \equiv 1 \pmod 7$$
$$2^4 \equiv 2 \pmod 7$$
$$\vdots$$

Encontramos o período, então dividimos 2009 por 3. Como o resto dessa divisão é 2, logo $2^{2009} \equiv 4 \pmod 7$.
Daí encontramos um absurdo já que qualquer soma dos possíveis restos de dois cubos jamais será 4. Logo $x^3 + y^3 = 2^{2009}$ não possui solução nos inteiros.

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DE ANDRE MACIEIRA BRAGA COSTA (BELO HORIZONTE – MG)
Olhemos para a primeira equação:
$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} \rightarrow$ Vamos substituir o termo $\frac{1}{z}$ em termos das variáveis x e y.

Da segunda equação, temos: $xyz = 1 \rightarrow xy = \frac{1}{z}$ (substituímos na primeira equação)

$x + \frac{1}{y} = y + xy$ (multiplicamos tudo por y)

$xy + 1 = y^2 + xy^2$ (reordenando)

$y^2(x+1) - xy - 1 = 0$ (resolvemos pela forma de Bháskara)

$y_1 = 1$ e $y_2 = -\dfrac{1}{x+1}$.

Separemos em dois casos:

1) Caso $y = 1$.

Substituímos na segunda igualdade:

$$y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x} \to 1 + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$$

$$\begin{cases} xyz = 1 \\ x \cdot 1 \cdot z = 1 \\ x \cdot z = 1 \\ z = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$ Como $xyz = 1$, temos $z = \dfrac{1}{x}$ e daí

$1 + \dfrac{1}{z} = z + z$ (multiplicando por z. $z \neq 0$)

$2z^2 - z - 1 = 0$ (Resolvendo pela fórmula de Bháskara)

$z_1 = 1$ e $z_2 = -\dfrac{1}{2}$.

Da equação $z = \dfrac{1}{x}, x_1 = 1$ e $x_2 = -2$.

Nesse caso, temos as soluções (1, 1, 1) e $\left(-2, 1, \dfrac{1}{2}\right)$.

2) Caso $y = -\dfrac{1}{x+1}(x \neq -1)$

Substituímos na segunda equação:

$$x\left(-\frac{1}{x+1}\right)z = 1$$

$$-\frac{x}{x+1} = \frac{1}{z}$$

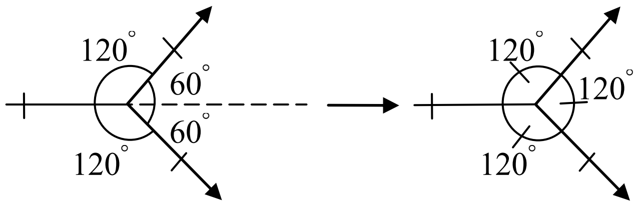
$z = -\dfrac{x+1}{x}$; note que, nesse caso, $y = +\dfrac{1}{z} = -\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{x}{x+1} = -1 = -\dfrac{x+1}{x} + \dfrac{1}{x} = z + \dfrac{1}{x}$, e a segunda igualdade também é satisfeita.

Resposta:

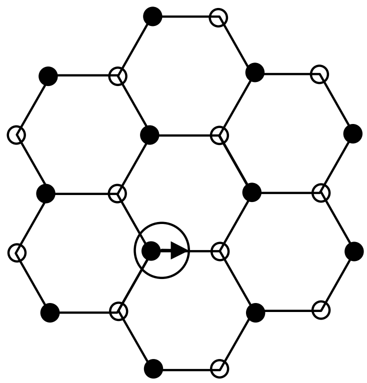
$(1,1,1);\left(-2,1,-\frac{1}{2}\right)$ e todas as triplas da forma $\left(a,-\frac{1}{a+1},-\frac{a+1}{a}\right),$ com $a\in\mathbb{R}-\{0,-1\}$.

Obs. $\left(-2,1,-\frac{1}{2}\right)\rightarrow$ esta solução é da forma $\left(a,-\frac{1}{a+1},-\frac{a+1}{a}\right)$.

PROBLEMA 5: SOLUÇÃO DE DANIEL EITI NISHIDA KAWAI (SÃO PAULO – SP)

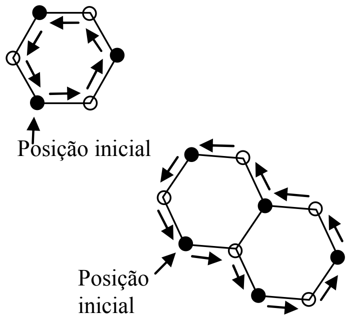


Temos o diagrama infinito de possíveis posições em que a formiga pode chegar.



a) **Resposta: Sim.**

Para voltar à posição inicial em 2008 passos, basta seguir as instruções abaixo:

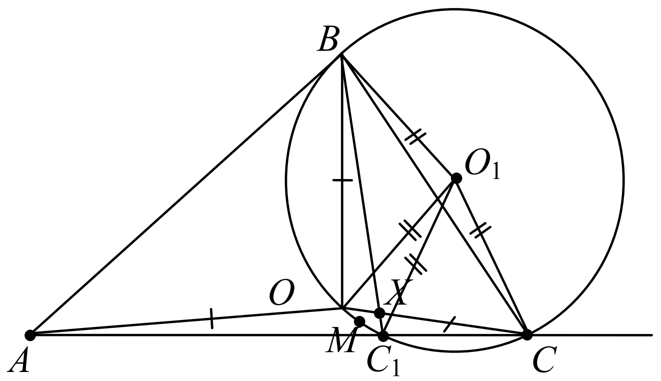


Dê 333 voltas no hexágono (isso dará 1998 passos e depois siga o trajeto abaixo, em que são usados 10 passos e volta-se à posição inicial. No total, s formiga dará 2008 passos e voltará à posição inicial

b) **Resposta: Não.**

Pinte as posições da figura inicial de preto e branco alternadamente. A formiga começa em uma bolinha preta e toda bolinha preta está cercada de bolinhas brancas e toda bolinha branca está cercada de bolinhas pretas. Assim, quando a formiga anda um númro par de passos, ela sempre termina em uma bolinha preta e quando anda um número ímpar de passos, ela sempre terminará em uma bolinha branca. Como 2009 é ímpar, a formiga, se começar em uma bolinha preta, sempre terminará em uma bolinha branca; logo, será impossível voltar à posição inicial depois de 2009 passos.

PROBLEMA 6: SOLUÇÃO DE DANIEL EITI NISHIDA KAWAI (SÃO PAULO – SP)



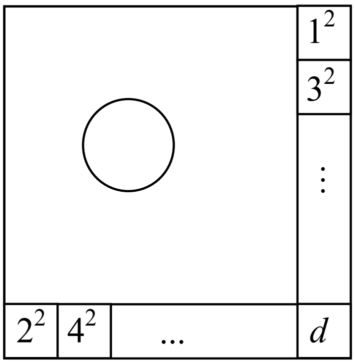
Temos $\overline{AO} \cong \overline{BO} \simeq \overline{CO}$ e $\overline{BO_1} \cong \overline{CO_1} \simeq \overline{C_1O_1} \cong \overline{OO_1}$. Além disso, $C_1\hat{B}O$ e $C_1\hat{C}O$ são ângulos inscritos do mesmo arco de circunferência $\overset{\frown}{C_1MO} \Rightarrow C_1\hat{B}O = C_1\hat{C}O = \dfrac{\overset{\frown}{C_1MO}}{2}$. Como ΔACO é isósceles (já que $\overline{AO} \cong \overline{CO}$), $C_1\hat{A}O = C_1\hat{C}O \Rightarrow C_1\hat{A}O = C_1\hat{B}O.$ Como ΔABO é isósceles, $B\hat{A}O = A\hat{B}O \Rightarrow B\hat{A}O + C_1\hat{A}O = A\hat{B}O + C_1\hat{B}O \Rightarrow B\hat{A}C_1 = A\hat{B}C_1 \Rightarrow \Delta ABC_1$ é isósceles $\to C_1 \in m_{\overline{AB}}$. De maneira análoga, $A_2 \in m_{\overline{BC}}$, $A_3 \in m_{\overline{BC}}$, $B_1 \in m_{\overline{AC}}$, $B_3 \in m_{\overline{AC}}$ e $C_2 \in m_{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{A_2A_3} \subset m_{\overline{BC}}$, $\overline{B_1B_3} \subset m_{\overline{AC}}$ e $\overline{C_1C_2} \subset m_{\overline{AB}}$. Como $m_{\overline{AB}}, m_{\overline{AC}}$ e $m_{\overline{BC}}$ se encontram em 0, as retas A_2A_3, B_1B_3 e C_1C_2 passam por um mesmo ponto.

Obs. $m_{\overline{XY}}$ é mediatriz do segmento $\overline{XY}$.

SOLUÇÕES DA TERCEIRA FASE – NÍVEL 3

PROBLEMA 1: SOLUÇÃO DE HUGO FONSECA ARAÚJO (RIO DE JANEIRO – RJ)

Sim, é possível. Considerando a tabela como uma matriz a_{ij} tome $a_{ij} = 0$, para $1 \le i, j \le 2008$, e $a_{i,2009} = (2i-1)^2, a_{2009,i} = (2i)^2$, para $1 \le i \le 2008$.



Então já temos 4016 fileiras cujas somas são quadrados perfeitos e distintos. As duas que faltam são a última linha e última coluna. Seja $a_{2009,2009} = d$.

Queremos que

$$\begin{vmatrix} 1^2 + 3^2 + \ldots + 4015^2 + d = b^2 \\ 2^2 + 4^2 + \ldots + 4016^2 + d = c^2 \end{vmatrix},$$

onde b, c são distintos e maiores que 4016. Subtraindo as equações, temos:

$c^2 - b^2 = 1 + 2 + ... + 4016 = 2008 \cdot 4017$

$\Rightarrow (c-b)(c+b) = 2008 \cdot 4017.$

Tomando $c = 502 \cdot 4017 + 2$ e $b = 502 \cdot 4017 - 2,$ a igualdade acima é satisfeita. Para concluir, tome

$d = b^2 - (1^2 + 3^2 + ... + 4015^2) = (502 \cdot 4017 - 2)^2 - (1^2 + 3^2 + ... + 4015^2).$

Desse modo, $1^2 + 3^2 + ... + 4015^2 + d = (502 \cdot 4017 - 2)^2$

$2^2 + 4^2 + ... + 4016^2 + d = (502 \cdot 4017 + 2)^2.$

PROBLEMA 2: SOLUÇÃO DE MATHEUS SECCO TORRES DA SILVA (RIO DE JANEIRO – RJ)

Vamos organizar as idéias.

Se $p = 2, q = 5$ e 10 satisfaz.

Se $p > 2,$ o múltiplo de q só poderá ter soma 2 ou 3, pois se tivesse soma 1, seria uma potência de 10, e como q é primo > 5, q não divide $10^n, n \in \mathbb{Z}^+$.

Então, devemos conseguir um múltiplo com soma 2 ou 3.

- Múltiplos com soma 2: $10^a + 1$
- Múltiplos com soma 3: $10^a + 10^b + 1 \ (a \geq b)$.

Pelo Pequeno Teorema de Fermat, $10^{q-1} \equiv 1(q) \Rightarrow 10^{\frac{q-1}{2}} \equiv 1(q)$ ou $10^{\frac{q-1}{2}} \equiv -1(q)$

Se $10^{\frac{q-1}{2}} \equiv -1(q), 10^{\frac{q-1}{2}} + 1$ satisfaz as condições do problema (tem soma dos dígitos 2).

Suponha então que $10^{\frac{q-1}{2}} \equiv 1(q) \Rightarrow 10^p \equiv 1(q) \Rightarrow$ $ord_q 10 = 1$ ou p.

Se $ord_q 10 = 1, q \neq 9 \Rightarrow q = 3 \Rightarrow p = 1,$ absurdo. Logo, $ord_q 10 = p.$

Nesse caso, vamos tentar um múltiplo com soma 3, isto é, vamos procurar inteiros positivos a e b tais que $10^a + 10^b + 1 \equiv 0 \ (q)$.

$10^1, 10^2, ..., 10^p$ são p resíduos distintos módulo $q = 2p + 1.$ De fato, se $10^x \equiv 10^y \ (q)$ com $y < x \leq p, 10^{(x-y)} \equiv 1(q),\ 0 < x - y < p,$ contradição, pois $\mathrm{ord}_q 10 = p$.

Se $\exists\, x$ tal que $10^x \equiv p(q),$ tomemos $a = b = x \Rightarrow 2 \cdot 10^x + 1 \equiv 0(q)$ e o problema acaba. Suponha então que $\nexists\, x$ tal que $10^x \equiv p(q)$.

Temos então p resíduos para $10^1, 10^2, ..., 10^p$ dentre $0, 1, 2, 3, ..., p-1, p+1, ..., 2p.$ Vamos considerar a lista formada por esses p resíduos.

0 não está na lista, pois $q = 2p + 1 > 5$.

Se $\exists\, y$ tal que $10^y \equiv -1(q)$, teríamos $10^{2y} \equiv 1(q)$ e

$ord_q\ 10 = p \Rightarrow p|2y \Rightarrow 2y = kp \Rightarrow 2|kp \Rightarrow 2|k \Rightarrow k = 2k_0 \Rightarrow y = k_0 p \Rightarrow$

$10^y = 10^{k_0 p} \equiv \left(10^p\right)^{k_0} \equiv 1(q)$, absurdo, pois estamos supondo $10^y \equiv -1(q)$.

Logo, 0 e $2p$ não entram na lista!

Considere os pares $(1,2p-1);(2,2p-2);(3,2p-3);\ldots(p-1,p+1)$.

Eles incluem todos os resíduos que $10^1, 10^2, \ldots, 10^p$ podem assumir.

Temos $p - 1$ pares e p resíduos a escolher. Pelo Princípio da Casa dos Pombos, escolheremos dois números do mesmo par. Mas a soma de dois números do mesmo par é $2p(\text{mod } q)$.

Logo, $\exists x, y$ com $10^x + 10^y \equiv 2p(q) \Rightarrow$

$A = 10^x + 10^y + 1 \equiv 0(q) \Rightarrow A$ é múltiplo de q e tem soma dos dígitos 3.

PROBLEMA 3: SOLUÇÃO DE RENAN HENRIQUE FINDER (JOINVILLE – SC)

Vamos chamar “operação” o ato de tirar 4 pedras de (a, b) e colocar uma pedra em cada um dos pontos $(a+1,b),(a-1,b),(a,b-1)$ e $(a,b+1)$. Não faremos distinção de operações no mesmo ponto que usam pedras diferentes; assim, atentaremos para quantas pedras há em cada ponto, e não quais.

Provemos por indução o seguinte resultado, trivial para $n \le 4$.

Para qualquer n, existe $A(n)$ tal que, para quaisquer pedras $p_1, p_2, \ldots, p_n$, não é possível realizar mais de $A(n)$ operações.

Suponhamos que isso valha para todo $k < n$ para fazer o caso em que temos n pedras. É importante observar que $A(n)$ depende apenas de n e não da distribuição das pedras.

Claramente o centro de massa das pedras é invariante. Logo, podemos fixá-lo como origem (desconsiderando a hipótese de as pedras terem coordenadas inteiras).

Dada uma sequência de operações, chamaremos $p_i(t)$ a posição de p_i após t operações , de modo que $p_i(0)$ é a posição inicial de p_i .

Note que $\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 + (x+1)^2 = 2x^2 + 2$

$$\Rightarrow \forall a,b \in \mathbb{R}, \left[(a+1)^2 + b^2\right] + \left[(a-1)^2 + b^2\right] + \left[a^2 + (b-1)^2\right] + \left[a^2 + (b+1)^2\right] = 4a^2 + 4b^2 + 4$$

Assim, se uma operação em (a, b) move para p_1, p_2, p_3, p_4, com

$p_1(t+1) = (a+1,b), p_2(t+1) = (a-1,b), p_3(t+1) = (a,b+1)$ e $p_4(t+1) = (a,b-1)$,

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |p_i(t)|^2 = \sum_{i=1}^{n} |p_i(t-1)|^2 + 4.$$

Por indução, $\forall t,\ \sum_{i=1}^{n} |p_i(t)|^2 \geq 4t \Rightarrow \exists i : |p_i(t)|^2 \geq \frac{4t}{n} \Rightarrow |p_i(t)| \geq 2\sqrt{\frac{t}{n}}$

Vamos escolher *t* grande (veremos que $t \geq 9n^3 A(n-1)^2$ basta).

Definimos $p = p_i(t)$. Da invariância do centro de massa, $\exists j,\ p_j(t) \notin C\left(p, \sqrt{\frac{t}{n}}\right)$, onde $C(p,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x-p| \leq r\}$ é o círculo de centro *p* e raio *r*. Isso ocorre porque, se todas as pedras estivessem em $C\left(p, \sqrt{\frac{t}{n}}\right)$, que é convexo, seu centro de massa também estaria, o que significa $(0,0) \in C\left(p, \sqrt{\frac{t}{n}}\right) \Leftrightarrow |p| \leq \sqrt{\frac{t}{n}}$, absurdo.

Agora vemos as regiões

$$\begin{aligned} R_1 &= C(p, 3A(n-1)) \\ R_2 &= C(p, 6A(n-1)) \\ R_3 &= C(p, 9A(n-1)) \\ &\vdots \\ R_n &= C(p, 3nA(n-1)). \end{aligned}$$

Uma das *n* + 1 regiões $R_1, R_2 \setminus R_1, R_3 \setminus R_2, \ldots R_n \setminus R_{n-1}$ e $\mathbb{R}^2 \setminus R_n$ não contém nenhuma pedra. Como $t \geq 9n^3 A(n-1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{t}{n}} \geq 3nA(n-1)$, teremos $p_j \notin C\left(p, \sqrt{\frac{t}{n}}\right)$ e $R_n \subset C\left(p, \sqrt{\frac{t}{n}}\right) \Rightarrow p_j \notin R_n \Rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus R_n$ não está vazia. R_1 não está vazia porque $p \in R_1$. Logo, $\exists k, 1 \leq k \leq n$ tal que $R_k \setminus R_{k-1}$ não tem pedras.

Assim temos até *n* – 1 pedras em R_{k-1} e até *n* – 1 pedras em $\mathbb{R}^2 - R_k$.

A distância entre uma pedra de R_{k-1} e uma fora de R_k é sempre pelo menos $3A(n-1)$ (vide definição). As pedras em R_{k-1} e as fora de R_k se moverão independentemente até que duas delas ocupem a mesma posição. Para que isso

ocorra, pela hipótese de indução, as pedras fora de R_k não realizarão mais de $A(n-1)$ movimentos, bem como as de dentro de R_{k-1}. Portanto, depois de $2A(n-1)$ rodadas, cada pedra se deslocará no máximo $A(n-1)$ unidades, logo uma pedra fora de R_k não poderá ficar no mesmo ponto que uma pedra que estava dentro de R_{k-1}, o que torna os dois conjuntos necessariamente independentes. Assim, basta tomar $A(n)=9n^3A(n-1)^2+2A(n-1)$.
Isso resolve a primeira parte.

Para a segunda parte, comecemos lembrando que, se chegarmos à mesma configuração de duas maneiras diferentes, a igualdade

$$\sum_{i=1}^{n}\left|p_i(t)\right|^2=4t+\sum_{i=1}^{n}\left|p_i(0)\right|^2$$

diz que o número de operações, t, é igual nas duas maneiras.
Para a prova, suponhamos que na configuração inicial, os pontos com 4 pedras ou mais sejam $X_1, X_2, \ldots$ e X_e. Considere também uma sequência de operações que leva o plano a um estado em que não é possível fazer mais operações. Certamente, ocorreram operações com centro em $X_1, X_2, \ldots$ e X_e.

Considerando duas sequências de operações $O_1, O_2, \ldots, O_\alpha$ e $O_1', O_2', \ldots, O_\beta'$ que terminam em uma configuração na qual não é possível fazer mais operações, provaremos que uma é permutação da outra via indução em $min\{\alpha,\beta\}$, o que resolve o problema.
Seja X um ponto em que há mais de quatro pedras no princípio. Seja O_γ a primeira operação em $\{O_1, O_2, \ldots, O_\alpha\}$ com centro em X.
Vamos provar que a sequência de operações $O_\gamma, O_1, O_2, \ldots, O_{\gamma-1}, O_{\gamma+1}, \ldots O_\alpha$ leva ao mesmo resultado que $O_1, O_2, \ldots, O_\alpha$.
Basta provar que $O_\gamma, O_1, \ldots, O_{\gamma-1}, O_{\gamma+1}, \ldots O_\alpha$ é uma sequência de operações válidas, já que cada operação tira o mesmo número de pedras de cada ponto e coloca o mesmo número em cada ponto, independentemente de quando foi realizada, de forma que as operações são comutativas.
Pelo mesmo argumento, basta ver que $O_\gamma, O_1, \ldots, O_{\gamma-1}$ é uma sequência possível. Mas começar com O_γ é claramente possível e, da minimalidade de γ, as operações $O_1, \ldots$ e $O_{\gamma-1}$ têm centro em um ponto diferente de X. Assim, O_γ só pode ter

aumentado o número de pedras nos centros de $O_1,...$ e $O_{\gamma-1}$, e não diminuído, o que faz com que toda essa sequência seja possível.
Em outras palavras, sem perda de generalidade, $O_1 = O_\gamma \Rightarrow O_1$ tem centro em X. Analogamente, podemos supor que, O_1' tem centro em X. Agora, após a realização da operação com centro em X, $min\{\alpha,\beta\}$ diminui, e vemos que as seqüências $O_2,...,O_\alpha$ e $O_2',...,O_\beta'$ são iguais pela hipótese de indução.

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DE MARLEN LINCOLN DA SILVA (FORTALEZA – CE)

Seja $S = \{n \in \mathbb{N}$: é possível particionar um cubo em n cubos menores$\}$.
Lema: Se $x, y \in S$, então $x + y - 1 \in S$.
Prova: Particione o cubo inicial em x cubos menores. Escolha um desses cubos e o particione em y cubos. Daí, o cubo inicial estará particionando em $x + y - 1$ cubos menores.
Claramente, $n^3 \in S$, para $n \geq 2$ inteiro.
Assim $2^3 \in S$; portanto, $\forall x \in S, x + 8 - 1 = x + 7 \in S$. Para termos o resultado desejado, basta provarmos que existem $a_1, a_2, ..., a_7 \in S$, tais que $a_i \not\equiv a_j \pmod 7$, para $1 \leq i < j \leq 7$ (basta escolhermos $n_0 = max\{a_i, 1 \leq i \leq 7\}$).
De fato, se $x \geq n_0 = max\{a_i, 1 \leq i \leq 7\}$ e $x \equiv a_j \pmod 7, x = a_j + 7k \in S$.
Seja $S' = \{x \pmod 7, x \in S\}$. De forma análoga, se $x, y \in S'$ então $(x + y - 1) \pmod 7 \in S$.
Claramente $1, 6, 0 \in S$, já que $2^3, 3^3$ e $7^3 \in S$. Logo $(6 + 6 - 1) \bmod 7 = 4 \in S'$ e $(0 + 6 - 1) \bmod 7 = 5 \in S'$. Então $(4 + 0 - 1) \bmod 7 = 3 \in S'$ e $(3 + 0 - 1) \bmod 7 = 2 \in S' \Rightarrow S' = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ e o problema está acabado.

PROBLEMA 5: SOLUÇÃO DE GUSTAVO LISBOA EMPINOTTI (FLORIANÓPOLIS – SC)

Considere uma inversão com respeito ao circuncírculo do ΔABC. Como o circuncírculo do ΔAOC passa pelo centro de inversão (O), seu inverso é uma reta pelos inversos de A e C. Mas A e C pertencem ao círculo de inversão, de modo que são seus próprios inversos. Ou seja, a reta $\overleftrightarrow{AC}$ é o inverso do circuncínculo de ΔAOC. O inverso do ponto A_2 é a interseção do inverso do circuncírculo de ΔAOC –que é $\overleftrightarrow{AC}$– com o inverso de $\overleftrightarrow{AB}$ –que é o circuncírculo do ΔAOB– isto é, é o ponto A_3. Então A_2 e A_3 são inversos, logo $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ passa pelo centro de inversão, *O*. Analogamente, B_1B_3 e C_1C_2 passam por *O*, como queríamos.

PROBLEMA 6: SOLUÇÃO DE RENAN HENRIQUE FINDER (JOINVILLE – SC)

Sendo $r_n(a)$ o resto da divisão do inteiro *a* por *n* (i.e., o único número *r* em $]0,n]$ tal que $a \equiv r \, mod(n)$, definamos $x_a = x_{r_n(a)}$. Claramente, a função $S:(\mathbb{R}_+^*)^n \to \mathbb{R}$ dada por:

$S(x_1,...x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i-1}+x_i+x_{i+1}}$ satisfaz $S(x_1,...x_n) > \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_1+x_2+...+x_n} = 1$

Além disso, $f(t) = S(1,t,t^2,t^3,...,t^{n-1}) = \frac{1}{1+t+t^{n-1}} + \frac{(n-2)t}{t^2+t+1} + \frac{t^{n-1}}{1+t^{n-2}+t^{n-1}}$

É contínua e tal que $f(1) = \frac{n}{3}$ e $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0+(n-2)0+1 = 1,$ de modo que $S(x_1,...x_n)$ pode assumir qualquer valor no intervalo $\left]1,\frac{n}{3}\right]$. Por outro lado, se *n* é par, $g(1,t,1,t,...,1,t) = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{2t+1}+\frac{t}{t+2}\right)$ é contínua e tal que $g(1) = \frac{n}{3},$ enquanto $\lim_{t\to\infty} g(t) = \frac{n}{2}$. Portanto, $S(x_1,...,x_n)$ assume todos os valores do intervalo $\left[\frac{n}{3},\frac{n}{2}\right[$.

Se *n* for ímpar, definamos a função

$h(t) = S(1,t,1,t,...,1,t,1) = \frac{2}{t+2} + \frac{n-1}{2}\cdot\frac{t}{t+2} + \frac{n-3}{2}\cdot\frac{1}{2t+1}$. Temos $h(1) = \frac{n}{3}$ e $h(t) \to \frac{n-1}{2}$ quando $t \to \infty$. Segue disso que *n* pode tomar qualquer valor em $\left[\frac{n}{3},\frac{n-1}{2}\right[$. No caso em que *n* é par, não é difícil resolver o problema se notarmos que $\frac{x}{x+y+z} < \frac{x}{x+y} \, \forall x,y,z \in \mathbb{R}_+^*$.

De fato:

$$\sum_{i=1}^{2k} \frac{x_i}{x_{i-1}+x_i+x_{i+1}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{x_{2i-1}}{x_{2i-2}+x_{2i-1}+x_{2i}} + \frac{x_{2i}}{x_{2i-1}+x_{2i}+x_{2i+1}}$$

$$< \sum_{i=1}^{k} \frac{x_{2i-1}}{x_{2i-1}+x_{2i}} + \frac{x_{2i}}{x_{2i-1}+x_{2i}} = k.$$

Assim, sob a hipótese de n ser par, os valores possíveis de $S(x_1,...x_n)$ são os elementos de $\left]1,\frac{n}{2}\right[$.

Para o caso n ímpar, queremos mostrar que a imagem de S é $\left[1,\frac{n-1}{2}\right[$.
Adaptaremos a idéia usada anteriormente.
Veja que essa idéia prova que

$$\frac{x_4}{x_3+x_4+x_5}+\frac{x_5}{x_4+x_5+x_6}+...+\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}+x_{n-1}+x_n}+\frac{x_n}{x_{n-1}+x_n+x_{n+1}}<\frac{n-3}{2}$$

Logo, para que se garanta que $S(x_1,x_2,...x_n)<\frac{n-1}{2}$, é suficiente termos

$$\frac{x_1}{x_0+x_1+x_2}+\frac{x_2}{x_1+x_2+x_3}+\frac{x_3}{x_2+x_3+x_4}\le\frac{x_1+x_2+x_3}{x_1+x_2+x_3}$$

as condições $x_0\ge x_3$ e $x_4\ge x_1$ implicam essa desigualdade. Se supusermos por absurdo $S(x_1,...x_n)\ge\frac{n-1}{2}$, concluímos que $x_0\ge x_3\Rightarrow x_1>x_4$ e $x_1\le x_4\Rightarrow x_0<x_3$.
Analogamente, supondo $x_0\le x_3$,

$$x_1>x_4\Rightarrow x_2>x_5$$
$$x_2>x_5\Rightarrow x_3>x_6$$
$$\vdots$$
$$x_{3n-4}>x_{3n-1}\Rightarrow x_{3n-3}>x_{3n}$$

O absurdo é que $x_0\ge x_3>x_6>x_9>...>x_{3n}=x_0$. A suposição $x_1\le x_4$ pode ser tratada similarmente.

Obs: Outra maneira de se fazer o caso $x_0\le x_3$ é definir $y_n=x_{3-n}$, o que dá $y_3\le y_0$.
Alem disso,
$S(x_1,...,x_n)<\frac{n-1}{2}\Leftrightarrow S(y_1,...,y_n)<\frac{n-1}{2}$, o que já sabemos provar.

XXXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e soluções da Primeira Fase – Nível Universitário

PROBLEMA 1

(a) Encontre o valor mínimo da função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=e^{(x/e)}-x$ (aqui e = 2,71828... é a base do logaritmo natural).

(b) Qual destes números é maior: e^{π} ou π^{e}?

PROBLEMA 2

Seja $\zeta\in\mathbb{C}$ uma raiz de x^7-1, com $\zeta\neq 1$. Existe um polinômio Mônico p de grau 2 com coeficientes inteiros cujas raízes são os números $z_1=\zeta+\zeta^2+\zeta^4$ e $z_2=\zeta^3+\zeta^5+\zeta^6$. Calcule $p(3)$.

PROBLEMA 3

A rã Dõ descansa no vértice A de um triângulo equilátero ABC. A cada minuto a rã salta do vértice em que está para um vértice adjacente, com probabilidade p de o salto ser no sentido horário e $1-p$ de ser no sentido anti-horário, onde $p\in(0,1)$ é uma constante. Seja P_n a probabilidade de, após n saltos, Dõ estar novamente no vértice A.

(a) Prova que, qualquer que seja $p\in(0,1), \lim\limits_{n\to\infty} P_n=1/3.$

(b) Prove que existe $p\in(0,1/100)$ tal que, para algum $n\in\mathbb{N}, P_n=1/\pi.$

PROBLEMA 4

Determine a quantidade de números inteiros positivos n menores ou iguais a 31! Tais que 3^n+n é divisível por 31.

PROBLEMA 5

Dados os números reais a, b, c, d, considere a matriz

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c & d\\ d & a & b & c\\ c & d & a & d\\ b & c & d & a\end{pmatrix}.$$

Se $f(x)=a+bx+cx^2+dx^3$, prove que

$det\, A = f(1)f(i)f(-1)f(-i).$
(Aqui *i* representa a unidade imaginária.)

PROBLEMA 6
Considere a sequência $a_0, a_1, a_2, \ldots$ definida por $a_0 = 0, a_1 = \pi/3$ e, para $n \geq 1,$

$$a_{n+1} = \frac{\pi\left(a_0a_n + a_1a_{n-1} + a_2a_{n-2} + \ldots + a_na_0\right)}{3(n+1)}.$$

Calcule

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{2^k} = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \frac{a_3}{8} + \ldots .$$

SOLUÇÕES NÍVEL UNIVERSITÁRIO – PRIMEIRA FASE

PROBLEMA 1
a) A derivada da função *f* é $f'(x) = \frac{1}{e}\cdot e^{(x/e)} - 1,$ que se anula apenas para $x = e$, sendo negativa para $x < e$ e positiva para $x > e$. Assim, o valor mínimo de *f* é $f(e) = 0$.
b) Pelo resultado do item anterior, como $\pi \neq e$ temos que $f(\pi) > 0,$ logo $e^{(\pi/e)} > \pi,$ ou seja, $e^{(\pi)} > \pi^e.$

PROBLEMA 2
Um polinômio que satisfaz as condições do enunciado é $p(x) = x^2 - (z_1 + z_2)x + z_1z_2.$

$$z_1 + z_2 = \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 + \zeta^5 + \zeta^6 = -1 + \frac{\zeta^7 - 1}{\zeta - 1} = -1.$$

$z_1z_2 = \zeta^4 + \zeta^6 + \zeta^7 + \zeta^5 + \zeta^7 + \zeta^8 + \zeta^7 + \zeta^9 + \zeta^{10} = 3 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 + \zeta^5 + \zeta^6 = 2.$
Logo $p(x) = x^2 + x + 2$ e $p(3) = 14.$

PROBLEMA 3
a) Sejam *A*, *B*, e *C* os vértices do triângulo no sentido anti-horário. Seja Q_n (resp. R_n) a probabilidade de, após *n* saltos, Dõ estar no vértice *B* (resp. *C*).
Temos $P_0 = 1, Q_0 = R_0 = 0$ e, para todo $n \geq 0,$

$$(*)\ \begin{cases} P_{n+1} = (1-p)R_n + pQ_n \\ Q_{n+1} = (1-p)P_n + pR_n \\ R_{n+1} = (1-p)Q_n + pP_n \end{cases}$$

Dado *n* natural, seja $D_n = max\{|P_n - Q_n|, |Q_n - R_n|, |R_n - P_n|\}$. Vamos provar que, para todo *n*, $D_{n+1} \le max\{p, 1-p\}.\ D_n$. Dado *n,* há 6 possibilidades para a ordem dos números P_n, Q_n, R_n. Vamos analisar o caso $P_n \le Q_n \le R_n$ (os outros 5 casos são análogos). Nesse caso, a maior distância D_n entre dois dos números P_n, Q_n *e* R_n é $R_n - P_n$. De (*), obtemos:

$|P_{n+1} - Q_{n+1}| = |(1-p)(R_n - P_n) + p(Q_n - R_n)| \le max\{(1-p)(R_n - P_n), p(R_n - Q_n)\}$,

$\le max\{1-p, p\}.\ D_n$, pois $R_n - P_n$ e $Q_n - R_n$ têm sinais contrários.

$|Q_{n+1} - R_{n+1}| = |(1-p)(P_n - Q_n) + p(R_n - P_n)| \le max\{(1-p)(Q_n - P_n), p(R_n - P_n)\}$

$\le max\{p, 1-p\} \cdot D_n$, pois $P_n - Q_n$ e $R_n - P_n$ têm sinais contrários.

$|R_{n+1} - P_{n+1}| = |(1-p)(Q_n - R_n) + p(P_n - Q_n)| = (1-p)(R_n - Q_n) + p(Q_n - P_n) \le$

$\le max\{p, 1-p\} \cdot (R_n - Q_n + Q_n - P_n) = max\{p, 1-p\} \cdot (R_n - P_n) = max\{p, 1-p\} \cdot D_n$.

Assim, $D_{n+1} = max\{|P_{n+1} - Q_{n+1}|, |Q_{n+1} - R_{n+1}|, |R_{n+1} - P_{n+1}|\} \le max\{p, 1-p\} \cdot D_n$, para todo $n \ge 0$, donde $D_n \le (max\{p, 1-p\})^n, \forall n \ge 0$.

Como $P_n + Q_n + R_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\left|P_n - \frac{1}{3}\right| = \left|P_n - \frac{P_n + Q_n + R_n}{3}\right| = \left|\frac{(P_n - Q_n) + (P_n - R_n)}{3}\right| \le \frac{2D_n}{3} \le \frac{2}{3} \cdot (max\{p, 1-p\})^n, \forall n \ge 0.$$

Como $0 < max\{p, 1-p\} < 1$, segue imediatamente que $\lim_{n\to\infty} \left|P_n - \frac{1}{3}\right| = 0$, e que $\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{3}$.

b) Para $p = 0$ teríamos $P_n = 1$ quando *n* é múltiplo de 3 e $P_n = 0$ caso contrário.

Por outro lado, tomando $p = 1/100$, temos $\lim_{k\to\infty} P_{3k+1} = 1/3$. Em particular, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $P_{3r+1} > \frac{1}{\pi}$, pois $\frac{1}{\pi} < \frac{1}{3}$.

Considerando $P_{3r+1} = P_{3r+1}(p)$ como função de p, temos que $P_{3r+1}(p)$ é um polinômio (de grau no máximo $3r + 1$) em p, e portanto depende continuamente de p. Como $P_{3r+1}(0) = 0$ e $P_{3r+1}\left(\frac{1}{100}\right) > \frac{1}{\pi}$, existe, pelo teorema do valor intermediário, p com $0 < p < \frac{1}{100}$ tal que $P_{3r+1}(p) = \frac{1}{\pi}$.

Solução alternativa para o item *a*):

Podemos (Como no início da solução anterior), escrever

$$\begin{pmatrix} P_{n+1} \\ Q_{n+1} \\ R_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-p \\ 1-p & 0 & p \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \\ R_n \end{pmatrix}, \forall n \geq 0.$$

Os autovalores dessa matriz 3×3 são 1 e $-\frac{1}{2} \pm i\sqrt{3} \cdot \left(\frac{2p-1}{2}\right)$.

As normas dos autovalores distintos de 1 são iguais a $1 - 3p(1-p) < 1,$ donde P_n, Q_n *e* R_n convergem a certos números, que denotaremos por x, y, z, respectivamente.

Devemos então ter:

$x = (1-p)z + py, y = (1-p)x + pz, z = (1-p)y + px,$ donde

$x = (1-p)z + p((1-p)x + pz) \Rightarrow (1 - p + p^2)x = (1 - p + p^2)z \Rightarrow x = z \Rightarrow$

$\Rightarrow y = (1-p)x + px = x,$ e logo $x = y = z = 1/3$ (pois $x + y + z = 1$).

PROBLEMA 4

Pelo pequeno teorema de Fermat, $3^{30} \equiv 1(mod\, 31),$ e logo $(3^n (mod\, 31))$ é periódico com período divisor de 30.

Por outro lado, obviamente $(n(mod\, 31))$ é periódico com período 31.

Portanto, $(3^n + n(mod\, 31))$ é periódico com período divisor de $31 \cdot 30 = 930$.

Pelo teorema chinês dos restos, para cada a com $0 \leq a \leq 29$ e b com $0 \leq b \leq 30,$ existe um único $c(a,b)$ com $0 \leq c(a,b) \leq 929$ tal que $c(a,b) \equiv a(mod\, 30)$ e $c(a,b) \equiv b(mod\, 31)$.

Temos $3^{c(a,b)} + c(a,b) \equiv 3^a + b(mod\, 31)$.

Fixando a e fazendo b variar, $3^a + b$ percorre todas as 31 classes (*mod* 31). Assim, $3^m + m, 0 \le m \le 929$ passa 30 vezes por cada classe (*mod* 31). Como $930 = 31 \cdot 30 | 31!$, $3^n + n \equiv 0 (mod\, 31)$ para 31!/31 = 30! inteiros positivos menores ou iguais a 31!.

PROBLEMA 5

1ª. Solução

Se x é uma raiz quarta da unidade, temos
$xf(x) = d + ax + bx^2 + cx^3, x^2 f(x) = c + dx + ax^2 + bx^3$ e
$x^3 f(x) = b + cx + dx^2 + ax^3$, de modo que

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x) \\ xf(x) \\ x^2 f(x) \\ x^3 f(x) \end{pmatrix} = f(x)\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

Assim, o vetor $(1, x, x^2, x^3)$ é autovetor de A, com autovalor $f(x)$, para x = 1, i, –1, –i. deduzimos que A possui 4 autovetores independentes e, portanto, det A é o produto dos respectivos autovalores, ou seja, $det\, A = f(1) f(i) f(-1) f(-i)$.

2ª. Solução

Observamos que det A é um polinômio do quarto grau nas variáveis a, b, c, d, enquanto $f(1)$, $f(i)$, $f(-1)$, $f(-i)$ são polinômios irredutíveis distintos do primeiro grau nessas mesmas variáveis. Podemos realizar operações lineares nas linhas de A para provar que o polinômio det A é divisível por $f(1)$, $f(i)$, $f(-1)$, $f(-i)$. Isto fica mais rápido utilizando a mesma ideia da primeira Solução: se x é raiz quarta da unidade, multiplicando a segunda coluna por x, a terceira por x^2 e a quarta por x^3 e somando tudo isso à primeira coluna, obtemos $(f(x), xf(x), x^2 f(x), x^3 f(x))$.

Assim, temos $det\, A = kf(1) f(i) f(-1) f(-i)$, onde k é uma constante a ser determinada. Fazendo a = 1 e b = c = d = 0, obtemos det A = 1 e $f(1) f(i) f(-1) f(-i) = 1$, logo k = 1, como queríamos demonstrar.

PROBLEMA 6

Defina

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Então

$$\left(f(x)\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{n} a_l a_{n-l}\right)x^n$$
$$= (a_0a_0) + (a_0a_1 + a_1a_0)x + \ldots$$
$$+ (a_0a_n + a_1a_{n-1} + a_2a_{n-2} + \ldots + a_na_0)x^n + \ldots$$

e

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$
$$= a_1 + 2a_2x + \ldots + (n+1)a_{n+1}x^n + \ldots$$

Pela condição do enunciado, os coeficientes de $f'(x)$ e de $\frac{\pi}{3}\left(f(x)\right)^2$ coincidem, exceto pelo coeficiente constante. Temos portanto $f'(x) - \frac{\pi}{3}\left(f(x)\right)^2 = \frac{\pi}{3}$. Logo temos

$$\frac{df}{dx} = \frac{\pi}{3}\left(f^2+1\right) \Leftrightarrow \int \frac{df}{f^2+1} = \frac{\pi}{3}\int dx \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow arctg\, f = \frac{\pi}{3}(x+C) \Rightarrow f(x) = tg\left(\frac{\pi}{3}(x+C)\right)$$

Como $f(0) = a_0 = 0$, concluímos que $C = 0$, e portanto

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{2^k} = f\left(\frac{1}{2}\right) = tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

XXXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Problemas e soluções da Segunda Fase – Nível Universitário

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1
Seja $f:[0,1]\to[0,1]$ crescente, derivável e inversível.
Se $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f^{-1}(x)dx$, prove que existem dois reais diferentes *a* e *b*, $0\le a<b\le 1$, tais que $f'(a)=f'(b)=1$.

Obs.: f^{-1} denota a inversa da função f.

PROBLEMA 2
Seja $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,...\}$. Dados conjuntos $A,B\subset\mathbb{N}$, para cada inteiro positivo n denote por $r(A, B, n)$ o número de soluções da equação $a+b=n, a\in A, b\in B$.
Prove que existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $r(A, B, n+1) > r(A, B, n)$ para todo $n>n_0$ se e somente se $\mathbb{N}\backslash A$ e $\mathbb{N}\backslash B$ são finitos.

PROBLEMA 3
Dados $n, a_1, a_2, ..., a_n$ inteiros positivos, definimos $q_0=1, q_1=a_1$ e $q_{k+1}=a_{k+1}q_k+q_{k-1}$, para $1\le k\le n-1$.
Prove que, dado $c>1$, existe $K>0$ tal que, para todo $M>K$, existem n inteiro positivo e $a_1, a_2, ..., a_n$ pertencentes a $\{1,2\}$ tais que $M\le q_n<c\cdot M$.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4
Seja *H* o hiperboloide de equação $3x^2+3y^2-z^2-1=0$.
i) Prove que todo ponto $(x,y,z)\in H$ pertence a exatamente duas retas contidas em *H*.
ii) Prove que todas as retas contidas em *H* formam o mesmo ângulo com o plano de equação $z=0$, e determine esse ângulo.

PROBLEMA 5

Ache todas as funções $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ que satisfazem:

i) $f(f(n)) = f(n+1)$, para todo $n\in\mathbb{Z}$.

ii) $f(2009n + 2008) = 2009.f(n)$ para todo $n\in\mathbb{Z}$.

PROBLEMA 6

Para n inteiro positivo seja $f(n)$ o número de produtos de inteiros maiores que 1 cujo resultado é no máximo n, isto é, $f(n)$ é o número de k-uplas $(a_1, a_2, ..., a_k)$ onde k é algum natural, $a_i \ge 2$ é inteiro para todo i e $a_1\cdot a_2\cdot ...\cdot a_k \le n$ (contando a 0-upla vazia ( ), cujo produto dos termos é 1).

Assim, por exemplo, $f(1) = 1$, por causa da 0-upla ( ) e $f(6) = 9$, por causa da 0-upla ( ), das 1-uplas (2), (3), (4), (5) e (6) e das 2-uplas (2, 2), (2, 3) e (3, 2).

Seja $\alpha > 1$ tal que $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{\alpha}} = 2$.

a) Prove que existe uma constante $K > 0$ tal que $f(n)\le K\cdot n^{\alpha}$ para todo inteiro positivo n.

b) Prove que existe uma constante $c > 0$ tal que $f(n)\ge c\cdot n^{\alpha}$ para todo inteiro positivo n.

PROBLEMA 1: SOLUÇÃO DE MARLON DE OLIVEIRA GOMES (FORTALEZA – CE)

(I) Notemos primeiramente que $f(0)=0$ e $f(1)=1$. De fato, f é inversível e portanto sobrejetora, logo, existem a e $b\in[0,1]$ tais que $f(a)=0$ e $f(b)=1$.

Se $a\ne 0,\ b\ne 1$,

$f(t)<0, \forall t\in[0,a)$

$f(t)>1, \forall t\in(b,1]$

Um absurdo.

(II) Afirmação: f possui um ponto fixo em (0, 1). Isto é, $\exists c\in(0,1)$ tal que $f(c)=c$.

Prova: Suponha que seja $f(x)>x, \forall x\in(0,1)$.

Então, $f^{-1}(f(x)) = x > f^{-1}(x)\forall x$, pois f crescente $\Leftrightarrow f^{-1}$ crescente.

Logo, seria $f(x)>x>f^{-1}(x), \forall x\in(0,1)\Rightarrow$

$\int_0^1 f(x)\,dx > \int_0^1 x\,dx > \int_0^1 f^{-1}(x)\,dx,$ um absurdo, pois
$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f^{-1}(x)\,dx.$

Se supusermos $f(x) < x, \quad \forall x \in (0,1)$ temos um resultado análogo.

Suponha agora que existam x_1 e $x_2 \in (0,1)$ tais que $f(x_1) > x_1$ e $f(x_2) < x_2$.

Sendo *f* diferenciável, é também contínua, donde $g:[0,1] \to \mathbb{R},\ g(t) = f(t) - t$ é contínua.

Note que $g(x_1) > 0$ e $g(x_2) < 0,$ logo, pelo teorema do valor intermediário, existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que $g(x) = 0 \Rightarrow f(c) = c,$ o que prova o resultado.

(III) Pelo teorema do valor médio, existem $a \in (0,c)$ e $b \in (c,1)$

tais que $\begin{cases} f(c) - f(0) = f'(a)\cdot(c-0) \Rightarrow f'(a) = \dfrac{f(c)}{c} = 1 \\ f(1) - f(c) = f'(b)\cdot(1-c) \Rightarrow f'(b) = \dfrac{1-f(c)}{1-c} = 1 \end{cases}.$

PROBLEMA 2: SOLUÇÃO DE RAMON MOREIRA NUNES (FORTALEZA – CE)

Para cada $n \in \mathbb{N},$ seja $q(A,B,n)$ o número de pares (x,y) tais que $x + y = n$ e, além disso, $x \notin A$ ou $y \notin B$. Assim, $q(A,B,n)$ é o número de pares (x, y) com $x + y = n$ que $r(A,B,n)$ não conta. Portanto, $q(A,B,n) = n + 1 - r(A,B,n).$

Veja que:
$$\begin{aligned} & r(A,B,n+1) > r(A,B,n) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow r(A,B,n+1) \geq r(A,B,n) + 1 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow n + 1 - q(A,B,n+1) \geq n - q(A,B,n) + 1 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow q(A,B,n+1) \leq q(A,B,n) \end{aligned}$$

$\forall n \geq n_0$; daí, $q(A,B,n) \leq q(A,B,n_0), \forall n \geq n_0.$

Como só existem finitos *n* menores que n_0, isso nos diz que $q(A,B,n)$ é limitada como função de *n.*

Agora, se $(x,\ y)$ é tal que $x + y = n$ e $x \notin A,$ então (x,y) é contado por $q(A,B,n)$. Dessa forma, $q(A,B,n) \geq \#(\{1,2,...,n\} \setminus A).$

Se $\mathbb{N}\setminus A$ fosse infinito, poderíamos tomar $\#(\{1,2,...,n\}\setminus A)$ tão grande quanto quiséssemos, mas como $q(A,B,n)$ é limitada isso não pode ocorrer, logo, $\mathbb{N}\setminus A$ é finito. Análogo $\mathbb{N}\setminus B$ também é finito.

Agora, suponha $\mathbb{N}\setminus A$ e $\mathbb{N}\setminus B$ finitos.

$$\begin{cases} \mathbb{N}\setminus A = \{a_1, a_2 ..., a_k\}; a_1 < ... < a_k \\ \mathbb{N}\setminus B = \{b_1, b_2 ..., b_m\}; b_1 < ... < b_m \end{cases}$$

tome $n_0 = a_k + b_m$. Se $n > n_0$, tem-se que (x, y) com $x + y = n$ então $x > a_k$ ou $y > b_m$ pois $x \le a_k$ e $y \le b_m \Rightarrow n = x + y \le a_k + b_m = n_0$. Absurdo.

Logo (x, y) não é contado por $r(A,B,n)$ apenas quando $x \in \mathbb{N}\setminus A$ ou $y \in \mathbb{N}\setminus B$ (ambos não ocorrem simultaneamente); o primeiro caso ocorre n vezes e o segundo m vezes. Assim, $r(A,B,n) = n+1-k-m$, e logo r satisfaz a condição do enunciado.

PROBLEMA 3: SOLUÇÃO DA BANCA

Vamos escolher dois inteiros positivos grandes r, s e tomar $m = r+s, a_j = 1$ para $1 \le j \le r$ e $a_j = 2$ para $r+1 \le j \le r+s = m$. Seja $q_k = q_k(a_1, a_2, ..., a_k)$, para $1 \le k \le m$. Temos $q_{k+1} = q_k + q_{k-1}$, para $1 \le k \le r-1$, e portanto $q_j = F_{j+1}$, para $0 \le j \le r$, onde, para $j \ge 1$

$$F_j = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^j - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^j\right) = \frac{1+o(1)}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^j$$

é o j-ésimo termo da sequência de Fibonacci. Assim, $q_j = (1+o(1))c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^j$ para j grande, onde $c = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$. Por outro lado, temos

$q_{k+1} = 2q_k + q_{k-1}$ para $r \le k \le m-1$, e logo $q_{r+j} = u_{j+1}q_r + u_j q_{r-1}$, onde $(u_j)_{j\ge 0}$ a sequência dada por $u_0 = 0, u_1 = 1$ e $u_{k+2} = 2u_{k+1} + u_k$, para $k \ge 0$. Como

$$u_k = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^k - \left(1-\sqrt{2}\right)^k\right) = \frac{1+o(1)}{2\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{2}\right)^k, \text{ para } k \ge 0,$$

obtemos

$$q_{r+j} = \frac{1+o(1)}{2\sqrt{2}}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)q_r + q_{r-1}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)^j$$

$$= \frac{1+o(1)}{2\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)c\left(1+\sqrt{2}\right)^j\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^r$$

$$= \left(1+o(1)\right)\frac{4+\sqrt{10}+\sqrt{2}}{8}c\left(1+\sqrt{2}\right)^j\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^r,$$

para j e r grandes.

Como $\log\left(1+\sqrt{2}\right)\Big/\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ é irracional (pois não é possível termos $\left(1+\sqrt{2}\right)^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m$, com m e n inteiros positivos), a conclusão do problema segue (tirando logaritmos) do seguinte fato, que é provado a seguir:

Dados $\alpha, \beta > 0$ tais que α/β é irracional, $\varepsilon > 0$ e $r > 0,$ existe $x_0 > 0$ tal que, para qualquer $x \in \mathbb{R}, x \geq x_0,$ existem inteiros $m, n \geq r$ tais que $|m\alpha + n\beta - x| < \varepsilon.$

Para provar este fato, notemos que, se $\left(\tilde{p}_n/\tilde{q}_n\right)_{n\geq 0}$ é a sequência de reduzidas da fração contínua de $\alpha/\beta,$ podemos escolher k natural com $\tilde{q}_{2k+1} > \beta/\varepsilon.$ Teremos então (ver o artigo sobre Frações Contínuas na Revista Eureka! No. 3)

$$-\varepsilon/\beta < -1/\tilde{q}_{2k+2} < \tilde{q}_{2k+1}\,\alpha/\beta - \tilde{p}_{2k+1} < 0 < \tilde{q}_{2k}\,\alpha/\beta - \tilde{p}_{2k} < 1/\tilde{q}_{2k+1} < \varepsilon/\beta$$

e portanto $-\varepsilon < \tilde{q}_{2k+1}\alpha - \tilde{p}_{2k+1}\beta < 0 < \tilde{q}_{2k}\alpha - \tilde{p}_{2k}\beta < \varepsilon.$ Seja X o conjunto de todos os números da forma $a\alpha + b\beta$ com $a, b \geq 0$ inteiros. Se $y = a\alpha + b\beta \geq \tilde{q}_{2k+1}\alpha + \tilde{p}_{2k}\beta$ pertence a *X*, temos $a \geq \tilde{q}_{2k+1}$ ou $b \geq \tilde{p}_{2k}$, e portanto, tomando $\delta_1 = \tilde{p}_{2k+1}\beta - \tilde{q}_{2k+1}\alpha$ e $\delta_2 = \tilde{q}_{2k}\alpha - \tilde{p}_{2k}\beta,$ temos $0 < \delta_1, \delta_2 < \varepsilon$ e teremos $y + \delta_1 \in X$ ou $y + \delta_2 \in X.$ Usando este fato repetidamente, segue que, para todo $z \geq y, [z, z+\varepsilon) \cap X \neq \varnothing.$ Como, para $k_0 := \left\lceil \frac{\tilde{q}_{2k+1}\alpha + \tilde{p}_{2k}\beta}{\alpha} \right\rceil,$ temos $k_0\alpha \in X$ e $k_0\alpha \geq \tilde{q}_{2k+1}\alpha + \tilde{p}_{2k}\beta,$ portanto, para todo $z \geq k_0\alpha, [z, z+\varepsilon) \cap X \neq \varnothing$. Assim, tomando $x_0 := k_0\alpha + r(\alpha+\beta)$, temos que, dado $x \geq x_0$, temos $x - r(\alpha+\beta) \geq k_0\alpha$, e portanto $[x - r(\alpha+\beta), x - r(\alpha+\beta)+\varepsilon) \cap X \neq \varnothing$. Assim, existem $a, b \geq 0$ inteiros com $a\alpha + b\beta \in [x - r(\alpha+\beta), x - r(\alpha+\beta)+\varepsilon)$, e portanto $x \leq (r+a)\alpha + (r+b)\beta < x+\varepsilon$, o que prova o fato acima.

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DE GABRIEL LUIS MELLO DALALIO (S.J. DOS CAMPOS – SP)

Tomando um ponto $(x, y, z) \in H$, podemos representar uma reta que passa por esse ponto como:

$r : \{(x+ka, y+kb, z+kc), \forall k \in \mathbb{R}\}$. Para (a, b, c) que façam *r* estar contida em *H* teremos:

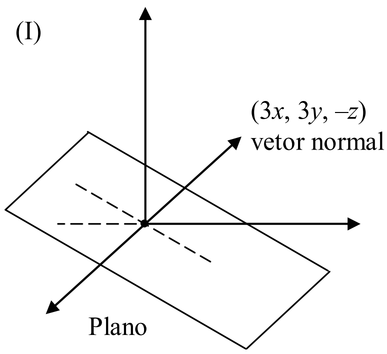
$$3(x+ka)^2 + 3(y+kb)^2 - (z+kc)^2 - 1 = 0, \forall k \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 6xka + 3k^2a^2 + 3y^2 + 6ykb + 3k^2b^2 - z^2 - 2zkc - k^2c^2 - 1 = 0, \forall k \in \mathbb{R}$$

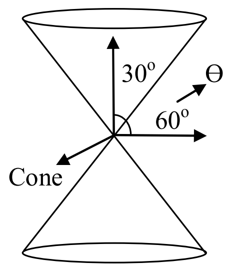
Como $3x^2 + 3y^2 - z^2 - 1 = 0$, pois $(x, y, z) \in H$ tem-se:

$$\begin{cases} 3xa + 3yb - zc = 0 & \text{(I)} \\ 3a^2 + 3b^2 - c^2 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

(I)



(II)



Como o menor ângulo que a direção (*a*, *b*, *c*) forma com o plano *z* = 0 é igual a $arctg\left(\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, por (II) tem-se:

$$\theta = arctg\left(\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = arctg\left(\frac{|c|}{\sqrt{\frac{c^2}{3}}}\right) = arctg\left(\sqrt{3}\right) = 60°.$$

Assim está provado ii), qualquer reta contida em *H* terá ângulo igual a $60°$ com o plano *z* = 0.

A solução do sistema é a interseção do plano com o cone, que pode ser apenas a origem, o que indicaria que não haveria *r* possível, ou pode ser igual a duas retas, indicando duas direções possíveis para (*a*, *b*, *c*), ou seja, duas retas *r* possíveis, ou ainda uma reta apenas de interseção, que é o caso de $(3x, 3y, -z)$ ter ângulo menor de $30°$ com o plano *z* = 0.

Para que haja interseção de duas retas, o vetor normal do plano $(3x, 3y, -z)$ deve ter um ângulo formado com o plano *z* = 0 menor que o ângulo do cone, que é de $30°$. Esse ângulo é dado por

$$arctg\left(\frac{|z|}{\sqrt{9x^2+9y^2}}\right) < arctg\left(\frac{|z|}{\sqrt{3z^2}}\right) = arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30°$$

(pois $9x^2+9y^2 = 3\left(z^2+1\right) > 3z^2$).

Então, como $arctg\left(\dfrac{|z|}{\sqrt{9x^2+9y^2}}\right) < 30°,$ fica provado o item i).

PROBLEMA 5: SOLUÇÃO DE JOSIAS ELIAS DOS SANTOS ROCHA (MURIBECA - SE)

Se f é injetiva, teremos $f(n) = n+1,$ pois $f\left(f(n)\right) = f\left(n+1\right)$ e além disso a função $f(n) = n+1$ satisfaz (ii) $f(2009n+2008) = 2009f\left(n\right).$ Suponhamos então que $f(n_1) = f\left(n_2\right)$ com $n_1 < n_2 \Rightarrow f^2\left(n_1\right) = f^2\left(n_2\right) \Rightarrow f\left(n_1+1\right) = f\left(n_2+1\right);$ indutivamente teremos $f\left(n_1+k\right) = f\left(n_2+k\right)$ para todo $k \geq 0$, e assim *f* será periódica a partir de n_1 com periodo $n_2 - n_1$.

Daí $f\left(\mathbb{Z} \cap \left[n_1, +\infty\right)\right)$ é finito, $f\left(\mathbb{Z} \cap \left[n_1, +\infty\right)\right) = \left\{a_1, ..., a_k\right\}.$

Suponhamos sem perda de generalidade que $\left|a_1\right| \geq max\left\{\left|a_i\right| : i = 1, ...k\right\}$ e que $f\left(m\right) = a_1$ com *m* > 0 e $m > n_1$ (*f* é periódica) $\Rightarrow f\left(2009m+2008\right) = 2009a_1,$ mas $2009m+2008 \in \mathbb{Z} \cap \left[n_1+\infty\right) \Rightarrow f\left(2009m+2008\right) \in f\left(\mathbb{Z} \cap \left[n_1, +\infty\right)\right)$

$\Rightarrow 2009|a_1| \le |a_1| \Rightarrow |a_1| = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \Rightarrow f\left(\mathbb{Z} \cap [n_1, +\infty)\right) = \{0\}.$

Note-se ainda que $f(-1) = 0$ pois basta fazer $n = -1$ em (ii) $\Rightarrow 2009 f(-1) = f(-1) \Rightarrow f(-1) = 0.$ Assim $f(-1) = f(n_1) = 0 \Rightarrow f$ é periódica a partir de – 1 e $f(n) = 0, \forall n \ge -1$. Seja $n < -1,$ com $f(n) = r \Rightarrow f(2009n + 2008) = 2009r \Rightarrow f\left(2009(n+1)\right) = f(2009r).$ Assim, ou $r = n+1$ ou f é periódica a partir de $2009(n+1) \Leftrightarrow f\left(\mathbb{Z} \cap \left[2009(n+1), +\infty\right)\right) = \{0\}$. Fazendo $m_1 = 2009(n+1)$ e $m_k = 2009 m_{k-1} + 2008,$ teremos $-1 > m_1 > m_2 > \ldots,$ e além disso temos $f(m_k) = 0, \forall k$ pois $f(m_1) = 0$ e $f(m_{k+1}) = f(2009 m_k + 2008) = 2009 f(m_k) = 0$

se $f(m_k) = 0.$ Mas para todo $n < -1$ podemos achar m_i e m_{i+1} tais que $m_{i+1} \le n < m_i \Rightarrow f(n) = 0,$ logo $f(n) = 0, \forall n.$ Assim temos apenas as seguintes soluções:

(1) $f(n) = n+1, \forall n \in \mathbb{Z}.$ (2) $f(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}.$

(3) $f(n) = \begin{cases} n+1, & \text{se } n \le -1 \\ 0, & \text{se } n \ge -1 \end{cases}.$

PROBLEMA 6: SOLUÇÃO DA BANCA

Vamos inicialmente estender a função f para $[1, +\infty)$ definindo $f(x) = f(\lfloor x \rfloor)$, $\forall x \in [1, +\infty)$. Podemos agora mostrar que a função f satisfaz a recorrência seguinte:

$f(x) = 1 + \sum_{m=2}^{\lfloor x \rfloor} f(\frac{x}{m}), \forall x \in [1, +\infty)$. De fato, temos o vetor ( ) (correspondente a $k = 0$), e, se $k \ge 1$ e $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ é tal que a_j é inteiro, $a_j \ge 2, \forall j$ e $a_1 a_2 \ldots a_k \le x$, então $2 \le a_1 \le \lfloor x \rfloor$ e, se $a_1 = m$, $a_2 \ldots a_k \le \frac{x}{m}$ e há $f\left(\frac{x}{m}\right)$ possíveis escolhas para $(a_2, \ldots, a_k)$.

Note também que $\alpha < 2$, pois a função $\zeta(\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\alpha}}$ é decrescente e

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \ldots < 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = 2.$$

Vamos resolver o item *a*): Mostraremos que $f(x) \le x^{\alpha}, \forall x \ge 1,$ por indução em $\lfloor x \rfloor$. Temos $f(x) = 1 \le x^{\alpha}, \forall x \in (1,2]$. Para $x \ge 2$ temos $\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor < \lfloor x \rfloor, \forall m \ge 2,$ e portanto, por hipótese de indução,

$$f(x) = 1 + \sum_{m=2}^{\lfloor x \rfloor} f\left(\frac{x}{m}\right) \le 1 + \sum_{m=2}^{\lfloor x \rfloor} \left(\frac{x}{m}\right)^{\alpha} = 1 + x^{\alpha}\left(1 - \sum_{m > \lfloor x \rfloor} \frac{1}{m^{\alpha}}\right)$$

(pois $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^{\alpha}} = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\alpha}}\right) - 1 = 1$).

Como $x^{\alpha} \sum_{m > \lfloor x \rfloor} \frac{1}{m^{\alpha}} > \left(\frac{x}{x+1}\right)^{\alpha} + \left(\frac{x}{x+2}\right)^{\alpha} + \left(\frac{x}{x+3}\right)^{\alpha} + \left(\frac{x}{x+4}\right)^{\alpha} + \left(\frac{x}{x+5}\right)^{\alpha} \ge$

$\ge \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha} + \left(\frac{2}{4}\right)^{\alpha} + \left(\frac{2}{5}\right)^{\alpha} + \left(\frac{2}{6}\right)^{\alpha} + \left(\frac{2}{7}\right)^{\alpha} > \left(\frac{2}{3}\right)^{2} + \left(\frac{2}{4}\right)^{2} + \left(\frac{2}{5}\right)^{2} + \left(\frac{2}{6}\right)^{2} + \left(\frac{2}{7}\right)^{2} > 1,$ para todo $x \ge 2$, segue que $f(x) < x^{\alpha}$, o que prova o resultado.

Vamos agora resolver o item b). Mostraremos inicialmente que $2^{\alpha} > 3$. De fato,

$$1 = \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\alpha}} + \ldots > \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\alpha}} + \ldots = \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{2}{4^{\alpha}} + \frac{4}{8^{\alpha}} + \ldots = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{4^{\alpha-1}} + \frac{1}{8^{\alpha-1}} + \ldots\right)$$

$= \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{\alpha-1}}}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} = \dfrac{1}{2^{\alpha} - 2},$ donde $2^{\alpha} - 2 > 1$ e logo $2^{\alpha} > 3$. Vamos mostrar que, se $k \ge 6$ e $x < 2^k$, então $f(x) \ge cx^{\alpha} \cdot \frac{3^k}{3^k - 9 \cdot 2^k} \ge cx^{\alpha}$, onde $c = \frac{1}{20480}$ o que claramente implica o resultado. Note que essa desigualdade vale para $k = 6$ e $x < 2^6$, pois nesse caso

$$cx^{\alpha}\,\frac{3^k}{3^k-9\cdot 2^k}=cx^{\alpha}\,\frac{81}{17}<5\cdot c\cdot x^{\alpha}=\frac{x^{\alpha}}{4096}<\frac{x^2}{4096}<\frac{2^{12}}{4096}=1\le f(x).$$

Vamos agora mostrar essa desigualdade por indução em *k*.

Suponhamos que ela vale para um certo $k\ge 6$.

Mostraremos que $f(x)\ge cx^{\alpha}\cdot\dfrac{3^{k+1}}{3^{k+1}-9\cdot 2^{k+1}}$ para todo *x* com $2^k\le x<2^{k+1}$. Para um tal valor de *x*, temos $1\le\dfrac{x}{m}<2^k$ para $2\le m\le\lfloor x\rfloor$, e logo

$$f(x)=1+\sum_{m=2}^{\lfloor x\rfloor}f\left(\frac{x}{m}\right)>\sum_{m=2}^{2^k}f\left(\frac{x}{m}\right)\ge c\cdot\frac{3^k}{3^k-9\cdot 2^k}\cdot\sum_{m=2}^{2^k}\left(\frac{x}{m}\right)^{\alpha}=c\cdot\frac{3^k}{3^k-9\cdot 2^k}\cdot x^{\alpha}\cdot\left(1-\sum_{m>2^k}\frac{1}{m^{\alpha}}\right).$$

Temos $\displaystyle\sum_{m>2^k}\frac{1}{m^{\alpha}}<\sum_{m\ge 2^k}\frac{1}{m^{\alpha}}=\frac{1}{\left(2^k\right)^{\alpha}}+\frac{1}{\left(2^k+1\right)^{\alpha}}+\ldots+\frac{1}{\left(2^{k+1}-1\right)^{\alpha}}+\frac{1}{2^{(k+1)\alpha}}+\ldots+\frac{1}{\left(2^{k+2}-1\right)^{\alpha}}+\ldots<$

$$<\frac{2^k}{2^{k\alpha}}+\frac{2^{k+1}}{2^{(k+1)\alpha}}+\ldots=\frac{1}{2^{k(\alpha-1)}}+\frac{1}{2^{(k+1)(\alpha-1)}}+\ldots<\left(\frac{2}{3}\right)^k+\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}+\ldots$$

$\left(\text{pois } 2^{\alpha-1}=\dfrac{2^{\alpha}}{2}>\dfrac{3}{2}\right)$, e, como $\left(\dfrac{2}{3}\right)^k+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k+1}+\ldots=3\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^k$, temos

$f(x)>c\cdot\dfrac{3^k}{3^k-9\cdot 2^k}\cdot x^{\alpha}\cdot\left(1-3\left(\dfrac{2}{3}\right)^k\right)>c\cdot\dfrac{3^{k+1}}{3^{k+1}-9\cdot 2^{k+1}}\cdot x^{\alpha}$, pois

$\dfrac{3^k}{3^k-9\cdot 2^k}\cdot\left(1-3\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^k\right)=\dfrac{3^k-3\cdot 2^k}{3^k-9\cdot 2^k}>\dfrac{3^{k+1}}{3^{k+1}-9\cdot 2^{k+1}}$ (de fato, essa última desigualdade pode ser escrita como $1+\dfrac{6\cdot 2^k}{3^k-9\cdot 2^k}>1+\dfrac{9\cdot 2^{k+1}}{3^{k+1}-9\cdot 2^{k+1}}$, que equivale a $6\left(3^{k+1}-9\cdot 2^{k+1}\right)>18\left(3^k-9\cdot 2^k\right)$, que por sua vez equivale a $162\cdot 2^k>108\cdot 2^k$, que obviamente vale para todo *k*).

Obs: α é aproximadamente igual a 1,7286472389....

Kálmar provou que $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^{\alpha}}=\frac{-1}{\alpha\zeta'(\alpha)}=0{,}3181736521\ldots$

XXXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
PREMIADOS

Nível 1 (6º. e 7º. Anos)

NOME	CIDADE – ESTADO	PRÊMIO
Alexandre Mendonça Cardoso	Salvador – BA	Ouro
Daniel de Almeida Souza	Brasília – DF	Ouro
Pedro Henrique Alencar Costa	Fortaleza – CE	Ouro
Ana Beatriz Motta Aragão Cortez	Campinas – SP	Ouro
Cristhian Mafalda	Leme – SP	Ouro
Érika Rizzo Aquino	Goiânia – GO	Ouro
Bianca Lima Barretto	Salvador – BA	Prata
Adriana de Sousa Figueiredo	Porto Alegre – RS	Prata
Ricardo Ken Wang Tsuzuki	São Paulo – SP	Prata
João Pedro Sedeu Godoi	Rio de Janeiro – RJ	Prata
Leonardo Gomes Gonçalves	Brasília – DF	Prata
Leonardo Gushiken Yoshitake	São Paulo – SP	Prata
Paulo Henrique Omena de Freitas	São Paulo – SP	Prata
Edgar Kenji Ishida	São Paulo – SP	Prata
Rodrigo Pommot Berto	Brasília – DF	Prata
Kiane Sassaki Menezes	Rio de Janeiro – RJ	Prata
Dimas Macedo de Albuquerque	Fortaleza – CE	Prata
Mauricio Najjar da Silveira	São Paulo – SP	Bronze
Murilo Corato Zanarella	Amparo – SP	Bronze
Victor Almeida Costa	Fortaleza – CE	Bronze
Elcio Koodiro Yoshida	São Paulo – SP	Bronze
Carolina Lima Guimarães	Vitória – ES	Bronze
Bruno da Silveira Dias	Florianópolis – SC	Bronze
Emilly Guaris Costa	Maceió – AL	Bronze
Bruno Almeida Costa	Fortaleza – CE	Bronze
Gabriel Averbug Zukin	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
Marcelo Ericsson de Carvalho	São Paulo – SP	Bronze
Sarah Barreto Ornellas	Salvador – BA	Bronze
Isabella Ayres Pinheiro de Lima	Goiânia – GO	Bronze
Shadi Bavar	Blumenau – SC	Bronze
Viviane Silva Souza Freitas	Salvador – BA	Bronze
Matheus José Araújo Oliveira	Recife – PE	Bronze
Beatriz Miranda Macedo	Niterói – RJ	Bronze
Matheus Uchôa Constante	Goiânia – GO	Bronze
Julio S. Akiyoshi	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Antonio Wesley de Brito Vieira	Cocal de Alves – PI	Menção Honrosa
Vinicius Jóras Padrão	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Mateus Guimarães Lima de Freitas	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Vitor Dias Gomes Barrios Marin	Presidente Prudente – SP	Menção Honrosa
Mariana Teatini Ribeiro	Belo Horizonte – MG	Menção Honrosa
Rodrigo Silva Ferreira	Salvador – BA	Menção Honrosa
Artur Souto Martins	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Tiago Martins Nápoli	Itú – SP	Menção Honrosa

Laís Monteiro Pinto	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Guilherme Anitele Silva	Presidente Prudente – SP	Menção Honrosa
Pedro Papa Paniago	Belo Horizonte – MG	Menção Honrosa
Gabriel Yudi Hirata	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Iago Carvalho de Moraes	Recife – PE	Menção Honrosa
Adam Yuuki Oyama	Curitiba – PR	Menção Honrosa
Luíze Mello D´urso Vianna	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Enrico Pascucci Loffel	S.B.do Campo – SP	Menção Honrosa
Daniel Charles M. Gomes	Mogi das Cruzes – SP	Menção Honrosa
Ellen Tamie Ikefuti Morishigue	Bastos – SP	Menção Honrosa
Ana Emília Hernandes Dib	S.J. do Rio Preto – SP	Menção Honrosa
Marcelo Liu Guo	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Gabriel Queiroz Moura	Teresina – PI	Menção Honrosa
Gabriel Branco Frizzo	Curitiba – PR	Menção Honrosa
Ana Jéssyca Mendes Belarmino	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Mariana Bonfim Moraes Morant de Holanda	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Ricardo Vidal Mota Peixoto	Vassouras – RJ	Menção Honrosa
Bruno de Marchi Andrade	Valinhos – SP	Menção Honrosa
Juliana Amoedo Amoedo Plácido	Salvador – BA	Menção Honrosa

Nível 2 (8º. e 9º. Anos)

NOME	CIDADE – ESTADO	PRÊMIO
André Macieira Braga Costa	Belo Horizonte – MG	Ouro
Gabriel Ilharco Magalhães	Juiz de Fora – MG	Ouro
Daniel Eiti Nishida Kawai	Atibaia – SP	Ouro
Henrique Gasparini Fiuza do Nascimento	Brasília – DF	Ouro
Marina Pessoa Mota	Fortaleza – CE	Ouro
Fellipe Sebastiam S. P. Pereira	Rio de Janeiro – RJ	Ouro
Liara Guinsberg	São Paulo – SP	Prata
Lara Timbó Araújo	Fortaleza – CE	Prata
Victor Kioshi Higa	São Paulo – SP	Prata
Fernando Lima Saraiva Filho	Eusébio – CE	Prata
Lucas Cawai Julião Pereira	Caucaia – CE	Prata
Mateus Henrique Ramos de Souza	Pirapora – MG	Prata
Henrique Vieira Gonçalves Vaz	São Paulo – SP	Prata
Lucas Nishida	Pedreira – SP	Prata
Pedro Víctor Falci de Rezende	Juiz de Fora – MG	Prata
Rafael Kazuhiro Miyazaki	São Paulo – SP	Prata
Francisco Markan Nobre de Souza Filho	Fortaleza – CE	Bronze
Vincent Cherng Hsi Lee	São Paulo – SP	Bronze
Vinícius Canto Costa	Salvador – BA	Bronze
Thiago Poeiras Silva	Belo Horizonte – MG	Bronze
Victor de Oliveira Bitaraes	Betim – MG	Bronze
Victor Hugo Corrêa Rodrigues	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
Luciano Drozda Dantas Martins	Fortaleza – CE	Bronze
Breno Leví Corrêa	Campo Belo – MG	Bronze

Wilson Aparecido Sedano Filho	Paulínia – SP	Bronze
Victor Venturi	Campinas – SP	Bronze
Daniel Lima Santanelli	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
Felipe Penha Alves	São Luís – MA	Bronze
Lucas Grimauth Evangelista	São Paulo – SP	Bronze
Gabriel Nogueira Coelho de Togni de Souza	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
Ana Thais Castro de Santana	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
Caio Cesar do Prado Dorea Reis	Nova Iguaçu – RJ	Bronze
Rafael Rodrigues Rocha de Melo	Caucaia – CE	Menção Honrosa
Murilo Freitas Yonashiro Coelho	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Gabriel José Moreira da Costa Silva	Maceió – AL	Menção Honrosa
Nathalia Novello Fernandes Ribeiro	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Gabriel Pacianotto Gouveia	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Pedro Ivo Coêlho de Araújo	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Elias Brito Oliveira	Brasília – DF	Menção Honrosa
Fernando Tomimura Miyashiro	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Igor Augusto Marques do Carmo	Juiz de Fora – MG	Menção Honrosa
Juliane Trianon Fraga	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Aimê Parente de Sousa	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Tadeu Pires de Matos Belfort Neto	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Yuri Zeniti Sinzato	Brasília – DF	Menção Honrosa
Gabriel Sena Galvão	Brasília – DF	Menção Honrosa
Filipe Mourão Leite	Teresina – PI	Menção Honrosa
Gabriela Loiola Vilar	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Marcelo Cargnelutti Rossato	Santa Maria – RS	Menção Honrosa
Pedro Henrique Botolozo Maria	Curitiba – PR	Menção Honrosa
Jair Gomes Soares Júnior	Montes Claros – MG	Menção Honrosa
Maria Clara Cardoso	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Júlio César Prado Soares	Brasília – DF	Menção Honrosa
Fábio Kenji Arai	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Julio Barros de Paula	Taubaté – SP	Menção Honrosa
Francisco Matheus Gonçalves de Souza	João Pessoa – PB	Menção Honrosa
Daniel Kantorowitz	Bragança Paulista – SP	Menção Honrosa
Ivan Tadeu Ferreira Antunes Filho	Lins – SP	Menção Honrosa
Vitor Ramos de Paula	Belo Horizonte – MG	Menção Honrosa
Victor Santos de Andrade	Teresina – PI	Menção Honrosa

Nível 3 (Ensino Médio)

NOME	CIDADE – ESTADO	PRÊMIO
Renan Henrique Finder	São Paulo – SP	Ouro
Marcelo Tadeu de Sá Oliveira Sales	Salvador – BA	Ouro
Davi Lopes Alves de Medeiros	Fortaleza – CE	Ouro
Matheus Secco Torres da Silva	Rio de Janeiro – RJ	Ouro
Hugo Fonseca Araújo	Rio de Janeiro – RJ	Ouro
Marco Antonio Lopes Pedroso	Santa Isabel – SP	Ouro
Gustavo Lisbôa Empinotti	Florianópolis – SC	Prata

Marlen Lincoln da Silva	Fortaleza – CE	Prata
Deborah Barbosa Alves	São Paulo – SP	Prata
Illan Feiman Halpern	São Paulo – SP	Prata
Thiago Ribeiro Ramos	Varginha – MG	Prata
Hanon Guy Lima Rossi	São Paulo – SP	Prata
João Lucas Camelo Sá	Fortaleza – CE	Prata
Carlos Henrique de Andrade Silva	Fortaleza – CE	Prata
Custódio Moreira Brasileiro Silva	Embu – SP	Prata
Rafael Alves da Ponte	Fortaleza – CE	Prata
Matheus Barros de Paula	Taubaté – SP	Bronze
Bruno Silva Mucciaccia	Vitória – ES	Bronze
Matheus Araujo Marins	São Gonçalo – RJ	Bronze
Guilherme da Rocha Dahrug	Santo André – SP	Bronze
Victorio Takahashi Chu	São Paulo – SP	Bronze
Voltaire Laplace dos Reis	Manhuaçu – MG	Bronze
Jardiel Freitas Cunha	Recife – PE	Bronze
Rafael Horimoto de Freitas	São Paulo – SP	Bronze
Lucas de Freitas Smaira	Guaxupé – MG	Bronze
Robério Soares Nunes	Riberio Preto – SP	Bronze
Gabriel Militão Vinhas Lopes	Fortaleza – CE	Bronze
Alvaro Lopes Pedroso	Santa Isabel – SP	Bronze
Alan Anderson da Silva Pereira	União dos Palmares – AL	Bronze
Maria Clara Mendes Silva	Pirajuba – MG	Bronze
Nara Gabriela de Mesquita Peixoto	Fortaleza – CE	Bronze
Rodrigo de Sousa Serafim da Silva	Itatiba – SP	Bronze
Rodrigo Rolim Mendes de Alencar	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
João Mendes Vasconcelos	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Otávio Augusto de Oliveira Mendes	Pilar do Sul – SP	Menção Honrosa
Renan Roveri do Amaral Gurgel	Jundiaí – SP	Menção Honrosa
Fernando Fonseca Andrade Oliveira	Belo Horizonte – MG	Menção Honrosa
Caíque Porto Lira	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Gustavo Haddad Francisco e S. Braga	S.J.dos Campos – SP	Menção Honrosa
Gustavo Cellet Marques	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Wagner Rosales Chaves	Jundiaí – SP	Menção Honrosa
Wagner Carlos Morêto Loyola Filho	Vitória – ES	Menção Honrosa
James Jun Hong	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Kayo de França Gurgel	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Nathana Alcântara Lima	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Gabriel Lima Guimarães	Vitória – ES	Menção Honrosa
Ivan Guilhon Mitoso Rocha	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Elder Massahiro Yoshida	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Ruan Alves Pires	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
André Saraiva Nobre dos Santos	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Luiz Filipe Martins Ramos	Niterói – RJ	Menção Honrosa
Felipe Abella C. Mendonça de Souza	João Pessoa – PB	Menção Honrosa
Eduardo Machado Capaverde	Florianópolis – SC	Menção Honrosa
Thales Sinelli Lima	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Tuane Viana Pinheiro	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Vinícius Cipriano Klein	Viçosa – MG	Menção Honrosa

André Austregésilo Scussel	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Thiago Augusto da Silva Baleixo	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Marcos Massayuki Kawakami	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Ana Luísa de Almeida Losnak	São Paulo – SP	Menção Honrosa

Nível Universitário

NOME	CIDADE – ESTADO	PRÊMIO
Leonardo Ribeiro de Castro Carvalho	São Paulo – SP	Ouro
Régis Prado Barbosa	Fortaleza – CE	Ouro
Rafael Assato Ando	Campinas – SP	Ouro
Rafael Daigo Hirama	Campinas – SP	Ouro
Guilherme Rodrigues Nogueira de Souza	São Paulo – SP	Ouro
Adenilson Arcanjo de Moura Junior	Fortaleza – CE	Ouro
Felipe Rodrigues Nogueira de Souza	São Paulo – SP	Ouro
Ramon Moreira Nunes	Fortaleza – CE	Ouro
Thomás Yoiti Sasaki Hoshina	Rio de Janeiro – RJ	Prata
Rafael Tupynambá Dutra	Belo Horizonte – MG	Prata
Luís Fernando Schultz Xavier da Silveira	Florianópolis – SC	Prata
Thiago Costa Leite Santos	São Paulo – SP	Prata
Gabriel Ponce	São Carlos – SP	Prata
Carlos Henrique Melo Souza	S.J. dos Campos – SP	Prata
Marcelo Matheus Gauy	São Paulo – SP	Prata
Antônio Felipe Cavalcante Carvalho	Fortaleza – CE	Prata
Kellem Corrêa Santos	Rio de Janeiro – RJ	Prata
Rafael Montezuma Pinheiro Cabral	Fortaleza – CE	Prata
Ricardo Turolla Bortolotti	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
Alexandre Hideki Deguchi Martani	São Paulo – SP	Bronze
Rafael Sampaio de Rezende	Fortaleza – CE	Bronze
Maurício de Lemos Rodrigues Collares Neto	Aracajú – SE	Bronze
Joas Elias dos Santos Rocha	Muribeca – SE	Bronze
Gabriel Luís Mello Dalalio	S.J. dos Campos – SP	Bronze
Carlos Coelho Lechner	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
Enzo Haruo Hiraoka Moriyama	São Paulo – SP	Bronze
Paulo Sérgio de Castro Moreira	Fortaleza – CE	Bronze
Helder Toshiro Susuki	São Paulo – SP	Bronze
Mateus Oliveira de Figueiredo	Fortaleza – CE	Bronze
Gabriel Caser Brito	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
Paulo André Carvalho de Melo	S.J. dos Campos – SP	Bronze
Caio Ishizara Costa	S.J. dos Campos – SP	Bronze
Willy George do Amaral Petrenko	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
Sidney Cerqueira Bispo dos Santos Filho	S.J. dos Campos – SP	Bronze
Rafael Endlich Pimentel	Vitória – ES	Bronze
Guilherme Philippe Figueiredo	São Paulo – SP	Bronze
Bruno da Silva Santos	Belford Roxo – RJ	Bronze
Francisco Osman Pontes Neto	Fortaleza – CE	Bronze
Luty Rodrigues Ribeiro	S.J. dos Campos – SP	Bronze

Renato Rebouças de Medeiros	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
José Olegário de Oliveira Neto	S.J. dos Campos – SP	Menção Honrosa
Eduardo Fischer	Encantado – RS	Menção Honrosa
Guilherme Lourenço Mejia	S.J. dos Campos – SP	Menção Honrosa
Jorge Henrique Craveiro de Andrade	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Edson Augusto Bezerra Lopes	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Eric Campos Bastos Guedes	Niterói – RJ	Menção Honrosa
Thiago da Silva Pinheiro	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Leandro Farias Maia	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Pedro Paulo Albuquerque Goes	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Álvaro Krüger Ramos	Porto Alegre – RS	Menção Honrosa
Alysson Espíndola de Sá Silveira	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Alfredo Roque de Oliveira Freire Filho	S.J. dos Campos – SP	Menção Honrosa
Rafael Ghussn Cano	Campinas – SP	Menção Honrosa
Antônio Deromir Neves da Silva Júnior	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Rafael Sabino Lima	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Hudson do Nascimetno Lima	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Diego Andrés de Barros Lima Barbosa	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Reinan Ribeiro Souza Santos	Aracaju – SE	Menção Honrosa
Marcos Victor Pereira Vieira	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Daniel Ungaretti Borges	Belo Horizonte – MG	Menção Honrosa

AGENDA OLÍMPICA

XXXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

NÍVEIS 1, 2 e 3
Primeira Fase – Sábado, 12 de junho de 2010
Segunda Fase – Sábado, 18 de setembro de 2010
Terceira Fase – Sábado, 16 de outubro de 2010 (níveis 1, 2 e 3)
Domingo, 17 de outubro de 2010 (níveis 2 e 3 - segundo dia de prova).

NÍVEL UNIVERSITÁRIO
Primeira Fase – Sábado, 18 de setembro de 2010
Segunda Fase – Sábado, 16 e Domingo, 17 de outubro de 2010

ASIAN PACIFIC MATH OLYMPIAD (APMO)

06 de março de 2010

XVI OLIMPÍADA DE MAIO

08 de maio de 2010

XXI OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL

13 a 19 de junho de 2010
Águas de São Pedro, SP – Brasil

LI OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

02 a 14 de julho de 2010
Astana, Cazaquistão

XVII OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA

24 a 30 de julho de 2010
Blagoevgrad, Bulgária

XXIV OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA

17 a 27 de setembro de 2010
Paraguai

II COMPETIÇÃO IBEROAMERICANA INTERUNIVERSITÁRIA DE MATEMÁTICA

3 a 9 de outubro de 2010
Rio de Janeiro, Brasil

XIII OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA

COORDENADORES REGIONAIS

Alberto Hassen Raad	(UFJF)	Juiz de Fora – MG
Américo López Gálvez	(USP)	Ribeirão Preto – SP
Andreia Goldani	FACOS	Osório – RS
Antonio Carlos Nogueira	(UFU)	Uberlândia – MG
Benedito Tadeu Vasconcelos Freire	(UFRN)	Natal – RN
Carmen Vieira Mathias	(UNIFRA)	Santa María – RS
Claus Haetinger	(UNIVATES)	Lajeado – RS
Cláudio de Lima Vidal	(UNESP)	S.J. do Rio Preto – SP
Denice Fontana Nisxota Menegais	(UNIPAMPA)	Bagé – RS
Disney Douglas Lima de Oliveira	(UFAM)	Manaus – AM
Edson Roberto Abe	(Colégio Objetivo de Campinas)	Campinas – SP
Edney Aparecido Santulo Jr.	(UEM)	Maringá – PR
Élio Mega	(Grupo Educacional Etapa)	São Paulo – SP
Eudes Antonio da Costa	(Univ. Federal do Tocantins)	Arraias – TO
Fábio Brochero Martínez	(UFMG)	Belo Horizonte – MG
Florêncio Ferreira Guimarães Filho	(UFES)	Vitória – ES
Francinildo Nobre Ferreira	(UFSJ)	São João del Rei – MG
Genildo Alves Marinho	(Centro Educacional Leonardo Da Vinci)	Taguatingua – DF
Graziela de Souza Sombrio	(UNOCHAPECÓ)	Chapecó – SC
Gilson Tumelero	(UTFPR)	Pato Branco – PR
Ivanilde Fernandes Saad	(UC. Dom Bosco)	Campo Grande – MS
João Benício de Melo Neto	(UFPI)	Teresina – PI
João Francisco Melo Libonati	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Jose de Arimatéia Fernandes	(UFPB)	Campina Grande – PB
José Luiz Rosas Pinho	(UFSC)	Florianópolis – SC
José Vieira Alves	(UFPB)	Campina Grande – PB
José William Costa	(Instituto Pueri Domus)	Santo André – SP
Krerley Oliveira	(UFAL)	Maceió – AL
Licio Hernandes Bezerra	(UFSC)	Florianópolis – SC
Luciano G. Monteiro de Castro	(Sistema Elite de Ensino)	Rio de Janeiro – RJ
Luzinalva Miranda de Amorim	(UFBA)	Salvador – BA
Marcelo Rufino de Oliveira	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Marcelo Mendes	(Colégio Farias Brito, Pré-vestibular)	Fortaleza – CE
Newman Simões	(Cursinho CLQ Objetivo)	Piracicaba – SP
Nivaldo Costa Muniz	(UFMA)	São Luis – MA
Nivaldo de Góes Grulha Jr.	(USP – São Carlos)	São Carlos – SP
Osnel Broche Cristo	(UFLA)	Lavras – MG
Uberlândio Batista Severo	(UFPB))	João Pessoa – PB
Raul Cintra de Negreiros Ribeiro	(Colégio Anglo)	Atibaia – SP
Ronaldo Alves Garcia	(UFGO)	Goiânia – GO
Rogério da Silva Ignácio	(Col. Aplic. da UFPE)	Recife – PE
Reginaldo de Lima Pereira	(Escola Técnica Federal de Roraima)	Boa Vista – RR
Reinaldo Gen Ichiro Arakaki	(UNIFESP)	SJ dos Campos – SP
Ricardo Amorim	(Centro Educacional Logos)	Nova Iguaçu – RJ
Sérgio Cláudio Ramos	(IM-UFRGS)	Porto Alegre – RS
Seme Gebara Neto	(UFMG)	Belo Horizonte – MG
Tadeu Ferreira Gomes	(UEBA)	Juazeiro – BA
Tomás Menéndez Rodrigues	(U. Federal de Rondônia)	Porto Velho – RO
Valdenberg Araújo da Silva	(U. Federal de Sergipe)	São Cristovão – SE
Vânia Cristina Silva Rodrigues	(U. Metodista de SP)	S.B. do Campo – SP
Wagner Pereira Lopes	(CEFET – GO)	Jataí – GO