CONTEÚDO

AOS LEITORES 2

XIX OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA 3
Enunciados e Soluções

ARTIGOS

PESSOAS CONFIÁVEIS E NÃO-CONFIÁVEIS 10
Svetoslav Savchev

O TEOREMA DE STOLZ 15
Diêgo Veloso Uchôa & Renato Purita Paes Leme

CONTAS COM DESIGUALDADES 23
Márcio Afonso Assad Cohen & Rodrigo Villard Milet

O PROBLEMA IMPOSSÍVEL 32
Cássio Neri

COMO É QUE FAZ? 40

SOLUÇÕES DE PROBLEMAS PROPOSTOS 44

PROBLEMAS PROPOSTOS 59

AGENDA OLÍMPICA 61

COORDENADORES REGIONAIS 62

AOS LEITORES

Neste número publicamos um artigo do Prof. Svetoslav Savchev, da Bulgária, um dos maiores especialistas internacionais em problemas de olimpíada, além de três outros artigos de temas variados.

Nos tem alegrado bastante a boa qualidade de artigos e problemas enviados por nossos colaboradores, que contribuem muito para a qualidade e a vitalidade de nossa revista.

Publicamos também, além das seções de Problemas propostos e Como é que faz, soluções da Olimpíada Ibero-americana de 2004, na qual todos os quatro integrantes da equipe brasileira (Alex Corrêa Abreu, Fábio Dias Moreira, Gabriel Tavares Bujokas e Rafael Daigo Hirama) conquistaram medalha de ouro. Como a equipe de 2005 repetiu o feito, publicaremos no próximo número as suas soluções.

Aproveitamos também para registrar a realização da IX Semana Olímpica, atividade que vem sendo realizada desde 1998. Nesta oportunidade o evento teve lugar na cidade de Juiz de Fora – MG entre os dias 21 a 27 de janeiro de 2006. Durante a Semana Olímpica 2006, reunimos alunos ganhadores da XXVII Olimpíada Brasileira de Matemática nos seus quatro níveis de competição. Estes alunos participaram de um treinamento intensivo com professores de diversas partes do país como preparação para a futura formação das equipes que representarão o Brasil em Olimpíadas Internacionais.

Os editores

XIX OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA

Enunciados e Soluções

PRIMEIRO DIA

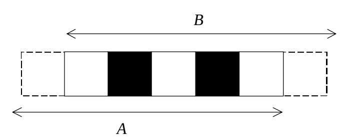
PROBLEMA 1

Deve-se colorir as casas de um tabuleiro 1001×1001 de acordo com as seguintes regras:
Se duas casas têm um lado comum, então pelo menos uma delas deve ser colorida.
De cada seis casas consecutivas de uma linha ou de uma coluna, devem colorir-se sempre pelo menos duas delas que sejam adjacentes.
Determinar o número mínimo de casas que devem ser coloridas.

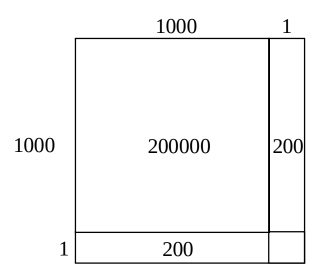
SOLUÇÃO DE FÁBIO DIAS MOREIRA (RIO DE JANEIRO - RJ)

Lema: Todo retângulo 5×1 tem pelo menos três quadrados pintados.

Prova: Suponha que não, que o tabuleiro possui algum retângulo 5×1 (ou 1×5) com dois ou menos quadrados pintados. Então, pela primeira condição, é trivialmente impossível que só 1 ou 0 quadrados estejam pintados e, se dois quadrados estiverem pintados, eles devem ser os da figura abaixo:



Mas então tomamos um retângulo 6×1 que contenha o 5×1 e que esteja contido no tabuleiro (isto é sempre possível pois $5 < 1001$).
Independente do quadrado agregado ser ou não colorido, chegamos a um absurdo pois a segunda condição é violada.
Decompomos agora o tabuleiro em 200400 retângulos 5×1 e um quadrado 1×1 (200000 retângulos 5×1 na horizontal, contidos no quadrado 1000×1000 do canto superior esquerdo, 200 na horizontal, no retângulo 1000×1 na borda inferior, e 200 na vertical, no retângulo 1×1000 na borda direita e o quadrado 1×1 no canto inferior direito).



Em cada um desses retângulos, pelo menos três quadrados estão coloridos, logo pelo menos 601200 casas devem ser coloridos.

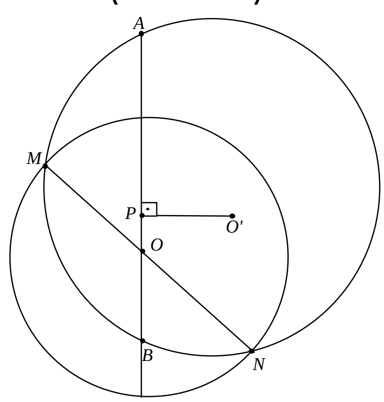
E, de fato, este mínimo pode ser atingido: numere as colunas e as linhas do tabuleiro de 1 a 100. Pinte o quadrado (i, j) se somente se, $i + j \equiv 1$, 3 ou 4 (mód. 5). Cada um dos retângulos 5×1 que criamos contém exatamente um quadrado de cada classe de congruência, logo pintamos 601200 casas, pois o quadrado que não foi contado, (1001, 1001), não é pintado (pois $1001 + 100 \equiv 2$ (mód 5)).

Além disso é fácil ver que qualquer retângulo 6×1 contém duas casas adjacentes pintadas.

PROBLEMA 2

Considera-se no plano uma circunferência de centro O e raio r, e um ponto A exterior a ela. Seja M um ponto da circunferência e N o ponto diametralmente oposto a M. Determinar o lugar geométrico dos centros das circunferências que passam por A, M e N quando M varia.

SOLUÇÃO DE ALEX CORRÊA ABREU (NITERÓI - RJ)



Seja Γ a circunferência de centro O e raio r, Γ' a circunferência qua passa por A, M, N; O' seu centro, $B = \overleftrightarrow{AO} \cap \Gamma'$ e $P \in \overline{AO}$ tal que $O\hat{P}O' = 90°$. Então obviamente $\overline{AP} = \overline{PB}$. Agora como O está no eixo radical de Γ e $\Gamma' \Rightarrow OA \cdot OB = OM \cdot ON = r^2 \Rightarrow OB = \dfrac{r^2}{OA}$. Chamando $\overline{OA} = d$,temos $OB = \dfrac{r^2}{d}$,

logo P é tal que $OP = OA - AP = d - \dfrac{d + \frac{r^2}{d}}{2} = \dfrac{d^2 - r^2}{2d}$, e logo é fixo e portanto todos os centros O' estão na reta por P perpendicular a $\overline{AO}$ quando M varia.

Mas para todo O'' tq $O''\widehat{P}O = 90° \Rightarrow$ se traçarmos Γ'' circunferência com centro em O'' que passa por A ele também irá passar por B logo a potência de O será $r^2 \Rightarrow$ se $\{M'', N''\} = \Gamma \cap \Gamma''$ então $OM'' \cdot ON'' = r^2$ e logo M'' e N'' são diametralmente opostos.

Assim, o lugar geométrico dos centros é uma reta perpendicular a AO que passa pelo ponto P tal que $OP = \dfrac{\overline{OA}^2 - r^2}{2\overline{OA}}$ na direção de A. (cqd).

PROBLEMA 3

Sejam n e k números inteiros positivos tais que n é ímpar ou n e k são pares. Provar que existem inteiros a e b tais que

$$mdc(a,n) = mdc(b,n) = 1 \text{ e } k = a + b.$$

SOLUÇÃO DE RAFAEL DAIGO HIRAMA (CAMPINAS - SP)

Devemos achar então, para n e k inteiros positivos, um a tal que $mdc(a, n) =$
$= mdc\ (k - a, n) = 1$ pois $b = k - a$.

$mdc\ (k - a, n) = mdc(a - k, n)$, por definição.

Então devemos achar dois números que distam k, primos com n.

Deve ser útil o Teorema Chinês dos Restos.

Fatorando: $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$, com p_i's primos e α_i's inteiros positivos e seja $k \equiv \beta_i (\text{mod } p_i)$ com $0 \le \beta_i < p_i$

Se trocarmos $a - k$ por c queremos que:

$c \not\equiv 0 (\text{mod } p_i)$ e $a = c + k \not\equiv 0$ (mod p_i) para todo i inteiro, $1 \le i \le t$

Se cada um dos pares de congruência for obedecida, escolhendo as congruências módulo p_i e usando o Teorema Chinês dos Restos podemos achar tal c (pois cada par de p_i's são primos entre si).

Então precisamos provar que existe possibilidade para a congruência módulo p_i para o c. Queremos $c \not\equiv 0 (\text{mod } p_i)$ e $c \not\equiv -k (\text{mod } p_i)$.

Se p_i for maior que 2, temos pelo menos 3 classes de congruências distintas, e tirando essas duas: *0* e $p_i - \beta_i$, sobra pelo menos uma. Se p_i é 2, então n é par e pelo enunciado, k também é e então $k \equiv 0 (\text{mod } 2)$. Assim não são tirados duas classes de congruência módulo 2, e sim apenas a classe do 0. Podemos fazer então $c \equiv 1 (\text{mod } 2)$.

Então o método para construir a e b é:

• Fatora-se n e pega-se seus fatores primos $p_1, p_2, \ldots, p_t$.

• Acha-se as classes de congruência para cada p_i, de forma que $c \not\equiv 0 \pmod{p_i}$ e $c+k \not\equiv 0 \pmod{p_i}$,

que sempre existe como já provamos. Pode haver várias, então encolhe-se qualquer uma.

• Pelo Teorema Chinês dos Restos, existe c que obedece tais congruências, logo $a=-c$ e $b=c+k$, que obedecem a condição $a+b=k$ e $mdc(a,n)=mdc(b,n)=1$, pois $p_i \nmid c \Rightarrow p_i \nmid -c=a$ e $p_i \nmid c+k=b$ e, assim, a e n não têm fatores comuns, nem b e n os têm.

Obs: Realmente, se n for par e k for ímpar não dá pois ou a ou b é par e então ou $2 \mid mdc(a,n)$ ou $2 \mid mdc(b,n)$.

PROBLEMA 4

Determinar todos os pares (a, b), onde a e b são números inteiros positivos de dois dígitos cada um, tais que $100a+b$ e $201a+b$ são quadrados perfeitos de quatro dígitos.

SOLUÇÃO:

Devemos ter $100a+b=m^2$ e $201a+b=n^2$, onde m e n são inteiros tais que $0<m<n<100$. Daí segue que $n^2-m^2=101a$.

Como $n^2-m^2=(n-m)(n+m)$ é múltiplo de 101, $0<n-m<100$ e $n+m<200$, devemos ter $n+m=101$, pois 101 é primo, e 101 não divide $n-m$. Daí segue que $n-m=\dfrac{101a}{n+m}=a$, logo $(101-m)-m=a$, donde $m=\dfrac{101-a}{2}$. De $100a+b=m^2$, segue que $\left(\dfrac{101-a}{2}\right)^2=100a+b$, e logo $a^2-602a+10201=4b$.

Temos $0\le 4b<400$. Como $f(a)=a^2-602a+10201$ é uma função quadrática cujo mínimo é atingido para $a=\dfrac{602}{2}=301$, $f(a)$ é decrescente para $0\le a\le 100$. Como $f(16)=825>400$, $f(17)=256$ e $f(18)=-311<0$, devemos ter a = 17, donde $m=\dfrac{101-17}{2}=42$, $n=101-m=59$ e $b=\dfrac{256}{4}=64$. Com efeito, $m^2=1764=100\cdot 17+64$, e $n^2=3481=201\cdot 17+64$.

Assim, o único par (a, b) que satisfaz as condições do enunciado é (a, b) = (17, 64).

PROBLEMA 5

Dado um triângulo escaleno ABC, designam-se por A', B', C' os pontos de interseção das bissetrizes interiores dos ângulos A, B e C com os lados opostos, respectivamente.

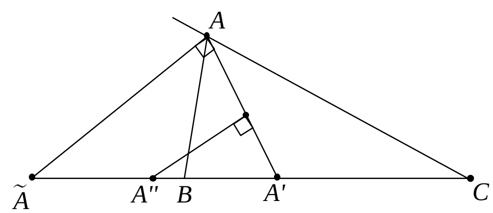
Sejam: A'' a interseção de BC com a mediatriz de AA',
B'' a interseção de AC com a mediatriz de BB' e
C'' a interseção de AB com a mediatriz de CC'.

Provar que A'', B'' e C'' são colineares.

SOLUÇÃO:

Suponhamos $a > b > c$, sem perda de generalidade. A perpendicular a AA' passando por A é a bissetriz externa do ângulo A no triângulo ABC. Sua interseção $\widetilde{A}$ com a reta BC é tal que $A'' = \dfrac{A' + \widetilde{A}}{2}$, pelo teorema de Tales. Por outro lado, se $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$ são os lados do triângulo ABC, pelo teorema das bissetrizes temos $\dfrac{BA'}{c} = \dfrac{CA'}{b}$, donde $A' = \dfrac{bB + cC}{b + c}$, e, pelo teorema das bissetrizes externas, $\dfrac{B\widetilde{A}}{c} = \dfrac{C\widetilde{A}}{b}$, donde $\widetilde{A} = \dfrac{bB - cC}{b - c}$.

Assim, $A'' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{bB + cC}{b + c} + \dfrac{bB - cC}{b - c}\right) = \dfrac{b^2 B - c^2 C}{b^2 - c^2}$.



Analogamente, $B'' = \dfrac{a^2 A - c^2 C}{a^2 - c^2}$ e $C'' = \dfrac{a^2 A - b^2 B}{a^2 - b^2}$. Assim,

$\left(b^2 - c^2\right)A'' + \left(a^2 - b^2\right)C'' = \left(a^2 - c^2\right)B''$, donde $B'' = \dfrac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}A'' + \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}C'' = tA'' + (1-t)C''$, com $t = \dfrac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}$, e logo $B'' \in A''C''$, o que resolve o problema.

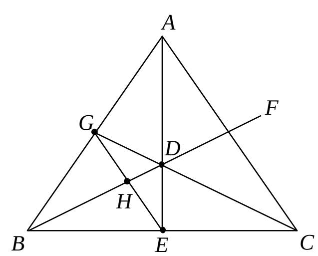
PROBLEMA 6

Para um conjunto *H* de pontos no plano, diz-se que um ponto *P* do plano é um *ponto de corte* de *H*, se existem quatro pontos distintos *A*, *B*, *C* e *D* em *H* tais que as retas *AB* e *CD* são distintas e se cortam em *P*.

Dado um conjunto finito A_0 de pontos no plano, constrói-se uma sucessão de conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots$ da seguinte forma: para qualquer $j \geq 0$, A_{j+1} é a união de A_j com o conjunto de todos os pontos de corte de A_j.

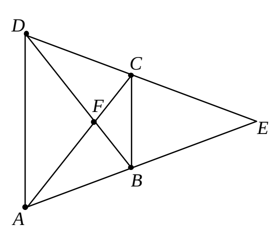
Demonstrar que se a união de todos os conjuntos da sucessão é um conjunto finito então, para qualquer $j \geq 1$, tem-se $A_j = A_1$.

SOLUÇÃO:

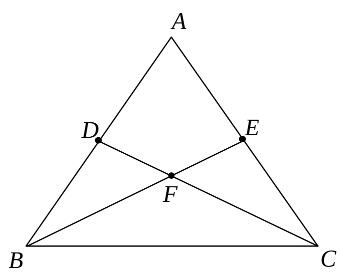


Observemos inicialmente que nenhum dos conjuntos A_j pode conter 4 pontos *A*, *B*, *C*, *D* tais que *D* é interior ao triângulo *ABC*. De fato, se $\overline{AD} \cap \overline{BC} = \{E\}$, $\overline{BD} \cap \overline{AC} = \{F\}$, $\overline{CD} \cap \overline{AB} = \{G\}$ e $\overline{BD} \cap \overline{EG} = \{H\}$, temos que *ABE* é um triângulo estritamente contido em *ABC* e *H* é interior a *ABE*.

Repetindo indefinidamente esta construção, obtemos infinitos pontos na união dos conjuntos A_n, absurdo.



Suponha agora que algum dos conjuntos A_j contenha os vértices de um quadrilátero convexo *ABCD*. Se *ABCD* não é um paralelogramo, podemos supor que *AB* não é paralelo a *CD* (ver figura acima).
Prolongando *AB* e *CD* obtemos um ponto de interseção *E*. As diagonais *AC* e *BD* se intersectam num ponto *F* interior ao triângulo *ADE*, absurdo pelo caso anterior.
Considere agora o fecho convexo *C* de A_0. Se *C* é um segmento de reta, temos $A_n = A_1 = A_0, \forall n \in \mathbb{N}$.
Se *C* é um triângulo de vértices *A*, *B* e *C*, estes pontos pertencem a A_0, que, como vimos, não pode conter nenhum ponto no interior de *C*. Se A_0 contém pontos no interior de dois lados de *C*, digamos *D* em *AB* e *E* em *AC*, *BE* e *CD* se intersectam em $F \in A_1$, que é interior a *C*, absurdo.



Assim, A_0 só pode conter os vértices *A*, *B* e *C* e, eventualmente, alguns pontos em um dos lados do triângulo, digamos *AB*. É fácil ver que nesse caso ainda temos $A_n = A_1 = A_0, \forall n \in \mathbb{N}$.
Caso *C* seja um quadrilátero, deve ser um paralelogramo *ABCD*.
Se A_0 contém algum ponto no interior de algum lado do paralelogramo, digamos *E* em *AB*, conterá os vértices do quadrilátero convexo *EBCD*, que não é um paralelogramo, absurdo. Se algum A_j contém algum ponto do interior de *C*, este não pode ser interior aos triângulos *ABC* e *ACD*, logo deve pertencer à diagonal *AC*, e, analogamente, deve pertencer à diagonal *BD*, e portanto deve ser o centro *O* de *ABCD*. Temos então dois casos:
i) Se $A_0 = \{A, B, C, D\}$ temos $A_1 = \{A, B, C, D, O\}$ e $A_n = A_1, \forall n \geq 1$.
ii) Se $A_0 = \{A, B, C, D, O\}$, temos $A_n = A_1 = A_0, \forall n \in \mathbb{N}$.
Finalmente, se *C* tem pelo menos 5 vértices consecutivos *A, B, C, D, E*, devemos ter *CD* e *DE* paralelos a *AB*, pois *ABCD* e *ABDE* são quadriláteros convexos com vértices em A_0, mas isso é um absurdo, e o problema está resolvido.

PESSOAS CONFIÁVEIS E NÃO-CONFIÁVEIS

Svetoslav Savchev, Bulgária
Tradução: Cesar Ryudi Kawakami e Rafael Morioka Oda – São Paulo – SP

♦ Nível Avançado

Em um grupo de $n \geq 3$ *pessoas, algumas são confiáveis e as outras não. Uma pessoa que é confiável sempre diz a verdade, enquanto uma não-confiável às vezes diz a verdade e às vezes mente. Sabemos que o número de pessoas não confiáveis é no máximo k, onde k é um inteiro que satisfaz* $0 < k < \frac{n}{2}$. *Um observador quer identificar quem é confiável e quem não é. Ele pode fazer perguntar a qualquer pessoa do grupo sobre a confiabilidade de alguma outra. Qual o número mínimo de perguntas necessárias para descobrir o que deseja?*

Essa pergunta originou-se de uma questão da olimpíada de Moscou de 1978, que perguntava sobre o número máximo e proposto pelo proeminente Sergei Konyagin. Depois do concurso, muitos matemáticos, como Schlosman, Ruzsa e Galvin, acharam a idéia tão atraente que publicaram outras variantes do problema. Um possível número suficiente foi encontrado e o necessário, que era mais difícil, foi sendo gradualmente melhorado. Finalmente, o problema foi completamente estabelecido por Pavel Blecher, que já havia sido premiado na própria olimpíada de Moscou. Nós seguimos sua idéia, numa versão um pouco diferente do problema.

O menor número de questões é $n + k - 1$. Nós começamos provando que esse número é suficiente, usando indução em $n \geq 3$.

Para $n = 3$ nós temos $0 < k < \frac{3}{2}$ então $k = 1$, ou seja, no máximo uma pessoa não é confiável em um grupo de 3. Numere as pessoas e pergunte para a pessoa 2 se a 1 é confiável. Se a resposta for *sim*, então 1 é de fato confiável (caso contrário 1 e 2 não seriam confiáveis). Sabendo que 1 é confiável, basta perguntar a ele sobre 2 e 3. Portanto temos que $3 = 3 + 1 - 1 = n + k - 1$ questões são suficientes.

Se a pessoa 2 responder *não*, então temos que ou 1 ou 2 é não-confiável (senão a resposta teria sido *sim*). Portanto temos que 3 é confiável, e basta perguntar a ele sobre 1 e 2. Novamente, três perguntas bastam.

Assuma que $m + k - 1$ questões são suficientes para todo grupo de tamanho $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 3$ e menor que *n*, e considere um grupo de *n* pessoas que satisfaz as condições dadas. Comece perguntando sucessivamente às pessoas 2,3...,n sobre a pessoa 1. Pare de perguntar assim que:

i) O número de respostas *sim* se iguale a k.
ii) O número de respostas *não* exceda o número de respostas *sim*.

Note que (i) ou (ii) irá necessariamente ocorrer devido à condição $k < n/2$.

No caso (i), a pessoa 1 é confiável (ou então ele mais as k pessoas que respoderam sim seriam não-confiáveis, absurdo). Suponha que m pessoas tenham respondido *não* até aquele momento; todas elas são não confiáveis. Agora basta perguntar a 1 sobre todas as pessoas no grupo, exceto ele mesmo e as m pessoas mencionadas. Isto leva $n - m - 1$ questões, então $(k + m) + (n - m + 1) = n + k - 1$ questões são suficientes.

No caso (ii), existe um número m tal que as pessoas 2, 3,..., $2m$ são perguntadas e temos m respostas *não* e $m - 1$ respostas *sim*. Observe que não importa se 1 é confiável ou não, pelo menos m pessoas do grupo $G_1 = \{1,2,...,2m\}$ são não confiáveis. Se 1 é confiável, então temos que as m que responderam *não* são não-confiáveis. Se 1 não é confiável, então ele e as $m - 1$ pessoas que responderam *sim* são não-confiáveis. Concluímos portanto que $m \leq k$, já que existem apenas k pessoas não-confiáveis, e assim temos que o grupo G_2 ao qual pertencem as $n - 2m$ pessoas restantes não é vazio, uma vez que $k < n / 2$. Além do mais, existem no máximo $k - m$ pessoas que não são confiáveis em G_2, o que é menor que $(n - 2m)/2$. Se $m < k$ então $1 \leq k - m < (n - 2m)/2$, $n - 2m \geq n - 2(k - 1) \geq 3$, e logo a hipótese de indução se aplica ao grupo G_2. Então $(n - 2m) + (k - m) - 1$ questões são suficientes para saber quem é o que no grupo. A mesma conclusão é trivial para $m = k$, caso em que G_2 consiste de $n - 2k$ pessoas, todas confiáveis, e portanto nenhuma pergunta é necessária.

Agora escolha uma pessoa confiável A em G_2 (existe sempre pelo menos uma) e pergunte-a sobre 1. Dependendo da resposta, pergunte a A sobre que disseram a verdade sobre 1. Para ser mais preciso, se 1 é confiável (não-confiável), pergunte a aqueles que responderam *sim* (*não*). No máximo $1 + m$ questões são necessárias nessa última etapa. Não há mais questões necessárias pois já sabemos que aqueles que mentiram sobre 1 não são confiáveis. Um total de $(2m - 1) + (n - 2m) + (k - m) - 1 + (1 + m) = n + k - 1$ questões são suficientes novamente.

A cota superior está provada. A cota inferior é consideravelmente mais difícil: mostrar que $n + k - 1$ perguntas são também necessárias. Considere uma seqüência arbitrária de $n + k - 2$ questões $(p_1, q_1),(p_2, q_2),...,(p_{n+k-2}, q_{n+k-2})$; (1) onde a questão i pergunta à pessoa p_i sobre a pessoa q_i. "Arbitrária" em particular quer dizer que cada questão de (1) pode depender das respostas às perguntas anteriores. Definimos também uma seqüência $r_1, r_2, \ldots, r_{n+k-2}$ de respostas, tal que, para cada i, a resposta r_i depende apenas das questões (p_1, q_1), $(p_2, q_2),...,(p_i, q_i)$. Agora, serão apresentadas duas configurações diferentes de pessoas confiáveis e não-confiáveis num grupo de n, e ambas consistentes não só com as respostas $r_1, r_2, \ldots, r_{n+k-2}$ mas também com o limite de k pessoas não-confiáveis. Então a seqüência de questões (1) falhará em diferenciar essas duas configurações, e portanto não há $n + k - 2$ questões que podem resolver o problema em geral.

Nós definimos a resposta r_i em dois estágios: o primeiro, quando as primeiras $k - 1$ questões são feitas, e a segunda, envolvendo as $n - 1$ questões restantes.

Todas as respostas na primeira parte serão *não*. Depois que as $k - 1$ perguntas acabam, represente como pontos todas as pessoas $p_1, \ldots, p_{k-1}$, $q_1, \ldots, q_{k-1}$ envolvidas nelas e ligue p_i a q_i por uma aresta, $i = 1,..., k - 1$. O grafo obtido será usado a seguir. Chame de $G_1,...,G_m$ suas componentes conexas, com conjuntos de vértices $V_1,...,V_m$ respectivamente. Então cada questão (p_i, q_i) na primeira parte (ou seja, $i = 1,..., k - 1$) envolve duas diferentes pessoas do mesmo grupo V_j ($j = 1,..., m$). Se $e_1, e_2, \ldots, e_m$ são os números de arestas em $G_1,...,G_m$, temos que $e_1 + e_2 + \ldots + e_m = k - 1$ (2)

Finalmente, denote por W o conjunto de pessoas não envolvidas no primeiro conjunto de perguntas, i.e. o complemento de $V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_m$ em relação ao conjunto de todas as n pessoas.

As questões $(p_k, q_k),...,(p_{n+k-2}, q_{n+k-2})$ são feitas na segunda etapa. De acordo com elas, nós escolhemos um *representante* de cada grupo V_j ($j = 1,..., m$) mas podem haver dois diferentes tipos de representantes dependendo do grupo.

Se forem feitas perguntas sobre cada pessoa em V_j na segunda parte, dizemos que V_j é um grupo com um *verdadeiro* representante escolhido da seguinte maneira: ache o menor *i* tal que V_j está contido na seqüência q_k,..., q_i; então q_i é o (verdadeiro) representante de V_j.

Se há pessoas em V_j sobre as quais não foram feitas perguntas na segunda etapa, escolha uma qualquer dentre elas e chame-a de *falsa* representante.

No momento em que a questão (p_i, q_i) é feita, está claro se q_i é ou não um representante verdadeiro de algum V_j. Conseqüentemente as próximas questões na segunda fase são tais que a resposta r_i depende somente das questões (p_1, q_1), (p_2, q_2),...,(p_i, q_i):

Para cada $i = k,..., n + k - 2$, definimos a resposta r_i como *sim* se q_i pertence a *W* ou se q_i é um *verdadeiro* representante de um grupo V_j; caso contrário defina r_i como *não*.

Agora considere uma configuração *S* de *n* pessoas onde a pessoa *p* é:

- confiável se *p* pertence a *W* ou se *p* é um representante de algum grupo V_j (verdadeiro ou falso);
- não-confiável em qualquer outra hipótese.

Vamos mostrar que *S* tem as seguintes propriedades:

i) *S* é consistente com todas as respostas $r_1, r_2, \ldots, r_{n+k-2}$, i.e. todas as respostas dadas por pessoas confiáveis em *S* são verdadeiras;

ii) Não há mais que *k* – 1 pessoas não-confiáveis em *S*.

Para provar (i), observe que todas as respostas da segunda etapa $r_k, \ldots, r_{n+k-2}$ são verdadeiras, pela sua definição e pela definição de pessoas confiáveis e não-confiáveis (usando o fato de que não perguntamos sobre nenhum representante falso na segunda parte). Então nós precisamos apenas garantir que todas as pessoas confiáveis deram respostas verdadeiras na primeira etapa. Escolha uma pessoa confiável *p*. Se *p* pertence a *W* então não houve perguntas a *p* nem sobre *p* no primeiro estágio. Suponha que *p* é representante de algum grupo V_j. Então as possíveis perguntas que lhe podem ter sido feitas na primeira etapa são sobre as pessoas de seu próprio grupo que não ele próprio. Todas essas pessoas são não-confiáveis, e todas as respostas da primeira parte foram não, portanto *p* disse a verdade.

Para verificar (ii), lembre-se que, por construção, as pessoas não-confiáveis estão todas nos grupos $V_1,...,V_m$. Exatamente uma pessoa em cada grupo é confiável – seu representante. Uma vez que o número de pessoas não-confiáveis em V_j é

$|V_j| - 1$, $j = 1,..., m$, e o número total u de pessoas não-confiáveis é igual. Agora nós usamos o fato de que V_j é o conjunto de vértices de um grafo conexo: em tal grafo, o número de arestas é pelo menos o número de vértices menos um. Deste modo $e_j \geq |V_j| - 1$ para $j = 1,..., m$.

De (2) temos que $u = \sum_{j=1}^{m}\left(|V_j| - 1\right) \leq e_1 + e_2 + ... + e_m = k - 1$, e logo (ii) é verdade.

Ter no máximo $k - 1$ pessoas não-confiáveis em S será usado para obter uma outra configuração S' consistente com as respostas $r_1, r_2, \ldots, r_{n+k-2}$ e tendo no máximo k pessoas não-confiáveis. Descreveremos agora esta construção.

Se algum grupo V_j tem algum representante falso q, ele é confiável em S. Defina q como um não-confiável em S' e deixe todas as outras pessoas como eram em S. Como q é não-confiável na nova configuração, suas respostas são irrelevantes para a consistência com $r_1, r_2, \ldots, r_{n+k-2}$. Portanto S' é consistente com as respostas se, e somente se, cada pessoa confiável de S disse a verdade quando perguntada sobre q. Mas não há pessoa confiável que foi perguntada sobre q. De fato, não perguntaram sobre sua confiabilidade na segunda etapa pela definição de falso representante. E se alguma pessoa foi perguntada sobre q na primeira fase, ela pertence ao mesmo grupo V_j que q, e portanto não é representante do grupo, o que significa que não é confiável em ambas as configurações. Assim, S' satisfaz as condições.

Se não há representantes falsos em S então foram feitas perguntas sobre todas as pessoas em $V_1,...,V_m$ na segunda etapa. Porém, $n - 1$ questões foram feitas no total durante ela, logo não houve perguntas sobre pelo menos uma pessoa q dentre as n. Claramente, q pertence a W. Defina q como não-confiável em S' e deixe todos os restantes da mesma maneira que em S. Ninguém perguntou sobre q (nem na primeira nem na segunda etapa), e portanto a nova configuração S' satisfaz novamente todas as condições, e a prova está completa.

O TEOREMA DE STOLZ

Diêgo Veloso Uchôa & Renato Purita Paes Leme

♦ Nível Avançado

INTRODUÇÃO

Apresentaremos um pequeno resultado sobre limites com uma série de conseqüências interessantes e, em seguida, alguns problemas que podem ser resolvidos usando-o. Usando a demontração do teorema como pretexto, vamos mostrar como a intuição geométrica pode nos dar boas indicações sobre o caminho a seguir. Isso pode ser resumido na velha máxima: "Pense geometricamente, prove algebricamente".

Teorema (Stolz)

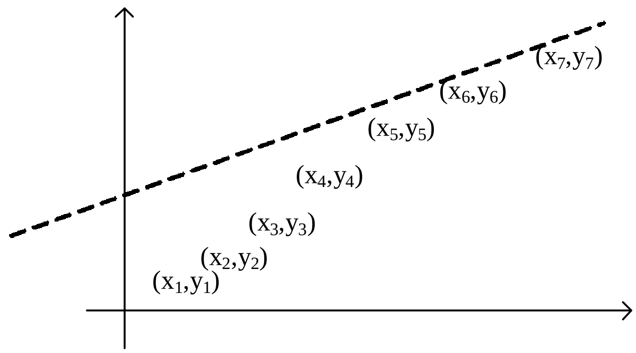
Seja $\{x_n\}$ uma seqüência estritamente crescente com $\lim x_n = +\infty$, e $\{y_n\}$ uma seqüência arbitrária. Se $\lim \dfrac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} = a$ então: $\lim \dfrac{y_n}{x_n} = a$.

Prova

Podemos pensar em (x_n, y_n) como uma seqüência de pontos do plano pertencentes a uma curva da forma: $y = f(x)$, já que x_n é crescente. Assim, $\dfrac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}$ representa a razão incremental entre dois pontos consecutivos. À medida que n aumenta, essa razão vai se tornando arbitrariamente próxima do valor constante a, ou seja, para x grande (x_n com n grande) a curva f é praticamente uma reta. Isto é, se $y = f(x)$ tiver uma assíntota, ela deve ser uma reta da forma $y = ax + b$ para algum b. Como para n grande $y_n \approx ax_n + b$, quando $n \to \infty$,

$$\frac{y_n}{x_n} \approx \frac{ax_n + b}{x_n} = a + \frac{b}{x_n} \to a$$

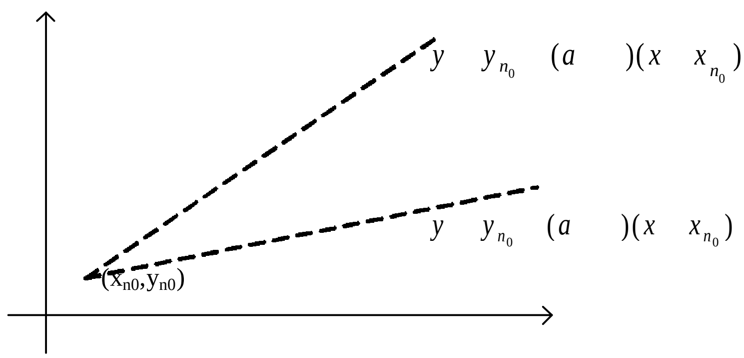
Naturalmente, isso não constitui uma prova (ainda, veremos que nem sempre os pontos (x_n, y_n) se aproximam de uma reta quando $n \to \infty$) – mas isso serve como uma boa orientação para uma prova formal. Vejamos:



Pela definição de limite, como $\lim \dfrac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=a$:

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_0 \text{ tal que } n>n_0 \Rightarrow \left|\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}-a\right|<\varepsilon$$

ou seja, a razão incremental $\dfrac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}$ está entre $a-\varepsilon$ e $a+\varepsilon$. Geometricamente:



A geometria acima nos diz que para $n>n_0$, todo (x_n, y_n) está entre essas retas, ou seja:

$$\left|\frac{y_{n_0+k}-y_{n_0}}{x_{n_0+k}-x_{n_0}}-a\right|<\varepsilon\,,\ \ \forall k>0$$

Precisamos provar algebricamente o que a geometria nos mostra. Mas isso é simples:

$$(a-\varepsilon)\cdot(x_{n_0+1}-x_{n_0})<y_{n_0+1}-y_{n_0}<(a+\varepsilon)\cdot(x_{n_0+1}-x_{n_0})$$
$$(a-\varepsilon)\cdot(x_{n_0+2}-x_{n_0+1})<y_{n_0+2}-y_{n_0+1}<(a+\varepsilon)\cdot(x_{n_0+2}-x_{n_0+1})$$
$$\dots$$
$$(a-\varepsilon)\cdot(x_{n_0+k}-x_{n_0+k-1})<y_{n_0+k}-y_{n_0+k-1}<(a+\varepsilon)\cdot(x_{n_0+k}-x_{n_0+k-1})$$

Somando as expressões acima, temos:

$$(a-\varepsilon)\cdot(x_{n_0+k}-x_{n_0})<y_{n_0+k}-y_{n_0}<(a+\varepsilon)\cdot(x_{n_0+k}-x_{n_0})$$

Ou seja, $\left|\dfrac{y_{n_0+k}-y_{n_0}}{x_{n_0+k}-x_{n_0}}-a\right|<\varepsilon$.

Dividindo tudo por x_{n_0+k} e fazendo k tender ao infinito, temos:

$$\left|\frac{\dfrac{y_{n_0+k}}{x_{n_0+k}}-\dfrac{y_{n_0}}{x_{n_0+k}}}{1-\dfrac{x_{n_0}}{x_{n_0+k}}}-a\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{y_{n_0+k}}{x_{n_0+k}}-\frac{y_{n_0}}{x_{n_0+k}}-a\left(1-\frac{x_{n_0}}{x_{n_0+k}}\right)\right|<\varepsilon\left|1-\frac{x_{n_0}}{x_{n_0+k}}\right|$$

$$\left|\frac{y_{n_0+k}}{x_{n_0+k}}-a\right|<\varepsilon\left|1-\frac{x_{n_0}}{x_{n_0+k}}\right|+\left|\frac{y_{n_0}}{x_{n_0+k}}\right|+\left|a\cdot\frac{x_{n_0}}{x_{n_0+k}}\right|<2\varepsilon$$

para k suficientemente grande. Logo: $\lim\dfrac{y_n}{x_n}=a$ □

A prova desse teorema é composta de algumas poucas linhas. Demoramos mais, pois perdemos tempo discutindo a sua essência geométrica.
Comentamos que nem sempre y_n se aproxima de uma reta $ax_n + b$, ou seja, que nem sempre a seqüência $b_n = y_n - ax_n$ converge. Por exemplo:

$$x_n = n \quad \text{e} \quad y_n = 2n + \log(n)$$

No entanto, nas condições do teorema, b_n é uma seqüência cujas razões incrementais em relação a x_n tendem a zero quando n tende ao infinito, isto é: $\lim \frac{b_{n+1}-b_n}{x_{n+1}-x_n}=0$, como é o caso de $b_n = \log(n)$.

Corolário

Dada uma seqüência $\{a_n\}$ tal que $\lim a_n = a$, o limite da média artimética dos n primeiros termos da seqüência também é a. Ou seja:

$$\lim \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}=a.$$

Prova

Basta fazer $y_n=\sum_{i=1}^{n} a_n$ e $x_n = n$. Como $\{x_n\}$ é estritamente crescente e tende ao infinito, podemos aplicar o Teorema de Stolz : $\lim \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}=\lim \frac{a_{n+1}}{1}=a$ □

Problema Resolvido I

Mostre que se $\lim a_n = a$ então $\lim \frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}=a$.

Solução : Fazendo $y_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}$ e $x_n=\ln n$ e aplicando o Teorema de Stolz

$$\lim \frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}=\lim \frac{\frac{a_{n+1}}{n+1}}{\ln(n+1)-\ln n}=\lim \frac{a_{n+1}}{\ln\left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)}=a.$$

Problema Resolvido II

Dado um número real $p > 0$, calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$.

Solução: Façamos: $y_n = 1^p + 2^p + \ldots + n^p$ e $x_n = n^{p+1}$ que é estritamente crescente e tende ao infinito. Logo podemos aplicar o Teorema de Stolz:

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=\frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}=\frac{\frac{1}{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^p}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1}-1}$$

Tomando $x=1/n$ e, usando que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{p+1}-1}{x}=p+1$ (pois é a derivada de $(1+x)^{p+1}$ em $x=0$) para calcular o limite quando $x\to 0$, temos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(1+x)^p}{(1+x)^{p+1}-1}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{p+1}-1}{x}}=\frac{1}{p+1}$$

Logo: $\lim\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=\frac{1}{1+p}$, assim: $\lim\frac{y_n}{x_n}=\frac{1}{1+p}$ □

Problema Resolvido III

(Schweitzer Competition - alterada) Dada a seqüência definida recursivamente por:

$$0<a_1<1 \text{ e } a_{n+1}=a_n(1-a_n)\text{, para } n>1,$$

prove que:

(a) $\lim n\cdot a_n=1$

(b) $\lim\frac{n\cdot(1-na_n)}{\ln n}=1$

Solução: a) Queremos usar o Teorema de Stolz em $\lim\frac{n}{1/a_n}$. Para isso, devemos mostrar que $1/a_n$ é estritamente crescente e tende ao infinito, o que equivale a mostrar que a_n é estritamente decrescente e tende a 0+. Por indução:

$$0<a_2=a_1(1-a_1)<a_1<1 \text{ pois } 0<a_1<1$$

Assumindo como hipótese de indução que: $0<a_{i+1}<a_i<1$, temos que:

$$0<a_{i+2}=a_{i+1}(1-a_{i+1})<a_{i+1}<1\text{, pois } 0<a_{i+1}<1$$

Como a_n é estritamente decrescente e limitada, ela converge. Logo $\exists a = \lim a_n$ e: $a = a(1-a) \Rightarrow a = 0$. Aplicando o Teorema de Stolz:

$$\lim \frac{(n+1)-n}{\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}} = \lim \frac{a_n \cdot a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = \lim \frac{a_n \cdot [a_n(1-a_n)]}{a_n - [a_n(1-a_n)]} = \lim \frac{a_n{}^2 \cdot (1-a_n)}{a_n{}^2} =$$

$$= \lim(1-a_n) = 1.$$

b) Aplicando um truque algébrico:

$$\frac{n \cdot (1-na_n)}{\ln n} = \frac{n \cdot \left(\dfrac{1}{na_n} - 1\right) na_n}{\ln n} \Rightarrow \lim \frac{n \cdot (1-na_n)}{\ln n} = \lim \frac{\dfrac{1}{a_n} - n}{\ln n} \cdot \lim na_n,$$

se $\lim \dfrac{\dfrac{1}{a_n} - n}{\ln n}$ existir. Mostremos que ele de fato existe e vale 1, por Stolz:

$$\frac{\left(\dfrac{1}{a_{n+1}} - n - 1\right) - \left(\dfrac{1}{a_n} - n\right)}{\ln(n+1) - \ln n} = \frac{\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} - 1}{\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)} = \frac{n\left(\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} - 1\right)}{\ln\left(\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)} =$$

$$= \frac{n\left(\dfrac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1} \cdot a_n} - 1\right)}{\ln\left(\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)} = \frac{\dfrac{na_n}{1-a_n}}{\ln\left(\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)} \to 1 \text{ quando } n \to +\infty \;\square$$

A seguir apresentamos alguns problemas (em ordem crescente de dificuldade) que são resolvidos com a aplicação do Teorema de Stolz.

1 - Seja $\{x_n\}$ uma seqüência de termos positivos tais que $\sum x_n = \infty$ e $\lim \dfrac{y_n}{x_n} = a$ então $\lim \dfrac{y_1 + \ldots + y_n}{x_1 + \ldots + x_n} = a$.

2 – Seja $\{x_n\}$ uma seqüência de termos positivos tais que $\lim x_n = a$. Mostre que $\lim \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = a$. Sugestão: Use o corolário após o Teorema de Stolz.

3 – Para uma seqüência de termos positivos $\{a_n\}$ mostre que se $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$ então $\lim \sqrt[n]{a_n} = a$.

4 – Seja k um inteiro fixo arbitrário maior que 1. Determine $\lim \sqrt[n]{\binom{nk}{n}}$.

5 – Calcule $\lim \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{j}{n}\right)}$.

6 – Prove que se $\{a_n\}$ é uma seqüência que converge para a então :

$$\lim \frac{na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + 1a_n}{n^2} = \frac{a}{2}.$$

7 – Prove que se $\lim(a_n - a_{n-2}) = 0$ então $\lim \frac{a_n - a_{n-1}}{n} = 0$.

8 – Calcule $\lim\left[\frac{1}{n^k}(1^k + 2^k + \ldots + n^k) - \frac{n}{k+1}\right]$, k natural fixo.

9 – (OBM – adaptado) Dada a seqüência $\{a_n\}$ definida recursivamente por $a_1 = 3$ e $a_{n+1} = a_n{}^2 - 2$. Prove que $\lim \frac{\ln(\ln a_n)}{n} = \ln 2$.

10 – Para uma seqüência $\{a_n\}$, considere a seqüência $\{A_n\}$, de médias arirméticas, ou seja, $A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$. Mostre que se $\lim A_n = A$, então:

$$\lim \frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k} = A.$$

Sugestão: Escreva a_k em função de alguns A_i.

11 – Mostre que, se para a seqüência de termos positivos $\{a_n\}$, o limite

$$\lim n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

existe então o limite

$$\lim \frac{\ln {a_n}^{-1}}{\ln n}$$

também existe e os dois são iguais. Ainda, se o primeiro limite é infinito, o segundo também o é.

12 – Seja $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n} a_k}$ para $n \geq 1$, prove que: $\lim \dfrac{a_n}{\sqrt{2 \cdot \ln n}} = 1$

Sugestão: Estude a_n^2.

REFERÊNCIAS

[1] KACZOR, W.J e NOWAK, M.T – *Problems in Mathematical Analysis I – Real Numbers, Sequences and Series* – American Mathematical Society
[2] LIMA, E. L. – *Curso de Análise, Volume I* – Projeto Euclides – IMPA
[3] APOSTOL, T – *Calculus, Volume I* – Addison-Weasley

Diêgo Veloso Uchôa e Renato Purita Paes Leme são alunos de Engenharia que gostam de matemática. Cursam o 4º ano do INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA e estudam no INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA. Os dois agradecem ao professor Carlos Gustavo T. A. Moreira pela revisão desse artigo.

CONTAS COM DESIGUALDADES

Márcio Afonso Assad Cohen & Rodrigo Villard Milet

♦ Nível Avançado

Vamos discutir aqui uma notação prática para lidar com funções simétricas e estudar a utilização de duas poderosas ferramentas, as desigualdades de Muirhead, mais conhecida como bunching e a de Schur.

Por simplicidade de notação, os resultados serão mostrados para três variáveis. O leitor não terá dificuldade em generalizar esses resultados para n variáveis (quando necessário, serão fornecidas dicas para essa generalização).

1. EXPRESSÕES SIMÉTRICAS

Uma função $f(x, y, z)$ é simétrica quando se tem, para todo x, y, z:

$$f(x, y, z) = f(x, z, y) = f(y, x, z) = f(y, z, x) = f(z, x, y) = f(z, y, x)$$

(isto é, trocar uma variável com outra não altera a expressão).

Dada uma função qualquer $P(x, y, z)$, definimos:

$$\sum_{sym} P(x, y, z) = P(x, y, z) + P(x, z, y) + P(y, x, z) + P(y, z, x) + P(z, x, y) + P(z, y, x).$$

Exemplo 1. De acordo com a definição, verifica-se que:

$$\sum_{sym} x^2 y = x^2 y + x^2 z + y^2 x + y^2 z + z^2 x + z^2 y \quad ;$$

$$\sum_{sym} x^3 = 2\cdot(x^3 + y^3 + z^3); \quad \sum_{sym} xyz = 6xyz$$

(*reflita um pouco para entender os coeficientes* 2 *e* 6 *dos exemplos anteriores!*).

1.1. Propriedades

1. $\sum_{sym} f$ é uma função simétrica, i.e, $\sum_{sym} f(x, y, z) = \sum_{sym} f(x, z, y) = \ldots$

2. Se $\sigma(x, y, z)$ é uma função simétrica, então $\sum_{sym} \sigma(x,y,z)\cdot f(x,y,z) = \sigma(x,y,z)\cdot \sum_{sym} f(x,y,z)$

(*porque* $\sigma(x, y, z)$ *é uma constante para esse somatório*).

Exemplo 2. (Quadrado e Cubo da soma) Sendo $s = x + y + z$, expresse $2s^2$ e $2s^3$ como somas simétricas:

Solução:

$$2s=\sum_{sym}x \Rightarrow 2s^2=\sum_{sym}x\cdot(x+y+z)=\sum_{sym}(x^2+xy+xz)=\sum_{sym}(x^2+2xy)$$

$$2s^3=2s^2\cdot s=\sum_{sym}(x^2+2xy)\cdot(x+y+z)=\sum_{sym}(x^3+x^2y+x^2z+2x^2y+2xy^2+2xyz)\therefore$$

$$2s^3=\sum_{sym}(x^3+6x^2y+2xyz)$$

Exemplo 3. Sendo $x, y, z > 0$, mostre que:

$$\frac{x}{(x+y)(x+z)}+\frac{y}{(y+x)(y+z)}+\frac{z}{(z+x)(z+y)}\le\frac{9}{4(x+y+z)}$$

Solução: Usando a notação de simetria, podemos reescrever o problema como:

$$\frac{1}{2}\cdot\sum_{sym}\frac{x}{(x+y)(x+z)}\le\frac{9}{4(x+y+z)}$$ (Se você não entendeu o fator ½, volte ao exemplo 1).

Multiplicando tudo pelo *mmc* $(x+y)(x+z)(y+z)(x+y+z)$:

$$2\cdot\sum_{sym}x(y+z)(x+y+z)\le 9(x+y)(x+z)(y+z)$$

Agora observe que; chamando o lado esquerdo de *LE* e o direito de *LD*:

(i) $LD=9\cdot(x+y)(x+z)(y+z)=9\cdot(x^2y+x^2z+\ldots+xyz+xyz)=9\cdot\left(\sum_{sym}x^2y+\frac{1}{3}\sum_{sym}xyz\right)$

(*para evitar erros, confira se a expressão está verdadeira para* $x = y = z = 1$, *lembrando que* $\sum_{sym}1=6$ *nesse caso*).

(ii) $LE=2\cdot\sum_{sym}(xy+xz)(x+y+z)=2\cdot\sum_{sym}(x^2y+xy^2+xyz+x^2z+xyz+xz^2)=\sum_{sym}(8x^2y+4xyz)$

Portanto, $LE\le LD \Leftrightarrow \sum_{sym}(8x^2y+4xyz)\le\sum_{sym}(9x^2y+3xyz)\Leftrightarrow\sum_{sym}x^2y\ge\sum_{sym}xyz$.

A última inequação é consequência direta da desigualdade das médias:

$x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y\ge 6xyz$.

2. MUIRHEAD (vulgo "bunching")

Dadas duas seqüências não-crescentes (a_1,a_2,a_3) e (b_1,b_2,b_3), diz-se que a majora b quando: $a_1\ge b_1$; $a_1+a_2\ge b_1+b_2$; e $a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3$

Nesse caso, escreve-se $[a_1, a_2, a_3] \geq [b_1, b_2, b_3]$ e se *x, y, z* são reais positivos temos: $\sum_{sym} x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3} \geq \sum_{sym} x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3}$.

Demonstração:

Lema (*smoothing*): Se em $\sum_{sym} x^{u_1} y^{u_2} z^{u_3}$ substituirmos dois expoentes u_i, u_j $(i < j)$ por v_i, v_j com $u_i + u_j = v_i + v_j$ e $u_i \leq v_i \leq v_j \leq u_j$, o valor da expressão diminui (ou não muda).

(isto é, manter a soma constante e diminuir a distância entre dois expoentes não aumenta a expressão)

Demonstração do Lema:

S.p.g, suponha $u_1 = m + R,\ u_2 = m - R,\ v_1 = m + r,\ v_2 = m - r$:

$$\sum_{sym} (x^{u_1} y^{u_2} z^{u_3} - x^{v_1} y^{v_2} z^{u_3}) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{sym} (x^{m+R} y^{m-R} z^{u_3} - x^{m+r} y^{m-r} z^{u_3} + x^{m-R} y^{m+R} z^{u_3} - x^{m-r} y^{m+r} z^{u_3}) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{sym} z^{u_3} x^m y^m \cdot (x^R y^{-R} + x^{-R} y^R - x^r y^{-r} - x^{-r} y^r)$$

A última expressão é não-negativa, pois para *a* positivo fixo (no caso *a* = *x*/*y*), a função $f(t) = a^t + a^{-t}$ é crescente:

$$f(R) - f(r) = a^R - a^r + \frac{1}{a^R} - \frac{1}{a^r} = (a^R - a^r) - \frac{1}{a^R a^r}(a^R - a^r) = a^{-R-r}(a^R - a^r)(a^R a^r - 1)$$

Se $a > 1$ e $R > r > 0$, essa expressão é obviamente positiva. Se $0 < a < 1$, também (troque *a* por $1/a$).

Demonstração do teorema:

Como $[a_1, a_2, a_3] \geq [b_1, b_2, b_3]$, se as seqüências não forem iguais, adotamos o seguinte procedimento:

Seja *i* o maior índice tal que $a_i > b_i$, e j o menor índice maior do que *i* tal que $a_j < b_j$. (o qual existe, pois $\sum a_k = \sum b_k$ e $\sum_{k<i} a_k \geq \sum_{k<i} b_k$, donde $\sum_{k \leq i} a_k > \sum_{k \leq i} b_k$).

Se $i < k < j, a_k = b_k$. Seja $r = \min\{a_i - b_i, b_j - a_j\} > 0$. Podemos fazer o troca de a_i por $a_i - r$ e de a_j por $a_j + r$, de modo que o número de índices s tais que

$a_s = b_s$ aumenta de pelo menos uma unidade. A ordem dos a_i é preservada, pois $a_i - r \ge b_i \ge b_j \ge a_j + r$ e, se $i < k < j$, $a_i - r \ge b_i \ge b_k = a_k$. Como a soma simétrica $\sum_{sym} x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3}$ nunca aumenta (pelo lema), repetimos o procedimento até que $a_s = b_s$ para todo s, o que mostra que, no início, tínhamos

$$\sum_{sym} x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3} \ge \sum_{sym} x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3}.$$

Obs. A demonstração do caso com *n* variáveis é análoga.
(*A demonstração fornece uma idéia intuitiva para o conceito de majorar. Uma seqüência na qual os expoentes estão próximos uns dos outros é sempre majorada por uma com os termos mais espalhados!*)

Exemplo 4. (Desigualdade das médias) Dados $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reais positivos, mostre que

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

Solução: Vamos usar a versão de *n* variáveis de bunching:

$$[1,0,0,\ldots,0] > \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots \frac{1}{n}\right] \Rightarrow$$

$$\sum_{sym} a_1 \ge \sum_{sym} a_1^{1/n} a_2^{1/n} \ldots a_n^{1/n} \Rightarrow$$

$$(n-1)! \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \ge n! \cdot \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \Rightarrow MA \ge MG.$$

Exemplo 5. (Vingança olímpica) Dados *a, b, c, x* reais positivos, prove que

$$\frac{a^{x+2}+1}{a^x bc+1} + \frac{b^{x+2}+1}{b^x ac+1} + \frac{c^{x+2}+1}{c^x ab+1} \ge 3$$

Solução: Na notação simétrica, o problema pode ser reescrito como:

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{sym} \frac{a^{x+2}+1}{a^x bc+1} \ge 3$$

$$\sum_{sym} (a^{x+2}+1)(b^x ac+1)(c^x ab+1) \ge 6(a^x bc+1)(b^x ac+1)(c^x ab+1)$$

Desenvolvendo cada lado:

$$LE = \sum_{sym} (a^{x+4}b^{x+1}c^{x+1} + 2a^{x+3}b^{x}c + a^{x+2} + b^{x+1}c^{x+1}a^{2} + 2a^{x}bc + 1)$$

$$LD = \sum_{sym} (a^{x+2}b^{x+2}c^{x+2} + 3a^{x+1}b^{x+1}c^{2} + 3a^{x}bc + 1)$$

Temos $LE \geq LD$ já que, usando bunching três vezes, podemos escrever:

$$LE - LD = \sum_{sym}(a^{x+4}b^{x+1}c^{x+1} - a^{x+2}b^{x+2}c^{x+2}) + 2\cdot\sum_{sym}(a^{x+3}b^{x}c - a^{x+1}b^{x+1}c^{2}) + \sum_{sym}(a^{x+2} - a^{x}bc) \geq 0.$$

Exemplo 6. (Torneio das cidades e Japão) Mostre que sendo a, b, c positivos de produto 1 tem-se

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{a+c+1} \leq 1$$

Solução: Inicialmente, vamos nos livrar da restrição, homogeneizando a inequação:

$$\frac{1}{a+b+\sqrt[3]{abc}} + \frac{1}{b+c+\sqrt[3]{abc}} + \frac{1}{a+c+\sqrt[3]{abc}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}$$

Para evitar as raízes, faça $x = \sqrt[3]{a},\ y = \sqrt[3]{b},\ z = \sqrt[3]{c}$.

$$\sum_{sym} \frac{xyz}{x^3 + y^3 + xyz} \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{sym} xyz(y^3 + z^3 + xyz)(x^3 + z^3 + xyz) \leq 2(x^3 + y^3 + xyz)(y^3 + z^3 + xyz)(x^3 + z^3 + xyz)$$

Desenvolvendo,

$$(x^3 + z^3 + xyz)(y^3 + z^3 + xyz) = z^6 + x^3z^3 + y^3z^3 + x^3y^3 + x^4yz + 2z^4yx + y^4xz + x^2y^2z^2$$

(*)

Logo, $LE = \sum_{sym} (x^7yz + 4x^5y^2z^2 + 3x^4y^4z + x^3y^3z^3)$

Multiplicando (*) por $x^3 + y^3 + xyz$ e escrevendo na notação simétrica:

$$LD = \sum_{sym} (x^7yz + 2x^6y^3 + 2x^5y^2z^2 + 3x^4y^4z + x^3y^3z^3)$$

(*No início, é difícil olhar direto para os coeficientes. Nesse caso, não perca tempo. Faça a conta com os 27 termos no LD e só depois escreva na notação de simetria!*)

Cancelando os termos comuns, a desigualdade é portanto equivalente a

$$\sum_{xym} x^6y^3 \geq \sum_{sym} x^5y^2z^2,$$

que segue por bunching já que $[6,3,0] \geq [5,2,2]$.

3. SCHUR (para três variáveis)

Se *x*, *y*, *z*, *r* são positivos, tem-se:

$$\sum_{sym} x^r (x-y)(x-z) \geq 0.$$

Demonstração: Como a expressão é simétrica, podemos supor, sem perda de generalidade, $x \geq y \geq z$, de forma que:

$$x^r (x-y)(x-z) + y^r (y-x)(y-z) = (x-y)(x^r (x-z) - y^r (y-z)) \geq 0,$$

pois $x - z \geq y - z$ e $x^r \geq y^r$.

Para completar a demonstração, basta somar essa desigualdade com $z^r (z-x)(z-y) \geq 0$.

Quando $r = 1$, obtemos a principal variação da desigualdade de Schur:

$$\sum_{sym} (x^3 + xyz - 2x^2 y) \geq 0.$$

(*Schur é muito útil quando o termo mais distribuído (ex: xyz) deve ser maior que algum outro termo*).

Exemplo 7. (Irã) Dados *x*, *y*, *z* reais positivos, mostre que

$$(xy + yz + xz) \cdot \left(\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(x+z)^2} \right) \geq \frac{9}{4}.$$

Solução:

Tirando *mmc* queremos provar que:

$$2 \cdot \sum_{sym} (xy + yz + xz)(y+z)^2 (x+z)^2 \geq 9 \cdot [(x+y)(x+z)(y+z)]^2$$

Fazendo as contas,

$$(x+y)(x+z)(y+z) = (x+y)(z^2 + xy + xz + yz) =$$
$$x^2 y + x^2 z + y^2 x + y^2 z + z^2 x + z^2 y + 2xyz = s$$

$$LD = 9 \cdot [(x+y)(x+z)(y+z)]^2 = 9s^2 = 9s \cdot \left(\sum_{sym} x^2 y \right) + 9s \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \sum_{sym} xyz \right)$$

$$LD = 9\cdot\sum_{sym}(x^4y^2 + x^3y^3 + x^4yz + x^2y^3z + x^3yz^2 + x^2y^2z^2 + 2x^3y^2z) +$$

$$+3\cdot\sum_{sym}(6x^3y^2z + 2x^2y^2z^2)$$

$$LD = \sum_{sym}(9x^4y^2 + 9x^4yz + 9x^3y^3 + 54x^3y^2z + 15x^2y^2z^2)$$

No lado esquerdo, pondo $\sigma = xy + xz + yz$:

$$LE = 2\cdot\sigma\cdot\sum_{sym}[(y+z)(x+z)]^2 = 2\cdot\sigma\cdot\sum_{sym}(z^2+\sigma)^2 = 2\cdot(6\sigma^3 + 2\sigma^2\sum_{sym}x^2 + \sigma\sum_{sym}x^4)$$

Agora, usando o exemplo 2:

$$6\sigma^3 = 3\cdot\sum_{sym}(x^3y^3 + 6x^3y^2z + 2x^2y^2z^2)$$

$$2\sigma^2 = \sum_{sym}(x^2y^2 + 2x^2yz);$$

$$2\sigma^2\sum_{sym}x^2 = \sum_{sym}(x^2y^2 + 2x^2yz)\cdot 2\cdot(x^2+y^2+z^2) = 2\cdot\sum_{sym}(2x^4y^2 + x^2y^2z^2 + 2x^4yz + 4x^2y^3z)$$

$$\sigma\sum_{sym}x^4 = \sum_{sym}x^4\cdot(xy + xz + yz) = \sum_{sym}(2x^5y + x^4yz)$$

Juntando tudo,

$$LE = 2\cdot\sum_{sym}(2x^5y + 4x^4y^2 + 5x^4yz + 3x^3y^3 + 26x^3y^2z + 8x^2y^2z^2)$$

Usando duas vezes bunching e em seguida Schur temos:

$$LE - LD = \sum_{sym}(4x^5y - x^4y^2 + x^4yz - 3x^3y^3 - 2x^3y^2z + x^2y^2z^2) =$$

$$= \sum_{sym}(x^5y - x^4y^2) + 3\cdot\sum_{sym}(x^5y - x^3y^3) + xyz\sum_{sym}(x^3 + xyz - 2x^2y) \geq 0$$

Exemplo 8. (IMO) Sejam x, y, z reais positivos com $xyz = 1$. Mostre que:

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{z^5 - z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \geq 0\,.$$

Solução:

Escrevendo na notação de simetria, o problema é equivalente a:

$$\sum_{sym}(x^5 - x^2)\cdot(x^2 + y^5 + z^2)\cdot(x^2 + y^2 + z^5) \geq 0$$

Como $(x^2+y^5+z^2)\cdot(x^2+y^2+z^5)=x^4+(y^5+z^2+y^2+z^5)x^2+(y^5+z^2)(y^2+z^5)$, basta que:

$$\sum_{sym} x^5\cdot(x^4+2y^5x^2+2y^2x^2+2y^7+y^5z^5+z^2y^2)\geq$$
$$\geq\sum_{sym} x^2\cdot(x^4+2y^5x^2+2y^2x^2+2y^7+y^5z^5+z^2y^2)$$
$$\sum_{sym}(x^9+2x^7y^5+2x^7y^2+2x^5y^7+x^5y^5z^5+x^5y^2z^2)\geq$$
$$\sum_{sym}(x^6+2x^4y^5+2x^4y^2+2x^2y^7+x^5y^5z^2+x^2y^2z^2)$$

Só bunching não vai resolver isso, pois o termo $x^5y^5z^5$ fica sobrando do lado esquerdo. Usando respectivamente a desigualdade das médias, bunching e $xyz\geq 1$ porém temos:

$$\sum_{sym}(x^7y^5+x^7y^5+x^5y^5z^5+x^5y^2z^2)\geq\sum_{sym}4x^6y^{4,25}z^{1,75}\geq$$
$$\sum_{sym}(2x^6y^4z^2+x^5y^5z^2+x^4y^4z^4)\geq$$
$$\sum_{sym}(2x^4y^2+x^5y^5z^2+x^2y^2z^2)$$

O problema está resolvido somando-se essa desigualdade com:

$$\sum_{sym}(x^9+2x^7y^5)\geq\sum_{sym}(x^7yz+2x^6y^5z)\geq\sum_{sym}(x^6+2x^5y^4),$$

que vale por bunching e $xyz\geq 1$ respectivamente.

4. EXERCÍCIOS PROPOSTOS:

(*Assuma as variáveis reais positivas nos exercícios abaixo*)

1. $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b}\geq\dfrac{3}{2}$.

2. $(x^2+y^2-z^2)\cdot(x-y)^2+(y^2+z^2-x^2)(y-z)^2+(z^2+x^2-y^2)(z-x)^2\geq 0$.

3. (IMO) Se $x+y+z=1$, mostre que $0\leq xy+yz+zx-2xyz\leq\dfrac{7}{27}$.

4. (Banco IMO) Se $xyz=1$, mostre que

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}\geq\frac{3}{4}.$$

5. (IMO) Sendo $abc = 1$, mostre que $\dfrac{1}{a^3(b+c)}+\dfrac{1}{b^3(a+c)}+\dfrac{1}{c^3(a+b)}\ge\dfrac{3}{2}$.

6. (IMO) Se $abc = 1$, mostre que $\left(a-1+\dfrac{1}{b}\right)\cdot\left(b-1+\dfrac{1}{c}\right)\cdot\left(c-1+\dfrac{1}{a}\right)\le 1$.

7. (Banco IMO)

$(a+b-c)^2\cdot(a-b+c)^2\cdot(-a+b+c)^2\ge(a^2+b^2-c^2)\cdot(a^2-b^2+c^2)\cdot(-a^2+b^2+c^2)$.

8. (Japão) $\dfrac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\dfrac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\dfrac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\ge\dfrac{3}{5}$.

9. (USA) $\dfrac{(2x+y+z)^2}{2x^2+(y+z)^2}+\dfrac{(2y+x+z)^2}{2y^2+(x+z)^2}+\dfrac{(2z+y+x)^2}{2z^2+(y+x)^2}\le 8$.

10. (Bulgária) Se $abc = 1$, mostre que

$\dfrac{1}{1+a+b}+\dfrac{1}{1+b+c}+\dfrac{1}{1+a+c}\le\dfrac{1}{2+a}+\dfrac{1}{2+b}+\dfrac{1}{2+c}$.

O PROBLEMA IMPOSSÍVEL

Cássio Neri
Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro

♦ Nível Avançado

INTRODUÇÃO:

O Problema Impossível é um lindo problema sobre números inteiros. Sua forma original foi dada por Freudenthal [1] antes de ser popularizada por Martin Gardner[1] [2]. As duas versões não são exatamente iguais. A versão de Gardner é a seguinte:

> Dois números inteiros (não necessariamente diferentes) entre 2 e 20 são escolhidos. Apenas a soma dos dois números é dada ao matemático Sérgio. Apenas o produto dos dois números é dado ao matemático Paulo.
>
> Por telefone, Sérgio diz a Paulo: "Não existem meios para que você determine minha soma". Uma hora depois, Paulo telefona de volta para dizer: "Eu sei a sua soma". Mais tarde, Sérgio telefona novamente para Paulo para anunciar: "Agora eu sei o seu produto".
>
> Quais são os números?

No problema original, Freudenthal fixou uma cota superior de 100 (não para os números, mas para a soma; não obstante, vamos considerar apenas variações do problema com cotas para os números, embora a versão de Freudenthal possa ser analisada de modo análogo). Para simplificar o problema, Gardner preferiu usar a cota superior igual a 20. Fazendo isto, "o Problema Impossível se tornou literalmente impossível" como disse o próprio Gardner [3]. Neste texto vamos explicar este ponto.
É surpreendente que o problema original seja bem posto já que, como pode-se pensar, a pequena conversa telefônica não acrescenta nenhuma informação relevante sobre os números. Mas, como veremos, esta conversa é rica de informações matemáticas.

O Problema Impossível é um problema 3 em 1. Os problemas propostos a Paulo e a Sérgio são diferentes do nosso e entre si. Cada um dos personagens tem uma informação adicional (o produto para Paulo e a soma para Sérgio) que nós não temos. Isto faz uma grande diferença.

---

[1] O autor, além de traduzir o enunciado, tomou a liberdade de chamar os personagens de Paulo e Sérgio em vez de *P* e *S* como na versão em inglês.

Nas duas primeiras seções consideraremos o problema como nos foi proposto.
Na última seção consideramos os problemas propostos a Paulo e a Sérgio.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA

Para resolver o problema vamos usar um programa de computador já que existem muitos casos a considerar. Um programa escrito em linguagem C está disponível em [6]. Posteriormente veremos uma solução sem a necessidade de ajuda computacional.

Vejamos a estratégia da solução. Aproximadamente falando, começaremos com dois conjuntos grandes: o dos produtos admissíveis e o das somas admissíveis. De cada frase do diálogo, extrairemos informação que nos permitirá reduzir o tamanho destes conjuntos. Ao final, teremos apenas um produto e uma soma admissível. Resolvendo uma equação de segundo grau, determinaremos os dois números.

Faremos a seguinte hipótese fundamental, caso contrário, o problema não tem sentido matemático.

Hipótese fundamental: Paulo e Sérgio dizem a verdade.
Esta hipótese merece um comentário filosófico. Algum leitor pode julgar que tal hipótese seja falsa já que Sérgio afirma que Paulo não pode determinar a soma e, uma hora depois, Paulo anuncia que o fez. Um deles está mentindo? Não necessariamente. A hipótese continua sendo plausível ao considerarmos o tempo. Inicialmente Paulo não podia resolver o problema. Por alguma razão, que veremos a seguir, Sérgio sabia disto e anunciou o fato. Paulo pensou e descobriu qual era esta razão. Só depois de descobri-la (portanto, não antes de Sérgio se pronunciar) é que Paulo foi capaz de determinar a soma.

Chamaremos de p ao produto e s à soma dos dois números. Seja N a cota superior dada para os números. Nesta seção consideraremos $N = 100$. Sabemos, *a priori*, que p não é primo já que ele é um produto de dois inteiros maiores que 1. Além disto, p não pode ter nenhum divisor primo maior que N (por exemplo, p não pode ser $2 \cdot 101$). Há outras restrições, por exemplo, $p \neq 11 \cdot 11 \cdot 11$ e $p \neq 11 \cdot 13 \cdot 17$. Veja que sabemos muita coisa sobre p. Por outro lado, não temos nenhuma restrição sobre s, exceto que $4 \leq s \leq 200$.

Para simplificar a apresentação, faremos as seguintes definições.

Definição: Dado um inteiro $m \geq 4$, dizemos que o par (i, j) é uma **fatoração** de m se $m = ij$ com i e j inteiros entre 2 e N.

Definição: Dado um inteiro $m \geq 4$, dizemos que o par (i, j) é uma **decomposição** de m se $m = i + j$ com i e j inteiros entre 2 e N.
Repare que estas definições dependem de N. Assim, (2, 8) é uma fatoração de 16 se, e somente se, $N \geq 8$. Em se tratando de fatorações e decomposições, consideramos $(i, j) = (j, i)$.
As restrições sobre p, citadas anteriormente, são conseqüências do seguinte fato: existe pelo menos uma fatoração para p. Os conjuntos dos produtos e das somas admissíveis são dados, respectivamente, por
$P_0 = \{m \in \mathbb{N}; 4 \leq m \leq N^2$ e m tem pelo menos uma fatoração$\}$,
$S_0 = \{m \in \mathbb{N}; 4 \leq m \leq 2N\}$.
O programa informa que P_0 tem 2880 elementos. Informa também que S_0 tem 197, entretanto isto é trivialmente constatado sem necessidade de computador.
Passemos à análise do diálogo. Inicialmente Sérgio diz que Paulo não pode determinar a soma. Isto significa que p tem pelo menos duas fatorações distintas. De fato, já sabemos que p tem fatoração. Se (i, j) fosse a única fatoração de p, então Paulo saberia que $s = i + j$. Desta forma, o conjunto dos produtos admissíveis se reduz a

$$P_1 = \{m \in P_0; m \text{ tem pelo menos duas fatorações}\}.$$

Temos que $p \in P_1$ e, segundo o programa, P_1 tem 1087 elementos. Percebe-se facilmente que se i e j são primos, com $i, j \leq N$, então $ij \in P_0 \setminus P_1$. Porém, números desta forma constituem apenas uma pequena parte de $P_0 \setminus P_1$. Outros exemplos de elementos de $P_0 \setminus P_1$ são N^2 e $N(N-1)$.
Existe outra conseqüência da primeira frase de Sérgio: qualquer que seja a decomposição (i, j) de s temos que $ij \in P_1$. com efeito, suponhamos que s tenha decomposição (i, j) tal que $ij \notin P_1$. Vamos mostrar que, neste caso, existe uma circunstância na qual Paulo poderia determinar a soma, de modo que Sérgio não poderia fazer sua primeira declaração. Isto ocorre quando $p = ij$ pois teríamos $p \notin P_1$ e, portanto, (i, j) seria a única fatoração de p. Isto permitiria a Paulo concluir que $s = i + j$. Em vista disso, o conjunto de somas admissíveis se reduz a

$$S_1 = \{m \in S_0; \text{ para toda decomposição } (i, j) \text{ de } m \text{ temos que } ij \in P_1\}.$$

Temos que $s \in S_1$ e, de acordo com o programa,

$$S_1 = \{11, 17, 23, 27, 29, 35, 37, 41, 47, 53\}$$

Em seguida, Paulo anuncia saber a soma. Segue daí que existe uma única fatoração (i, j) de p tal que $i + j \in S_1$. De fato, $s \in S_1$, logo, p tem fatoração cuja soma está em S_1. Se existisse mais de uma fatoração nessa condição, então Paulo não poderia saber qual delas seria correta. Assim, o conjunto dos produtos admissíveis é reduzido a

$P_2 = \{m \in P_1;$ existe uma única fatoração (i, j) de m tal que $i + j \in S_1\}$.

Temos que $p \in P_2$. O programa diz que P_2 tem 86 elementos.

Finalmente, Sérgio diz que também sabe o produto. Graças a um argumento análogo ao do parágrafo anterior, concluímos que existe uma única decomposição (i, j) de s tal que $ij \in P_2$. Portanto, o conjunto das somas admissíveis se reduz a

$S_2 = \{m \in S_1;$ existe uma única decomposição (i, j) de m tal que $ij \in P_2\}$.

Temos que $s \in S_2$. O programa informa que $S_2 = \{17\}$. Logo, $s = 17$.

Neste momento, Sérgio já anunciou ter encontrado o produto. Como está dizendo a verdade, então nós também podemos encontrá-lo. Com efeito, sabemos que a soma vale 17 e, portanto, podemos nos colocar no lugar de Sérgio.

Outra maneira de proceder é reiterar o argumento que define P_2 a partir de S_1 e aquele que define S_2 a partir de P_2 para, assim, construir P_n a partir de S_{n-1} e S_n a partir de P_n. Repetimos isto até encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que P_n e S_n sejam unitários. Mais precisamente, para $n = 3, \ldots$, definimos

$P_n = \{m \in P_{n-1};$ existe uma única fatoração (i, j) de m tal que $i + j \in S_{n-1}\}$,

$S_n = \{m \in S_{n-1};$ existe uma única decomposição (i, j) de m tal que $ij \in P_n\}$.

Obtemos assim, $P_3 = \{52\}$ e $S_3 = \{17\}$, logo $p = 52$ e $s = 17$, de onde segue que os números são 4 e 13.

O ERRO DO GARDNER

Conhecendo a resposta, 4 e 13, a intuição diria que a mesma solução valeria se trocássemos, como fez Gardner, a cota superior N de 100 para 20.

Surpreendentemente, isto está errado! Veremos que para $N \le 61$ os números 4 e 13 não resolvem o problema!

O que acontece se $N \le 61$? Neste caso $17 \notin S_2$. De fato, o programa mostra que $S_2 = \varnothing$, o que significa que o problema não tem solução. Pode-se pensar que esta é uma falha do método e que talvez, por outro argumento encontrássemos a solução, mas concluímos o seguinte. Se s e p são os números fornecidos a Sérgio e Paulo, respectivamente, e se ambos dizem a verdade, então obtemos, sucessivamente, os seguintes fatos:

1. antes do diálogo: $p \in P_0$ e $s \in S_0$;
2. após a primeira frase de Sérgio: $p \in P_1$ e $s \in S_1$;
3. após a primeira frase de Paulo: $p \in P_2$;
4. após a primeira frase de Sérgio: $s \in S_2$.

Logo, se os números são 4 e 13, então $p = 52 \in P_2$ e s = 17 $\in S_2$. Suponhamos agora que $N \le 61$. Vamos mostrar que $52 \notin P_2$ ou $17 \notin S_2$, de onde seguirá que os números não podem ser 4 e 13. Procedemos por absurdo supondo que $52 \in P_2$ e $17 \in S_2$.

Afirmaremos que $19, 37 \notin S_1$. De fato, como 34 tem apenas a fatoração (2, 17), temos que $34 \notin P_1$ e, portanto, 2 + 17 = $19 \notin S_1$. Observamos que 186 pode ser escrito como produto de dois números naturais apenas das seguintes formas:

$1 \cdot 186$, $2 \cdot 93$, $3 \cdot 62$ e $6 \cdot 31$. Como $N \le 61$, a única fatoração de 186 é (6, 31), logo, $186 \notin P_1$. Segue daí que 6 + 31 = 37 $\notin S_1$.

Agora, mostraremos que $70 \in P_2$. Podemos escrever 70 como $1 \cdot 70, 2 \cdot 35, 5 \cdot 14$ e $7 \cdot 10$. Como já vimos, $37 = 2 + 35$ e $19 = 5 + 14$ não estão em S_1, porém, $17 \in S_2 \subset S_1$. Logo, $70 \in P_2$.

Finalmente, entre todas as decomposições de 17 temos (4, 13) e (7, 10). Como $52, 70 \in P_2$ temos que $17 \notin S_2$ o que é uma contradição.

Salientamos os seguintes fatos:

Mostramos apenas que (4, 13) não é solução para $N \le 61$. Talvez, outra solução apareça quando $N \le 61$. Entretanto, o programa em [6] mostra que $S_2 = \varnothing$ e, portanto, o problema não tem solução.

2. Mesmo os puristas, que não aceitam demonstrações assistidas por computador, deverão aceitar que (4, 13) não é solução do problema quando $N \leq 61$.

3. Quando dizemos que o problema não tem solução, significa que o *nosso* problema não tem solução. Por outro lado, o problema proposto a Paulo tem solução desde que a ele seja fornecido um número adequado. A situação de Sérgio não é muito diferente da nossa. Abordaremos estas questões na próxima seção.

O PROBLEMA DE PAULO E O DE SÉRGIO

Nesta seção, consideraremos os outros problemas, especialmente, o dado a Paulo. Em [6] está disponível um programa em linguagem C que poderia ser usado por Paulo (ou por nós em seu lugar) e outro para Sérgio. Por hora, voltemos a considerar $N = 100$.

Paulo sabe que $p = 52$ e que suas fatorações são (2, 26) e (4, 13). Assim, ele sabe que s vale 28 ou 17. Após Sérgio falar pela primeira vez, Paulo procura as decomposições de 28: (2, 26), (3, 25), (4, 24), (5, 23),… Ele pode parar por aí e concluir que $s \neq 28$ pois (5, 23) é a única fatoração de 115 (5 e 23 são primos) e, portanto, $115 \notin P_1$ e $28 \notin S_1$. Agora, ele pode procurar as decomposições de 17 (só para ter certeza que $s = 17$): (2, 15), (3, 14), (4, 13), (5, 12), (6, 11), (7, 10) e (8, 9). Estas decomposições são fatorações, respectivamente, de 30, 42, 52, 60, 66, 70 e 72. Todos estes números estão em P_1 já que cada um deles tem outra fatoração diferente daquela aqui mostrada. Paulo conclui que $s = 17$.

Sérgio deve trabalhar mais que Paulo. Porém, ele também pode achar o produto após alguns minutos[2].

Consideremos, agora, outros valores para N. Para valores pequenos não podemos resolver o problema. Da mesma forma, para N grande, por exemplo $N = 866$, não é possível determinar os números pois $P_n = \{52, 244\}$ e $S_n = \{17, 65\}$ para todo $N \geq 3$.

Para Paulo, o efeito de trocar N é quase nulo: sabendo que $p = 52$ ele encontra $s = 17$ para todo $N \geq 13$ (fato em acordo com a intuição). Mesmo a ambigüidade que aparece para nós quando $N = 866$ não atrapalha Paulo. Neste caso, se ele recebesse $p = 244$, então acharia $s = 65$.

Quando $N \leq 25, (2, 26)$ não é mais fatoração de 52. Assim, Paulo não teria dúvida de que $s = 17$. Portanto, Sérgio não diria que Paulo não podia determinar a soma. Paulo acharia s mas Sérgio não acharia p (como veremos abaixo).

[2] O autor se pôs no lugar de Sérgio e após, aproximadamente, 15 minutos achou o produto. Nos seus cálculos ele considerou em $P_0 \setminus P_1$ apenas os números que são produtos de dois primos.

Para $N \leq 61$, a situação de Sérgio é similar a nossa: ele não pode achar *p*.
A razão é a mesma de antes: (4, 13) e (7, 10) são duas decomposições de 17 com produtos em P_2. Outra maneira de ver este fato é a seguinte. Tome *N* = 61 e coloquemo-nos no lugar de Paulo, primeiro com *p* = 52 e, depois, com *p* = 70.
Em ambos os casos, após a primeira frase de Sérgio, encontraríamos *s* = 17.
Logo, Sérgio não poderia decidir se *p* = 52 ou *p* = 70. Na verdade, existe ainda uma terceira possibilidade, *p* = 66, que aparece quando *N* = 61. Para *N* = 866, Sérgio encontra *p* = 52, quando *s* = 17, ou *p* = 244, quando *s* = 65.

SOLUÇÃO SEM ASSISTÊNCIA COMPUTACIONAL

Vejamos agora uma solução do problema original, com *N* = 100, que não necessita de assistência computacional.

Determinar P_0 ou P_1 manualmente seria muito trabalhoso (lembre-se que, segundo o programa, esses conjuntos têm, respectivamente, 2880 e 1087 elementos). Vamos procurar S_1 sem computador mas com paciência.

Para concluir que $S \notin S_1$ basta existir uma decomposição (*i*, *j*) de *S* que seja a única fatoração de *ij*. Vejamos alguns casos (cuja verificação deixamos para o leitor). Para *S* = 200 temos a decomposição (100, 100). Para *S* = 199 e *S* = 198 temos (99, 100) e (99, 99), respectivamente.

Se $99 \leq S \leq 197, (i, j) = (97, S-97)$ resolve pois $2 \leq S - 97 \leq 100$ e *ij* tem fator primo 97, logo, *i*, digamos, tem fator 97. Como 97 > 50, se *i* tivemos outro fator primo, então teríamos *i* > 100, que é absurdo. Concluímos que *i* = 97 e *j* = *S* – 97. Portanto, (*S*, *S* – 97) é a única fatoração de *ij*. Analogamente, se $55 \leq S \leq 153$, então $(53, S-53)$ é a única fatoração de 53(*S* – 53).

Resumindo, até aqui mostraremos que se $S \geq 55$, então $S \notin S_1$. Agora, se $S \leq 54$ e *S* é par, então pode-se verificar, caso a caso, que *S* tem decomposição (*i*, *j*) com *i* e *j* primos (o caso geral, isto é, sem cota superior para *S*, é um problema em aberto conhecido como Conjectura de Goldbach), logo, $S \notin S_1$.

Analogamente, os ímpares 5, 7, 9, 13, 15, 19, 21, 25, 31, 33, 39, 43 e 45 são todos da forma 2 + *P* com *P* primo e, portanto, nenhum deles está em S_1. Finalmente, (17, 34) é uma decomposição de 51 que é a única fatoração de $578 = 2 \cdot 17^2$ (pois $17^2 > 100$), ou seja, $51 \notin S_1$.

Concluímos que $S_1 \subset \tilde{S} = \{11, 17, 23, 27, 29, 35, 37, 41, 47, 53\}$. Quem quiser pode mostrar que vale a inclusão contrária, mas isto não será necessário à nossa demonstração.

Determinar P_2 também exigiria muito esforço. Por isto, passaremos diretamente para S_2. Observaremos que se $S \in S_2$, então existe uma única decomposição (i, j) de S tal que $ij \in P_2$ e esta é a única fatoração de ij com soma em $S_1 \subset \tilde{S}$.

Assim, para concluir que $S \in \tilde{S} \setminus S_2$ basta exibir duas decomposições distintas (i_1, j_1) e (i_2, j_2) de S tais que $i_1 j_1$ e $i_2 j_2$ admitam, no máximo, estas fatorações com soma em $\tilde{S}$. Por exemplo, $11 \notin S_2$. De fato, considere as decomposições (2, 9) e (3, 8). Elas têm produtos 18 e 24, respectivamente. Além de (2, 9) e (3, 8), estes números admitem as seguintes fatorações: (3, 6), (2, 12) e (4, 6) cujas somas 9, 14 e 10 estão fora de $\tilde{S}$.

Analogamente, mostra-se que $23 \notin S_2$ considerando as decomposições (4, 19) e (10, 13). Para 27, considere (4, 23) e (8, 19); para 29 considere (6, 23) e (10, 19).

Finalmente, para $S \in \{35, 37, 41, 47, 53\}$ considere $(31, S - 31)$ e $(29, S - 29)$ (mostre caso a caso). Finalmente, concluímos que $S_2 = \{17\}$, logo, a soma é 17.

As fatorações de 17 são (2, 15), (3, 14), (4, 13), (5, 12), (6, 11), (7, 10) e (8, 9).

Os produtos correspondentes são 30, 42, 52, 60, 66, 70 e 72. Ora, o produto procurando está em P_2, logo, ele tem uma única fatoração cuja soma está em $S_1 \subset \tilde{S}$. O único dos números anteriores com esta propriedade é 52. Por exemplo, $30 = 2 \cdot 15 = 5 \cdot 6$ e $5 + 6 = 11 \in \tilde{S}$ (além disto, é claro que $2 + 15 = 17 \in \tilde{S}$). De modo análogo consideraremos

$42 = 3 \cdot 14 = 2 \cdot 21,\ 60 = 5 \cdot 13 = 3 \cdot 20, 66 = 6 \cdot 11 = 2 \cdot 33, 70 = 7 \cdot 10 = 2 \cdot 35$ e $72 = 8 \cdot 9 = 3 \cdot 24$.

Logo, o produto é 52 e os números são 4 e 13.

Referências

[1] HANS FREUDENTHAL, Nicuw Archief Voor Wiskunde, Ser 3, 17 (1969) 152
[2] MARTIN GARDNER, Mathematical Games, Scientific American, 241 (Dec. 1979) 22.
[3] MARTIN GARDNER, Mathematical Games, Scientific American, 242 (May 1980)
[4] LEE SALLOWS, The Impossible Problem, The Mathematical Intelligencer, 17:1 (1995) 27.
[5] ISAACS I. M. ISAACS, The Impossible Problem Revisited Again, Tha Mathematical Intelligencer, 17:4 (1195) 4.
[6] URL: www.labma.ufrj.br/~cassio/f-impossivel.html

COMO É QUE FAZ?

Resolveremos a seguir dois problemas da IV Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária, por sugestão de Macelo da Silva Mendes, de Teresina – PI.

1) Seja $\alpha > 0$ um número real. Sejam $0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ as soluções reais da equação $x \cdot \operatorname{sen}(x^\alpha) = \ln x$. Encontre os valores de α para os quais $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n}$ converge.

SOLUÇÃO: Suponhamos inicialmente que $\alpha \geq 1$. Dado $k \in \mathbb{N}^*$, temos $(2k\pi)^{1/\alpha} \cdot sen\left(\left((2k\pi)^{1/\alpha}\right)^\alpha\right) = 0 < \ln\left((2k\pi)^{1/\alpha}\right)$, enquanto

$$\left(\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^{1/\alpha} sen\left(\left(\left(\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^{1/\alpha}\right)^\alpha\right) = \left(\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^{1/\alpha} > \ln\left(\left(\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^{1/\alpha}\right),$$

pois $x > \ln x$, para todo $x > 0$. Assim, para todo $k \in \mathbb{N}^*$, existe uma solução $y_k \in \left((2k\pi)^{1/\alpha}, \left(\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^{1/\alpha}\right)$ da equação $x \cdot \operatorname{sen}\left(x^\alpha\right) = \ln x$. Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^{1/\alpha}} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi} \geq \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1} = +\infty, \text{ caso } \alpha \geq 1.$$

Consideremos agora o caso $0 < \alpha < 1$. Seja $f(x) = x \cdot \operatorname{sen}(x^\alpha)$. Temos $f'(x) = sen(x^\alpha) + \alpha \cdot x^\alpha \cdot \cos(x^\alpha)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe um único $w_k \in \left((2k\pi)^{1/\alpha}, ((2k+1)\pi)^{1/\alpha}\right)$ com $f'(w_k) = 0$; para $(2k\pi)^{1/\alpha} < x < w_k$ temos $f'(x) > 0$, e, para $w_k < x < ((2k+1)\pi)^{1/\alpha}$, temos $f'(x) < 0$. De fato, para $0 < x \leq \left(\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^{1/\alpha}$, temos que $f'(x) > 0$, f' é decrescente no intervalo $\left[\left(\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^{1/\alpha}, ((2k+1)\pi)^{1/\alpha}\right]$ e $f'\left(((2k+1)\pi)^{1/\alpha}\right) < 0$.

Como $f\left(\left(\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^{1/\alpha}\right)=\left(\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^{1/\alpha}>\ln\left(\left(\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^{1/\alpha}\right)$, e $f\left(\left((2k+1)\pi\right)^{1/\alpha}\right)=0<\ln\left(\left((2k+1)\pi\right)^{1/\alpha}\right)$, existe uma solução y_k de $f(x)=\ln x$ com $\left(\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^{1/\alpha}<x<\left((2k+1)\pi\right)^{1/\alpha}$. Para $\left((2k+1)\pi\right)^{1/\alpha}\le x\le\left((2k+2)\pi\right)^{1/\alpha}$, temos $f(x)\le 0<\ln x$. Para $x\in\left[w_k,\left((2k+1)\pi\right)^{1/\alpha}\right]$, temos $f'(x)\le 0$ e $(\ln x)'=\frac{1}{x}>0$, donde a equação $f(x)=x$ tem no máximo uma solução em $\left[w_k,\left((2k+1)\pi\right)^{1/\alpha}\right]$.

Como $f\left(\left((2k+2)\pi\right)^{1/\alpha}\right)=0<\ln\left(\left((2k+1)\pi\right)^{1/\alpha}\right)$ e $f\left(\left(\left(2k+\frac{5}{2}\right)\pi\right)^{1/\alpha}\right)>\ln\left(\left(\left(2k+\frac{5}{2}\right)\pi\right)^{1/\alpha}\right)$, existe uma menor solução u_k de $f(x)=\ln x$ com $\left((2k+2)\pi\right)^{1/\alpha}<u_k<\left(\left(2k+\frac{5}{2}\right)\pi\right)^{1/\alpha}$. Como $f(u_k)=u_k sen\left(u_k^{\alpha}\right)=\ln u_k$, donde $\operatorname{sen}\left(u_k^{\alpha}\right)=u_k\ \operatorname{sen}\left(u_k^{\alpha}\right)=\ln u_k$, temos $\operatorname{sen}\left(u_k^{\alpha}\right)=\frac{\ln u_k}{u_k}$.

Temos, para $u_k<y\le\left(\left(2k+\frac{5}{2}\right)\pi\right)^{1/\alpha}$, $f'(y)\ge\operatorname{sen}y^{\alpha}\ge\operatorname{sen}\left(u_k^{\alpha}\right)=\frac{\ln u_k}{u_k}>\frac{1}{u_k}=(\ln)'(u_k)$ (pois $u_k>(2\pi)^{1/\alpha}>2\pi>e$), donde $f(y)>\ln y$, e logo u_k é a única solução de $f(x)>\ln x$ em $\left(\left((2k+2)\pi\right)^{1/\alpha},\left(\left(2k+\frac{5}{2}\right)\pi\right)^{1/\alpha}\right)$. Se $\left(\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^{1/\alpha}\le y\le w_k$,

$$f(y)\ge f\left(\left(\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^{1/\alpha}\right)=\left(\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^{1/\alpha}>\ln\left(\left((2k+1)\pi\right)^{1/\alpha}\right)>\ln w_k\ge\ln y$$

(de fato, $\ln\left(\left((2k+1)\pi\right)^{1/\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha}\ln\left(\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)<\frac{e}{\alpha}\ln\left((2k+1)\pi\right)=e\ln\left(\left(\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^{1/\alpha}\right)\le$

$\leq \left(\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^{1/\alpha}$; $\ln\left((2k+1)\pi\right) < e\ln\left(\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)$ segue de $\ln\pi < \frac{8}{3}\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) < e\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Assim, y_k e u_k são as únicas soluções de $f(x)=\ln x$ em $\left[\left(\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^{1/\alpha}, \left(\left(2k+\frac{5}{2}\right)\pi\right)^{1/\alpha}\right]$, para todo $k\in\mathbb{N}$. Finalmente, se $x\in(0,1)$, $f(x)>0>\ln x$ e, para $1\leq x\leq\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/\alpha}$, temos $f(x)\geq x\cdot \text{sen}1\; x\cdot sen\frac{\pi}{6}=\frac{x}{2}>\frac{x}{e}\geq \ln x$, donde não há solução de $f(x)=\ln x$ em $\left(0,\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/\alpha}\right]$. Assim, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n}<\sum_{k=0}^{\infty}2\cdot\frac{1}{\left(\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^{1/\alpha}}<2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^{1/\alpha}}<+\infty$, no caso $0<\alpha<1$.

A resposta é, portanto, $\{\alpha\in\mathbb{R}\,|\,0<\alpha<1\}$.

2) Calcular $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{n}\cdot\cos\frac{2\pi}{n}\cdot\cos\frac{3\pi}{n}...\cos\frac{n\pi}{n}$.

SOLUÇÃO: Observemos inicialmente que, para todo $m\in\mathbb{N}$, temos $\text{sen}(mx)=\text{sen}x\cdot Q_m(\cos x)$, onde $Q_0=0$ e, para $m\geq 1$, Q_m é um polinômio de grau $m-1$ e coeficiente líder 2^{m-1}. Além disso, o coeficiente constante de Q_m é 0 se m é par e é igual a $(-1)^k$, se $m=2k+1$, para todo $k\geq 0$. Isto pode ser provado a partir da identidade $\text{sen}((m+1)x)+\text{sen}((m-1)x)=2\text{sen}(mx)\cdot\cos x$; temos então $Q_0(y)=0$, $Q_1(y)=1$ e $Q_{m+1}(y)=2yQ_m(y)-Q_{m-1}(y), \forall m\geq 1$.

Por outro lado, como $\text{sen}(k\pi)=0$ e $\text{sen}\left(\frac{k\pi}{m}\right)\neq 0$ para todo k inteiro com $1\leq k\leq m-1$, temos que $\cos\left(\frac{k\pi}{m}\right)$ é raiz de $Q_m(y)$, para $1\leq k\leq m-1$. Como Q_m tem grau m – 1, tem coeficiente líder 2^{m-1} e os números $\cos\left(\frac{k\pi}{m}\right), 1\leq k\leq m-1$, são todos distintos, temos $Q_m(y)=2^{m-1}\cdot\prod_{k=1}^{m-1}\left(y-\cos\left(\frac{k\pi}{m}\right)\right), \forall m\geq 1$.

Em particular, o coeficiente constante de $Q_m(y)$ é $(-2)^{m-1}\cdot\prod_{k=1}^{m-1}\cos\left(\frac{k\pi}{m}\right)$.

Assim, $\prod_{k=1}^{m-1}\cos\left(\frac{k\pi}{m}\right)=\begin{cases}0,\text{se } m \text{ é par}\\ \frac{(-1)^r}{2^{2r}},\ \text{se } m=2r+1, r\in\mathbb{N}\end{cases}$.

Como $\cos\left(\frac{n\pi}{n}\right)=\cos\pi=-1$, a série que queremos calcular vale $-\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{2^{2r}}=\frac{-1}{1+\frac{1}{4}}=-\frac{4}{5}$.

O leitor João Alexandre Júnior enviou uma solução do problema No. 2 do artigo "Os problemas do Visitante Matemático", que pedia para calcular 4^{4^4}. Como $4^{4^4}=4^{256}$ João Alexandre calculou manualmente, de forma sucessiva, $4^2=16$, $4^4=16^2=256$, $4^8=256^2=65536$, $4^{16}=65536^2=4294967296$, $4^{32}=\left(4^{16}\right)^2=18446744073709551616$, $4^{64}=\left(4^{32}\right)^2=340282366920938463463374607431768211456$, $4^{128}=\left(4^{64}\right)^2=$
$=115792089237316195423570985008687907853269984665640564039457584007913129639936$ e, finalmente, $4^{256}=\left(4^{128}\right)^2=13407807929942597099574024998205846127479365820592393377723561443721764030073546976801874298166903427690031858186486050853753882811946569946433649006084096$.

SOLUÇÕES DE PROBLEMAS PROPOSTOS

Publicamos aqui algumas das respostas enviadas por nossos leitores.

89) Uma prova de múltipla escolha com n questões é feita por k alunos. Uma resposta correta na i-ésima questão vale p_i pontos, onde p_i é um inteiro positivo, para $1 \le i \le n$. A nota de cada aluno é a soma dos pontos correspondentes às questões que ele acertou. Após a realização a prova, foi observado que, mudando os pesos p_i, as notas dos alunos podem estar em qualquer uma das k! possíveis ordens (em que não há duas notas iguais). Dado n, qual é o maior valor possível de k?

SOLUÇÃO DE ZOROASTRO AZAMBUJA NETO (RIO DE JANEIRO – RJ)

Vamos mostrar que o maior valor possível de k é n. De fato, é fácil ver k pode ser igual a n: dada uma bijeção $\sigma = \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$, e supondo que, para $1 \le i \le n$, o i-ésimo aluno acertou a i-ésima questão e errou todas as outras, se atribuirmos peso $p_i = n + 1 - \sigma(i)$ à questão i para $1 \le i \le n$, temos que o aluno de número $\sigma^{-1}(i)$ obteve a i-ésima melhor nota, para $1 \le i \le n$.

Suponha agora que k alunos tenham feito k provas como no enunciado. Para cada $i \le k$, denotamos por $v(i) \in \{0,1\}^n$ o resultado da i-ésima prova: $v(i) = (v_{i1}, v_{i2}, ..., v_{in})$, onde $v_{ij} = 1$ se o i-ésimo aluno acertou a j-ésima questão, e $v_{ij} = 0$ caso contrário. Se $k > n$, os vetores $v(i), 1 \le i \le k$, são linearmente dependentes, ou seja existem constantes $c_i, 1 \le i \le k$, não todas nulas, tais que $\sum_{i=1}^{k} c_i v(i) = 0$. Assim, passando os termos com c_i negativo para o lado direito da igualdade, obtemos constantes positivas $a_1, a_2, ..., a_r$, $b_1, b_2, ..., b_s$ com $r, s \ge 1, r + s \le k$ e $\sum_{i=1}^{r} a_i v(\alpha(i)) = \sum_{j=1}^{s} b_j v(\beta(j))$, onde $\alpha(1), \alpha(2), ..., \alpha(r), \beta(1), \beta(2), ..., \beta(s)$ são os índices i tais que $c_i \ne 0$ os $\alpha(j)$ são tais que $c_{\alpha(j)} > 0$ e os $\beta(j)$ são tais que $c_{\beta(j)} < 0$.

Agora, se o peso da i-ésima questão é $p_i > 0$, a nota da i-ésima prova é $n(v(i)) = \sum_{j=1}^{n} v_{ij} \cdot p_j$.

Sejam $\lambda = \sum_{j=1}^{s} b_j \Big/ \sum_{i=1}^{r} a_i$, $\tilde{b}_i = \dfrac{b_i}{\sum_{j=1}^{s} b_j}$ e $\tilde{a}_i = \dfrac{a_i}{\sum_{i=1}^{r} a_i}$.

Podemos supor sem perda de generalidade que $\lambda \geq 1$ (senão trocamos os lados da igualdade).

Como $\sum_{j=1}^{s} b_j \cdot v(\beta(j)) = \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot v(\alpha(i))$, temos

$\sum_{j=1}^{s} \tilde{b}_j \cdot v(\beta(j)) = \lambda \cdot \sum_{i=1}^{r} \tilde{a}_i \cdot v(\alpha(i))$ e, como $n(v)$ depende linearmente de v, temos

$$\sum_{j=1}^{s} \tilde{b}_j n(v(\beta(j))) = n\left(\sum_{j=1}^{s} \tilde{b}_j \cdot v(\beta(j)) \right) = n\left(\lambda \sum_{i=1}^{r} \tilde{a}_i \cdot v(\alpha(i)) \right)$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^{r} \tilde{a}_i \cdot n(v(\alpha(i))) \geq \sum_{i=1}^{r} \tilde{a}_i \cdot n(v(\alpha(i))),$$

mas como $\sum_{j=1}^{s} \tilde{b}_j = \sum_{i=1}^{r} \tilde{a}_i = 1$, temos que $\sum_{j=1}^{s} \tilde{b}_j \cdot n(v(\beta(j)))$ e $\sum_{i=1}^{r} \tilde{a}_i \cdot n(v(\alpha(i)))$ são respectivamente médias ponderadas dos $n(v(\beta(j)))$ e dos $n(v(\alpha(i)))$, e a desigualdade acima claramente implica que não podemos ter $n(v(\alpha(i))) > n(v(\beta(j)))$ para todo $i \leq r$ e $j \leq s$, e portanto as notas não podem ficar em qualquer ordem.

Nota: Se $k > n$ então quaisquer vetores $v_1, v_2, ..., v_k \in \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n); x_i \in \mathbb{R}, \forall i \leq n\}$ são *linearmente dependentes*, isto é, existem constantes $c_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq k$ não todas nulas tais que $\sum_{i=1}^{k} c_i v_i = c_1 v_1 + ... + c_k v_k = 0$. Podemos provar isso por indução em n. O resultado é claramente verdade se $n = 1$: se $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ não são ambos nulos, $c_1 = -v_2$ e $c_2 = v_1$ são tais que $c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0$. Se $m < n$ podemos identificar $\mathbb{R}^m$ com $\{(x_1, x_2, ..., x_m, 0, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n; x_i \in \mathbb{R}, \forall i \leq m\}$. Se $v_i = 0$ para algum i, podemos tomar $c_i = 1$ e $c_j = 0, \forall j \neq i$. Se $k > n+1$, e $v_1, v_2, ..., v_k$ são vetores em $\mathbb{R}^{n+1}$ com $v_i = \left(x_1^{(i)}, ..., x_{n+1}^{(i)}\right)$ para cada $i \leq k$, temos duas possibilidades:

i) $x_{n+1}^{(i)} = 0$ para todo $i \le k$. Nesse caso $v_i \in \mathbb{R}^n$ para todo $i \le k$ e o resultado segue imediatamente pela hipótese de indução.

ii) $x_{n+1}^{(i)} \ne 0$ para algum i. Podemos supor sem perda de generalidade que isso vale para $i = k$.

Nesse caso temos $\tilde{v}_i = v_j - \dfrac{x_{n+1}^{(j)}}{x_{n+1}^{(k)}} v_k \in \mathbb{R}^n$ para todo j com $1 \le j \le k-1$ e, como (n + 1)-ésima coordenada desses vetores se anula e k – 1 > n, por hipótese de indução, existem $\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_{k-1} \in \mathbb{R}$ não todos nulos tais que $\sum_{j=1}^{k-1} \tilde{c}_j \cdot \tilde{v}_j = 0,$ mas $\tilde{v}_j = v_j - a_j \cdot v_k$, onde $a_j = x_{n+1}^{(j)} / x_{n+1}^{(k)}$, e portanto $\sum_{j=1}^{k-1} \tilde{c}_j \left(v_j - a_j v_k\right) = 0,$ donde $\sum_{j=1}^{k} c_j v_j = 0,$ onde $c_j = \tilde{c}_j$ para $1 \le j \le k-1$ e $c_k = -\sum_{j=1}^{k-1} a_j \tilde{c}_j$, o que prova o resultado.

97) Seja p um primo ímpar. Encontre todas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que satisfazem as seguintes condições:

i) Se $m \equiv n (\text{mod } p)$ então $f(m) = f(n).$

ii) $f(mn) = f(m) \cdot f(n)$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}.$

SOLUÇÃO DE EDEL PÉREZ CASTILLO (PINAR DEL RIO – CUBA)

Temos $f(1) = f(1) \cdot f(1)$, o que implica $f(1) \in \{0,1\}$. Se $f(1) = 0,$ então $f(m) = f(m \cdot 1) = f(m) \cdot f(1) = 0$, para todo m, o que claramente é uma solução.

Suponhamos então que $f(1) = 1$. De $f(0) = f(0) \cdot f(0),$ temos $f(0) \in \{0,1\}$. Se $f(0) = 1,$ então $f(0) = f(0 \cdot m) = f(0) \cdot f(m)$ implica $f(m) = 1,$ para todo m, o que também é uma solução.

Suponhamos agora que $f(0) = 0$. Se m é múltiplo de p, ou seja, $m \equiv 0 (\text{mod } p),$ temos também $f(m) = 0$. Se m não é múltiplo de p então existe um inteiro x tal que $m \cdot x \equiv 1 (\text{mod } p)$, o que implica $1 = f(1) = f(m) \cdot f(x),$ e logo $f(m) \in \{-1,1\},$ pois $f(m)$ e $f(x)$ são inteiros.

Se $p \nmid m$ e m é resíduo quadrático módulo p, i.e., se existe b inteiro com $b^2 \equiv m (\text{mod } p)$ então $f(m) = f(b)^2 = 1$, pois $f(b) \in \{-1, 1\}$.

Se m e n não são resíduos quadráticos módulo p então $m \cdot n$ é resíduo quadrático módulo p (veja [MS]), e logo $f(mn) = f(m) \cdot f(n) = 1$. Assim, $f(m) = f(n)$, ou seja, f toma o mesmo valor pertencente a $\{-1, 1\}$ em todos os inteiros que não são resíduos quadráticos módulo p.

Assim, as funções f que satisfazem as condições do enunciado são:

1) $f(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$

2) $f(n) = 1, \forall n \in \mathbb{Z}$

3) $f(n) = 0$ se $p | n$ e $f(n) = 1$ se $p \nmid n$

4) $f(n) = 0$ se $p | n$, $f(n) = 1$ se $p \nmid n$ e n é resíduo quadrático módulo p e $f(n) = -1$ se n não é resíduo quadrático módulo p.

Nota: A função em 4) é usualmente denotada pelo símbolo de Legendre $f(n) = \left(\frac{n}{p}\right)$. Veja a referência [MS]: Carlos G. Moreira e Nicolau Saldanha. Reciprocidade Quadrática. Eureka! No. 15, pp. 27 – 30.

98) Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência tal que $a_1 > 2$ e $a_{n+1} = a_n^2 - 2, \forall n \in \mathbb{N}$.

Mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4}}{2}$.

SOLUÇÃO DE RODRIGO VILLARD MILET e MÁRCIO ASSAD COHEN (RIO DE JANEIRO – RJ)

Faça $a_1 = x + \dfrac{1}{x}$ (isso é possível pois $a_1 > 2$). Podemos considerar, sem perda de generalidade, que $x > 1$ (se não for, troque x por $\dfrac{1}{x}$). Temos, por indução, que $a_n = x^{2^{n-1}} + \dfrac{1}{x^{2^{n-1}}}$, pois $\left(x^{2^{n-1}} + \dfrac{1}{x^{2^{n-1}}}\right)^2 - 2 = x^{2^n} + \dfrac{1}{x^{2^n}}$.

Veja que é fácil calcular o produto dos "a_i", pois $\left(x - \dfrac{1}{x}\right)\left(x + \dfrac{1}{x}\right)\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^4 + \dfrac{1}{x^4}\right) \ldots \left(x^{2^{n-1}} + \dfrac{1}{x^{2^{n-1}}}\right) = x^{2^n} - \dfrac{1}{x^{2^n}}$. Então temos que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_1a_2\dots a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x-\frac{1}{x}}{x^{2^n}-\frac{1}{x^{2^n}}}=\left(x-\frac{1}{x}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2^n}}{x^{2^{n+1}}-1}=\left(x-\frac{1}{x}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{2^n}}{x^{2^n}-1}-\frac{x^{2^{n+1}}}{x^{2^{n+1}}-1}\right).$

O legal é que chegamos em uma soma telescópica:

$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{x^{2^n}}{x^{2^n}-1}-\frac{x^{2^{n+1}}}{x^{2^{n+1}}-1}\right)=\frac{x^2}{x^2-1}-\frac{x^{2^{N+1}}}{x^{2^{N+1}}-1}$. Para $\mathbb{N}\to\infty$, a segunda parcela tende a 1 (pois $x > 1$), logo este último somatório é igual a $\frac{x^2}{x^2-1}-1=\frac{1}{x^2-1}$, portanto $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_1a_2\dots a_n}=\left(x-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{x}$. Isso finaliza o problema, pois $a_1=x+\frac{1}{x}\Rightarrow x^2-a_1x+1=0\Rightarrow x=\frac{a_1\pm\sqrt{a_1^{\,2}-4}}{2}$. Como $x > 1$, temos $x=\frac{a_1+\sqrt{a_1^{\,2}-4}}{2}$. Isso dá $\frac{1}{x}=\frac{a_1-\sqrt{a_1^{\,2}-4}}{2}$.

100) a) Um conjunto $X\subset\mathbb{N}$ é dito *impressionante* se existe $m\in\mathbb{N}$ tal que, para todo $k\in\mathbb{N}$, existem elementos de *X*, $a_1<a_2<\dots<a_k$, tais que $a_{j+1}-a_j\le m,\forall j<k.$

Determine se é possível particionar $\mathbb{N}$ em um número finito de conjuntos, nenhum deles impressionante.

b) Determine se é possível particionar $\mathbb{N}$ em dois conjuntos *A* e *B* de modo que nem *A* nem *B* contêm progressões aritméticas infinitas mas, para cada $q\in\mathbb{N}$, *A* e *B* contêm progressões aritméticas de *q* termos.

SOLUÇÃO DE JOSÉ DE ALMEIDA PANTERA (RIO DE JANEIRO – RJ)

Não. Vamos provar, por indução em $r\in\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$ que, se $\mathbb{N}=A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n$ então existe *j* com $1\le j\le r$ tal que A_j é impressionante. Para *r* = 1 isto é óbvio.

Suponha agora que $\mathbb{N}=A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n\cup A_{n+1}$, e que A_{n+1} não é impressionante. Então existem intervalos arbitrariamente grandes contidos em $\mathbb{N}\setminus A_{r+1}$, isto é, existe uma seqüência infinita de inteiros positivos $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que

$a_{j+1} > a_j + j, \forall j \in \mathbb{N}$, e, para todo $j \in \mathbb{N}$ e $1 \le r \le j, a_j + s \notin A_{r+1}$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, seja $f_j : \{1, 2, ..., j\} \to \{1, 2, ..., r\}$ tal que $a_j + s \in A_{f_j(s)}$, para $1 \le s \le j$. Construiremos recursivamente $g(1), g(2), g(3), ... \in \{1, 2, ..., r\}$ tais que, para todo $m \in \mathbb{N}$, existem infinitos $j \ge m$ tais que $f_j(s) = g(s)$, para $1 \le s \le m$.

De fato, dado $\tilde{m} \in \mathbb{N}$, se já escolhemos $g(m)$ com a propriedade acima para todo $m < \tilde{m}$, existem infinitos $j \ge \tilde{m}$ tais que $f_j(s) = g(s)$, para todo $s < \tilde{m}$. Como só há n possibilidades para o valor de $f_j\left(\tilde{m}\right)$ para esses infinitos j, podemos extrair um subconjunto infinito desses j para os quais $f_j\left(\tilde{m}\right)$ tem sempre o mesmo valor, o qual será $g\left(\tilde{m}\right)$, por definição.

Considere agora a decomposição $\mathbb{N} = \tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2 \cup ... \cup \tilde{A}_n$, onde $n \in \tilde{A}_j \Leftrightarrow g(n) = j$. Por hipótese de indução, $\exists q \le r$ tal que $\tilde{A}_q$ é impressionante. Afirmamos que o conjunto A_q também é impressionante. De fato, seja m tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, existem elementos $b_1 < b_2 < ... < b_k$ de $\tilde{A}_q$ com $b_{i+1} - b_i \le m, \forall i < k$. Para esse mesmo m, dado $k \in \mathbb{N}$, escolhemos $j \ge b_k$ tal que $f_j(s) = g(s)$, para $1 \le s \le b_k$. Como b_i é um elemento de $\tilde{A}_q$ para $1 \le i \le k, g(b_i) = q$, para $1 \le i \le k$. Assim, $f_j(b_i) = g(b_i) = q$, para $1 \le i \le k$, ou seja, $a_j + b_i \in A_q$, para $1 \le i \le k$. Como $\left(a_j + b_{i+1}\right) - \left(a_j + b_i\right) = b_{i+1} - b_i \le m, \forall i < k$, concluímos que A_q é impressionante.

b) Sim. Temos $\mathbb{N} = A \cup B$, onde

$A = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^{2k} \le n < 2^{2k+1}$, para algum inteiro $k \ge 0\}$ e

$B = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^{2k+1} \le n < 2^{2k+2}$, para algum inteiro $k \ge 0\}$.

Temos que $[0, +\infty) \setminus A$ e $[0, +\infty) \setminus B$ contêm intervalos arbitrariamente grandes, donde nem A nem B podem conter progressões aritméticas infinitas. Por outro lado, para cada $q \in \mathbb{N}$, se $k \in \mathbb{N}$ é tal que $2^{2k} \ge q, A$ contém a progressão aritmética da razão 1 e q termos $\{2^{2k}, 2^{2k} + 1, ..., 2^{2k} + q - 1\}$, e B contém a progressão aritmética da razão 1 e q termos $\{2^{2k+1}, 2^{2k+1} + 1, ..., 2^{2k+1} + q - 1\}$.

102) Você recebe *x* metros de arame para cercar um terreno na forma de um triângulo pitagórico (os lados são números inteiros), com a condição de que a medida do cateto menor seja 24 metros. Qual deverá ser a medida do cateto maior e o comprimento do arame, a fim de que a área seja:

a) máxima?

b) mínima?

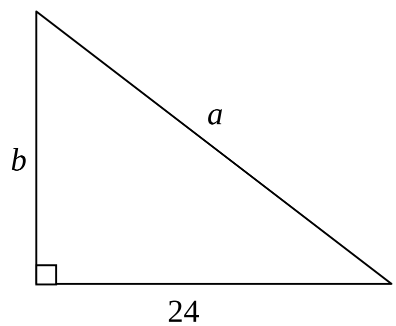
SOLUÇÃO DE JOSÉ FABRICIO LIMA (JOÃO PESSOA – PB)

Considere o triângulo abaixo:

Temos: $a^2 = b^2 + 24^2$

$a^2 - b^2 = 24^2$

$(a+b)\cdot(a-b) = 2^6 \cdot 3^2$



Façamos $2^6 \cdot 3^2$ como sendo um produto de 2 fatores $x \cdot y$ tal que $a+b=x$ e $a-b=y.$ Resolvendo o sistema temos que: $a=\dfrac{x+y}{2}$ e $b=\dfrac{x-y}{2}.$

Como $x + y$ e $x - y$ são ambos divisíveis por 2, temos que x, y são números pares pois a decomposição de $2^6 \cdot 3^2$ para x e y números ímpares é impossível.

Sendo $b > 24$ temos que $\dfrac{x-y}{2} > 24,$ logo $x-y > 48.$

Portanto as decomposições $x \cdot y$ tais que $x-y > 48$ são dadas por:

$x = 2^5 \cdot 3^2$ e $y = 2$ $(x-y=286)$

$x = 2^4 \cdot 3^2$ e $y = 2^2$ $(x-y=140)$

$x = 2^3 \cdot 3^2$ e $y = 2^3$ $(x-y=64)$

$x = 2^5 \cdot 3$ e $y = 2 \cdot 3$ $(x-y=90)$

Note que a área do triângulo é $12 \cdot b$, sendo assim, para que a área seja:

a) Máxima: Basta que *b* seja o maior possível, ou seja, a diferença $x - y$ seja a maior possível. Devemos ter então $x = 2^5 \cdot 3^2 = 288$ e $y = 2$, donde $a = \frac{x+y}{2} = 145$ e $b = \frac{x-y}{2} = 143$, e logo o comprimento da corda deve ser $a + b + 24 = 312m$.

b) Mínima: Basta escolher o menor valor para $x - y$, ou seja,

$b = \frac{x-y}{2} = \frac{64}{2} = 32$ e $a = \frac{x+y}{2} = \frac{80}{2} = 40.$

Logo, o comprimento de corda é:

$x = a + b + 24 = 40 + 32 + 24 = 96m.$

103) Sejam *A* e *B* matrizes 2×2 com elementos inteiros.

Sabendo que *A*, *A* + *B*, *A* + 2*B*, *A* + 3*B* e *A* + 4*B* são invertíveis e que os elementos das respectivas inversas também são todos inteiros, mostre que *A* + 5*B* também é invertível e que os elementos da sua inversa também são inteiros.

SOLUÇÃO DE ASDRÚBAL PAFÚNCIO SANTOS (BOTUCATU - SP)

Para cada $t \in \mathbb{R}$, seja $f(t)$ o determinante da matriz $A + tB$. Temos que $f(t)$ é uma função polinomial de grau no máximo 2. Efetivamente, se

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix},\ f(t) = \det \begin{pmatrix} a_1 + ta_2 & b_1 + tb_2 \\ c_1 + tc_2 & d_1 + td_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (a_1 + ta_2)(d_1 + td_2) - (b_1 + tb_2)(c_1 + tc_2).$$

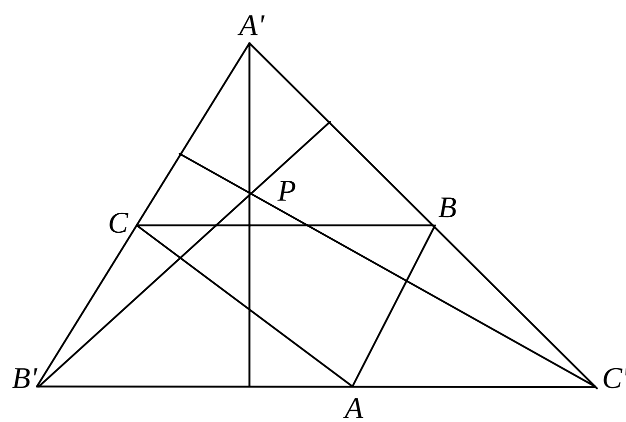
Se uma matriz *C* com elementos inteiros é invertível e os elementos de sua inversa são também inteiros, temos $1 = \det I = \det(C \cdot C^{-1}) = \det C \cdot \det C^{-1}$ e, como $\det C$ e $\det C^{-1}$ são inteiros, $\det C \in \{-1, 1\}$.

Assim, $f(t) = \det(A + tB) \in \{-1, 1\}$, para todo $t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, e logo um dos valores 1 ou –1 é igual a $f(t)$ para pelo menos três valores de *t* em {0, 1, 2, 3, 4}. Como $f(t)$ é um polinômio de grau no máximo 2, $f(t)$ é necessariamente constante igual a 1 ou –1, e logo, para todo $t \in \mathbb{Z}$ (e em particular para $t = 5$), $A + tB$ tem elementos inteiros e determinante pertencente a { –1, 1}, e logo tem uma inversa com todos os elementos inteiros.

104) *ABC* é um triângulo. Mostre que existe um único ponto *P* de modo que:
$$(PA)^2+(PB)^2+(AB)^2=(PB)^2+(PC)^2+(BC)^2=(PC)^2+(PA)^2+(CA)^2$$

SOLUÇÃO DE FRANK DE CASTRO (SÃO PAULO – SP)

Considere o triângulo $A'B'C'$ cujos lados paralelos aos lados do triângulo *ABC* e passam por *A*, *B* e *C*.
Considere também o ponto *P*, ortocentro do triângulo *A'B'C'* (figura abaixo)



Provaremos que:

$$P \text{ é ortocentro de } A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases}(PA)^2+(PB)^2+(AB)^2=(PB)^2+(PC)^2+(BC)^2\\ =(PC)^2+(PA)^2+(CA)^2\end{cases}$$

Nesse caso o ponto procurado será o ponto *P* e como o ortocentro do triângulo *A'B'C'* é único, segue diretamente a unicidade do ponto *P*.
Utilizaremos vetores.
Temos:

$$\overrightarrow{PA'}\perp\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow (A'-P)\cdot(B-C)=0\Leftrightarrow A'\cdot B-A'\cdot C-P\cdot B+P\cdot C=0 \qquad \text{(I)}$$

Como o quadrilátero *A'BAC* é um paralelogramo temos $A'-C=B-A$, ou $A'=C+B-A$ (II).

De (I) e (II) vem que $\overrightarrow{PA'}\perp\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow(C+B-A)\cdot(B-C)-P\cdot B+P\cdot C=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow C\cdot B-C^2+B^2-B\cdot C-A\cdot B+A\cdot C-P\cdot B+P\cdot C=0.$$

Sendo $C\cdot B = B\cdot C,$ Vem que $\overrightarrow{PA'}\perp\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow B^2 - P\cdot B - A\cdot B = C^2 - P\cdot C - A\cdot C.$

Multiplicando a igualdade anterior por 2 e na seqüência somando $P^2 + A^2$ a ambos os membros, segue que:

$\overrightarrow{PA'}\perp\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow P^2 + B^2 - 2P\cdot B + A^2 - 2A\cdot B + B^2 = P^2 + C^2 - 2P\cdot C + A^2 - 2A\cdot C + C^2 \Leftrightarrow (P-B)^2 + (A-B)^2 = (P-C)^2 + (A-C)^2.$

Finalmente, somando $(P+A)^2$ a ambos os membros da última igualdade obtida concluímos que:

$$\overrightarrow{PA'}\perp\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow (P-A)^2 + (P-B)^2 + (A-B)^2 = (P-C)^2 + (P-A)^2 + (A-C)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (PA)^2 + (PB)^2 + (AB)^2 = (PC)^2 + (PA)^2 + (CA)^2.$$

racionando de forma análoga teremos:

$\overrightarrow{PB'}\perp\overrightarrow{CA}\Leftrightarrow (PA)^2 + (PB)^2 + (AB)^2 = (PB)^2 + (PC)^2 + (BC)^2$, onde $B' = A + C - B,$ e

$\overrightarrow{PC'}\perp\overrightarrow{BA}\Leftrightarrow (PB)^2 + (PC)^2 + (BC)^2 = (PC)^2 + (PA)^2 + (CA)^2$, onde $C' = B + A - C.$

Nessas condições, o ortocentro do triângulo $A'B'C'$ é o ponto *P* procurado.

Nota: Utilizamos:

$(X-Y)\cdot(Z-W)$ representando o produto escalar dos vetores $\overrightarrow{YX}$ e $\overrightarrow{WZ}$.

$(X-Y)\cdot(Z-W) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{YX}\perp\overrightarrow{WZ}.$

$X\cdot Y = (X-O)\cdot(Y-O) = \overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OY}$ onde o ponto O é a origem do nosso plano.

$X^2 = (X-O)\cdot(X-O) = \overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OX} = \left|\overrightarrow{OX}\right|^2 = (OX)^2 = (XO)^2.$

$(X-Y)^2 = (X-Y)\cdot(X-Y) = \overrightarrow{YX}\cdot\overrightarrow{YX} = \left|\overrightarrow{YX}\right|^2 = \left|\overrightarrow{XY}\right|^2.$

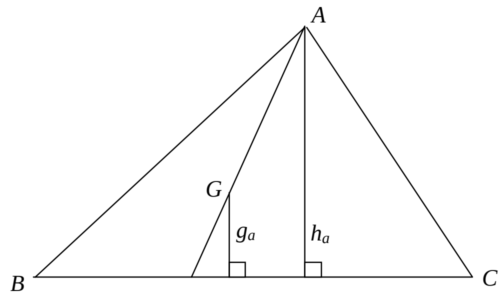
105) O baricentro do triângulo *ABC* é *G*. Denotamos por g_a, g_b, g_c as distâncias desde *G* aos lados *a*, *b* e *c* respectivamente.

Seja *r* o raio da circunferência inscrita. Prove que:

a) $g_a \geq \dfrac{2r}{3},\ \ g_b \geq \dfrac{2r}{3},\ \ g_c \geq \dfrac{2r}{3}$

b) $\dfrac{g_a + g_b + g_c}{r} \geq 3$

SOLUÇÃO DE CARLOS ALBERTO DA SILVA VICTOR (NILÓPOLIS – RJ)



Observe que $h_a = 3g_a$

$$s = p \cdot r = \frac{a \cdot h_a}{2} \Rightarrow g_a = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a+b+c}{a} \right) \cdot r.$$

De forma análoga, temos: $g_b = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a+b+c}{b} \right) \cdot r$ e $g_c = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a+b+c}{c} \right) \cdot r.$

a) como $a < b+c \therefore a+b+c > 2a$ e

$g_a = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a+b+c}{a} \right) \cdot r \Rightarrow g_a > \frac{1}{3} \cdot \frac{2a}{a} \cdot r = \frac{2r}{3}$; de forma análoga, temos:

$g_b > \frac{2r}{3}$ e $g_c > \frac{2r}{3}$.

Note que a igualdade $g_a = \frac{2r}{3}$ não ocorrerá, pois caso contrário, teríamos: $\frac{1}{3}\left(\frac{a+b+c}{a} \right) \cdot r = \frac{2r}{3} \Rightarrow a+b+c = 2a \Rightarrow b+c = a$ e o triângulo não existiria.

$$g_a + g_b + g_c = \frac{r}{3}\left[\frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} \right]$$

$$g_a + g_b + g_c = \frac{r}{3}\left[3 + \underbrace{\frac{b}{a} + \frac{a}{b}}_{\geq 2} + \underbrace{\frac{a}{c} + \frac{c}{a}}_{\geq 2} + \underbrace{\frac{b}{c} + \frac{c}{b}}_{\geq 2} \right]$$

logo $g_a + g_b + g_c \geq \frac{r}{3}(3+2+2+2) = 3r$ ou seja:

$$\frac{g_a + g_b + g_c}{r} \geq 3.$$

106) Os polinômios $P_0(x, y, z), P_1(x, y, z), P_2(x, y, z), \ldots$ são definidos por $P_0(x, y, z) = 1$ e $P_{m+1}(x, y, z) = (x+z)(y+z)P_m(x, y, z+1) - z^2 P_m(x, y, z)$, $\forall m \geq 0$. Mostre que os polinômios $P_m(x, y, z), m \in \mathbb{N}$ são simétricos em *x*, *y*, *z*, i.e., $P_m(x,y,z) = P_m(x,z,y) = P_m(y,x,z) = P_m(y,z,x) = P_m(z,x,y) = P_m(z,y,x)$, para quaisquer *x*, *y*, *z*.

SOLUÇÃO DE MARCOS FRANCISCO FERREIRA MARTINELLI (RIO DE JANEIRO – RJ)

Provarei, por indução finita, o seguinte:

I) $P_n(x, y, z) = P_n(x, z, y) = P_n(z, y, x) = P_n(y, x, z), \forall n \in \mathbb{N}$.

II) $(z-y)P_n(x, y, z) + (x+y)P_n(x, y+1, z) = (x+z)P_n(x, y, z+1), \forall n \in \mathbb{N}$

i) $P_1(x, y, z) = xy + xz + yz = P_1(x, z, y) = P_1(z, y, x) = P_1(y, x, z)$.

E ainda $(z-y)P_1(x, y, z) + (x+y)P_1(x, y+1, z) - (x+z)P_1(x, y, z_1) =$

$=(z-y)(xy+xz+yz)+(x+y)\left[x(y+1)+xz+(y+1)z\right]-(x+z)\left[xy+x(z+1)+y(z+1)\right]=$

$=\left[(z-y)+(x+y)\right](xy+xz+yz)+(x+y)(x+z)-(x+z)(xy+xz+yz)=(x+z)(x+y)=$

$=(z+x)+(xy+xz+yz)-(x+z)(xy+xz+yz)=0.$ Logo está provado que $(z-y)P_1(x,y,z)+(x+y)P_1(x,y+1,z)=(x+z)\cdot P_1(x,y,z+1)$.

ii) Suponhamos que para $n = m$ $(m \in \mathbb{N})$ temos:

$(z-y)P_m(x,y,z)+(x+y)P_m(x,y+1,z)-(x+z)\cdot P_m(x,y,z+1)=0.$

Logo $(z-y)P_{m+1}(x,y,z)+(x+y)P_{m+1}(x,y+1,z)-(x+z)P_{m+1}(x,y,z+1)=$

$=(z-y)\left[(x+z)(y+z)P_m(x,y,z+1)-z^2P_m(x,y,z)\right]+$

$+(x+y)\left[(x+z)(y+z+1)P_m(x,y+1,z+1)-z^2P_m(x,y+1,z)\right]-$

$-(x+z)\left[(x+z+1)(y+z+1)P_m(x,y,z+2)-(z+1)^2P_m(x,y,z+1)\right]=$

$=-z^2\left((z-y)P_m(x,y,z+1)+(x+y)P_m(x,y+1,z)-(x+z)P_m(x,y,z+1)\right)+$

$+(x+z)(y+z+1)\left((z+1-y)P_m(x,y,z+1)+(x+y)P_m(x,y+1,z+1)-(x+z+1)P_m(x,y,z+2)\right)=0$

(aqui usamos também a versão de (II) para $n = m$ trocando *z* por $z + 1$).

Isto prova (II) para $n = m + 1$.

Supondo ainda para $n=m\left(m\in\mathbb{N}\right)$ que

$P_m(x,y,z)=P_m(x,z,y)=P_m(z,y,x)=P_m(y,x,z)$, temos:

$$P_{m+1}(x,y,z)-P_{m+1}(y,x,z)=\left[(x+z)(y+z)P_m(x,y,z+1)-z^2P_m(x,y,z)\right]-$$
$$\left[(y+z)(x+z)P_m(y,x,z+1)-z^2P_m(y,x,z)\right].$$ Mas da hipótese de indução:

$$P_{m+1}(x,y,z)-P_{m+1}(y,x,z)=(x+z)(y+z)\left[P_m(x,y,z+1)-P_m(y,x,z+1)\right]-$$
$$-z^2\left[P_m(x,y,z)-P_m(y,x,z)\right]=0\Rightarrow P_{m+1}(x,y,z)=P_{m+1}(y,x,z)\cdot$$
$$P_{m+1}(x,y,z)-P_{m+1}(z,y,x)=\left[(x+z)(y+z)P_m(x,y,z+1)-z^2P_m(x,y,z)\right]-$$
$$-\left[(x+z)(y+x)P_m(z,y,x+1)-x^2P_m(z,y,x)\right]=$$
$$=(x+z)\left[(y+z)P_m(x,y,z+1)-(y+x)P_m(z,y,x+1)-(z-x)P_m(z,y,x)\right].$$

E, por hipótese de indução e (II) temos:

$$(y+z)P_m(x,y,z+1)-(y+x)P_m(x+1,y,z)-(z-x)P_m(x,y,z)=$$
$$(y+z)P_m(y,x,z+1)-(y+x)P_m(y,x+1,z)-(z-x)P_m(y,x,z)=0\Rightarrow$$
$$P_{m+1}(x,y,z)=P_{m+1}(z,y,x).$$

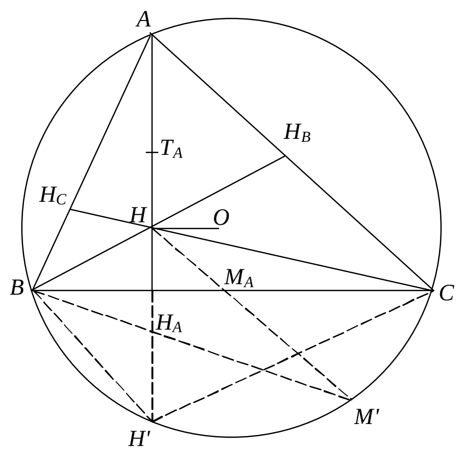
A partir daí temos:

$P_{m+1}(x,z,y)=P_{m+1}(z,x,y)=P_{m+1}(y,x,z)=P_{m+1}(x,y,z)$, c.q.d.

107) a) Dado um triângulo qualquer, prove que existe um círculo que passa pelos pontos médios dos seus lados, pelos pés das suas alturas e pelos pontos médios dos segmentos que unem o ortocentro aos vértices do triângulo (o chamado "círculo dos nove pontos").

b) Prove que, se X é o centro do círculo dos nove pontos de um triângulo, H o seu ortocentro, O seu circuncentro e G seu baricentro, então $\overrightarrow{OX}=\frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{OH}$.

SOLUÇÃO DE ANDERSON TORRES e CARLOS ALBERTO DA SILVA VITOR (SÃO PAULO – SP, NILÓPOLIS – RJ)



a) Seja H_A o pé altura por *A*, M_A o ponto médio de *BC* e T_A o ponto médio de *AM*.
Aplicando uma homotetia de centro *H* e razão 2, o ponto T_A é levado no ponto *A*. Assim sendo, o que queremos provar é que H' e M' (os pontos em que H_A e M_A são levados na homotetia) estão no circuncírculo de *ABC*.
Temos que $\Delta BM_AH \equiv \Delta CM_AM'$
(de fato, $LAL: BM_A = CM_A,\ \angle BM_AH = CM_AM', M_AH = M_AM'$). Analogamente $\Delta HM_AC \equiv \Delta M'M_AB.$ Com isto, $\Delta BHC \equiv \Delta CM'B$ pelo caso *LLL* (isto sai das congruências).
Portanto $\angle BHC = \angle BM'C.$
BC é mediatriz de HH' (de fato $HH_A = H_AH'$ e $\angle HH_AB = \angle HH_AC = 90^0$).
Assim, $\Delta BHC \equiv \Delta BH'C$ e assim $\angle BH'C = \angle BHC = \angle BM'C.$
Para finalizar, basta demonstrar que $\angle BHC + \angle BAC = 180°.$ E isto é simples: $\angle BHC = \angle H_BHH_C,$ e o quadrilátero AH_CHH_B é cíclico
$\left(\angle AH_CH + \angle AH_BH = 90° + 90° = 180°\right).$
Assim $\angle H_BHH_C + \angle BAC = 180° \Rightarrow \angle BHC + \angle BAC = 180°.$ c.q.d.

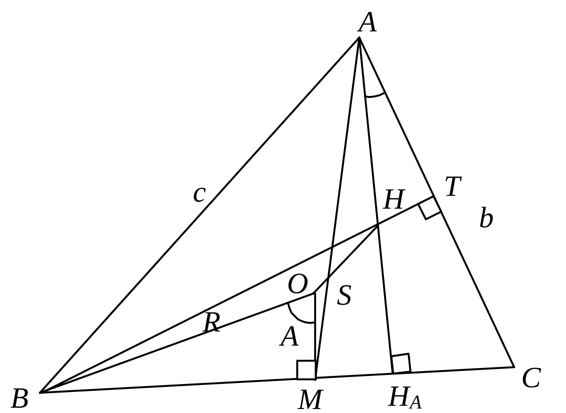
b) Se *X* é o centro deste círculo, a homotetia leva *X* em *O*.

Assim $\overrightarrow{HX} = \overrightarrow{XO}$, e assim $\overrightarrow{OX} = \frac{\overrightarrow{OH}}{2}$. Pelo Lema abaixo,

$\overrightarrow{OH} = 3 \cdot \overrightarrow{OG}$, e fim: $\overrightarrow{OX} = \frac{\overrightarrow{OH}}{2} = \frac{3 \cdot \overrightarrow{OG}}{2}$, c.q.d.

Lema: O baricentro, o circuncentro e o ortocentro de qualquer triângulo estão alinhados.

Prova: Considere a figura abaixo:



$AB = R$ (raio do círculo circunscrito).

$\frac{c}{\text{sen C}} = 2R$ (da lei dos senos).

Seja O o circuncentro de ABC.

A reta OH intersecta AM em S. Observe que $\overline{OM} \,//\, \overline{AH_A}$ e que:

$$AT = c \cdot \cos A \Rightarrow AH = \frac{AT}{\cos(90 - C)} = \frac{AT}{\text{sen } C} = \frac{c}{\text{sen C}} \cdot \cos A = 2R \cos A$$

Do $\Delta OBM \Rightarrow OM = R \cos A = \frac{AH}{2}$, logo $MS = \frac{AS}{2}$ e S é o baricentro G do ΔABC.

Assim, O, G e H estão alinhados, e $\overrightarrow{OH} = 3 \cdot \overrightarrow{OG}$.

B

X (C

D

PROBLEMAS PROPOSTOS

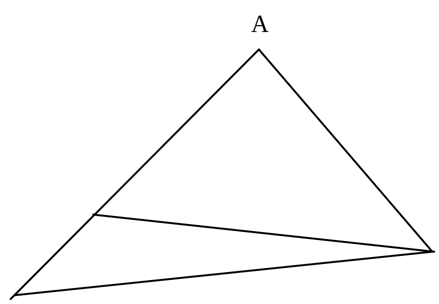
Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e sugestões de novos problemas para os próximos números.

108) Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos finitos. Para $1 \le k \le n$, seja $S_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \left| A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k} \right|$, a soma dos números de elementos das interseções de k dos conjuntos A_i. Prove que:

a) O número de elementos que pertencem a exatamente r dos conjuntos A_i é $\sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} S_k$, para $1 \le r \le n$.

b) O número de elementos que pertencem a pelo menos r dos conjuntos A_i é $\sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k-1}{r-1} S_k$, para $1 \le r \le n$.

109) Na figura abaixo, $\overline{AB} = \overline{AC}$, $B\hat{A}C = 100°$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$. Mostre que $x = B\hat{C}D$ é racional quando expresso em graus.



110) Um conjunto finito de inteiros positivos é chamado de *Conjunto DS* se cada elemento divide a soma dos elementos do conjunto.
Prove que todo conjunto finito de inteiros positivos é subconjunto de algum conjunto *DS*.

111) Prove que existem infinitos múltiplos de 7 na seqüência (a_n) abaixo:
$a_1 = 1999,\ a_n = a_{n-1} + p(n),\ \forall\ n \geq 2$, onde $p(n)$ é o menor primo que divide n.

112) a) Determine todos os inteiros positivos n tais que existe uma matriz $n \times n$ com todas as entradas pertencentes a $\{-1, 0, 1\}$ tal que os $2n$ números obtidos como somas dos elementos de suas linhas e de suas colunas são todos distintos.

b) Para os inteiros positivos n determinados no item anterior, encontre o número de matrizes $n \times n$ com a propriedade do enunciado.

Problema 109 proposto por José do Nascimento Pantoja Júnior de Ananindeua – PA, problemas 110 e 111 propostos por Anderson Torres de São Paulo – SP.

Agradecemos também o envio das soluções e a colaboração de:

Diego Andrés de Barros	**Recife – PE**
Dymitri Cardoso Leão	**Recife – PE**
Geraldo Perlino	**Itapecerica da Serra – SP**
Glauber Moreno Barbosa	**Rio de Janeiro – RJ**
Kellem Corrêa Santos	**Rio de Janeiro – RJ**
Macelo da Silva Mendes	**Teresina – PI**
Marcos Francisco Ferreira Martinelli	**Rio de Janeiro – RJ**
Michel Faleiros Martins	**Campinas – SP**
Raphael Constant da Costa	**Rio de Janeiro – RJ**
Rodrigo Cardaretti dos Nascimento	**Curitiba – PR**
Rodrigo Peres Barcellos	**Rio de Janeiro – RJ**

Você sabia…

Que $2^{30402457} - 1$ é primo? Este número de 9.152.052 dígitos é o maior primo conhecido, e é o 9°. Primo de Mersenne descoberto pelo GIMPS (veja www.mersenne.org para mais informações, inclusive sobre como ajudar a achar outros primos de Mersenne). Esta descoberta foi feita em 24/12/2005.

AGENDA OLÍMPICA

XXVIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

NÍVEIS 1, 2 e 3
Primeira Fase – Sábado, 10 de junho de 2006
Segunda Fase – Sábado, 2 de setembro de 2006
Terceira Fase – Sábado, 28 de outubro de 2006 (níveis 1, 2 e 3)
Domingo, 29 de outubro de 2006 (níveis 2 e 3 - segundo dia de prova).

NÍVEL UNIVERSITÁRIO
Primeira Fase – Sábado, 2 de setembro de 2006
Segunda Fase – Sábado, 28 e Domingo, 29 de outubro de 2006

♦

XII OLIMPÍADA DE MAIO
13 de maio de 2006

♦

XVII OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL
5 a 11 de maio de 2006
Escobar, Argentina

♦

XLVII OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA
8 a 19 de julho de 2006
Ljubljana - Eslovênia.

♦

XIII OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
20 a 26 de julho de 2006
Odessa, Ucrânia

♦

XXI OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA
22 de setembro a 01 de outubro de 2006
Equador

♦ ♦ ♦

COORDENADORES REGIONAIS

Alberto Hassen Raad	(UFJF)	Juiz de Fora – MG
Américo López Gálvez	(USP)	Ribeirão Preto – SP
Amarísio da Silva Araújo	(UFV)	Viçosa – MG
Andreia Goldani	FACOS	Osório – RS
Antonio Carlos Nogueira	(UFU)	Uberlândia – MG
Ali Tahzibi	(USP)	São Carlos – SP
Benedito Tadeu Vasconcelos Freire	(UFRN)	Natal – RN
Carlos Alexandre Ribeiro Martins	(Univ. Tec. Fed. De Paraná)	pato Branco - PR
Carlos Frederico Borges Palmeira	(PUC-Rio)	Rio de Janeiro – RJ
Claus Haetinger	(UNIVATES)	Lajeado – RS
Cleonor Crescêncio das Neves	(UTAM)	Manaus – AM
Cláudio de Lima Vidal	(UNESP)	S.J. do Rio Preto – SP
Edson Roberto Abe	(Colégio Objetivo de Campinas)	Campinas – SP
Élio Mega	(Colégio Etapa)	São Paulo – SP
Éder Luiz Pereira de Andrade	(UNESPAR/FECILCAM)	Campo Mourão – PR
Eudes Antonio da Costa	(Univ. do Tocantins)	Arraias – TO
Florêncio Ferreira Guimarães Filho	(UFES)	Vitória – ES
Ivanilde Fernandes Saad	(UC. Dom Bosco)	Campo Grande– MS
Janice T. Reichert	(UNOCHAPECÓ)	Chapecó – SC
João Benício de Melo Neto	(UFPI)	Teresina – PI
João Francisco Melo Libonati	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Jorge Costa Duarte Filho	(UFPB)	João Pessoa - PB
José Cloves Saraiva	(UFMA)	São Luis – MA
José Luiz Rosas Pinho	(UFSC)	Florianópolis – SC
José Vieira Alves	(UFPB)	Campina Grande – PB
José William Costa	(Instituto Pueri Domus)	Santo André – SP
Krerley Oliveira	(UFAL)	Maceió – AL
Licio Hernandes Bezerra	(UFSC)	Florianópolis – SC
Luzinalva Miranda de Amorim	(UFBA)	Salvador – BA
Mário Rocha Retamoso	(UFRG)	Rio Grande – RS
Marcelo Rufino de Oliveira	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Marcelo Mendes	(Colégio Farias Brito, Pré-vestibular)	Fortaleza – CE
Newman Simões	(Cursinho CLQ Objetivo)	Piracicaba – SP
Raúl Cintra de Negreiros Ribeiro	(Colégio Anglo)	Atibaia – SP
Ronaldo Alves Garcia	(UFGO)	Goiânia – GO
Rogério da Silva Ignácio	(Col. Aplic. da UFPE)	Recife – PE
Reginaldo de Lima Pereira	(Escola Técnica Federal de Roraima)	Boa Vista – RR
Reinaldo Gen Ichiro Arakaki	(LAC - Laboratório Associado de Computação)	SJ dos Campos – SP
Ricardo Amorim	(Centro Educacional Logos)	Nova Iguaçu – RJ
Sérgio Cláudio Ramos	(IM-UFRGS)	Porto Alegre – RS
Seme Guevara Neto	(UFMG)	Belo Horizonte – MG
Tadeu Ferreira Gomes	(UEBA)	Juazeiro – BA
Tomás Menéndez Rodrigues	(U. Federal de Rondônia)	Porto Velho – RO
Turíbio José Gomes dos Santos	(UFPB)	João Pessoa – PB
Valdenberg Araújo da Silva	(U. Federal de Sergipe)	São Cristovão – SE
Valdeni Soliani Franco	(U. Estadual de Maringá)	Maringá – PR
Vânia Cristina Silva Rodrigues	(U. Metodista de SP)	S.B. do Campo – SP
Wagner Pereira Lopes	(CEFET – GO)	Jataí – GO