

CONTEÚDO

AOS LEITORES	2
OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA <i>Problemas de treinamento para a terceira fase</i>	3
XIX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA (1997) <i>Problemas e soluções da segunda fase sênior</i>	8
13ª. OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA <i>República Dominicana 1998 - Problemas e resultados</i>	18
39ª. OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA <i>Soluções</i>	20
ARTIGOS	
O PRINCÍPIO DA INDUÇÃO <i>Elon Lages Lima</i>	26
FRAÇÕES CONTÍNUAS, REPRESENTAÇÕES DE NÚMEROS E APROXIMAÇÕES <i>Carlos Gustavo Moreira</i>	44
SOLUÇÕES DE PROBLEMAS PROPOSTOS EUREKA N^{os}. 1 e 2	56
PROBLEMAS PROPOSTOS	61
COORDENADORES REGIONAIS	62

AOS LEITORES

1998 tem sido um bom ano para o programa brasileiro de Olimpíadas de Matemática. Tivemos em torno de 40.000 participantes na primeira fase, ganhamos mais uma medalha de ouro na Olimpíada Internacional de Matemática e fomos o país com maior soma de pontos na Olimpíada Iberoamericana de Matemática. Esperamos concluí-lo com uma terceira fase da Olimpíada Brasileira de Matemática que faça jus aos resultados até agora obtidos, estimulando ainda mais a imaginação criativa dos jovens competidores, propiciando a descoberta de novos talentos para a matemática e, em particular, criando as bases para as equipes brasileiras que participarão nas olimpíadas internacionais do ano que vem. Esperamos que os números da revista **Eureka!** que apresentamos este ano sejam úteis para aumentar o número de participantes da Olimpíada Brasileira de Matemática e que permitam a todos os classificados chegarem bem preparados à terceira fase, além de contribuir para o enriquecimento da cultura matemática de nossa comunidade acadêmica e escolar.

Esta **Eureka!** 3 está mais difícil que as anteriores, entre outras razões, por ter boa parte de seu material dedicado à preparação para a terceira fase do terceiro nível. Grande parte do material das **Eureka!** 1 e 2 é adequada à preparação para a terceira fase dos primeiros dois níveis, mas no terceiro nível a prova (como mostra a segunda fase sênior da Olimpíada Brasileira de Matemática do ano passado, aqui resolvida) costuma ser mais técnica, de modo que resolvemos usar a **Eureka!** 3 para oferecer aos participantes da terceira fase uma preparação adequada, com problemas mais difíceis e bem diferentes dos que usualmente se estudam nas escolas.

A terceira fase será realizada nas seguintes datas.

Sábado 24 de outubro	1º. nível 2º. nível 3º. nível (primeira prova).
Sábado 14 de novembro	3º. nível (segunda prova).

Comitê Editorial.

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

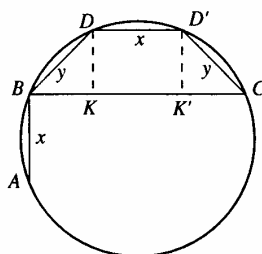
Problemas de treinamento para a terceira fase

- 1) Sejam três pontos A , B e C pertencentes a uma circunferência de centro O tais que $\widehat{AOB} < \widehat{BOC}$. Seja D o ponto médio do arco AC que contém o ponto B . Seja K o pé da perpendicular a BC por D . Prove que $\overline{AB} + \overline{BK} = \overline{KC}$.
- 2) Prove que existe uma seqüência $a_0, a_1, \dots, a_k, \dots$, onde cada a_i é um algarismo (ou seja, $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$) com $a_0 = 6$, tal que para cada inteiro positivo n o número $x_n = a_0 + 10a_1 + 100a_2 + \dots + 10^{n-1} a_{n-1}$ (cuja representação decimal é $a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0$) é tal que $x_n^2 - x_n$ é divisível por 10^n .
- 3) Seja $A = \{x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$ um conjunto de números inteiros positivos tal que se x e y são dois números naturais que não pertencem a A então $x + y$ não pertence a A . Provar que $x_i \leq 2i - 1$ para $i = 1, 2, \dots, n$.
- 4) Considere a seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $x_1 = 19$, $x_2 = 98$ e, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+2} = \begin{cases} x_n - \frac{1}{x_{n+1}}, & \text{se } x_{n+1} \neq 0 \\ 0, & \text{se } x_{n+1} = 0. \end{cases}$
Prove que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = 0$ e encontre o menor n com essa propriedade.
- 5) Sejam ABC um triângulo, M o pé da bissetriz interna do ângulo A e N o pé da bissetriz interna do ângulo B . Suponha que MN seja bissetriz do ângulo AMC . Calcule o ângulo A .
- 6) Ache todas as soluções reais de $[x] + \lceil \sqrt{1998x} \rceil = 1998$
($[y]$ denota o único inteiro tal que $[y] \leq y < [y] + 1$).

- 7) Mostre que o produto de todos os números da forma $\pm\sqrt{1} \pm\sqrt{2} \pm\sqrt{3} \pm \dots \pm\sqrt{100}$ é o quadrado de um número inteiro.

Soluções

1)



Sejam $AB = x$, $BD = y$; marcamos D' tal que $D'C = y$. Então $DD' = x$ por ser D ponto médio de AC e resulta $DD' \parallel BC$. Se K' é o pé da perpendicular a BC por D' , então temos
 $AB = DD' = KK'$ e $BK = K'C$
 $AB + BK = KK' + K'C = KC$.

2)

O primeiro termo é $a_0 = 6$; então $x_1 = 6$ e $x_1^2 - x_1 = 36 - 6 = 30$, que é divisível por 10^1 .

Seja $n \geq 1$. Suponhamos que existem a_0, a_1, \dots, a_{n-1} tais que

$$x_n = a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + \dots + 10^{n-1}a_{n-1}$$

verifica que $x_n^2 - x_n$ é divisível por 10^n (ou seja $x_n^2 - x_n = 10^n r$, com $r \in \mathbb{N}$)

Temos que encontrar a_n tal que

$$x_{n+1} = a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + \dots + 10^{n-1}a_{n-1} + 10^n a_n = x_n + 10^n a_n$$

seja tal que $x_{n+1}^2 - x_{n+1}$ é divisível por 10^{n+1} .

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - x_{n+1} &= (x_n + 10^n a_n)^2 - (x_n + 10^n a_n) = x_n^2 + 2x_n 10^n a_n + 10^{2n} a_n^2 - x_n - 10^n a_n = \\ &= (x_n^2 - x_n) + 10^n (2x_n a_n - a_n) + 10^{2n} a_n^2 = 10^n r + 10^n (2x_n a_n - a_n) + 10^{2n} a_n^2 = \\ &= 10^n (r + 2x_n a_n - a_n) + 10^{2n} a_n^2. \text{ Assim,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - x_{n+1} \text{ e divisível por } 10^{n+1} &\Leftrightarrow r + 2x_n a_n - a_n \text{ é divisível por } 10 \Leftrightarrow \\ r + (2x_n - 1)a_n &\text{ é divisível por } 10. \end{aligned}$$

Dado que $a_0 = 6$, temos que $x_n = 10t + 6$ com $t \in \mathbb{N}$; então $2x_n = 10h + 2$. (com $h = 2t + 1$). Logo $r + (2x_n - 1)a_n$ é divisível por 10 $\Leftrightarrow r + (10h + 1)a_n$ é divisível por 10 $\Leftrightarrow r + a_n$ é divisível por 10.

Sempre existe um único inteiro a_n entre 0 e 9 de modo tal que isto se verifique.

Obs: A seqüência (a_n) começa por 6, 7, 3, 9, 0, 1, 7, 8, 7, 1, 8, 0, 0, 4, 7, 3... Assim, por exemplo, $x_{10} = 1787109376$.

Problema extra:

Prove que a seqüência (a_n) obtida não é periódica nem pré-periódica.

3)

Suponhamos que o enunciado é falso, ou seja que existe k tal que

$$x_k > 2k - 1, 1 \leq k \leq n.$$

Então os conjuntos

$$B_1 = \{1, x_k - 1\}, B_2 = \{2, x_k - 2\}, \dots, B_k = \{k, x_k - k\}$$

são disjuntos dois a dois e seus elementos são menores que x_k .

Além disso, para cada j , $1 \leq j \leq k$, $j \in A$ ou $x_k - j \in A$, pois no caso contrario, ou seja, se $j \notin A$ e $x_k - j \notin A$, teríamos que $x_k = j + (x_k - j) \notin A$.

Portanto, para cada j , $1 \leq j \leq k$, $A \cap B_j \neq \emptyset$, donde A tem pelo menos k elementos menores que x_k , absurdo.

4)

Se $x_{n+1} \neq 0$, temos $x_{n+2} x_{n+1} = x_{n+1} x_n - 1$. Definindo $y_n = x_n x_{n+1}$ temos $y_{n+1} = y_n - 1$ para todo n tal que $x_{n+1} \neq 0$. Como $y_1 = x_1 x_2 = 19 \cdot 98 = 1862$, temos $y_k = 1863 - k$ enquanto y_{k-1} for diferente de 0, e portanto $y_{1862} = 1$ e

$y_{1863} = 0 \Rightarrow x_{1862} x_{1863} = 1$ e $x_{1863} x_{1864} = 0$. Assim, $x_{1863} \neq 0$ e $x_{1864} = 0$, donde 1864 é o menor n tal que $x_n = 0$.

5)

Pelo teorema das bissetrizes, $\frac{AN}{NC} = \frac{c}{a}$ e $\frac{BM}{MC} = \frac{c}{d} \Rightarrow MC = \frac{ab}{b+c}$, e como

MN é bissetriz de \widehat{AMC} devemos ter $\frac{MA}{MC} = \frac{AN}{CN} = \frac{c}{a}$, donde $MA = \frac{bc}{b+c}$

(pois $MC = \frac{ab}{b+c}$ pela lei dos senos aplicada aos triângulos ABC e ABM)

temos $\frac{\text{sen}A}{\text{sen}B} = \frac{a}{b} = \frac{\frac{ac}{b+c}}{\frac{bc}{b+c}} = \frac{BM}{MA} = \frac{\text{sen}(A/2)}{\text{sen}B}$, e portanto $\text{sen}(A/2) = \text{sen}A$

$$= 2 \text{sen}(A/2) \cos(A/2) \Rightarrow \cos\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{A}{2} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow A = \frac{2\pi}{3}.$$

6)

$[x] + [\sqrt{1998x}]$ é sempre inteiro. Seja x_0 a solução de $x + \sqrt{1998x} = 1998$ ou seja $x_0 = 999(3 - \sqrt{5}) = 7631\dots$ e $\sqrt{1998x_0} = 1998 - x_0 = 999(\sqrt{5} - 1) = 12348\dots$

Temos $[x_0] + [\sqrt{1998x_0}] = 1997$. A função $f(x) = [x] + [\sqrt{1998x}]$ aumenta

de uma unidade quando x ou $\sqrt{1998x}$ torna-se inteiro. Os próximos valores de x maiores que x_0 para os quais x e $\sqrt{1998x}$ são inteiros são respectivamente 764 e $1235^2/1998 < 764$.

Assim, $f(1235^2/1998) = 763 + 1235 = 1998$ e $f(764) = 764 + 1235 = 1999$ (de fato $\sqrt{1998 \cdot 764} < 1236$). Como $f(x)$ é não-decrescente, o conjunto das soluções é o intervalo

$$\left[\frac{1235^2}{1998}, 764 \right) = [763,3758758758 \dots, 764).$$

7)

O número referido no enunciado é o quadrado do produto de todos os 2^{99} números da forma $1 \pm \sqrt{2} \pm \sqrt{3} \pm \dots \pm \sqrt{100}$ (no produto do enunciado cada um desses números aparece uma vez, assim como seu simétrico). Neste último produto, obtemos uma soma de termos do tipo $(\sigma_1 \sqrt{a_1})(\sigma_2 \sqrt{a_2}) \dots (\sigma_m \sqrt{a_m})$, com $m \leq 2^{99}$, $a_1, a_2, \dots, a_m \in \{2, 3, \dots, 100\}$ e $\sigma_j \in \{-1, 1\}, \forall j$.

Fixamos $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{100} \in \mathbb{N}$ com $\alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{100} \leq 2^{99}$, e consideramos todos os termos como acima que têm exatamente α_k valores de $a_j = k$, para $2 \leq k \leq 100$. Se todos os α_j são pares esses termos são todos inteiros. Se algum deles (digamos α_r) é ímpar, podemos associar de forma bijetiva a cada termo desses o termo obtido trocando os sinais de todos os σ_j para os quais $a_j = r$. Assim, a cada termo associamos o seu simétrico, e portanto, nesse caso a soma dos termos considerados é 0. Assim, o produto de todos os números da forma $1 \pm \sqrt{2} \pm \sqrt{3} \pm \dots \pm \sqrt{100}$ é um inteiro, e portanto o produto do enunciado é um quadrado perfeito.

Você sabia... que são conhecidos 51539600000

casas decimais de π , calculadas por Y. Kamada e D. Takahashi, da Universidade de Tokio em 1997? E que em 21/8/1998 foi calculada pelo projeto Pihex a

5000000000000^a. casa binária de π ?

Consulte a home-page

<http://www.cecm.sfu.ca/pi>



XIX OLIMPIADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA (1997)

Problemas e soluções da segunda fase sênior

PROBLEMA 1

Duas circunferências de raios R e r e centros O e O' , respectivamente, intersectam-se nos pontos P e P' . Seja l a reta que passa por P e P' . Determine em função de R e r , o menor valor que pode assumir a soma das distâncias de l a O e O' .

PROBLEMA 2

Dizemos que um conjunto $A \subset \mathbb{N}$ satisfaz a propriedade $P(n)$ se A tem n elementos e $A + A = \{x + y \text{ tal que } x \in A \text{ e } y \in A\}$ tem $\frac{n(n+1)}{2}$ elementos.

Dado $A \subset \mathbb{N}$ finito definimos o diâmetro de A como sendo a diferença entre o maior e o menor elemento de A . Seja $f(n)$ o menor diâmetro que um conjunto A satisfazendo $P(n)$ pode ter. Mostre que $\frac{n^2}{4} \leq f(n) < n^3$ para todo $n \geq 2$.

(Se o seu tempo de prova não estiver esgotado, tente melhorar esta estimativa. Por exemplo, tente mostrar que $f(p) < 2p^2$, para todo número primo p .)

PROBLEMA 3

- Prove que não existem funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $g(f(x)) = x^3$ e $f(g(x)) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- Exiba funções $f: (1, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ e $g: (1, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ tais que $g(f(x)) = x^3$ e $f(g(x)) = x^2$, para todo $x \in (1, \infty)$.

PROBLEMA 4

Seja F_n definido por $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para todo $n \geq 1$. Seja $V_n = \sqrt{F_n^2 + F_{n+2}^2}$, $n \geq 1$. Mostre que, para todo n inteiro positivo, V_n ,

V_{n+1} e V_{n+2} são lados de um triângulo de área $1/2$.

PROBLEMA 5

Sejam $c \in \mathbb{Q}$, $f(x) = x^2 + c$. Definimos $f^0(x) = x$, $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$, $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é pré-periódico se $\{f^n(x), n \in \mathbb{N}\}$ é finito. Mostre que $\{x \in \mathbb{Q} \mid x \text{ é pré-periódico}\}$ é finito.

PROBLEMA 6

Seja f uma função do plano no plano que satisfaz $d(P, Q) = 1 \Rightarrow d(f(P), f(Q)) = 1$ para todos os pontos P e Q do plano. Mostre que $d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$ para todos os pontos P e Q do plano. ($d(X, Y)$ denota a distância entre X e Y).

SOLUÇÕES

1)

Considere a circunferência de raio R fixa, cujo centro O está sobre uma reta s . O problema se resume a determinar a posição de O' em s que minimiza a soma d das distâncias de O e O' a ℓ . Claramente, ℓ é perpendicular a s . Seja I o ponto de intersecção de s com ℓ . Temos dois casos a considerar:

- (i) $OO' \geq OI$. Neste caso, $d = OO'$ e d é mínimo quando $I = O'$.
- (ii) $OO' \leq OI$. Neste caso, considere $O'' \neq O'$ em s tal que $O'I = IO''$ (O'' é simétrico de O' em relação a ℓ). Assim, temos que $d = OO'' \geq OI$ (primeiro caso) e d é mínimo quando $O' = I = O''$.

Em ambos casos, temos que d é mínimo quando $O' = I$. Por Pitágoras, este mínimo é igual a $\sqrt{R^2 - r^2}$.

2)

Dado um conjunto finito $A \subset \mathbb{N}$, denotaremos por $d(A)$ o diâmetro de A . Temos duas desigualdades a provar:

$$(i) \quad f(n) \geq \frac{n^2}{4}, \text{ para todo } n \geq 2.$$

Vamos supor, por absurdo, que exista um conjunto $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $n \geq 2$, tal que A satisfaz $P(n)$, $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ e $d(A) < \frac{n^2}{4}$. Como A satisfaz $P(n)$,

$A + A = \{a_1 + a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_3, \dots, a_n + a_n\}$ tem $\frac{n(n+1)}{2}$ elementos. Como

$a_1 + a_1 < a_1 + a_2 < \dots < a_n + a_n$, temos que $(a_n + a_n) - (a_1 + a_1) + 1 \geq \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow a_n - a_1 \geq \frac{n^2}{4} + \frac{n-2}{4} \geq \frac{n^2}{4} \Rightarrow d(A) \geq \frac{n^2}{4}$, o que é uma contradição. Isto demonstra (i).

$$(ii) \quad f(n) < n^3, \text{ para todo } n \geq 2.$$

Como $\{0, 1\}$ satisfaz $P(2)$, temos que $f(2) \leq 1 < 2^3$. Agora, vamos supor que $f(n) < n^3$ para algum $n \geq 2$. Seja $A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}$ tal que A_n satisfaz $P(n)$ e $d(A_n) = f(n) < n^3$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $0 = a_1 < a_2 < \dots < a_n = d(A_n)$, bastando para isto subtrair de cada elemento de A_n o menor de seus elementos. Agora, queremos achar $a_{n+1} \in \mathbb{N} - A_n$ tal que $A_{n+1} = \{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}$ satisfaça $P(n+1)$ e

$d(A_{n+1}) < (n+1)^3$. Como $A_n + A_n$ tem $\frac{n(n+1)}{2}$ elementos e

$A_{n+1} + A_{n+1} = (A_n + A_n) \cup \{a_i + a_{n+1} \mid 1 \leq i \leq n+1\}$, temos que $a_{n+1} \in \mathbb{N} - A_n$ e A_{n+1} satisfaz $P(n+1)$ se e somente se,

$a_{n+1} \notin P = \{a_i + a_j - a_k \mid 1 \leq i, j, k \leq n\} \cup \{\frac{a_i + a_j}{2} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$. Como

$|P| \leq n^3 + \frac{n(n+1)}{2}$, temos que $a_{n+1} \leq n^3 + \frac{n(n+1)}{2}$, pois basta escolher a_{n+1} como o menor natural que não está em P . Assim,

$f(n+1) \leq d(A_{n+1}) < (n+1)^3$. Por indução finita em n , temos que (ii) é verdade, o que completa nossa demonstração.

Vamos ainda, verificar que, para p primo ímpar, $f(p) < 2p^2$. Para isto, construímos o conjunto $A = \{k + 2pg(k), 0 \leq k \leq p-1\}$, onde $g(k) = k^2 \pmod{p}$, $0 \leq g(k) \leq p-1$.

Temos $d(A) \leq p-1 + 2p(p-1) = 2p^2 - p - 1 < 2p^2$ e se tivéssemos $i + 2pg(i) + j + 2pg(j) = r + 2pg(r) + s + 2pg(s)$, então $i + j + 2p(g(i) + g(j)) = r + s + 2p(g(r) + g(s)) \Rightarrow i + j = r + s, g(i) + g(j) = g(r) + g(s)$

Assim,

$i - r = s - j$ e $i^2 + j^2 \equiv r^2 + s^2 \pmod{p}$, logo

$(i-r)(i+r) \equiv (s-j)(s+j) \pmod{p} \Rightarrow i-r \equiv s-j \equiv 0 \pmod{p}$ ou $i+r \equiv s+j \pmod{p}$. Portanto $i=r$ e $s=j$ ou $i=s$ e $r=j$.

Com um pouco de teoria dos Corpos, é possível provar, utilizando um elegante argumento devido a Bose-Chowla, que, de fato, temos $f(p) < p^2$ para p primo. Seja $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ o corpo com p elementos e $L \supset K$ um corpo com p^2 elementos. Seja θ um gerador do grupo (cíclico) multiplicativo de L , ou seja, tal que $\{\theta^k, k \in \mathbb{Z}\} = L - \{0\}$. Para cada $m \in K$, $\theta + m \in L - \{0, 1\}$, e, portanto, existe $a_m \in \mathbb{Z}$, $0 < a_m < p^2 - 1$ tal que $\theta^{a_m} = \theta + m$. O conjunto $A = \{a_m, 0 \leq m \leq p-1\}$ tem diâmetro no máximo $p^2 - 3 < p^2$ e $a_i + a_j = a_r + a_s \Rightarrow (\theta + i)(\theta + j) = (\theta + r)(\theta + s) \Rightarrow (i + j - r - s)\theta + (ij - rs) = 0$. Como $\theta \notin K$, temos $i + j = r + s$ e $ij = rs \Rightarrow \{i, j\} = \{r, s\}$.

3)

a) Vamos supor, por absurdo, que existam funções $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$(I) g(f(x)) = x^3 \text{ e}$$

$$(II) f(g(x)) = x^2$$

Agora $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(y) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow x = y$.
 Logo f é injetora. Ainda, de (I) e (II), temos
 $(f(x))^2 = f(g(f(x))) = f(x^3) \Rightarrow f(0)^2 = f(0), f(-1)^2 = f(-1)$ e $f(1)^2 = f(1)$,
 logo $\{f(0), f(1), f(-1)\} \subset \{0, 1\}$ o que é uma contradição (pois f é injetora e, portanto, $\{f(0), f(1), f(-1)\}$ tem 3 elementos).

(b) Vamos supor, por enquanto, que existam funções $f, g : (1, +\infty) \rightarrow (1, +\infty)$ tais que $g(f(x)) = x^3$ e $f(g(x)) = x^2$, para todo $x \in (1, \infty)$. Agora, considere as funções

$$\phi(x) = \log_2(\log_2 g(2^{2^x}))$$

$$\psi(x) = \log_2(\log_2 f(2^{2^x}))$$

Temos

$$\begin{aligned} \phi \circ \psi(x) &= \log_2(\log_2 g(2^{2^{\log_2(\log_2 f(2^{2^x}))}}})) = \log_2(\log_2 g(f(2^{2^x}))) = \\ &= \log_2(\log_2 (2^{2^x})^3) = \log_2 3 \cdot 2^x = x + \log_2 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi \circ \phi(x) &= \log_2(\log_2 f(2^{2^{\log_2(\log_2 g(2^{2^x}))}}})) = \log_2(\log_2 f(g(2^{2^x}))) = \\ &= \log_2(\log_2 (2^{2^x})^2) = \log_2 2^{x+1} = x + 1 \end{aligned}$$

Supondo que $\phi(x) = ax + b$ e $\psi(x) = cx + d$, devemos ter, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\phi \circ \psi(x) = acx + ad + b = x + \log_2 3$$

$$\psi \circ \phi(x) = acx + d + bc = x + 1$$

Podemos escolher, por exemplo, $a = \log_2 3, b = 0, c = \log_3 2$ e $d = 1$.

(ou seja, $\phi(x) = x \log_2 3$ e $\psi(x) = x \log_3 2 + 1$)

De (A), temos

$$g(2^{2^x}) = 2^{2^{\phi(x)}} \Rightarrow g(x) = 2^{2^{\phi(\log_2 x)}} = 2^{2^{\log_2 3 \cdot \log_2 x}} = 2^{\log_2 x \cdot \log_2 3}$$

e de (B)

$$f(2^{2^x}) = 2^{2^{\psi(x)}} \Rightarrow f(x) = 2^{2^{\psi(\log_2(\log_2 x))}} = 2^{2^{1+\log_2 \log_2 x \cdot \log_3 2}} = 2^{2 \log_2 x \cdot \log_3 2}$$

É fácil verificar que as funções acima estão definidas em $(1, \infty)$ e satisfazem as condições do enunciado. Elas fornecem, portanto, uma possível solução para o item b).

4)

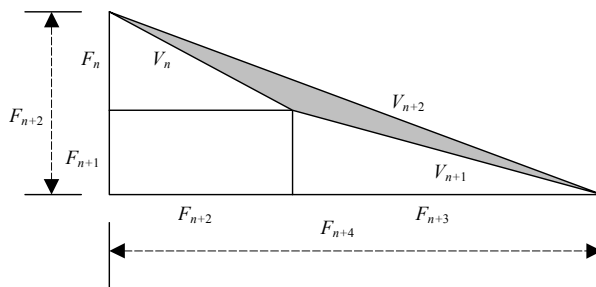
Primeiramente, notemos que, para $n \geq 0$, $F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$. De fato, $F_1 F_3 - F_2^2 = 1 \cdot 2 - 1^2 = (-1)^2$ e por indução supondo que

$$F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1} \text{ temos que}$$

$$\begin{aligned} F_{n+1} F_{n+3} - F_{n+2}^2 &= F_{n+1} (F_{n+2} + F_{n+1}) - F_{n+2}^2 = F_{n+1}^2 - F_{n+2} (F_{n+2} - F_{n+1}) = \\ &= -(F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2) = -(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2}. \end{aligned}$$

Dividimos o problema em dois casos; indicados pelas seguintes figuras:

(i)



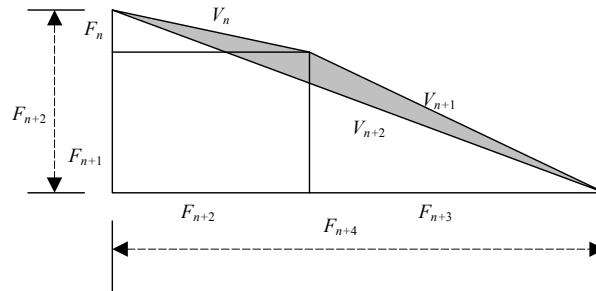
Se A é a área do triângulo sombreado, de lados V_n , V_{n+1} e V_{n+2} , temos

$$A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{F_{n+2} F_{n+4}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{F_n F_{n+2}}{2} + F_{n+1} F_{n+2} + \frac{F_{n+1} F_{n+3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$F_{n+2} F_{n+4} = 1 + F_{n+2} (F_n + 2F_{n+1}) + F_{n+1} F_{n+3} = 1 + F_{n+2} (F_{n+2} + F_{n+1}) + F_{n+1} F_{n+3} =$$

$= 1 + F_{n+2}F_{n+3} + F_{n+1}F_{n+3} = 1 + F_{n+3}^2 \Leftrightarrow F_{n+2}F_{n+4} - F_{n+3}^2 = 1$, o que ocorre sempre que n é ímpar.

(ii)



Se A é a área do triângulo sombreado, de lados V_n , V_{n+1} e V_{n+2} , temos analogamente que

$$A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{F_{n+2}F_{n+4}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{F_n F_{n+2}}{2} + F_{n+1}F_{n+2} + \frac{F_{n+1}F_{n+3}}{2} \Leftrightarrow F_{n+2}F_{n+4} - F_{n+3}^2 = -1, \text{ o que ocorre sempre que } n \text{ é ímpar.}$$

Em qualquer dos casos, temos que a área do triângulo de lados V_n , V_{n+1} e V_{n+2} é $\frac{1}{2}$.

5)

Se $|x| > |c| + 1$, então

$x^2 - |x| = |x|(|x| - 1) > |c|^2 + |c| \geq |c| \Rightarrow |x^2 + c| \geq x^2 - |c| > |x|$ e, portanto, $|f^{n+1}(x)| > |f^n(x)| > |c| + 1$ para todo $n \geq 0$. Logo, se x é pré-periódico, então $|x| \leq |c| + 1$ (*).

Agora, sejam $c = \frac{r}{s}$, onde $(r, s) = 1$, e $x = \frac{p}{q}$, onde $(p, q) = 1$,

com $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$ e $q, s > 0$. Temos

$$s(x^2 + c) = \frac{sp^2}{q^2} + r$$

Se $x^2 + c = \frac{u}{v}$, $u, v \in \mathbb{Z}, v \neq 0$, então

$$\frac{su}{v} = \frac{sp^2}{q^2} + r \Rightarrow svp^2 = q^2(su - rv) \Rightarrow q^2 \mid svp^2 \Rightarrow q^2 \mid sv \Rightarrow sv \geq q^2 \Rightarrow v \geq \frac{q^2}{s}.$$

Se $q > s$, o denominador v de $x^2 + c$ é maior ou igual a $\frac{q^2}{s} > q$, que é o

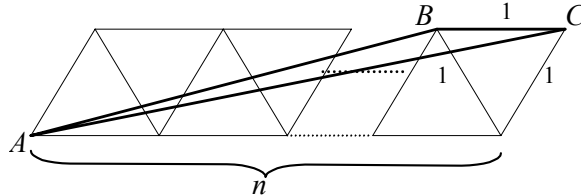
denominador de x isto é, o denominador de $f^{n+1}(x)$ é maior que o denominador de $f_n(x)$, $\forall n \geq 0$, e, portanto, se x é pré-periódico, então seu denominador é no máximo s (**).

De (*) e (**), segue que há apenas um número finito de pontos pré-periódicos racionais.

6)

Em primeiro lugar, observe que as imagens dos vértices de um triângulo equilátero de lado 1 formam também um triângulo equilátero de lado 1. Assim, dados dois triângulos equiláteros de lado 1 com um lado em comum, os vértices opostos ao lado comum podem ter mesma imagem ou imagens diferentes distando $\sqrt{3}$. Em outras palavras, se A e A' são pontos tais que $AA' = \sqrt{3}$, então $d(f(A), f(A')) \in \{0, \sqrt{3}\}$. Vamos mostrar que, de fato, $d(f(A), f(A')) = \sqrt{3}$. Se $f(A) = f(A')$, então tomando B com $AB = 1$ e $A'B = \sqrt{3}$, teríamos $d(f(A), f(B)) = 1 \Leftrightarrow d(f(A'), f(B)) = 1$, o que seria absurdo. Assim, $d(A, A') = d(f(A), f(A')) = \sqrt{3} \Rightarrow d(f(A), f(A')) = \sqrt{3}$. Desta forma qualquer reticulado triangular formado por vértices de triângulos equiláteros de lado 1 de interiores disjuntos e cobrindo o plano é preservado por f , no seguinte sentido: a imagem deste reticulado também será outro reticulado do mesmo tipo. Em particular, pontos a distância n são levados em pontos também à distância n , $n \in \mathbb{N}$.

Este último fato mostra que triângulos de lados 1, $\sqrt{n^2 - n + 1}$ e $\sqrt{n^2 + n - 1}$ que têm área $\sqrt{3}/4$ são preservados pela função f , já que seus vértices estão em reticulado triangular de lado 1.



$$AB = \sqrt{n^2 - n + 1}$$

$$AC = \sqrt{n^2 + n + 1}$$

Utilizando um procedimento análogo ao anterior, vamos agora considerar a imagem dos vértices de dois triângulos deste tipo com o lado de medida $\sqrt{n^2 + n + 1}$ em comum. Sendo X e Y os vértices destes triângulos opostos ao lado comum, temos novamente que $XY = \varepsilon_n \Rightarrow d(f(X), f(Y)) = 0$ ou $d(f(X), f(Y)) = XY = \varepsilon_n$, onde

$$\varepsilon_n = \sqrt{\frac{3}{n^2 + n + 1}}$$

é o dobro da altura dos triângulos considerados em relação ao lado comum. Vamos demonstrar que os pontos à distância ε_n têm, de fato, imagens distintas. Seja k_n tal que $k_n \varepsilon_n < 1 \leq (k_n + 1) \varepsilon_n$.

Seja $d(A_0, A_1) = \varepsilon_n$, considere pontos $A_i, 2 \leq i \leq k_n + 1$ tais que $d(A_i, A_{i+1}) = \varepsilon_n$ para $0 \leq i \leq k_n$ e $d(A_0, A_{k_n+1}) = 1$. Temos $d(f(A_0), f(A_{k_n+1})) = 1$ e, portanto,

$$1 \leq \sum_{i=0}^{k_n} d(f(A_i), f(A_{i+1})) \leq d(f(A_0), f(A_1)) + k_n \varepsilon_n,$$

Se $d(f(A_0), f(A_1))$ fosse 0, então $1 \leq k_n \varepsilon_n < 1$, o que seria absurdo assim, $XY = \varepsilon_n \Rightarrow d(f(X), f(Y)) = \varepsilon_n$. Como antes, temos que $XY = k \varepsilon_n \Rightarrow d(f(X), f(Y)) = k \varepsilon_n$ para $k \in \mathbb{N}$.

Agora, suponha que existam X e Y tais que $d(f(X), f(Y)) \neq d(X, Y)$.
Sejam $n \in \mathbb{N}$ tal que $4\varepsilon_n < |d(f(X), f(Y)) - d(X, Y)|$ e $P \in \mathbb{R}^2$ com
 $\frac{d(P, X)}{\varepsilon_n} \in \mathbb{N}, d(P, Y) < 2\varepsilon_n$.

Tome $Q \in \mathbb{R}^2$ com $d(P, Q) = d(Y, Q) = \varepsilon_n \Rightarrow d(f(P), f(Q)) =$
 $d(f(Y), f(Q)) = \varepsilon_n \Rightarrow d(f(P), f(Y)) \leq 2\varepsilon_n$
e como $d(P, X) = d(f(P), f(X))$, temos
 $|d(f(X), f(Y)) - d(X, Y)| \leq |d(f(X), f(Y)) - d(f(X), f(P))| +$
 $|d(X, P) - d(X, Y)| \leq d(f(Y), f(P)) + d(P, Y) < 4\varepsilon_n$, absurdo.

Obs: As funções $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que satisfazem as condições do enunciado são chamadas isometrias, e são composições de translações com rotações e / ou reflexões.

Você sabia... Que o número de pessoas que já
apertaram a mão de outras pessoas um número ímpar
de vezes é par ??



13ª. OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA

República Dominicana 1998 - Problemas e resultados

Primeiro dia

Duração da Prova: 4 h e 30 minutos.

PROBLEMA 1

São dados 98 pontos sobre uma circunferência. Maria e José jogam alternadamente da seguinte maneira: cada um deles traça um segmento unindo dois dos pontos dados que não tenham sido unidos entre si anteriormente. O jogo termina quando os 98 pontos tenham sido usados como extremos de um segmento pelo menos uma vez. O vencedor é a pessoa que faz o último traço. Se o José começa o jogo, quem pode garantir a sua própria vitória?

PROBLEMA 2

A circunferência inscrita no triângulo ABC é tangente aos lados BC , CA e AB nos pontos D , E e F , respectivamente. AD corta a circunferência num segundo ponto Q . Demonstrar que a reta EQ passa pelo ponto médio de AF se e somente se $\overline{AC} = \overline{BC}$.

PROBLEMA 3

Encontrar o menor número natural n com a seguinte propriedade: entre quaisquer n números distintos do conjunto $\{1, 2, \dots, 999\}$ pode-se escolher quatro números diferentes a, b, c, d , tais que $a + 2b + 3c = d$.

Segundo dia

Duração da Prova: 4 h e 30 minutos.

PROBLEMA 4

Em volta de uma mesa redonda estão sentados representantes de n países ($n \geq 2$), satisfazendo a seguinte condição: se duas pessoas são do mesmo país, então, seus respectivos vizinhos da direita não podem ser de um mesmo país. Determinar, para cada n , o número máximo de pessoas que pode haver em volta da mesa.

PROBLEMA 5

Encontrar o maior valor possível n para que existam pontos distintos $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ no plano, e números reais r_1, r_2, \dots, r_n de modo que a distância entre quaisquer dois pontos diferentes P_i e P_j seja $r_i + r_j$.

PROBLEMA 6

Seja λ a raiz positiva da equação $t^2 - 1998t - 1 = 0$. Define-se a sucessão $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ por:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = [\lambda x_n] \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Encontrar o resto da divisão de x_{1998} por 1998.

Nota: $[x]$ indica a parte inteira de x , ou seja, $[x]$ é o único inteiro k tal que $k \leq x < k + 1$.

RESULTADOS

A equipe Brasileira teve uma excelente participação na 13ª. Olimpíada Iberoamericana de Matemática realizada em República Dominicana de 18 a 27 de setembro na qual participaram 18 países.

Os países que obtiveram maior soma de pontos foram:

BRASIL	132 pontos
CHILE	127 pontos
ARGENTINA	120 pontos
PERU	117 pontos
MÉXICO	115 pontos
ESPAÑA	112 pontos

O Resultado da Equipe Brasileira

BRA 1	Murali Srinivasam Vajapeyam	Prata - 32 pontos
BRA 2	Emanuel Augusto de Souza Carneiro	Ouro - 37 pontos
BRA 3	Fabricio Shigueu Catae	Ouro - 35 pontos
BRA 4	Mauricio Pereira Carrari	Bronze - 28 pontos

Cada um dos seis problemas da prova vale 7 pontos.

39ª. OLIMPIÁDA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

Soluções

PROBLEMA 1

No quadrilátero convexo $ABCD$, as diagonais AC e BD são perpendiculares e os lados opostos AB e DC não são paralelos. Sabemos que o ponto P , onde se intersectam as mediatrizes de AB e DC , está no interior de $ABCD$. Prove que $ABCD$ é um quadrilátero inscrito, e somente se, os triângulos ABP e CDP têm áreas iguais.

SOLUÇÃO

Suponha primeiro que $ABCD$ seja inscrito. Como $AC \perp BD$ temos $\widehat{AB} + \widehat{CD} = \pi$. Claramente o centro O do círculo circunscrito pertence às mediatrizes de AB e DC , logo $P = O$, e como área de $OAB = \frac{1}{2}r^2 \operatorname{sen} \widehat{AB} = \frac{1}{2}r^2 \operatorname{sen} \widehat{CD} =$ área de OCD (onde r é o raio do círculo), vale a primeira implicação.

Suponha agora que $ABCD$ não seja inscrito. Suponha sem perda de generalidade que $PC < PA$. Seja Q o ponto de interseção de AC e BD . Prolongamos QC e QD até intersectarmos o círculo de centro p e raio $PA = PB$ em novos pontos C' e D' . Como AC' e BD' são perpendiculares, pela primeira implicação sabemos que área de $PAB =$ área de $PC'D'$, mas $C'D' > CD$ ($C'D'$ é hipotenusa do triângulo retângulo $QC'D'$, de catetos maiores que o triângulo retângulo QCD , do qual CD é hipotenusa), e $d(P, C'D') > d(P, \overline{CD})$ (de fato, C' e D' estão no mesmo semiplano determinado pela reta \overline{CD} , distinto do semiplano ao qual pertence P , e $d(P, C'D') = d(P, M)$, onde M é o ponto médio de $C'D'$, e portanto pertence ao mesmo semiplano que C' e D' , logo $d(P, \overline{CD}) < d(P, M) = d(P, C'D')$). Portanto área de $PC'D' >$ área de PCD , absurdo, pois estamos supondo que área de $PAB =$ área de PCD .

PROBLEMA 2

Numa competição, existem a concorrentes e b juizes, onde $b \geq 3$ é um inteiro ímpar. Cada juiz avalia cada um dos concorrentes, classificando-o como "aprovado" ou "reprovado". Suponha que k é um número tal que as

classificações dadas por dois juízes quaisquer coincidem no máximo para k concorrentes. Prove que $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$.

SOLUÇÃO

Para cada um dos candidatos, se j é o número de juizes que o aprovam, o número de pares de juizes que tem julgamentos coincidentes em relação a ele é $C_j^2 + C_{b-j}^2 \leq C_{\frac{b+1}{2}}^2 + C_{\frac{b-1}{2}}^2 = \frac{(b-1)^2}{4}$, de modo que o número total de

pares de julgamentos coincidentes é no máximo $\frac{a(b-1)^2}{4}$, que, por outro

lado, por hipótese, deve ser no máximo $k \cdot C_b^2 = k \frac{b(b-1)}{2}$. Assim,

$$\text{devemos ter } kb \frac{(b-1)}{2} \geq \frac{a(b-1)^2}{4} \Rightarrow \frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}.$$

PROBLEMA 3

Para qualquer inteiro positivo n , seja $d(n)$ o número de divisores positivos de n (incluindo 1 e n).

Determine todos os inteiros positivos k tais que $\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$ para algum n .

SOLUÇÃO

Obsevemos inicialmente que se $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ (p_i primos distintos) então $d(n) = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_k)$.

Assim, $d(n^2)/d(n) = \frac{(1 + 2\alpha_1)(1 + 2\alpha_2) \dots (1 + 2\alpha_k)}{(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_k)}$. Como o numerador é

ímpar, se o resultado for inteiro deve ser ímpar (e todos os α_i devem ser pares).

Vamos mostrar que qualquer número natural ímpar é da forma desejada. Para isso, devemos mostrar que todo número ímpar pode ser escrito como

produto de frações da forma $\frac{2r+1}{r+1}$, $r \in \mathbb{N}$, não necessariamente distintas.

Faremos isso por indução. Seja m um número ímpar, e seja 2^s a maior

potência de 2 que divide $m + 1$. Temos portanto $m = 2^{s+1}q + 2^s - 1$ para algum $q \in \mathbb{N}$, donde

$$m = \frac{m(2^s - 1)}{2^s - 1} = \frac{2^{2s}(2q + 1) - 2^{s+1}(q + 1) + 1}{2^s - 1} = \frac{2^{2s}(2q + 1) - 2^{s+1}(q + 1) + 1}{2^{2s-1}(2q + 1) - 2^s(q + 1) + 1} \times \\ \times \frac{2^{2s-1}(2q + 1) - 2^s(q + 1) + 1}{2^{2s-2}(2q + 1) - 2^{s-1}(q + 1) + 1} \times \dots \times \frac{2^{2s+1}(2q + 1) - 4(q + 1) + 1}{2^s(2q + 1) - (2q + 1)} \times (2q + 1).$$

Como $2q + 1 < 2^{s+1}q + 2s - 1 = m$, por hipótese de indução, $2q + 1$ se escreve como produto de frações da forma $\frac{2r + 1}{r + 1}$, e portanto m também.

PROBLEMA 4

Determine todos os pares (a, b) de inteiros positivos tais que $ab^2 + b + 7$ divide $a^2b + a + b$.

SOLUÇÃO

Se $\frac{a^2b + a + b}{ab^2 + b + 7}$ é inteiro então

$$\frac{b(a^2b + a + b) - a(ab^2 + b + 7)}{ab^2 + b + 7} = \frac{b^2 - 7a}{ab^2 + b + 7} \quad \text{é inteiro.} \quad \text{Como}$$

$$b^2 - 7a < b^2 < ab^2 + b + 7 \quad \text{temos que} \quad \frac{b^2 - 7a}{ab^2 + b + 7} < 1. \quad \text{Se} \quad \frac{b^2 - 7a}{ab^2 + b + 7} = 0$$

teremos $b^2 = 7a$, donde b é múltiplo de 7 (digamos $b = 7t$), e $(7t)^2 = 7a$ nos dá $a = 7t^2$. É fácil ver que $(a, b) = (7t^2, 7t)$ satisfaz as condições do enunciado para todo t inteiro positivo (temos nesse caso

$$\frac{a^2b + a + b}{ab^2 + b + 7} = t).$$

Se $\frac{b^2 - 7a}{ab^2 + b + 7} < 0$ devemos ter $b^2 < 7a$ e $\frac{b^2 - 7a}{ab^2 + b + 7} \leq -1$ (pois é inteiro), e

$$\text{portanto } 7a > 7a - b^2 \geq ab^2 + b + 7 \Rightarrow 7a > ab^2 \Rightarrow b^2 < 7 \Rightarrow b = 1 \text{ ou } b = 2.$$

Se $b = 1$, $\frac{b^2 - 7a}{ab^2 + b + 7} = \frac{1 - 7a}{a + 8} = -7 + \frac{57}{a + 8}$, e devemos ter que $a + 8$ divide

$$57, \text{ com } a \text{ inteiro positivo} \Rightarrow a + 8 = 19 \text{ ou } a + 8 = 57 \Rightarrow a = 11 \text{ ou}$$

$a = 49$. Para $a = 11$ e $b = 1$ temos $\frac{a^2b + a + b}{ab^2 + b + 7} = \frac{133}{19} = 7$, e para $a = 49$ e

$b = 1$ temos $\frac{a^2b + a + b}{ab^2 + b + 7} = \frac{2451}{57} = 43$.

Se $b = 2$, $\frac{b^2 - 7a}{ab^2 + b + 7} = \frac{4 - 7a}{4a + 9}$. Como $4 - 7a > -18 - 8a = -2(4a + 9)$, se

$\frac{4 - 7a}{4a + 9}$ é inteiro negativo, devemos ter

$$\frac{4 - 7a}{4a + 9} = -1 \Rightarrow 4 - 7a = -4a - 9 \Rightarrow a = \frac{13}{3} \notin \mathbb{N}.$$

Assim, as soluções são dadas por $(a, b) = (7t^2, 7t), t \in \mathbb{N}; (a, b) = (11, 1)$ e $(a, b) = (49, 1)$.

PROBLEMA 5

Seja I o incentro do triângulo ABC . A circunferência inscrita no triângulo ABC é tangente aos lados BC , CA e AB nos pontos K , L e M , respectivamente. A reta que passa por B , paralela ao segmento MK , intersecta as retas LM e LK nos pontos R e S , respectivamente. Prove que o ângulo $\angle RIS$ é agudo.

SOLUÇÃO

Como $|BM| = |BK|$ e \overline{BI} é bissetriz de \widehat{MBK} temos $\overline{BI} \perp \overline{MK}$, e portanto

$\overline{BI} \perp \overline{RS}$. Queremos mostrar que \widehat{RIS} é agudo, o que é equivalente a $|RI|^2 + |SI|^2 > |RS|^2$, o que equivale a

$$|BR|^2 + |BI|^2 + |BS|^2 + |BI|^2 > (|BR| + |BS|)^2 = |BR|^2 + 2|BR||BS| + |BS|^2,$$

e portanto devemos provar que $|BI|^2 > |BR||BS|$.

Se $\hat{A} = \hat{BAC}$, $B = \hat{ABC}$ e $C = \hat{BCA}$, temos $K\hat{B}S = M\hat{B}R = \frac{\pi - \hat{B}}{2}$,

$K\hat{S}B = \frac{\pi - \hat{A}}{2}$ (e portanto $S\hat{K}B = \frac{\pi - \hat{C}}{2}$) e $M\hat{R}B = \frac{\pi - \hat{C}}{2}$ (e portanto $B\hat{M}R = \frac{\pi - \hat{A}}{2}$). Assim, os triângulos MBR e SBK são semelhantes e $\frac{|BR|}{|BM|} = \frac{|BK|}{|BS|}$, donde $|BR||BS| = |BM||BK| = |BM|^2 < |BI|^2$ (pois BI é hipotenusa do triângulo retângulo BMI).

PROBLEMA 6

Considere todas as funções f definidas no conjunto \mathbb{N} dos inteiros positivos, com valores no mesmo conjunto, que satisfazem $f(t^2 f(s)) = s (f(t))^2$, para todos s e t em \mathbb{N} . Determine o menor valor possível de $f(1998)$

SOLUÇÃO

Dizemos que $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é estritamente multiplicativa se $h(xy) = h(x) h(y)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{N}$, e dizemos que h é uma involução se $h(h(x)) = x$ para todo $x \in \mathbb{N}$. É fácil ver que se f satisfaz a involução estritamente multiplicativa então f satisfaz a condição do enunciado: $f(t^2 f(s)) = (f(t))^2 f(f(s)) = s (f(t))^2$. Podemos definir $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ estritamente multiplicativa por $f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}) = f(p_1)^{\alpha_1} \dots f(p_k)^{\alpha_k}$ (p_i primos distintos), onde $f(2) = 3$, $f(3) = 2$, $f(37) = 5$, $f(5) = 37$ e $f(p) = p$, para todo p primo não pertencente a $\{2, 3, 5, 37\}$, e teremos $f(1998) = f(2 \cdot 3^3 \cdot 37) = f(2) f(3)^3 f(37) = 3 \cdot 2^3 \cdot 5 = 120$. Vamos provar que 120 é menor valor possível para $f(1998)$.

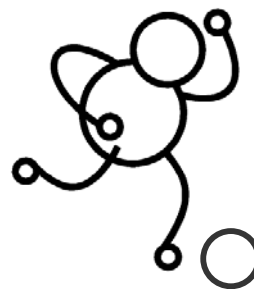
Fazendo $t = 1$ temos $f(f(s)) = s f(1)^2, \forall s \in \mathbb{N}$. Em particular, f é injetiva, pois $f(s) = f(u) \Rightarrow f(f(s)) = f(f(u)) \Rightarrow s f(1)^2 = u f(1)^2 \Rightarrow s = u$.

Temos ainda $f(t^2 f(1)) = f(t)^2$ para todo $t \in \mathbb{N}$ (fazendo $s = 1$), e portanto temos $f(t^2 f(s)^2) = f(t^2 f(s^2 f(1))) = s^2 f(1) f(t)^2$, e fazendo $s = f(u)$ temos $f(t^2 (f(f(u)))^2) = f(u)^2 f(1) f(t)^2$. Assim, provamos que $f(t^2 u^2 f(1)^4) = (f(u) f(t))^2 f(1)$, para quaisquer $u, t \in \mathbb{N}$.

Portanto, se $ut = xy, f(t^2 u^2 f(1)^4) = f(x^2 y^2 f(1)^4)$, logo $(f(u) f(t))^2 f(1) = (f(x) f(y))^2 f(1) \Rightarrow f(u) f(t) = f(x) f(y)$. Como $x^2 \cdot 1 = x \cdot x, f(x^2) f(1) =$

$f(x)^2, \forall x \in \mathbb{N}$. Se p^k é uma potência de primo que divide $f(1)$, e p^r é a maior potência de p que divide $f(x)$ para todo $x \in \mathbb{N}$, temos que $f(x)^2$ é múltiplo de $p^r \cdot p^k \Rightarrow f(x)$ é múltiplo de $p^{\lceil \frac{r+k}{2} \rceil}$ onde $\lceil \alpha \rceil$ denota o menor inteiro que é maior ou igual a α , para todo $x \in \mathbb{N}$, o que é absurdo se $r < k$ (pois teríamos $\lceil \frac{r+k}{2} \rceil > r$). Logo p^k divide $f(x)$ para todo $x \in \mathbb{N}$, e portanto $f(1)$ divide $f(x)$, para todo $x \in \mathbb{N}$. Como $xy \cdot 1 = x \cdot y$, $f(xy) f(1) = f(x) f(y) \Rightarrow \frac{f(xy)}{f(1)} = \frac{f(x)}{f(1)} \cdot \frac{f(y)}{f(1)}$. Definindo $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g(x) = \frac{f(x)}{f(1)}$ temos que g é estritamente multiplicativa, g é injetiva, $g(1) = 1$ e $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{N}$. Temos $g(1998) = g(2 \cdot 3^3 \cdot 37) = g(2) g(3)^3 g(37)$. Observemos agora que $g(2)$, $g(3)$ e $g(37)$ devem ser naturais distintos maiores que 1, e não podemos ter $\{2, 4\} \subset \{g(2), g(3), g(37)\}$, pois se $g(p) = 2$ e $g(q) = 4$ com $\{p, q\} \subset \{2, 3, 37\}$ teríamos $g(p^2) = g(p)^2 = g(q) \Rightarrow p^2 = q$, absurdo. Assim $g(1998) = g(2) g(3)^3 g(37) = g(2) g(3) g(37) g(3)^2 \geq 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot g(3)^2 \geq 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^2 = 120$, logo $f(1998) \geq 120$, como afirmamos \square

Você sabia... Que o matemático Harald Bohr (irmão do físico Niels Bohr), famoso por sua teoria das funções quase-periódicas, era um consagrado jogador de futebol? Ele jogou no meio-de-campo da seleção da Dinamarca, que ganhou a medalha de prata nos jogos Olímpicos de Londres, em 1908, quando seu time derrotou a França pela contagem de 17 a 1 (!).



O PRINCÍPIO DA INDUÇÃO

Elon Lages Lima

◆ Nível Avançado.

INTRODUÇÃO

O Princípio da Indução é um eficiente instrumento para a demonstração de fatos referentes aos números naturais. Por isso deve-se adquirir prática em sua utilização. Por outro lado, é importante também conhecer seu significado e sua posição dentro do arcabouço da Matemática. Entender o Princípio da Indução é praticamente o mesmo que entender os números naturais.

Apresentamos abaixo uma breve exposição sobre os números naturais, onde o Princípio da Indução se insere adequadamente e mostra sua força teórica antes de ser utilizado na lista de exercícios propostos ao final.

1. A SEQÜÊNCIA DOS NÚMEROS NATURAIS

Os números naturais constituem um modelo matemático, uma escala padrão, que nos permite a operação de contagem. A seqüência desses números é uma livre e antiga criação do espírito humano. Comparar conjuntos de objetos com essa escala abstrata ideal é o processo que torna mais precisa a noção de quantidade; esse processo (a contagem) pressupõe portanto o conhecimento da seqüência numérica. Sabemos que os números naturais são 1, 2, 3, 4, 5, ... A totalidade desses números constitui um conjunto, que indicaremos com o símbolo \mathbb{N} e que chamaremos de conjunto dos naturais. Portanto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.

Evidentemente, o que acabamos de dizer só faz sentido quando já se sabe o que é um número natural. Façamos de conta que esse conceito nos é desconhecido e procuremos investigar o que há de essencial na seqüência 1, 2, 3, 4, 5,

Deve-se a **Giussepe Peano** (1858-1932) a constatação de que se pode elaborar toda a teoria dos números naturais a partir de quatro fatos básicos, conhecidos atualmente como os *axiomas de Peano*. Noutras palavras, o conjunto \mathbb{N} dos números naturais possui quatro propriedades fundamentais, das quais resultam, como conseqüências lógicas, todas as afirmações verdadeiras que se podem fazer sobre esses números. Começaremos com o enunciado e a apreciação do significado dessas quatro proposições fundamentais a respeito dos números naturais.

2. OS AXIOMAS DE PEANO

Um matemático profissional, em sua linguagem direta e objetiva, diria que o conjunto \mathbb{N} dos números naturais é caracterizado pelas seguintes propriedades:

- A.** Existe uma função $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ um elemento $s(n) \in \mathbb{N}$, chamado o sucessor de n .
- B.** A função $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é injetiva.
- C.** Existe um único elemento 1 no conjunto \mathbb{N} , tal que $1 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- D.** Se um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in X$ e $s(X) \subset X$ (isto é, $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$), então $X = \mathbb{N}$.

Observe que, como estamos chamando de \mathbb{N} o conjunto dos números naturais, a notação $n \in \mathbb{N}$ significa que n é um número natural.

As afirmações **A**, **B**, **C** e **D** são os *axiomas de Peano*. A notação $s(n)$ é provisória. Depois de definirmos adição, escreveremos $n + 1$ em vez de $s(n)$.

Como concessão à fraqueza humana, nosso matemático nos faria a gentileza de reformular os *axiomas de Peano* em linguagem corrente, livre de notação matemática. E nos diria então que as afirmações acima significam exatamente o mesmo que estas outras:

- A'** Todo número natural possui um único sucessor, que também é um número natural.
- B'** Números naturais diferentes possuem sucessores diferentes. (Ou ainda: números que têm o mesmo sucessor são iguais.)
- C'** Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Este número é representado pelo símbolo 1 e chamado de "número um".
- D'** Se um conjunto de números naturais contém o número 1 e, além disso, contém o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto coincide com \mathbb{N} , isto é, contém todos os números naturais.

A partir daí, retomamos a palavra para dizer que o sucessor de 1 chama-se "dois", o sucessor de dois chama-se "três", etc. Nossa civilização progrediu ao ponto em que temos um sistema de numeração, o qual nos

permite representar, mediante o uso apropriado dos símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, todos os números naturais. Além disso, nossa linguagem também fornece nomes para os primeiros termos da seqüência dos números naturais. (Números muito grandes não têm nomes específicos, ao contrário dos menores como "mil novecentos e noventa e oito". Quem sabe, por exemplo, o nome do número de átomos do universo?)

Voltando a usar a notação $s(n)$ para o sucessor do número natural n , teremos então $2 = s(1)$, $3 = s(2)$, $4 = s(3)$, $5 = s(4)$, etc. Assim, por exemplo, a igualdade $2 = s(1)$ significa apenas que estamos usando o símbolo 2 para representar o sucessor de 1. A seqüência dos números naturais pode ser indicada assim:

$$1 \xrightarrow{s} 2 \xrightarrow{s} 3 \xrightarrow{s} 4 \xrightarrow{s} 5 \xrightarrow{s} \dots$$

As flechas ligam cada número ao seu sucessor.

Nenhuma flecha aponta para 1, pois este número não é sucessor de nenhum outro. O diagrama acima diz muito sobre a estrutura do conjunto \mathbb{N} dos números naturais.

3. O AXIOMA DA INDUÇÃO

Um dos *axiomas de Peano*, o último, possui claramente uma natureza mais elaborada do que os demais. Ele é conhecido como o axioma da indução. Faremos dele uma análise detida, acompanhada de comentários.

O significado informal do axioma **D** é que todo número natural pode ser obtido a partir de 1 por meio de repetidas aplicações da operação de tomar o sucessor. Assim, por exemplo, 2 é o sucessor de 1, 3 é o sucessor do sucessor de 1, etc. Para se entender melhor o axioma da indução é útil examinar o exemplo, no qual $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ mas a função $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é modificada, pondo-se $s(n) = n + 2$. Então, se começarmos com 1 e a este número aplicarmos repetidamente a operação de tomar o "sucessor" (nesta nova acepção) obteremos $s(1) = 3$, $s(3) = 5$, $s(5) = 7$, etc., e nunca chegaremos a qualquer número par. Portanto, o diagrama

$$1 \xrightarrow{s} 3 \xrightarrow{s} 5 \xrightarrow{s} \dots \quad 2 \xrightarrow{s} 4 \xrightarrow{s} 6 \xrightarrow{s} \dots$$

exibe uma função injetiva $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ para a qual não é verdade que todo número natural n pode ser obtido, a partir de 1, mediante repetidas aplicações da operação de passar de k para $s(k)$.

Dentro de um ponto de vista estritamente matemático, podemos reformular o axioma da indução do seguinte modo: Um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ chama-se *indutivo* quando $s(X) \subset X$, ou seja, quando $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$, ou ainda, quando o sucessor de qualquer elemento de X também pertence a X . Dito isto, o axioma da indução afirma que o único subconjunto indutivo de \mathbb{N} que contém o número 1 é o próprio \mathbb{N} .

No exemplo acima, os números ímpares 1, 3, 5, ... formam um conjunto indutivo que contém o elemento 1 mas não é igual a \mathbb{N} .

O papel fundamental do axioma da indução na teoria dos números naturais e, mais geralmente, em toda a Matemática, resulta do fato de que ele pode ser visto como um método de demonstração, chamado o *Método de Indução Matemática*, ou *Princípio da Indução Finita*, ou *Princípio da Indução*, conforme explicaremos agora.

Seja P uma propriedade que se refere a números naturais. Um dado número natural pode gozar ou não da propriedade P .

Por exemplo, seja P a propriedade de um número natural n ser sucessor de outro número natural. Então 1 não goza da propriedade P , mas todos os demais números gozam de P .

O Princípio da Indução diz o seguinte:

Princípio da Indução: Seja P uma propriedade referente a números naturais. Se 1 goza de P e se, além disso, o fato de o número natural n gozar de P implica que seu sucessor $s(n)$ também goza, então todos os números naturais gozam da propriedade P .

Para ver que o Princípio da Indução é verdadeiro (uma vez admitidos os *axiomas de Peano*) basta observar que, dada a propriedade P cumprindo as condições estipuladas no enunciado do Princípio, o conjunto X dos números naturais que gozam da propriedade P contém o número 1 e é indutivo. Logo $X = \mathbb{N}$, isto é, todo número natural goza da propriedade P . As propriedades básicas dos números naturais são demonstradas por indução. Começemos com um exemplo bem simples.

Exemplo 1. Entre os *axiomas de Peano* não consta explicitamente a afirmação de que todo número é diferente do seu sucessor, a qual provaremos agora. Seja P esta propriedade. Mais precisamente, dado o número natural n , escrevamos $P(n)$ para significar, abreviadamente, a afirmação $n \neq s(n)$. Então $P(1)$ é verdadeira, pois $1 \neq s(1)$, já que 1 não é

sucessor de número algum; em particular, 1 não é sucessor de si próprio. Além disso, se supusermos $P(n)$ verdadeira, isto é, se admitimos que $n \neq s(n)$, então $s(n) \neq s(s(n))$, pois a função $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é injetiva. Mas a afirmação $s(n) \neq s(s(n))$ significa que $P(s(n))$ é verdadeira. Assim, a verdade de $P(n)$ acarreta a verdade de $P(s(n))$. Pelo Princípio da Indução, todos os números naturais gozam da propriedade P , ou seja, são diferentes de seus sucessores.

Nas demonstrações por indução, a hipótese de que a propriedade P é válida para o número natural n (da qual deve decorrer que P vale também para $s(n)$) chama-se hipótese de indução.

O Princípio da Indução não é utilizado somente como método de demonstração. Ele serve também para definir funções $f: \mathbb{N} \rightarrow Y$ que têm como domínio o conjunto \mathbb{N} dos números naturais.

Para se definir uma função $f: X \rightarrow Y$ exige-se em geral que seja dada uma regra bem determinada, a qual mostre como se deve associar a cada elemento $x \in X$ um único elemento $y = f(x) \in Y$.

Entretanto, no caso particular em que o domínio da função é o conjunto \mathbb{N} dos números naturais, a fim de definir uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow Y$ não é necessário dizer, de uma só vez, qual é a receita que dá o valor $f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Basta que se tenha conhecimento dos seguintes dados:

- (1) O valor $f(1)$;
- (2) Uma regra que permita calcular $f(s(n))$ quando se conhece $f(n)$.

Esses dois dados permitem que se conheça $f(n)$ para todo número natural n . (Diz-se então que a função f foi definida por recorrência.) Com efeito, se chamarmos de X o conjunto dos números naturais n para os quais se pode determinar $f(n)$, o dado (1) acima diz que $1 \in X$ e o dado (2) assegura que $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$. Logo, pelo axioma da indução, tem-se $X = \mathbb{N}$.

Obs. : Uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow Y$ cujo domínio é o conjunto dos números naturais chama-se uma *seqüência* ou *sucessão* de elementos de Y . A notação usada para uma tal seqüência é $(y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$, onde se usa y_n em vez de $f(n)$ para indicar o valor da função f no número n . O elemento y_n .

4. ADIÇÃO E MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS NATURAIS

A adição e a multiplicação de números naturais são exemplos de funções definidas por recorrência.

Para definir a adição, fixaremos um número natural arbitrário k e definiremos a soma $k + n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Fixado k , a correspondência $n \rightarrow k + n$ será uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = k + n$, chamada "somar k ". Ela se define por recorrência, a partir dos seguintes dados:

$$(S1) \quad k + 1 = s(k)$$

$$(S2) \quad k + s(n) = s(k + n).$$

Portanto, $k + 1$ é, por definição, o sucessor de k . E, se conhecermos $k + n$, saberemos o valor de $k + s(n)$: por definição, tem-se $k + s(n) = s(k + n)$. Isto nos permite conhecer $k + n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (e todo $k \in \mathbb{N}$).

Usando as notações definitivas $n + 1$ em vez de $s(n)$ e $(k + n) + 1$ em vez de $s(k + n)$, a igualdade (S2) se escreve assim:

$$(S2') \quad k + (n + 1) = (k + n) + 1.$$

Assim, as igualdades (S1) e (S2) ou, equivalentemente, (S1) e (S2') definem por recorrência a soma $k + n$ de dois números naturais quaisquer k e n .

A multiplicação de números naturais se define de modo análogo à adição. Fixado arbitrariamente um número natural k , a multiplicação por k associa a todo número natural n o produto $n \cdot k$, definido por indução da seguinte maneira:

$$(P1) \quad 1 \cdot k = k.$$

$$(P2) \quad (n + 1) \cdot k = n \cdot k + k.$$

O produto $n \cdot k$ escreve-se também nk e lê-se " n vezes k ". A definição acima diz portanto que uma vez k é igual a k e $n + 1$ vezes k é igual a n vezes k mais (uma vez) k . Assim, por definição, $2 \cdot k = k + k$, $3 \cdot k = k + k + k$, etc.

Usa-se indução para provar as propriedades básicas da adição e da multiplicação de números naturais. Entre elas, destacam-se as seguintes, válidas para quaisquer $k, n, p \in \mathbb{N}$:

$$\text{Associatividade:} \quad k + (n + p) = (k + n) + p \quad \text{e} \quad k \cdot (n \cdot p) = (k \cdot n) \cdot p$$

$$\text{Comutatividade:} \quad k + n = n + k \quad \text{e} \quad k \cdot n = n \cdot k$$

$$\text{Lei do Corte:} \quad k + n = k + p \Rightarrow n = p \quad \text{e} \quad k \cdot n = k \cdot p \Rightarrow n = p$$

$$\text{Distributividade:} \quad k(n + p) = k \cdot n + k \cdot p.$$

Omitiremos as demonstrações destes fatos. O leitor pode considerá-las como exercícios sobre o método da indução.

5. ORDEM

A adição de números naturais permite introduzir uma relação de ordem em \mathbb{N} . Dados os números naturais m, n diremos que m é menor do que

n , e escreveremos $m < n$, para significar que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$. Neste caso, diz-se também que n é maior do que m e escreve-se $n > m$ para exprimir que se tem $m < n$. A notação $m \leq n$ significa que $m < n$ ou $m = n$. Por definição, tem-se portanto $m < m + p$ para quaisquer $m, p \in \mathbb{N}$. Em particular, $m < m + 1$. Segue-se também da definição que $1 < n$ para todo número natural $n \neq 1$.

Com efeito, pelo axioma **C**, $n \neq 1$ implica que n é sucessor de algum número natural m , ou seja, $n = m + 1 = 1 + m$, logo $n > 1$. Assim, 1 é o menor dos números naturais.

Provaremos a seguir as propriedades básicas da relação de ordem $m < n$ que definimos. A primeira delas é a transitividade.

Teorema 1. (Transitividade.) Se $m < n$ e $n < p$, então $m < p$.

Demonstração: Se $m < n$, $n < p$ então $n = m + k$, $p = n + r$, logo $p = (m + k) + r = m + (k + r)$, portanto $m < p$.

Outra importante propriedade de relação de ordem é que, dados dois números naturais diferentes m, n , ou se tem $m < n$ ou então $n < m$. Esta propriedade pode ser reformulada de outra maneira, como segue.

Diremos que os números naturais m, n são *comparáveis* quando se tem $m = n$, $m < n$ ou $n < m$. Podemos então enunciar o seguinte teorema.

Teorema 2. (Comparabilidade.) Todo número natural n é comparável com qualquer número natural m .

Demonstração: Isto se prova por indução. O número 1 é comparável com qualquer outro número natural pois já sabemos que $1 < m$ para todo $m \neq 1$.

Suponhamos agora que o número n seja comparável com todos os números naturais. Mostremos, a partir daí, que $n + 1$ também tem essa propriedade.

Com efeito, seja $m \in \mathbb{N}$ tomado arbitrariamente. Sabemos que se tem $m < n$, $m = n$ ou $n < m$. Examinemos cada uma dessas possibilidades:

Se for $m < n$ então $m < n + 1$ por transitividade, pois sabemos que $n < n + 1$.

Se for $m = n$, então $m < n + 1$.

Se for $n < m$ então $m = n + p$. Neste caso, há duas possibilidades. Ou se tem $p = 1$, donde $m = n + 1$, ou então $p > 1$, logo $p = 1 + p'$, e daí $m = (n + 1) + p'$ e concluímos que $n + 1 < m$. Em qualquer hipótese, vemos que $n + 1$ é comparável com qualquer número natural m . Por indução, fica provada a comparabilidade de quaisquer números naturais m, n .

A comparabilidade dos números naturais é complementada pela proposição abaixo.

Teorema 3. (Tricotomia.) Dados $m, n \in \mathbb{N}$, qualquer das afirmações $m < n$, $m = n$, $n < m$ exclui as outras duas.

Demonstração: Se tivéssemos $m < n$ e $m = n$, então seria $m = m + p$, donde $m + 1 = m + p + 1$ e, cortando m , concluiríamos que $1 = p + 1$, um absurdo, pois 1 não é sucessor de p . Portanto $m < n$ (e analogamente, $n < m$) é incompatível com $m = n$.

Do mesmo modo, se tivéssemos $m < n$ e $n < m$, então teríamos $n = m + p$ e $m = n + k$, do que resultaria $n = n + k + p$, logo $n + 1 = n + k + p + 1$ e, cortando n , concluiríamos que $1 = k + p + 1$, um absurdo.

O teorema seguinte mostra que n e $n + 1$ são números consecutivos.

Teorema 4. Não existem números naturais entre n e $n + 1$.

Demonstração: Se fosse possível ter $n < p < n + 1$, teríamos $p = n + k$ e $n + 1 = p + r$, logo $n + 1 = n + k + r$. Cortando n , obteríamos $1 = k + r$. Por definição, isto significaria $k < 1$, o que é absurdo, pois já vimos que $k \neq 1 \Rightarrow k > 1$.

A conexão entre a relação de ordem e as operações de adição e multiplicação é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 5. (Monotonicidade.) Se $m < n$, então $m + p < n + p$ e $mp < np$.

Demonstração: Usando a definição de $<$, temos que $m < n \Rightarrow n = m + k \Rightarrow n + p = (m + k) + p \Rightarrow m + p < n + p$. Analogamente, $m < n \Rightarrow n = m + k \Rightarrow np = mp + kp \Rightarrow np > mp$.

A recíproca da monotonicidade é a Lei do Corte para desigualdades: $m + p < n + p \Rightarrow m < n$ e $mp < np \Rightarrow m < n$. O leitor poderá prová-la por absurdo, usando a tricotomia e a própria monotonicidade.

6. BOA ORDENAÇÃO

Dado o subconjunto $A \subset \mathbb{N}$, diz-se que o número natural a é o *menor* (ou *primeiro*) elemento de A quando $a \in A$ e, além disso, $a \leq x$, para todos os elementos $x \in A$.

Por exemplo, 1 é o menor elemento de \mathbb{N} .

De agora em diante, dado $n \in \mathbb{N}$, indicaremos com I_n o conjunto dos números naturais p tais que $1 \leq p \leq n$. Assim, $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{1, 2\}$, $I_3 = \{1, 2, 3\}$ etc.

As propriedades da relação de ordem $m < n$, demonstradas na seção anterior para os números naturais (exceto o Teorema 4 que vale apenas para

números inteiros), são igualmente válidas para os números inteiros, racionais e, mais geralmente, para números reais quaisquer. Existe, porém, uma propriedade de suma importância que é válida para a ordem entre os números naturais, mas sem equivalente para números inteiros, racionais ou reais.

Teorema 6. (Princípio da Boa Ordenação.) *Todo subconjunto não-vazio $A \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento.*

Demonstração: Sem perda de generalidade, podemos admitir que $1 \notin A$, pois caso contrário 1 seria evidentemente o menor elemento de A . O menor elemento de A , cuja existência queremos provar, deverá ser da forma $n + 1$. Devemos pois encontrar um número natural n tal que $n + 1 \in A$ e, além disso, todos os elementos de A são maiores do que n , logo maiores do que 1, 2, ..., n . Noutras palavras, procuramos um número natural n tal que $I_n \subset \mathbb{N} - A$ e $n + 1 \in A$. Com esse objetivo, consideramos o conjunto

$$X = \{n \in \mathbb{N}; I_n \subset \mathbb{N} - A\}.$$

Portanto, X é o conjunto dos números naturais n tais que todos os elementos de A são maiores do que n . Como estamos supondo que $1 \notin A$, sabemos que $1 \in X$. Por outro lado, como A não é vazio, nem todos os números naturais pertencem a X , ou seja, temos $X \neq \mathbb{N}$. Pelo axioma **D**, vemos que o conjunto X não é indutivo, isto é, deve existir algum $n \in X$ tal que $n + 1 \notin X$. Isto significa que todos os elementos de A são maiores do que n mas nem todos são maiores do que $n + 1$. Como não há números naturais entre n e $n + 1$, concluímos que $n + 1$ pertence a A e é o menor elemento de A .

O Princípio da Boa Ordenação pode muitas vezes ser usado em demonstrações, substituindo o Princípio da Indução. Vejamos um exemplo.

Dissemos anteriormente que um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ chama-se indutivo quando $n \in X \Rightarrow n + 1 \in X$, ou seja, quando X contém o sucessor de cada um dos seus elementos. O Princípio da Indução afirma que se um conjunto indutivo X contém o número 1 então X contém todos os números naturais.

Vamos usar o Princípio da Boa Ordenação para provar que se um conjunto indutivo X contém o número a , então X contém todos os números naturais maiores do que a .

A prova desta afirmação se faz por absurdo, como ocorre em geral quando se usa a boa ordenação. Suponhamos então que existam números

naturais, maiores do que a , não pertencentes ao conjunto indutivo X . Seja b o menor desses números. Como $b > a$, podemos escrever $b = c + 1$, onde, pela definição de b , tem-se necessariamente $c \in X$. Mas, como X é indutivo, isto obriga que $b = c + 1 \in X$, uma contradição.

A proposição que acabamos de demonstrar pode ser enunciada da seguinte forma:

Teorema 7: (Princípio da Indução Generalizado.) *Seja P uma propriedade referente a números naturais, cumprindo as seguintes condições:*

- (1) *O número natural a goza da propriedade P ;*
- (2) *Se um número natural n goza da propriedade P então seu sucessor $n + 1$ também goza de P .*

Então todos os números naturais maiores do que ou iguais a a gozam da propriedade P .

Exemplo 2. Vejamos uma situação simples onde se emprega o Princípio da Indução Generalizado. Trata-se de provar que $2n + 1 < 2^n$, para todo $n \geq 3$. Esta afirmação, (que é falsa para $n = 1$ ou $n = 2$), vale quando $n = 3$. Supondo-a válida para um certo $n \geq 3$, mostremos que daí decorre sua validade para $n + 1$. Com efeito, $2(n + 1) + 1 = (2n + 1) + 2 < 2^n + 2 < 2^n + 2^n = 2^{n+1}$. (Na primeira desigualdade, usamos a hipótese de indução.)

Exemplo 3. Usando a desigualdade $2n + 1 < 2^n$, que acabamos de provar para $n \geq 3$, podemos demonstrar que $n^2 < 2^n$ para todo $n \geq 5$, empregando novamente o Princípio da Indução Generalizado. Com efeito, vale $5^2 < 2^5$ pois $25 < 32$. Supondo válida a desigualdade $n^2 < 2^n$ para um certo valor de $n \geq 5$, daí segue-se que $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 < 2^n + 2n + 1$ (pela hipótese de indução) $< 2^n + 2^n$ (pelo exemplo anterior) $= 2^{n+1}$. Portanto $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$. Pelo Princípio de Indução Generalizado, segue-se que $P(n)$ vale para todo $n \geq 5$. Evidentemente, a desigualdade $n^2 < 2^n$ é falsa para $n = 1, 2, 3, 4$. O teorema abaixo contém outra aplicação do Princípio da Boa Ordenação.

Teorema 8. *Toda função monótona não-crescente $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é constante a partir de um certo ponto. (Isto é, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = f(n_0)$, para todo $n \geq n_0$.)*

Demonstração: Seja n_0 o menor elemento do conjunto $X = \{f(1), f(2), \dots, f(n), \dots\}$. Então $n > n_0 \Rightarrow f(n) \leq f(n_0)$ (porque a função f é não-crescente) o que acarreta que $f(n) = f(n_0)$ (porque $f(n_0)$ é o menor elemento de X).

Corolário: Toda seqüência decrescente $n_1 > n_2 > \dots$ de números naturais é finita. Com efeito, do contrário, pondo $f(k) = n_k$, obteríamos uma função estritamente decrescente $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

7. SEGUNDO PRINCÍPIO DA INDUÇÃO

Em algumas situações, ao tentarmos fazer uma demonstração por indução, na passagem de n para $n + 1$, sentimos necessidade de admitir que a proposição valha não apenas para n e sim para todos os números naturais menores do que ou iguais a n . A justificativa de um raciocínio desse tipo se encontra no

Teorema 9: (Segundo Princípio da Indução.) Seja $X \subset \mathbb{N}$ um conjunto com a seguinte propriedade:

(I) Dado $n \in \mathbb{N}$, se todos os números naturais menores do que n pertencem a X , então $n \in X$.

O segundo Princípio da Indução afirma que um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ com a propriedade (I) coincide com \mathbb{N} .

Demonstração: Com efeito, supondo, por absurdo, que $X \neq \mathbb{N}$, isto é, que $\mathbb{N} - X \neq \emptyset$, seja n o menor elemento do conjunto $\mathbb{N} - X$, ou seja, o menor número natural que não pertence a X . Isto quer dizer que todos os números naturais menores do que n pertencem a X . Mas então, pela propriedade (I), n pertence a X , uma contradição. Segue-se que $\mathbb{N} - X = \emptyset$ e $X = \mathbb{N}$.

Obs. : Se um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ goza da propriedade (I), para que um número natural n não pertencesse a X seria necessário que existisse algum número natural $r < n$ tal que $r \notin X$. Em particular, se $n = 1$, como não existe número natural menor do que 1, a hipótese $1 \notin X$ não pode ser cumprida. Noutras palavras, (I) já contém implicitamente a afirmação de que $1 \in X$. Assim, ao utilizar o Segundo Princípio da Indução, não é preciso estipular que X contém o número 1.

Toda propriedade P que se refira a números naturais define um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$, a saber, o conjunto dos números naturais que gozam da propriedade P . (E reciprocamente, todo conjunto $X \subset \mathbb{N}$ define uma propriedade referente a números naturais, a saber, a propriedade de pertencer a X .) Deste modo, "propriedade" e "conjunto" são noções equivalentes. Por isso, é natural que o Segundo Princípio da Indução possua a formulação seguinte, onde ele aparece como o

Teorema 10: (Segundo método de demonstração por indução.) *Seja P uma propriedade referente a números naturais. Dado $n \in \mathbb{N}$, se a validade de P para todo número natural menor do que n implicar que P é verdadeira para n , então P é verdadeira para todos os números naturais.*

Demonstração: Com efeito, nas condições do enunciado, o conjunto X dos números naturais que gozam da propriedade P satisfaz a condição (I) do Segundo Princípio da Indução, logo $X = \mathbb{N}$ e P vale para todos os números naturais.

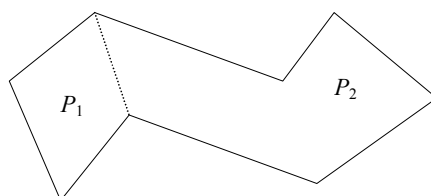
Aplicaremos agora o Segundo Princípio da Indução para demonstrar um fato geométrico. No exemplo a seguir, usamos os números naturais como instrumento de contagem, isto é, como números cardinais, pois empregamos expressões do tipo um polígono de n lados". (Vide seção 6.)

Sabe-se que, traçando diagonais internas que não se cortam, pode-se decompor qualquer polígono em triângulos justapostos. Isto é evidente quando o polígono é convexo: basta fixar um vértice e traçar as diagonais a partir dele. Se o polígono não é convexo, a prova requer mais cuidados. (Vide "Meu Professor de Matemática", pag. 109.)

O leitor pode experimentar com um polígono não-convexo e verificar que há muitas maneiras diferentes de decompô-lo em triângulos justapostos mediante diagonais internas. Mas vale o resultado seguinte, no qual usaremos o Segundo Princípio da Indução.

Exemplo 4. Qualquer que seja a maneira de decompor um polígono P , de n lados, em triângulos justapostos por meio de diagonais internas que não se intersectam, o número de diagonais utilizadas é sempre $n - 3$.

Com efeito, dado n , suponhamos que a proposição acima seja verdadeira para todo polígono com menos de n lados. Seja então dada uma decomposição do polígono P , de n lados, em triângulos justapostos, mediante diagonais internas. Fixemos uma dessas diagonais. Ela decompõe P como reunião de dois polígonos justapostos P_1 , de n_1 lados, e P_2 , de n_2 lados, onde $n_1 < n$ e $n_2 < n$, logo a proposição vale para os polígonos P_1 e P_2 . Evidentemente, $n_1 + n_2 = n + 2$.



As d diagonais que efetuam a decomposição de P se agrupam assim: $n_1 - 3$ delas decompõem P_1 , $n_2 - 3$ decompõem P_2 e uma foi usada para separar P_1 de P_2 . Portanto $d = n_1 - 3 + n_2 - 3 + 1 = n_1 + n_2 - 5$. Como $n_1 + n_2 = n + 2$, resulta que $d = n - 3$. Isto completa a demonstração.

Observações:

1. Para habituar-se com o método de demonstração por indução é preciso praticá-lo muitas vezes, a fim de perder aquela vaga sensação de desonestidade que o principiante tem quando admite que o fato a ser provado é verdadeiro para n , antes de demonstrá-lo para $n + 1$.
2. Pratique também (com moderação) o exercício de descobrir o erro em paradoxos que resultam do uso inadequado do método de indução. Vejamos dois desses sofismas:

Exemplo 5. *Todo número natural é pequeno.*

Ora, 1 certamente é pequeno. E se n é pequeno, $n + 1$ não vai subitamente tornar-se grande, logo também é pequeno. (O erro aqui consiste em que a noção "número pequeno" não é bem definida.)

Exemplo 6. *Toda função $f: X \rightarrow Y$, cujo domínio é um conjunto finito X , é constante.*

Isto é obviamente verdadeiro se X tem apenas 1 elemento. Supondo a afirmação verdadeira para todos os conjuntos com n elementos, seja $f: X \rightarrow Y$ definida num conjunto X com $n + 1$ elementos. Considere um elemento $a \in X$. Como $X' = X - \{a\}$ tem n elementos, f assume o mesmo valor $c \in Y$ em todos os elementos de X' . Agora troque a por um outro elemento $b \in X'$. Obtém-se $X'' = X - \{b\}$ um conjunto com n elementos

(entre os quais a). Novamente pela hipótese de indução, f é constante e igual a c em X'' . Logo $f(a) = c$ e daí $f: X \rightarrow Y$ é constante. (Aqui o erro reside no uso inadequado da hipótese de indução. O raciocínio empregado supõe implicitamente que X tem pelo menos 3 elementos. Na realidade, não vale a implicação $P(1) \Rightarrow P(2)$.)

O perigo de fazer generalizações apressadas relativamente a asserções sobre números naturais fica evidenciado com o seguinte exemplo:

Exemplo 7. Considere o polinômio $p(n) = n^2 - n + 41$ e a afirmação "o valor de $p(n)$ é sempre um primo para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ". Embora isso seja verdadeiro para $n = 0, 1, 2, \dots, 40$, temos $p(41) = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$ não é primo, logo a afirmação não é verdadeira.

Semelhantemente, a expressão $q(n) = n^2 - 79n + 1601$ fornece primos para $n = 1, 2, \dots, 79$, mas $q(80) = 80^2 - 79 \cdot 80 + 1601 = 1681$ não é primo, pois é divisível por 41. A moral da história é: Só aceite que uma afirmação sobre os números naturais é realmente verdadeira para todos os naturais se isso houver de fato sido demonstrado!

8. NÚMEROS CARDINAIS

Vamos agora mostrar como se usam os números naturais para contar os elementos de um conjunto finito. O Princípio da Indução será essencial. Lembremos que, dado $n \in \mathbb{N}$, escrevemos $I_n = \{p \in \mathbb{N}; p \leq n\}$, portanto $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

Uma *contagem* dos elementos de um conjunto não-vazio X é uma bijeção $f: I_n \rightarrow X$. Podemos pôr $x_1 = f(1), x_2 = f(2), \dots, x_n = f(n)$ e escrever $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Diz-se então que X possui n elementos. O conjunto X chama-se um *conjunto finito* quando existe $n \in \mathbb{N}$ tal que X possui n elementos.

Um exemplo óbvio de conjunto finito é I_n . Evidentemente, a função identidade $f: I_n \rightarrow I_n$ é uma contagem dos elementos de I_n .

Um exemplo de conjunto infinito é o próprio conjunto \mathbb{N} dos números naturais, pois nenhuma função $f: I_n \rightarrow \mathbb{N}$ pode ser sobrejetiva, não importa qual n se tome. De fato, dada f , tomamos $k = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$ e vemos que $k > f(x)$ para todo $x \in I_n$, logo $k \notin f(I_n)$, e f não é sobrejetiva.

A fim de que não haja ambigüidade quando se falar do número de elementos de um conjunto finito X , é necessário provar que todas as

contagens de X fornecem o mesmo resultado. Noutras palavras, dado o conjunto X , os números naturais m, n e as bijeções $f: I_m \rightarrow X, g: I_n \rightarrow X$, devemos mostrar que se tem $m = n$. Começamos observando que se f e g são bijeções, então $\phi = g^{-1} \circ f: I_m \rightarrow I_n$ também é uma bijeção. Basta portanto provar o seguinte:

Teorema 11. *Dados $m, n \in \mathbb{N}$, se $\phi: I_m \rightarrow I_n$ é uma bijeção, então $m = n$.*

Demonstração. Com efeito, chamemos de X o conjunto dos números naturais n que têm a seguinte propriedade: só existe uma bijeção $\phi: I_m \rightarrow I_n$ quando $m = n$. Evidentemente, $1 \in X$. Suponhamos agora que $n \in X$. Dada uma bijeção $\phi: I_{m+1} \rightarrow I_{n+1}$, duas coisas podem acontecer. Primeira: $\phi(m+1) = n+1$. Neste caso, a restrição $\phi|_{I_m}: I_m \rightarrow I_n$ é uma bijeção, logo $m = n$, donde $m+1 = n+1$. Segunda: $\phi(m+1) = b$, com $b < n+1$. Neste caso, consideramos

$a = \phi^{-1}(n+1)$ e definimos uma nova bijeção $\psi: I_{m+1} \rightarrow I_{n+1}$, pondo $\psi(m+1) = n+1, \psi(a) = b$ e $\psi(x) = \phi(x)$ para os demais elementos $x \in I_{m+1}$. Então recaímos no caso anterior e novamente concluímos que $m+1 = n+1$. Isto mostra que $n \in X \Rightarrow n+1 \in X$, logo $X = \mathbb{N}$ e a unicidade do número cardinal de um conjunto finito fica demonstrada.

Agora os números naturais não são apenas elementos do conjunto-padrão \mathbb{N} , mas servem também para responder perguntas do tipo "quantos elementos tem o conjunto X ?", ou seja, podem ser usados também como números cardinais.

A adição de números naturais se relaciona com a cardinalidade dos conjuntos por meio da seguinte proposição.

Teorema 12: *Sejam X, Y conjuntos finitos disjuntos. Se X tem m elementos e Y tem n elementos, então $X \cup Y$ tem $m + n$ elementos.*

Demonstração: Com efeito, se $f: I_m \rightarrow X$ e $g: I_n \rightarrow Y$ são bijeções, definimos uma bijeção $h: I_{m+n} \rightarrow X \cup Y$ por $h(x) = f(x)$ se $1 \leq x \leq m$ e $h(x) = g(x) + m$ se $m+1 \leq x \leq m+n$, o que conclui a demonstração.

Prova-se, por indução, que todo subconjunto de um conjunto finito X é também finito e seu número de elementos é menor do que ou igual ao de X (Veja E.L.Lima, "Análise Real", vol 1, pag. 5.)

E conveniente incluir, por definição, o conjunto vazio entre os conjuntos finitos e dizer que o seu número de elementos é *zero*. Embora zero

não seja um número natural, ele passa a ser o número cardinal do conjunto vazio.

Seguem-se algumas proposições que devem ser demonstradas por indução ou boa ordenação. Os dez últimos exercícios foram sugeridos pelo Professor A. C. Morgado.

Exercícios:

1. Construa um esquema de setas começando com os números ímpares, seguidos dos números pares divisíveis por 4 em ordem decrescente e, por fim, os pares não divisíveis por 4 em ordem crescente. Noutras palavras, tome $X = \mathbb{N}$ e defina $s : X \rightarrow X$ pondo $s(n) = n + 2$ se n não é divisível por 4, $s(n) = n - 2$ se n for múltiplo de 4. Mostre que $s : X \rightarrow X$ cumpre os axiomas **A**, **B**, **C** mas não **D**.
2. Defina, por recorrência, uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ estipulando que $f(1) = 3$ e $f(n + 1) = 5 \cdot f(n) + 1$. Dê uma fórmula explícita para $f(n)$.
3. Dê uma fórmula explícita para $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sabendo que $f(1) = 1$, $f(2) = 5$ e $f(n + 2) = 3f(n + 1) - 2f(n)$.
4. Seja $X \subset \mathbb{N}$ um conjunto indutivo não-vazio. Mostre que existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $X = \{n \in \mathbb{N}; n \geq a\}$.
5. Prove, por indução, que $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
6. Num polígono com $n \geq 6$ lados, o número de diagonais é maior do que n .
7. Prove, por indução que $[(n + 1)/n]^n < n$, para todo $n \geq 3$. (Sugestão: Observe que $(n + 2)/(n + 1) < (n + 1)/n$ e eleve ambos os membros desta desigualdade à potência $n + 1$.) Conclua daí que a seqüência $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}, \dots$ é decrescente a partir do terceiro termo.
8. Prove, por indução a desigualdade de Bernoulli: $(1 + a)^n > 1 + na$ quando $1 + a > 0$.
9. Para todo $n \in \mathbb{N}$, ponha $x_n = \left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right]^n$ e prove, por indução que se tem $x_n < \frac{n+2}{n+1}$. Conclua, a partir daí, que a seqüência de termo geral $\left(\frac{n+1}{n} \right)^n$ é crescente.

Sugestão: observe que $x_{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^3 \cdot \frac{n}{n+3} \cdot x_n$.

10. Use a distributividade de duas maneiras diferentes para calcular $(m+n)(1+1)$ e aplique em seguida a Lei do Corte para obter uma nova prova de que $m+n = n+m$.
11. Um conjunto $S \subset \mathbb{N}$, não-vazio, é limitado superiormente, se existe um natural k tal que para todo natural $x \in S$, então $x \leq k$. Mostre que S possui um maior elemento. (Isto é, existe $m \in S$ tal que $x \leq m$, para todo $x \in S$.)
12. Demonstre que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2 , ou seja, que $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$.
13. Prove que $2^n - 1$ é múltiplo de 3, para todo número natural n par.

14. Demonstre que, para todo número natural n , vale

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\dots\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq n + 1.$$

15. Demonstre que $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{199} - \frac{1}{200} = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{200}$.

16. Determine A^n se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

17. Demonstre, usando o Princípio da Indução Finita, que

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \dots + \binom{p+n}{p} = \binom{p+n+1}{p}.$$

Este resultado é comumente conhecido por *Teorema das Colunas*. (Por quê?).

18. Considere a seqüência $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \dots, \frac{p_n}{q_n}, \dots$, onde

$$p_{n+1} = p_n + 2q_n \text{ e } q_{n+1} = p_n + q_n. \text{ Demonstre que}$$

- a) $\text{m.d.c}(p_n, q_n) = 1$;

b) p_n é o inteiro mais próximo de $\frac{(1+\sqrt{2})^n}{2}$ e q_n é o inteiro mais próximo de $\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^n$.

19. [A Torre de Hanói.] São dados três suportes A , B e C . No suporte A estão encaixados n discos cujos diâmetros, de baixo para cima, estão em ordem estritamente decrescente. Mostre que é possível, com $2^n - 1$ movimentos, transferir todos os discos para o suporte B , usando o suporte C como auxiliar, de modo que jamais, durante a operação, um disco maior fique sobre um disco menor.
20. Demonstre que $2^n < n!$, para $n \geq 4$.
21. Demonstre que $2n^3 > 3n^2 + 3n + 1$ para $n \geq 3$.
22. Considere n retas em um plano. Mostre que o "mapa" determinado por elas pode ser colorido com apenas duas cores sem que duas regiões vizinhas tenham a mesma cor.

FRAÇÕES CONTÍNUAS, REPRESENTAÇÕES DE NÚMEROS E APROXIMAÇÕES

Carlos Gustavo Moreira

◆ Nível Avançado.

INTRODUÇÃO

A teoria de frações contínuas é um dos mais belos temas da matemática elementar, sendo ainda hoje assunto de pesquisa recente (incluindo a do autor destas linhas). O objetivo deste artigo é servir como referência didática em português a nível secundário sobre o assunto.

Nas inclusões $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ a passagem de \mathbb{Q} para \mathbb{R} é sem dúvida a mais complicada conceitualmente, e a representação de um número real está diretamente ligada à própria noção de número real.

De fato, o conceito de número natural é quase um conceito primitivo no ensino secundário. Já um número inteiro é um número natural com um sinal que pode ser + ou -, e um número racional é a razão entre um número inteiro e um natural não nulo. Por outro lado, dizer o que é um número real é tarefa bem mais complicada, mas há coisas que podemos dizer sobre eles. Uma propriedade essencial de \mathbb{R} é que todo número real pode ser bem aproximado por números racionais. Efetivamente, dado $x \in \mathbb{R}$, existe $k \in \mathbb{Z}$ ($k = [x]$) tal que $0 \leq x - k < 1$. Podemos escrever a representação decimal de $x - k = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$, $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$, o que significa que se $r_n = a_n + 10 \cdot a_{n-1} + 100 \cdot a_{n-2} + \dots + 10^{n-1} \cdot a_1$, então

$\frac{r_n}{10^n} \leq x - k < \frac{r_n + 1}{10^n}$, e portanto $k + \frac{r_n}{10^n}$ é uma boa aproximação racional de

x , no sentido que o erro $|x - (k + \frac{r_n}{10^n})|$ é menor que $\frac{1}{10^n}$, que é um número bem pequeno se n for grande. A representação decimal de um número real fornece pois uma seqüência de aproximações por racionais cujos denominadores são potências de 10.

Dado qualquer $x \in \mathbb{R}$ e q natural não nulo existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q}$

, e portanto $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q}$ e $\left| x - \frac{p+1}{q} \right| \leq \frac{1}{q}$. Em particular há aproximações

de x por racionais com denominador q com erro menor que $\frac{1}{q}$. A

representação decimal de x equivale a dar essas aproximações para os denominadores q que são potências de 10, e tem méritos como sua praticidade para efetuar cálculos que a fazem a mais popular das representações dos números reais. Por outro lado, envolve a escolha arbitrária da base 10, e oculta freqüentemente aproximações racionais de x muito mais eficientes do que as que exhibe. Por exemplo,

$$\left| \pi - \frac{22}{7} \right| < \frac{1}{700} < \left| \pi - \frac{314}{100} \right| \text{ e } \left| \pi - \frac{355}{113} \right| < \frac{1}{3000000} < \left| \pi - \frac{3141592}{1000000} \right|$$

mostram que $\frac{22}{7}$ e $\frac{355}{113}$ são melhores aproximações de π que aproximações decimais com denominadores muito maiores, e de fato são aproximações muito mais espectaculares do que se podia esperar.

O objetivo deste artigo é apresentar uma outra maneira de representar números reais, que sempre fornece aproximações racionais surpreendentemente boas, e de fato fornece todas essas aproximações excepcionalmente boas, além de ser natural e conceitualmente simples: a representação por frações contínuas.

Dado $x \in \mathbb{R}$ definimos $[x]$ como o único inteiro tal que $[x] \leq x < [x] + 1$.

Definimos recursivamente

$$\alpha_0 = x, a_n = [\alpha_n], \text{ e, se } \alpha_n \notin \mathbb{Z}, \alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Se, para algum n , $\alpha_n = a_n$ temos

$$x = \alpha_0 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}}. =: [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n].$$

Se não denotamos

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} =: [a_0; a_1, a_2, \dots].$$

O sentido dessa última notação ficará claro mais tarde. A representação acima se chama a representação por frações contínuas de x .

Curiosidade: O denominador da n -ésima aproximação em base B de um número real é B^n . Já o denominador q_n da n -ésima aproximação por fração contínua de x depende de x . Apesar disso, para quase todo real x , $\sqrt[n]{q_n}$ converge a $e^{\pi^2/12 \ln 2} = 3,27582291872\dots$ (meu número real preferido!) e

$$\sqrt[n]{\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right|} \text{ converge a } e^{-\pi^2/6 \ln 2} = 0,093187822954\dots$$

Observação: Os α_n (como funções de x) são funções distintas do tipo $\frac{ax+b}{cx+d}$ com a, b, c, d inteiros. Se a fração contínua de x é periódica, ou seja, se $\alpha_{n+k} = \alpha_n$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$, então x será raiz de uma equação do segundo grau com coeficientes inteiros, ou seja, será um irracional da forma $r + \sqrt{s}$, $r, s \in \mathbb{Q}$. A recíproca é verdadeira (de fato já foi enunciada no artigo de José Paulo Carneiro na RPM, ver referências), mas sua prova é mais difícil, e será apresentada no Apêndice.

Se $x \in \mathbb{Q}$, sua representação será finita, e seus coeficientes a_n vêm do algoritmo de Euclides:

$$\begin{aligned} x = \frac{p}{q}, \quad q > 0 \quad & p = a_0 q + r_0 \quad & 0 \leq r_0 < q \\ & q = a_1 r_0 + r_1 \quad & 0 \leq r_1 < r_0 \\ & r_0 = a_2 r_1 + r_2 \quad & 0 \leq r_2 < r_1 \\ & \vdots & \vdots \\ & r_{n-2} = a_n r_{n-1} \end{aligned}$$

Isso já é uma vantagem da representação por frações contínuas (além de não depender de escolhas artificiais de base), pois o reconhecimento de racionais é mais simples que na representação decimal.

Seção 1: Reduzidas e boas aproximações.

Seja $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$. Sejam $p_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \in \mathbb{N}^*$ primos entre si tais que

$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$, $n \geq 0$. O seguinte resultado será fundamental no que seguirá.

Proposição: (p_n) e (q_n) satisfazem a recorrência $p_{n+2} = a_{n+2}p_{n+1} + p_n$ e $q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n$, para todo $n \geq 0$. Temos ainda $p_0 = a_0$, $p_1 = a_0a_1 + 1$, $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$. Além disso, $p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$, $\forall n \geq 0$.

Prova: Por indução em n , provaremos que se $t_k > 0$, para $k > 1$ então

$$[t_0; t_1, t_2, \dots, t_k] = \frac{x_k}{y_k} \text{ onde as seqüências } (x_m) \text{ e } (y_m) \text{ são definidas por}$$

$$x_0 = t_0, y_0 = 1, x_1 = t_0t_1 + 1, y_1 = t_0, x_{n+2} = t_{n+2}x_{n+1} + x_n, y_{n+2} = t_{n+2}y_{n+1} + y_n, \forall n.$$

Suponha que a afirmação seja válida para $k = n$. Para $k = n+1$ temos

$$[t_0; t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}] = [t_0; t_1, t_2, \dots, t_n + \frac{1}{t_{n+1}}] =$$

$$\frac{(t_n + \frac{1}{t_{n+1}})x_{n-1} + x_{n-2}}{(t_n + \frac{1}{t_{n+1}})y_{n-1} + y_{n-2}} = \frac{t_{n+1}(t_n x_{n-1} + x_{n-2}) + x_{n-1}}{t_{n+1}(t_n y_{n-1} + y_{n-2}) + y_{n-1}} = \frac{t_{n+1}x_n + x_{n-1}}{t_{n+1}y_n + y_{n-1}}.$$

Por outro lado as igualdades

- $p_1q_0 - p_0q_1 = (a_0a_1 + 1) - a_0a_1 = 1$
- $p_{n+2}q_{n+1} - p_{n+1}q_{n+2} = (a_{n+2}p_{n+1} + p_n)q_{n+1} - (a_{n+2}q_{n+1} + q_n)p_{n+1} = - (p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1})$

mostram que $p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, o que implica em particular que os p_n, q_n dados pelas recorrências acima são primos entre si.

Corolário: $x = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}}$ e $\alpha_n = \frac{p_{n-2} - q_{n-2} \alpha}{q_{n-1} \alpha - p_{n-1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Prova: A primeira igualdade é consequência direta da prova, e a segunda é consequência direta da primeira pois $x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \alpha_n]$.

Note que as reduzidas de ordem par são menores e as de ordem ímpar maiores que $x = [a_0; a_1, \dots]$.

Teorema 1: $\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Além disso, $\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{2q_n^2}$ ou $\left| x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| < \frac{1}{2q_{n+1}^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Prova: x sempre pertence ao segmento de extremos $\frac{p_n}{q_n}$ e $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ cujo

comprimento é:

$$\left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}} \right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}} \Rightarrow \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}.$$

Além disso, se

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \frac{1}{2q_n^2} \text{ e } \left| x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| \geq \frac{1}{2q_{n+1}^2} \text{ então } \frac{1}{q_n q_{n+1}} = \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| + \left| x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right|$$

$$\geq \frac{1}{2q_n^2} + \frac{1}{2q_{n+1}^2} \Rightarrow q_{n+1} = q_n, \text{ absurdo } \square$$

Observação: De fato $\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{a_{n+1} q_n^2}$. Quanto maior for

a_{n+1} melhor será a aproximação $\frac{p_n}{q_n}$ de x . O próximo resultado nos dá

explicitamente o erro da aproximação de x por $\frac{p_n}{q_n}$.

Proposição:

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n^2}, \text{ onde } \beta_{n+1} = \frac{q_{n-1}}{q_n} = [0; a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1].$$

Demonstração: Temos $\alpha_{n+1} = \frac{p_{n-1} - q_{n-1}x}{q_n x - p_n}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} + \beta_{n+1} &= \frac{p_{n-1} - q_{n-1}x}{q_n x - p_n} + \frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1}}{q_n(q_n x - p_n)} = \frac{(-1)^n}{q_n(q_n x - p_n)} \Rightarrow x - \frac{p_n}{q_n} = \\ &= \frac{q_n(q_n x - p_n)}{q_n^2} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n^2} \quad \square \end{aligned}$$

Como aplicação podemos provar o seguinte.

Teorema (Hurwitz, Markov): Para todo α irracional, $n \geq 1$ temos

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2} \text{ para pelo menos um racional } \frac{p}{q} \in \left\{ \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right\}. \text{ Em}$$

particular $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$ tem infinitas soluções racionais p/q .

Demonstração: Suponha que o teorema seja falso. Então existe α irracional, $n \geq 1$ com $\alpha_n + \beta_n \leq \sqrt{5}, \alpha_{n+1} + \beta_{n+1} \leq \sqrt{5}$ e $\alpha_{n+2} + \beta_{n+2} \leq 5$. Devemos portanto ter $a_n = a_{n+1} = a_{n+2} = 1$ (todos são claramente no máximo 2, e se algum a_k é igual a 2 com $k \in \{n, n+1, n+2\}$, teríamos

$$\alpha_k + \beta_k \geq 2 + \frac{1}{3} > \sqrt{5}, \text{ absurdo.})$$

Seja $x = 1/\alpha_{n+2}$ e $y = \beta_{n+1}$. As desigualdades acima se traduzem em $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{y} \leq \sqrt{5}, 1+x+y \leq \sqrt{5}$ e $\frac{1}{x} + \frac{1}{1+y} \leq \sqrt{5}$. Temos

$1+x+y \leq \sqrt{5} \Rightarrow 1+x \leq \sqrt{5}-y \Rightarrow \frac{1}{1+x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{\sqrt{5}-y} + \frac{1}{y} = \frac{\sqrt{5}}{y(\sqrt{5}-y)}$ e
 portanto $y(\sqrt{5}-y) \geq 1 \Rightarrow y \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Por outro lado temos
 $x \leq \sqrt{5}-1-y \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{1+4} \geq \frac{1}{\sqrt{5}-1-y} + \frac{1}{1+4} = \frac{\sqrt{5}}{(1+y)(\sqrt{5}-1-y)}$ e
 portanto $(1+4)(\sqrt{5}-1-y) \geq 1 \Rightarrow y \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, e portanto devemos ter
 $y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, o que é absurdo pois $y = \beta_{n+1} = \frac{q_{n-1}}{q_n} \in \mathbb{Q}$.

Obs: em particular provamos que $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$ tem infinitas soluções racionais $\frac{p}{q}$, para todo α irracional. $\sqrt{5}$ é o maior número com essa propriedade, De fato, se

$\varepsilon > 0$, $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{(\sqrt{5} + \varepsilon)q^2}$, temos

$$\left| q \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - p \right| < \frac{1}{(\sqrt{5} + \varepsilon)q} \Rightarrow \left| q \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - p \right| \left| q \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) - p \right| < \frac{\left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q} \right|}{\sqrt{5} + \varepsilon},$$

ou seja, $|p^2 - pq - q^2| < \left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q} - \sqrt{5} \right| / (\sqrt{5} + \varepsilon)$. Se q é grande, $1/q^2$ é pequeno, e $\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q}$ é muito próximo de 0, donde $\left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q} - \sqrt{5} \right| / (\sqrt{5} + \varepsilon)$ é muito próximo de $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + \varepsilon} < 1$, absurdo, pois $|p^2 - pq - q^2| \geq 1$ (de fato $p^2 - pq - q^2$ é um inteiro não nulo, pois se

$$p^2 - pq - q^2 = 0 \text{ teríamos } \left(\frac{p}{q}\right)^2 - \left(\frac{p}{q}\right) - 1 = 0 \Rightarrow \frac{p}{q} \in \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right\},$$

absurdo, pois $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.)

Outra maneira de ver que, para todo $\varepsilon > 0$, $\left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{(\sqrt{5} + \varepsilon)q^2}$ tem

apenas um número finito de soluções $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ é observar que as melhores

aproximações racionais de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ são as reduzidas $\frac{p_n}{q_n}$ de sua fração

contínua $[1, 1, 1, 1, \dots]$ (ver seção 2 e exemplos), para as quais temos

$$\left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n^2}, \text{ com } \alpha_{n+1} + \beta_{n+1} \text{ se aproximando cada}$$

vez mais de

$$[1;1,1,1,\dots] + [0;1,1,1,\dots] = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \sqrt{5}.$$

Exemplos:

- $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, \dots]$, portanto $\frac{p_0}{q_0} = 3, \frac{p_1}{q_1} = \frac{22}{7}, \frac{p_2}{q_2} = \frac{333}{106}, \frac{p_3}{q_3} = \frac{355}{113}, \dots$
- $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots, 1, 1, 2n, \dots]$, (isso não é fácil de provar.)
- $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots]$ pois

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}}} = \dots$$

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = [1; 1, 1, 1, \dots] \text{ pois } \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}} = \dots$$

Isso prova em particular que $\sqrt{2}$ e $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ são irracionais, pois sua fração contínua é infinita.

Seção 2: Boas aproximações são reduzidas.

O próximo teorema (e seu Corolário 2) caracteriza as reduzidas em termo do erro reduzido da aproximação de x por p/q , o qual é, por definição, a razão entre $|x - p/q|$ e o erro máximo da aproximação por falta com denominador q , que é $1/q$. Assim, o erro reduzido da aproximação de x por p/q é $|qx - p|$.

Teorema 2: $|q_n x - p_n| < |qx - p|, \forall p, q \in \mathbb{Z}, 0 < q \leq q_n, \frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$.

Além disso, $|q_n x - p_n| \leq |qx - p|, \forall p, q \in \mathbb{Z}, 0 < q < q_{n+1}$.

Prova: $\left| \frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \frac{1}{qq_n} > \frac{1}{q_n q_{n+1}}$ se $q < q_{n+1}$, e assim $\frac{p}{q}$ está fora do intervalo $\left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right)$. Portanto,

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \min \left\{ \left| \frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} \right|, \left| \frac{p}{q} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| \right\} \geq \frac{1}{qq_{n+1}} \Rightarrow |qx - p| \geq \frac{1}{q_{n+1}} \geq |q_n x - p_n|.$$

Além disso, se vale a igualdade, então $x = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, donde $a_{n+1} \geq 2$, e $q_{n+1} > 2q_n$, pois numa fração contínua finita, como no algoritmo de Euclides, o último coeficiente a_n é sempre maior que 1. Nesse caso, se $q \leq q_n$, teremos

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| - \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \frac{1}{qq_n} - \frac{1}{q_n q_{n+1}} = \frac{q_{n+1} - q}{qq_n q_{n+1}} > \frac{1}{qq_{n+1}} \Rightarrow |qx - p| > \frac{1}{q_{n+1}} \geq |q_n x - p_n|.$$

Corolário 1: $\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \left| x - \frac{p}{q} \right|, \forall q < q_n.$

Corolário 2: Se $|qx - p| < |q'x - p'|, \forall q' \leq q, \frac{p}{q} \neq \frac{q'}{q'}$ então p/q é uma reduzida da fração contínua de x .

Prova: Tome n tal que $q_n \leq q < q_{n+1}$.

Teremos $|q_n x - p_n| \leq |qx - p|$, e portanto $p/q = p_n/q_n \square$

Teorema 3: Se $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}$ então $\frac{p}{q}$ é uma reduzida da fração contínua de x .

Prova: Seja n tal que $q_n < q \leq q_{n+1}$. Suponha que $\frac{p}{q} \neq \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$. Então, temos duas possibilidades:

a) $q \geq \frac{q_{n+1}}{2} \Rightarrow \left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{qq_{n+1}} \geq \frac{1}{2q^2}.$

b)

$$q < \frac{q_{n+1}}{2} \Rightarrow q_{n+1} > 2q_n \Rightarrow \left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p}{q} \right| - \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \frac{1}{qq_n} - \frac{1}{q_n q_{n+1}} = \frac{q_{n+1} - q}{qq_n q_{n+1}} > \frac{1}{2qq_n} > \frac{1}{2q^2}.$$

Apêndice: Frações contínuas periódicas

Nesta seção provaremos que os números reais com fração contínua periódica são exatamente as raízes de equações do segundo grau com coeficientes inteiros.

Lembramos que na representação de x por fração contínua, a_n, α_n são definidos por recursão por

$$\alpha_0 = x, \quad a_n = [\alpha_n], \quad \alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n}.$$

e temos

$$\alpha_n = \frac{p_{n-2} - q_{n-2}x}{q_{n-1}x - p_{n-1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Isso dá uma prova explícita do fato de que se a fração contínua de x é periódica, então x é raiz de uma equação do segundo grau com coeficientes inteiros. De fato, se $\alpha_{n+k} = \alpha_n$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$ então

$$\begin{aligned} \frac{p_{n-2} - q_{n-2}x}{q_{n-1}x - p_{n-1}} &= \frac{p_{n+k-2} - q_{n+k-2}x}{q_{n+k-1}x - p_{n+k-1}} \Rightarrow \\ (q_{n-1}q_{n+k-2} - q_{n-2}q_{n+k-1})x^2 &+ (p_{n+k-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n+k-1} - p_{n+k-2}q_{n-1} - p_{n-1}q_{n+k-2}) \\ x + p_{n-1}p_{n+k-2} - p_{n-2}p_{n+k-1} &= 0. \end{aligned}$$

Note que o coeficiente de x^2 é não-nulo, pois $\frac{q_{n-1}}{q_{n-2}}$ é uma fração irredutível

(de fato $p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1} = (-1)^n$) de denominador q_{n-2} e $\frac{q_{n+k-1}}{q_{n+k-2}}$ é uma

fração irredutível de denominador $q_{n+k-2} > q_{n-2}$, donde

$$\frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} \neq \frac{q_{n+k-1}}{q_{n+k-2}} \Rightarrow q_{n-1}q_{n+k-2} - q_{n-2}q_{n+k-1} \neq 0.$$

Vamos provar agora um resultado devido a Lagrange segundo o qual se x é uma *irracionalidade quadrática*, isto é, se x é um irracional do tipo $r + \sqrt{s}$, $r, s \in \mathbb{Q}$, $s > 0$ então a fração contínua de x é periódica, i. e, existem $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$ com $\alpha_{n+k} = \alpha_n$. Neste caso, existem a, b, c inteiros tais que $ax^2 + bx + c = 0$, com $b^2 - 4ac > 0$ e $\sqrt{b^2 - 4ac}$ irracional. Como vimos na seção 1,

$$x = \frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}, \quad \text{e portanto}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow a \left(\frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}} \right)^2 + b \left(\frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}} \right) + c = 0$$

$$\Rightarrow A_n \alpha_n^2 + B_n \alpha_n + C_n = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} A_n &= ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2 \\ B_n &= 2ap_{n-1}p_{n-2} + b(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}) + 2cq_{n-1}q_{n-2} \\ C_n &= ap_{n-2}^2 + bp_{n-2}q_{n-2} + cq_{n-2}^2. \end{aligned}$$

Note que $C_n = A_{n-1}$. Vamos provar que existe $M > 0$ tal que $0 < |A_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto $0 < |C_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$:

$$A_n = ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2 = aq_{n-1}^2 \left(x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right) \left(\bar{x} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right),$$

onde x e \bar{x} são as raízes de $aX^2 + bX + c = 0$, mas

$$\begin{aligned} \left| x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| < \frac{1}{q_{n-1}^2} \leq 1 \Rightarrow |A_n| = aq_{n-1}^2 \left| x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| \left| \bar{x} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| \leq a \left(\left| \bar{x} - x \right| + \left| x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| \right) \leq \\ \leq a \left(\left| \bar{x} - x \right| + 1 \right) =: M. \end{aligned}$$

Notemos agora que $B_n^2 - 4A_nC_n = b^2 - 4ac, \forall n \in \mathbb{N}$. De fato,

$$B_n^2 - 4A_nC_n = (p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1})^2 (b^2 - 4ac) = b^2 - 4ac. \text{ Portanto,}$$


$$B_n^2 \leq 4A_nC_n + b^2 - 4ac = 4M^2 + b^2 - 4ac \Rightarrow B_n \leq M' = \sqrt{4M^2 + b^2 - 4ac}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Provamos assim que A_n, B_n e C_n estão uniformemente limitados, donde há apenas um número finito de possíveis equações $A_n X^2 + B_n X + C_n = 0$, e portanto de possíveis valores de α_n . Assim, necessariamente $\alpha_{n+k} = \alpha_n$ para alguma escolha de $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^*$.

Referências:

- N. Beskin - Frações contínuas - Iniciação à Matemática - Editora Mir.
- José Paulo Q. Carneiro - Um processo finito para a raiz quadrada – Revista do Professor de Matemática 34, 1997, pp. 36-44.
- C.D. Olds - Continued Fractions - New Mathematical Library - Random House.
- A. M. Rockett, P. Szűsz - Continued Fractions - World Scientific.

SOLUÇÕES DE PROBLEMAS PROPOSTOS EUREKA! N^{os}. 1 e 2

 Publicamos aqui algumas das respostas enviadas por nossos leitores.

- 2) Em uma pista circular há postos de gasolina, e o total de gasolina que há nos postos é exatamente o suficiente para um carro dar uma volta. Prove que existe um posto de onde um carro com o tanque inicialmente vazio pode partir e conseguir dar uma volta completa na pista (parando para reabastecer nos postos).

Solução

Sejam P_1, P_2, \dots, P_n os postos de gasolina, l_i a quantidade de gasolina no posto P_i e c_i a quantidade de gasolina necessária para ir de P_i a P_{i+1} , para $i = 1, 2, \dots, n$ (convenção: para $1 \leq k \leq n$, $P_{n+k} := P_k$). Por hipótese,

$\sum_{i=1}^n l_i = \sum_{i=1}^n c_i$. Suponha que exista k com $1 \leq k \leq n$ e $\sum_{i=1}^k l_i < \sum_{i=1}^k c_i$ (se não existe tal k podemos dar a volta começando em P_1). Tome k_0 com $1 \leq k_0 \leq n$

tal que $\sum_{i=1}^{k_0} (l_i - c_i)$ seja o menor possível. Afirmamos que podemos dar a

volta começando em P_{k_0+1} . De fato, se não for assim, existe r com $1 \leq r \leq n$ e

$\sum_{i=k_0+1}^{k_0+r} (l_i - c_i) < 0$, mas então teríamos $\sum_{i=1}^{k_0+r} (l_i - c_i) < \sum_{i=1}^{k_0} (l_i - c_i)$, o que é um

absurdo (se $k_0+r > n$ temos $\sum_{i=1}^{k_0+r} (l_i - c_i) = \sum_{i=1}^{k_0+r-n} (l_i - c_i)$, pois $\sum_{i=1}^n (l_i - c_i) = 0$).

- 3) Prove que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que os 1000 primeiros dígitos de n^{1998} são iguais a 1.

Solução

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n^{1998} = \underbrace{111\dots 11}_{1000 \text{ algarismos}} \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p; \text{ onde } \alpha_i \text{ é tal que } 0 \leq \alpha_i \leq 9;$$

$i = 1, 2, 3, \dots, p$. Seja também $k = 111\dots 11$, daí:

$$k \cdot 10^s \leq n^{1998} \leq k \underbrace{9999\dots 9}_s \text{ algarismos}, \text{ logo } k \cdot 10^s \leq n^{1998} < (k+1) \cdot 10^s,$$

Precisamos garantir que há algum $n \in \mathbb{N}$ que satisfaça a desigualdade acima; seja então $s = 1998 \cdot p$:

$$k \cdot 10^{1998 \cdot p} \leq n^{1998} < (k+1) \cdot 10^{1998 \cdot p} \Rightarrow \\ \sqrt[1998]{k} \cdot 10^p \leq n < \sqrt[1998]{k+1} \cdot 10^p \Rightarrow \sqrt[1998]{k} \leq \frac{n}{10^p} < \sqrt[1998]{k+1}.$$

observe que se tomarmos $n = \lfloor 10^p \cdot \sqrt[1998]{k} \rfloor + 1$; onde $\lfloor z \rfloor =$ maior inteiro menor ou igual a z , e p suficientemente grande satisfaremos a condição do enunciado.

Conclusão: $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que n^{1998} é escrito como no enunciado.

- 5) Sejam $a > 0$ e $P_1P_2P_3P_4P_5$ uma poligonal aberta contida em um dos semiplanos determinados pela reta $\overline{P_1P_5}$. Prove que existem pontos P_6 e P_7 no plano, com $\overline{P_5P_6} = a$, de modo que é possível ladrilhar o plano com infinitos ladrilhos congruentes ao heptágono $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$.

Solução

Trace a paralela a P_3P_2 passando por P_1 . O ponto P_7 pertencerá a essa reta e teremos $\overrightarrow{P_1P_7} = \overrightarrow{P_3P_2}$. O ponto P_6 pertencerá à paralela a P_3P_4 passando por P_5 e satisfará $\overline{P_5P_6} = a$, ou seja, $\overrightarrow{P_5P_6} = \frac{a}{|P_3P_4|} \cdot \overrightarrow{P_3P_4}$.

Rodando o heptágono $H = P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$ de 180° em torno do ponto médio de P_1P_2 obtemos o heptágono $H' = P_1'P_2'P_3'P_4'P_5'P_6'P_7'$ com $P_1' = P_2$, $P_2' = P_1$, $P_3' = P_7$, $P_7' = P_3$. Transladando infinitas vezes os heptágonos H e H' por $k \cdot \overrightarrow{P_3P_6}$, $k \in \mathbb{Z}$, cobrimos uma faixa dentada, que, transladada infinitas vezes por $m \cdot \overrightarrow{P_4'P_5}$, $m \in \mathbb{Z}$, nos permite cobrir o plano.

Desta forma, cobrimos o plano com os heptágonos $H + K \cdot \overrightarrow{P_3P_6} + m \cdot \overrightarrow{P_4'P_5}$ e $H' + k \cdot \overrightarrow{P_3P_6} + m \cdot \overrightarrow{P_4'P_5}$, $k \in \mathbb{Z}$, de interiores disjuntos e todos congruentes a H .

- 6) Mostre que toda seqüência com n^2+1 elementos possui uma subseqüência crescente com $n+1$ elementos ou uma subseqüência decrescente com $n+1$ elementos.

Solução

Dada uma seqüência $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$ de números reais, definimos para $1 \leq i \leq n^2+1$ o número $f(i)$ como sendo o número máximo de termos de uma subseqüência decrescente de $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$ começando em a_i . Suponha que não exista nenhuma subseqüência decrescente de $n+1$ elementos. Então $f(i) \leq n$ para todo i , e portanto $f(i)$ só pode assumir os n valores $1, 2, \dots, n$. Assim, existem $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n+1}$ com $f(i_1) = f(i_2) = \dots = f(i_{n+1})$, mas nesse caso devemos ter $a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \dots \leq a_{i_{n+1}}$, com $n+1$ termos.

Obs. 1: Mostra-se com um argumento análogo que toda seqüência com $mn+1$ elementos possui uma subseqüência crescente de $m+1$ elementos ou uma subseqüência decrescente de $n+1$ elementos (de fato que existe uma seqüência crescente de $m+1$ elementos ou uma seqüência estritamente decrescente de $n+1$ elementos.)

Obs. 2: O resultado (e sua generalização na obs. 1) é o melhor possível. De fato, dados $m, n \in \mathbb{N}$, a seqüência de mn termos $n, n-1, n-2, \dots, 1, 2n, 2n-1, 2n-2, \dots, n+1, 3n, \dots, 2n+1, \dots, mn, mn-1, \dots, (m-1)n+1$ não contém nenhuma seqüência crescente de mais de m elementos nem nenhuma seqüência decrescente de mais de n elementos.

- 12) a) Prove que se $n \in \mathbb{N}$ e $2^n + 1$ é um número primo então n é uma potência de 2.
 b) Prove que se $a, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ e $a^n - 1$ é primo, então $a = 2$ e n é primo.

Solução

a) Sabemos que $\forall n \in \mathbb{N}$ pode ser escrito da seguinte forma: $n = 2^k \cdot p$ onde $k \in \mathbb{N}$ e p é ímpar.

Seja $n = 2^n + 1$, logo $n = 2^{2^k \cdot p} + 1 = (2^{2^k})^p + 1$, fazendo $\lambda = 2^{2^k} \Rightarrow x = \lambda^p + 1$.

Se p é ímpar maior do que 1, teremos:

$x = \lambda^p + 1 = (\lambda + 1)(\lambda^{p-1} - \lambda^{p-2} + \lambda^{p-3} - \dots + 1)$ e, como x é primo, ele não poderá ser fatorável em um produto de fatores diferentes de 1. Basta então observar que o segundo fator da multiplicação acima não é igual a 1 com p ímpar maior do que 1, mas isso segue de $\lambda^p > \lambda \Rightarrow \lambda^p + 1 \neq \lambda + 1$. Logo devemos ter necessariamente $x = 2^{2^k} + 1$, ou seja $n = 2^k$.

b) Seja $y = a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$ primo:

i) Vamos verificar inicialmente que a deve ser igual a 2. De fato $a - 1 = 1$, já que o segundo fator não pode ser igual a 1 ($a \geq 1$).

ii) Suponha que n não seja primo, $n = k_1 \cdot k_2$ com $k_1 \geq 2$ e $k_2 \geq 2$, Logo

$y = 2^{k_1 \cdot k_2} - 1 = (2^{k_1})^{k_2} - 1 = (2^{k_1} - 1) \cdot (2^{k_1(k_2-1)} + 2^{k_1(k_2-2)} + \dots + 2^{k_1} + 1)$, observe que $2^{k_1} - 1 \geq 3$ e $2^{k_1(k_2-1)} + \dots + 2^{k_1} + 1 > 3$ e conseqüentemente não teremos y primo, logo n não pode ser escrito como acima; donde n é primo.

14) Determine o número de soluções de $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{1998}$ com x e y inteiros positivos.

Solução

Temos $1998x + 1998y = xy$.

Somando 1998^2 dos dois lados temos

$xy - 1998x - 1998y + 1998^2 = 1998^2$, logo

$x(y - 1998) - 1998(y - 1998) = 1998^2$, donde

$(x - 1998)(y - 1998) = 1998^2$.

Desta forma o número de soluções é o mesmo que a quantidade de sistemas da forma abaixo que possamos obter:

$$\begin{cases} x - 1998 = a \\ y - 1998 = b \\ ab = 1998^2 \end{cases}$$

com a observação de que os pares (x, y) solução devam ser inteiros e positivos, devemos ter

$$\begin{cases} a + 1998 > 0 \\ b + 1998 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > -1998 \\ b > -1998 \end{cases}$$

logo, só servem a e b positivos, já que se $-1998 < a < 0$ e $-1998 < b < 0$ implica $ab < 1998^2$. O número de soluções é, portanto, o número de divisores positivos de $1998^2 = 2^2 \cdot 3^6 \cdot 37^2$, que é dado por $(2 + 1)(6 + 1)(2 + 1) = 63$.

**Soluções dos problemas 2, 5 e 6 enviadas por Zoroastro Azambuja Neto.
Soluções dos problemas 3 e 12 enviadas por Carlos Alberto da Silva Victor.
Solução do problema 14 enviada por Vicente Wilson Moura Gaete e André Luiz Arruda Marques. Continuamos esperando as soluções dos problemas 10, 11, 12, 13 e 15.**

PROBLEMAS PROPOSTOS

☒ Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e sugestões de novos problemas para os próximos números.

- 16) Seja l a reta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$, C_1 o círculo centrado em $(0, \frac{1}{2})$ de raio $\frac{1}{2}$ e C_2 o círculo centrado em $(1, \frac{1}{2})$ de raio $\frac{1}{2}$.
Seja F o conjunto de círculos em \mathbb{R}^2 com as seguintes propriedades:
- $\{C_1, C_2\} \subset F$
 - Se C e C' pertencem a F , são tangentes entre si e tangentes a l então todo círculo \tilde{C} tangente aos dois círculos C e C' e à reta l pertence a F .
 - Se \tilde{F} é um conjunto de círculos satisfazendo as propriedades i) e ii) então $F \subset \tilde{F}$. Determine o conjunto dos pontos de tangência dos círculos $C \in F$ com a reta l .
- 17) Dado $n \in \mathbb{N}$, uma partição π de n é uma lista ordenada $\pi = (a_1, a_2, \dots, a_r), r, a_1, a_2, \dots, a_r \in \mathbb{N}^*$ com $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_r$ e $a_1 + a_2 + \dots + a_r = n$.
Seja P_n o conjunto das partições de n . Para $\pi \in P_n$, definimos $A(\pi)$ como o número de termos iguais a 1 em π (ou seja, $A(\pi) = \#\{i \in \{1, 2, \dots, r\} \mid a_i = 1\}$), e $B(\pi)$ como o número de termos distintos na partição π (ou seja, $B(\pi) = \#\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$).
Prove que $\sum_{\pi \in P_n} A(\pi) = \sum_{\pi \in P_n} B(\pi)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- 18) Seja α a maior raiz real da equação $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$.
Prove que $[\alpha^{2004}]$ é divisível por 17.
Obs: $[y]$ é o único inteiro tal que $[y] \leq y < [y] + 1$.
- 19) a) Determine o número máximo de regiões em que n retas podem dividir o plano.
b) Determine o número máximo de regiões em que n planos podem dividir o espaço.

COORDENADORES REGIONAIS

Alberto Hassen Raad	(UFJF)	Juiz de Fora-MG
Antônio C. Rodrigues Monteiro	(UFPE)	Recife-PE
Amarísio da Silva Araújo	(UFV)	Viçosa-MG
Angela Camargo	(Centro de Educação de Adultos CEA)	Blumenau-SC
Antônio C. do Patrocínio	(IMECC/UNICAMP)	Campinas-SP
Ariosto de Oliveira Lima	(UFPI)	Parnaíba-PI
Benedito T. Vasconcelos Freire	(UFRN)	Natal-RN
Carlos A. Bandeira Braga	(UFPB)	João Pessoa-PB
Claudio Arconcher	(Col. Leonardo da Vinci)	Jundiá-SP
Egnilson Miranda de Moura	(Col. Agrícola do Bom Jesus)	Bom Jesus-PI
Élio Mega	(Col. ETAPA)	São Paulo-SP
Florêncio F. Guimarães F.	(UFES)	Vitória-ES
Francisco Dutenhefner	(UFMG)	BH-MG
Gisele de A. Prateado G.	(UFGO)	Goiânia-GO
Ivanilde H. Fernandes Saad	(U. Católica Dom Bosco)	Campo Grande-MS
João B. de Melo Neto	(UFPI)	Teresina-PI
João F. Melo Libonati	(Grupo Educ. IDEAL)	Belém-PA
Jorge Ferreira	(UEM)	Maringá-PR
José Carlos Pinto Leivas	(URG)	Rio Grande-RS
José Luis Rosas Pinho	(UFSC)	Florianópolis-SC
José Paulo Carneiro	(USU)	Rio de Janeiro-RJ
José Vieira Alves	(UFPB)	Campina Grande-PB
Leonardo Matteo D'orio	(Parque de Material Aeronáutico de Belém)	Belém-PA
Licio Hernandez Bezerra	(UFSC)	Florianópolis-SC
Luzinalva M. de Amorim	(UFBA)	L. de Freitas-BA
Marco Polo	(Colégio Singular)	Santo André-SP
Marcondes Cavalcante França	(UF Ceará)	Fortaleza-CE
Mario Jorge Dias Carneiro	(UFMG)	BH-MG
Pablo Rodrigo Ganassim	(L. Albert Einstein)	Piracicaba-SP
Paulo H. Cruz Neiva de L. Jr.	(Esc. Tec. Everardo Passos)	S. J. Campos-SP
Reinaldo Gen Ichiro Arakaki	(INPE)	S. J. Campos-SP
Ricardo Amorim	(Centro Educ. Logos)	Nova Iguaçu-RJ
Sergio Claudio Ramos	(IM-UFRGS)	Porto Alegre-RS
Tadeu Ferreira Gomes	(U. do Estado da Bahia)	Juazeiro-BA
Valdenberg Araújo da Silva	(U. Federal de Sergipe)	São Cristovão-SE
Wagner Pereira Lopes	(Esc. Tec. Fed. de Goiás)	Jatá-GO