CONTEÚDO

AOS LEITORES

O Programa Nacional de Olimpíadas de Matemática tem crescido muito nos últimos anos, contando, atualmente, com a adesão ao Programa de mais de 5.000 escolas públicas e privadas de todo o Brasil, o que implica em uma participação na Olimpíada Brasileira de Matemática de cerca de 250.000 jovens estudantes e seus professores. Além disso, o Programa Nacional de Olimpíadas de Matemática conta com a colaboração de professores do ensino básico de todo o Brasil e de professores universitários de mais de 80 instituições de ensino superior. Eles participam de todas as atividades da Olimpíada Brasileira de Matemática, em atividades de coordenação, divulgação, treinamento de alunos, aperfeiçoamento de professores e aplicação das distintas fases da Olimpíada Brasileira de Matemática.

Em relação à promoção do ensino da Matemática em nível regional, temos alcançado resultados extremamente positivos: através do apoio a 22 Olimpíadas Regionais conseguimos atingir um universo de cerca de 150.000 estudantes e seus professores, os quais são desafiados à resolução de problemas que estimulam o raciocínio e a criatividade.
No que se refere à participação em competições internacionais, o Programa Nacional de Olimpíadas também tem muito a comemorar. Em 2005 os resultados são excepcionais: Excelente resultado na Olimpíada de Matemática do Cone Sul (2 medalhas de Ouro, 2 medalhas de Prata); o primeiro estudante Latino-Americano premiado com Medalha de Ouro Especial (Grand First Prize) e duas outras medalhas de Ouro na Olimpíada Internacional para Estudantes Universitários (IMC), mais uma Medalha de Ouro na Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) e novamente quatro medalhas de ouro na Olimpíada Ibero-americana de Matemática.

Todos estes resultados nacionais e internacionais demonstram que, além de influenciar positivamente o ensino da Matemática em instituições de ensino fundamental, médio e superior de todo o país, conseguimos detectar jovens muito talentosos que são estimulados a seguir uma carreira científica, o que é fundamental para o crescimento da Ciência e Tecnologia no Brasil.

Os editores

XXVI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Problemas e Soluções da Primeira Fase

PROBLEMAS – NÍVEL 1

1. Calcule o valor de 1997 + 2004 + 2996 + 4003.
A) 10000 **B)** 11000 **C)** 10900 **D)** 12000 **E)** 13000

2. Qual dos números a seguir é ímpar?
A) 7×8 **B)** $37 - 23$ **C)** 9×36 **D)** $144 : 36$ **E)** 17×61

3. Quanto é $2^6 + 2^6 + 2^6 + 2^6 - 4^4$?
A) 0 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 4^2 **E)** 4^4

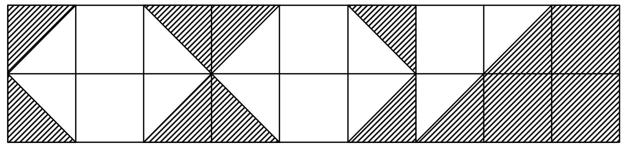
4. O 20% de 40 é igual a
A) 5 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 20

5. Simplificando a fração $\dfrac{2004+2004}{2004+2004+2004}$, obtemos:
A) 2004 **B)** $\dfrac{113}{355}$ **C)** $\dfrac{1}{2004}$ **D)** $\dfrac{2}{3}$ **E)** $\dfrac{2}{7}$

6. Os alunos de uma escola participaram de uma excursão, para a qual dois ônibus foram contratados. Quando os ônibus chegaram, 57 alunos entraram no primeiro ônibus e apenas 31 no segundo. Quantos alunos devem passar do primeiro para o segundo ônibus para que a mesma quantidade de alunos seja transportada nos dois ônibus?
A) 8 **B)** 13 **C)** 16 **D)** 26 **E)** 31

7. Uma professora tem 237 balas para dar a seus 31 alunos. Qual é o número mínimo de balas a mais que ela precisa conseguir para que todos os alunos recebam a mesma quantidade de balas, sem sobrar nenhuma para ela?
A) 11 **B)** 20 **C)** 21 **D)** 31 **E)** 41

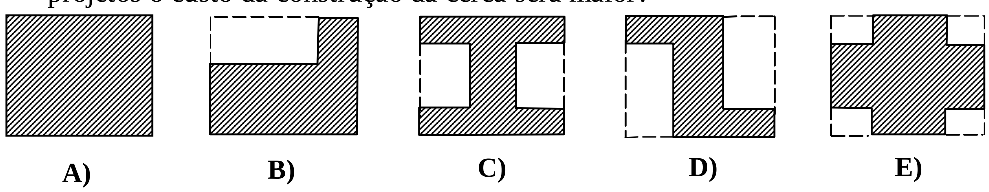
8. Dezoito quadrados iguais são construídos e sombreados como mostra a figura. Qual fração da área total é sombreada?



A) $\frac{7}{18}$ **B)** $\frac{4}{9}$ **C)** $\frac{1}{3}$ **D)** $\frac{5}{9}$ **E)** $\frac{1}{2}$

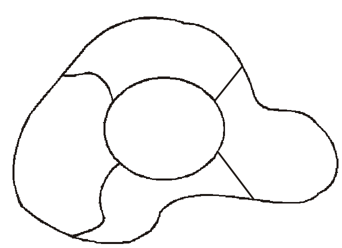
9. O preço de uma corrida de táxi é igual a R\$2,50 ("bandeirada"), mais R\$0,10 por cada 100 metros rodados. Tenho apenas R\$10,00 no bolso. Logo tenho dinheiro para uma corrida de até:
A) 2,5 km **B)** 5,0 km **C)** 7,5 km **D)** 10,0 km **E)** 12,5 km

10. Um arquiteto apresenta ao seu cliente cinco plantas diferentes para o projeto de ajardinamento de um terreno retangular, onde as linhas cheias representam a cerca que deve ser construída para proteger as flores. As regiões claras são todas retangulares e o tipo de cerca é o mesmo em todos os casos. Em qual dos projetos o custo da construção da cerca será maior?



11. 108 crianças da 5ª e 6ª séries vão fazer um passeio numa caverna. São formados grupos iguais com mais de 5 porém menos de 20 alunos. Com relação ao número de estudantes por grupo, de quantas formas diferentes eles podem ser feitos?
A) 2 **B)** 8 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 3

12. desenho ao lado mostra o mapa de um país (imaginário) constituído por cinco estados. Deseja-se colorir esse mapa com as cores verde, azul e amarela, de modo que dois estados vizinhos não possuam a mesma cor. De quantas maneiras diferentes o mapa pode ser pintado?
A) 12 **B)** 6 **C)** 10 **D)** 24 **E)** 120



13. Um artesão começa a trabalhar às 8h e produz 6 braceletes a cada vinte minutos; seu auxiliar começa a trabalhar uma hora depois e produz 8 braceletes do mesmo tipo a cada meia hora. O artesão pára de trabalhar às 12h mas avisa ao seu auxiliar que este deverá continuar trabalhando até produzir o mesmo que ele. A que horas o auxiliar irá parar?

A) 12h **B)** 12h30min **C)** 13h **D)** 13h30min
E) 14h30min

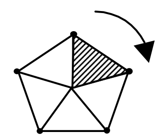
14. algarismo das unidades do número $1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times 97 \times 99$ é

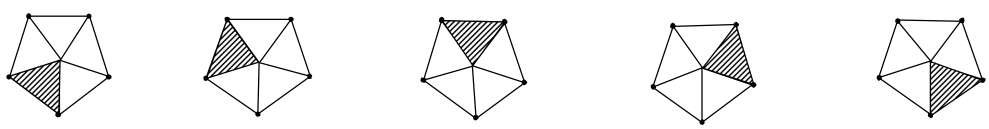
A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9

15. Dois quadrados, cada um com área 25cm^2, são colocados lado a lado para formar um retângulo. Qual é o perímetro do retângulo?

A) 30 cm **B)** 25 cm **C)** 50 cm **D)** 20 cm **E)** 15 cm

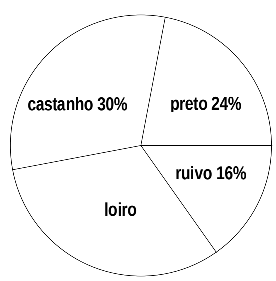
16. Se girarmos o pentágono regular, ao lado, de um ângulo de 252°, em torno do seu centro, no sentido horário, qual figura será obtida?





A) **B)** **C)** **D)** **E)**

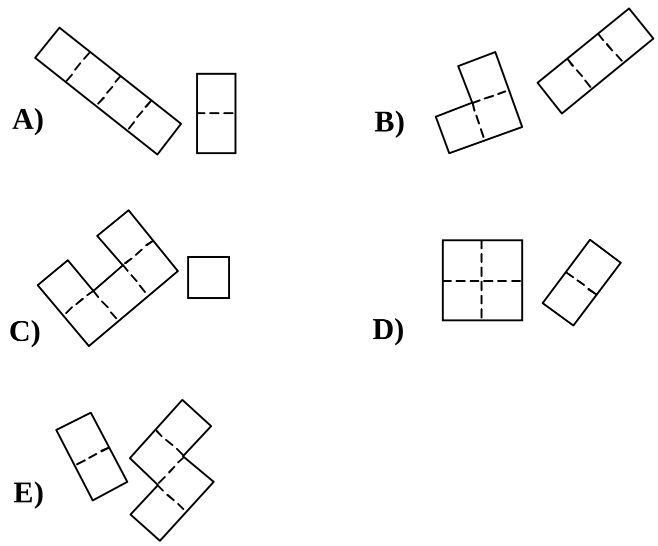
17. Os resultados de uma pesquisa das cores de cabelo de 1200 pessoas são mostrados no gráfico abaixo.



Quantas dessas pessoas possuem o cabelo *loiro*?

A) 60 **B)** 320 **C)** 360 **D)** 400 B **E)** 840

18. Um cubo pode ser construído, a partir dos dois pedaços de papelão apresentados em uma das alternativas a seguir, bastando apenas dobrar nas linhas tracejadas e unir nas linhas contínuas. Esses dois pedaços são:



19. Ao somar cinco números consecutivos em sua calculadora, Esmeralda encontrou um número de 4 algarismos: 2 0 0 *. O último algarismo não está nítido, pois o visor da calculadora está arranhado, mas ela sabe que ele não é zero. Este algarismo só pode ser:

A) 5 **B)** 4 **C)** 3 **D)** 2 **E)** 9

20. Sobre uma mesa estão três caixas e três objetos, cada um em uma caixa diferente: uma moeda, um grampo e uma borracha. Sabe-se que

- A caixa verde está à esquerda da caixa azul;
- A moeda está à esquerda da borracha;
- A caixa vermelha está à direita do grampo;
- A borracha está à direita da caixa vermelha.

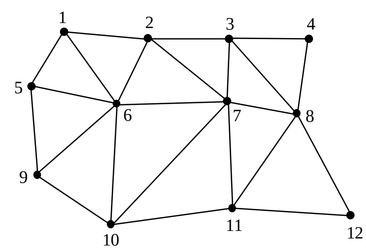
Em que caixa está a moeda?

A) Na caixa vermelha.
B) Na caixa verde.
C) Na caixa azul.
D) As informações fornecidas são insuficientes para se dar uma resposta.
E) As informações fornecidas são contraditórias.

21. Um feirante vende batatas e, para pesar, utiliza uma balança de dois pratos, um peso de 1 kg, um peso de 3 kg e um peso de 10 kg. Considere a seguinte afirmação: "Este feirante consegue pesar (com uma pesagem) n quilogramas de batatas". Quantos valores positivos de n tornam essa afirmação verdadeira, supondo que ele pode colocar pesos nos dois pratos?

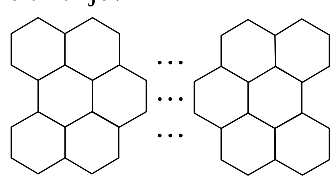
A) 7 **B)** 10 **C)** 12 **D)**13 **E)**14

22. O mapa ao lado mostra um conjunto residencial onde as casas, numeradas, são interligadas por 23 ruelas. O vendedor Zé Ruela, que mora na casa 8, planeja passar por todas as outras casas e retornar à sua, percorrendo o menor número possível de ruelas. Ele deixará de caminhar por quantas ruelas?



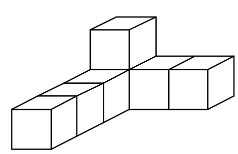
A) 15 **B)** 10 **C)** 13 **D)**12 **E)** 11

23. O arranjo a seguir, composto por 32 hexágonos, foi montado com varetas, todas com comprimento igual ao lado do hexágono. Quantas varetas, no mínimo, são necessárias para montar o arranjo?



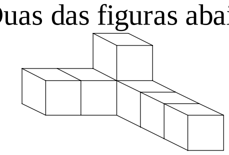
A) 113 **B)** 123 **C)** 122 **D)** 132 **E)** 152

24. Observe a figura:

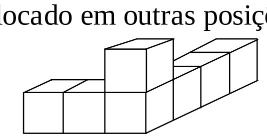


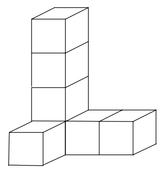
Duas das figuras abaixo representam o objeto acima colocado em outras posições.

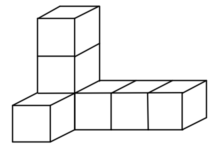
I)



II)



III) 

IV) 

Elas são:

A) I e II **B)** I e IV **C)** II e IV **D)** I e III **E)** II e III

25. Entre 1986 e 1989, época em que vocês ainda não tinham nascido, a moeda do país era o cruzado (Cz$). Com a imensa inflação que tivemos, a moeda foi mudada algumas vezes: tivemos o cruzado novo, o cruzeiro, o cruzeiro real e, finalmente, o real. A conversão entre o cruzado e o real é: 1 real = 2.750.000.000 cruzados

Imagine que a moeda não tivesse mudado e que João, que ganha hoje 640 reais por mês, tivesse que receber seu salário em notas novas de 1 cruzado. Se uma pilha de 100 notas novas tem 1,5 cm de altura, o salário em cruzados de João faria uma pilha de altura:

A) 26,4 km **B)** 264 km **C)** 26 400 km **D)** 264 000 km
E) 2 640 000 km

PROBLEMAS – NÍVEL 2

1. Veja o problema No. 3 do Nível 1

2. Se m e n são inteiros não negativos com $m < n$, definimos $m \nabla n$ como a soma dos inteiros entre m e n, incluindo m e n. Por exemplo, $5 \nabla 8 = 5 + 6 + 7 + 8 = 26$.

O valor numérico de $\dfrac{22\nabla 26}{4\nabla 6}$ é:

A) 4 **B)** 6 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 12

3. Entre 1986 e 1989, época em que vocês ainda não tinham nascido, a moeda do país era o cruzado (Cz$). Com a imensa inflação que tivemos, a moeda foi mudada algumas vezes: tivemos o cruzado novo, o cruzeiro, o cruzeiro real e, finalmente, o real. A conversão entre o cruzado e o real é:

1 real = 2.750.000.000 cruzados

Imagine que a moeda não tivesse mudado e que João, que ganha hoje 640 reais por mês, tivesse que receber seu salário em notas novas de 1 cruzado. Se uma pilha de 100 notas novas tem 1,5 cm de altura, o salário em cruzados de João faria uma pilha de altura:

A) 26,4km
B) 264km
C) 26400km
D) 264000km
E) 2640000km

4. Veja o problema No. 23 do Nível 1.
5. Veja o problema No. 14 do Nível 1.
6. Veja o problema No. 16 do Nível 1.

7. Há 1002 balas de banana e 1002 balas de maçã numa caixa. Lara tira, sem olhar o sabor, duas balas da caixa. Seja p a probabilidade de as duas balas serem do mesmo sabor e seja q a probabilidade de as duas balas serem de sabores diferentes. Quanto vale a diferença entre p e q?

A) 0 **B)** $\frac{1}{2004}$ **C)** $\frac{1}{2003}$ **D)** $\frac{2}{2003}$ **E)** $\frac{1}{1001}$

8. O perímetro de um retângulo é 100 e a diagonal mede x. Qual é a área do retângulo?

A) $625 - x^2$ **B)** $625 - \frac{x^2}{2}$ **C)** $1250 - \frac{x^2}{2}$
D) $250 - \frac{x^2}{2}$ **E)** $2500 - \frac{x^2}{2}$

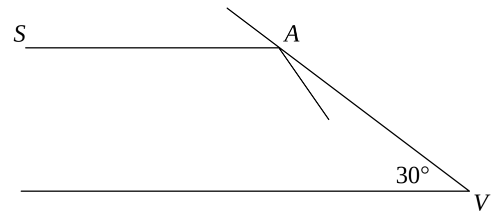
9. Veja o problema No. 19 do Nível 1.

10. Para quantos inteiros positivos m o número $\frac{2004}{m^2 - 2}$ é um inteiro positivo?

A) um **B)** dois **C)** três **D)** quatro
E) mais do que quatro

11. Se $x + y = 8$ e $xy = 15$, qual é o valor de $x^2 + 6xy + y^2$?
A) 64 **B)** 109 **C)** 120 **D)** 124 **E)** 154

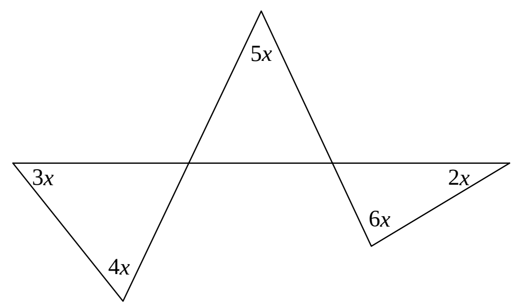
12. Dois espelhos formam um ângulo de 30^o no ponto *V*. Um raio de luz, vindo de uma fonte *S*, é emitido paralelamente a um dos espelhos e é refletido pelo outro espelho no ponto *A*, como mostra a figura. Depois de uma certa quantidade de reflexões, o raio retorna a *S*. Se *AS* e *AV* têm 1 metro de comprimento, a distância percorrida pelo raio de luz, em metros, é



A) 2 **B)** $2+\sqrt{3}$ **C)** $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ **D)** $\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$

E) $5\sqrt{3}$

13. Na figura, quanto vale *x*?
A) 6° **B)** 12° **C)** 18°
D) 20° **E)** 24°



14. Se $2(2^{2x}) = 4^x + 64$, então *x* é igual a:
A) – 2 **B)** – 1 **C)** 1 **D)** 2 **E)** 3

15. Qual é o maior valor da soma dos algarismos da soma dos algarismos de um número de três algarismos?
A) 7 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11

16. Veja o problema No. 10 do Nível 1.

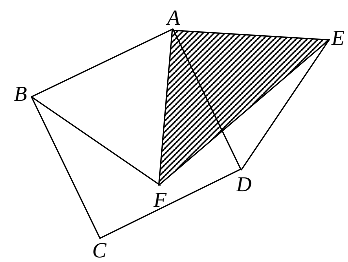
17. Um ponto *P* pertence ao interior de um quadrado com 10 cm de lado. No máximo, quantos pontos da borda do quadrado podem estar a uma distância de 6 cm do ponto *P*?
A) 1 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

18. Veja o problema No. 18 do Nível 1.

19. No triângulo PQR, a altura PF divide o lado QR em dois segmentos de medidas $QF = 9$ e $RF = 5$. Se $PR = 13$, qual é a medida de PQ?
A) 5 **B)** 10 **C)** 15 **D)** 20 **E)** 25

20. Veja o problema No. 20 do Nível 1.

21. No desenho ao lado, o quadrilátero $ABCD$ é um quadrado de lado 3 cm e os triângulos ABF e AED são ambos equiláteros. Qual é a área da região destacada?



A) 2 cm^2
B) 1,5 cm^2
A) 3 cm^2
D) 4,5 cm^2
E) 2,5 cm^2

22. Uma folha quadrada foi cortada em 42 quadrados menores, dos quais um tem área maior do que 1 cm^2 e os demais têm área de 1 cm^2. Qual é a medida do lado da folha?
A) 6 cm **B)** 12 cm **C)** 21 cm **D)** 19 cm **E)** 20 cm

23. Eu planejava fazer um curral quadrado, com uma certa área, usando uma certa quantidade de cerca de arame farpado. Descobri, porém, que tenho 10% a menos de cerca do que esperava. Por esta razão, a área cercada será:
A) 5% menor **B)** 10% menor **C)** 19% menor **D)** 20% menor
E) 25% menor

24. Veja o problema No. 13 do Nível 1.

20. Esmeralda, a digitadora, tentou digitar um número de seis algarismos, mas os dois algarismos 1 não apareceram (a tecla devia estar com defeito). O que apareceu foi 2004. Quantos são os números de seis algarismos que ela pode ter tentado digitar?
A) 4 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 15 **E)** 20

PROBLEMAS – NÍVEL 3

1. A função f é dada pela tabela a seguir.

	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	1	3	5	2

Por exemplo, $f(2) = 1$. Quanto vale $\underbrace{f\,(\,f\,(...(\,f\,(\,f}_{2004\text{ vezes}}\,(4))...))$?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

2. Seja AB um segmento de comprimento 26, e sejam C e D pontos sobre o segmento AB tais que $AC = 1$ e $AD = 8$. Sejam E e F pontos sobre uma semicircunferência de diâmetro AB, sendo EC e FD perpendiculares a AB. Quanto mede o segmento EF?

A) 5 **B)** $5\sqrt{2}$ **C)** 7 **D)** $7\sqrt{2}$ **E)** 12

3. As alturas de um triângulo medem 12, 15 e 20. O maior ângulo interno do triângulo mede

A) 72^o **B)** 75^o **C)** 90^o **D)** 108^o **E)** 120^o

4. Esmeralda, a digitadora, tentou digitar um número de seis algarismos, mas os dois algarismos 1 não apareceram (a tecla devia estar com defeito). O que apareceu foi 2004. Quantos são os números de seis algarismos que ela pode ter tentado digitar?

A) 4 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 15 **E)** 20

5. O produto dos números que aparecem nas alternativas incorretas dessa questão é um cubo perfeito.
Assinale a alternativa correta.

A) 4 **B)** 8 **C)** 18 **D)** 54 **E)** 192

6. Qual é o menor inteiro positivo n para o qual qualquer subconjunto de n elementos de $\{1,2,3,\ldots,20\}$ contém dois números cuja diferença é 8?

A) 2 **B)** 8 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 15

7. Sejam

$$a = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{5} + \cdots + \frac{1001^2}{2001}$$

e

$$b = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \frac{3^2}{7} + \cdots + \frac{1001^2}{2003}.$$

Qual é o inteiro mais próximo de $a - b$?

A) 500 **B)** 501 **C)** 999 **D)** 1000 **E)** 1001

8. Uma ampulheta é formada por dois cones idênticos. Inicialmente, o cone superior está cheio de areia e o cone inferior está vazio. A areia flui do cone superior para o inferior com vazão constante. O cone superior se esvazia em exatamente uma hora e meia. Quanto tempo demora até que a altura da areia no cone inferior seja metade da altura da areia no cone superior?

A) 30min
B) 10h
C) 1h03min20s
D) 1h10min12s
E) 1h14min30s

9. A função real f, definida nos inteiros, satisfaz $f(n) - (n + 1)f(2 - n) = (n + 3)^2$, para todo n inteiro. Quanto vale $f(0)$?

A) –17 **B)** 0 **C)** 1 **D)** 2 **E)** 9

10. Com três algarismos distintos a, b e c, é possível formar 6 números de dois algarismos distintos. Quantos conjuntos $\{a, b, c\}$ são tais que a soma dos 6 números formados é 484?

A) Um **B)** Dois **C)** Três **D)** Quatro
E) Mais que quatro

11. Dois cubos têm faces pintadas de ocre ou magenta. O primeiro cubo tem cinco faces ocres e uma face magenta. Quando os dois cubos são lançados, a probabilidade de as faces viradas para cima dos dois cubos serem da mesma cor (sim, ocre e magenta são cores!) é 1/2. Quantas faces ocres tem o segundo cubo?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

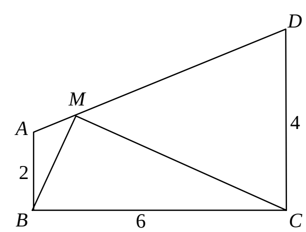
12. Veja o problema No. 10 do Nível 2.
13. Veja o problema No. 12 do Nível 2.

14. Para n inteiro positivo, definimos $n!$ (lê-se "*n fatorial*") o produto de todos os inteiros positivos menores ou iguais a n. Por exemplo, $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$.
Se $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$, então n é igual a
A) 13 **B)** 14 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 17

15. Constrói-se o quadrado *ABXY* sobre o lado *AB* do heptágono regular *ABCDEFG*, exteriormente ao heptágono. Determine a medida do ângulo $B\hat{X}C$, em radianos.
A) $\frac{\pi}{7}$ **B)** $\frac{3\pi}{7}$ **C)** $\frac{\pi}{14}$ **D)** $\frac{3\pi}{14}$ **E)** $\frac{3\pi}{28}$

16. O conjunto das raízes reais da equação $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$ é
A) {1} **B)** {1, 2} **C)** [1, 2] **D)**]1, 2[**E)** {2}

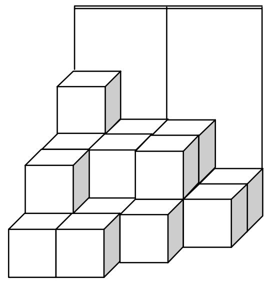
17. No desenho ao lado, os segmentos AB e CD são perpendiculares ao segmento BC. Sabendo que o ponto M pertence ao segmento AD e que o triângulo *BMC* é retângulo não isósceles, qual é a área do triângulo *ABM* ?
A) 1 **B)** $\frac{6}{5}$ **C)** $\frac{7}{5}$ **D)** $\frac{8}{5}$ **E)** $\frac{9}{5}$



18. Veja o problema No. 3 do Nível 2

19. O dono de uma loja empilhou vários blocos medindo 0,8m x 0,8m x 0,8m no canto da loja e encostados numa parede de vidro que dá para a rua, conforme mostra a figura abaixo.
Quantos blocos no máximo, uma pessoa de 1,80m de altura que está do lado de fora da loja pode enxergar?

Obs. Consideramos que uma pessoa pode enxergar uma caixa se consegue ver uma pequena região de área positiva de sua superfície.



A) 13 **B)** 14 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 17

20. Veja o problema No. 4 do Nível 2.

21. Numa prova para uma sala com 30 alunos, a média aritmética das 10 piores notas é 3 e a média aritmética das 10 melhores notas é 9. O menor valor possível e o maior valor possível para a média da sala são, respectivamente:
A) 6 e 7 **B)** 5 e 7 **C)** 4 e 6 **D)** 3 e 9 **E)** 4 e 8

22. Veja o problema No. 20 do Nível 1.
23. Veja o Problema No. 25 do Nível 2.

24. Esmeralda escreveu (corretamente!) todos os números de 1 a 999, um atrás do outro:

12345678910111213… 997998999.

Quantas vezes aparece o agrupamento "21", nesta ordem?
A) 11 **B)** 21 **C)** 31 **D)** 41 **E)** 51

25. Um feirante vende batatas e, para pesar, utiliza uma balança de dois pratos, um peso de 1 kg, um peso de 3 kg e um peso de 10 kg. Considere a seguinte afirmação: "Este feirante consegue pesar (com uma pesagem) n quilogramas de batatas". Quantos valores positivos de n tornam essa afirmação verdadeira, supondo que ele pode colocar pesos nos dois pratos?
A) 7 **B)** 10 **C)** 12 **D)**13 **E)**14

GABARITO

NÍVEL 1 (5ª. e 6ª. séries)

1) B	6) B	11) D	16) B	21) D
2) E	7) A	12) B	17) C	22) E
3) A	8) B	13) D	18) E	23) B
4) B	9) C	14) C	19) A	24) C
5) D	10) C	15) A	20) A	25) D

NÍVEL 2 (7ª. e 8ª. séries)

1) A	6) B	11) D	16) C	21) D
2) C	7) C	12) B	17) E	22) C
3) D	8) C	13) C	18) E	23) C
4) B	9) A	14) E	19) C	24) D
5) C	10) B	15) D	20) A	25) D

NÍVEL 3 (Ensino Médio)

1) D	6) D	11) C	16) C	21) B
2) D	7) B	12) B	17) B	22) A
3) C	8) C	13) B	18) E	23) D
4) D	9) A	14) D	19) B	24) C
5) D	10) B	15) E	20) B	25) D

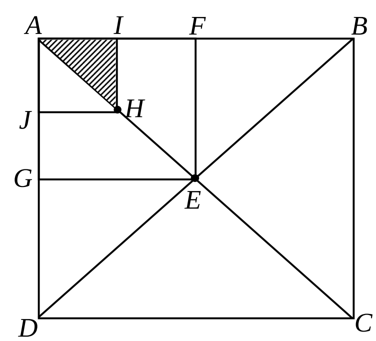
XXVI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Problemas e Soluções da Segunda Fase

PROBLEMAS – NÍVEL 1 PARTE A
(Cada problema vale 3 pontos)

01. O número 1000…02 tem 20 zeros. Qual é a soma dos algarismos do número que obtemos como quociente quando dividimos esse número por 3?

02. A soma de dois números primos a e b é 34 e a soma dos primos a e c é 33. Quanto vale $a + b + c$?

03. No desenho, os quadriláteros $ABCD$, $EFAG$ e $IAJH$ são retângulos e H é ponto médio de AE.
Calcule a razão entre a área do retângulo $ABCD$ e o triângulo AHI.



04. Dizemos que um número natural é teimoso se, ao ser elevado a qualquer expoente inteiro positivo, termina com o mesmo algarismo. Por exemplo, 10 é teimoso, pois $10^2, 10^3, 10^4, \ldots,$ são números que também terminam em zero. Quantos números naturais teimosos de três algarismos existem?

05. Qual é o maior número natural menor que 100 cuja soma dos divisores positivos é ímpar?

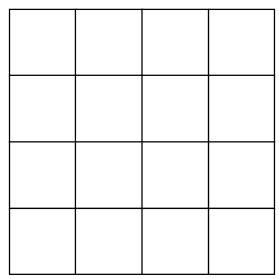
06. Na multiplicação a seguir, a, b e c são algarismos:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & a & b \\
 & & & b & 3 \quad \times \\
\hline
 & & * & * & * \\
 & * & * & * & \\
\hline
1 & c & c & 0 & 1
\end{array}$$

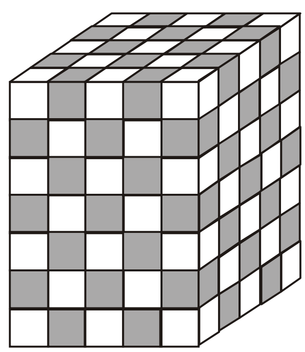
Calcule $a + b + c$.

07. Esmeralda, de olhos vendados, retira cartões de uma urna contendo inicialmente 100 cartões numerados de 1 a 100, cada um com um número diferente. Qual é o número mínimo de cartões que Esmeralda deve retirar para ter certeza de que o número do cartão seja um múltiplo de 4?

08. De quantos modos podemos sombrear quatro casas do tabuleiro 4×4 abaixo de modo que em cada linha e em cada coluna exista uma única casa sombreada?



09. Juntando cubinhos de mesmo volume mas feitos de materiais diferentes - cada cubo branco pesando 1 grama e cada cubo cinza pesando 2 gramas - formou-se um bloco retangular, conforme mostrado na figura abaixo. Qual é a massa, em gramas, desse bloco?

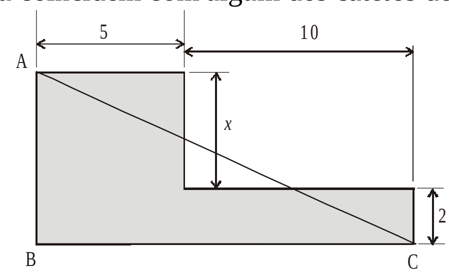


10. Na população de uma espécie rara de 1000 aves da floresta amazônica, 98% tinham cauda de cor verde. Após uma misteriosa epidemia que matou parte das aves com cauda verde, esta porcentagem caiu para 95%. Quantas aves foram eliminadas com a epidemia?

PROBLEMAS – NÍVEL 1 PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1:

No desenho abaixo, o triângulo *ABC* é retângulo e os lados do polígono (região escura) são paralelos ou coincidem com algum dos catetos do triângulo.



Calcule x de modo que a área do polígono seja igual à do triângulo.

PROBLEMA 2:

Esmeralda, a digitadora, construiu uma tabela com 100 linhas e 100 colunas, preenchendo uma casa com 1, se o número da linha da casa divide o número da coluna e com 0, caso contrário. Assim, por exemplo, a casa da linha 2 e da coluna 4 foi preenchida com 1, porque 2 divide 4 e a casa na linha 3 e da coluna 7 foi preenchida com 0.

	1	2	3	4	5	6	…	99	100
1	1	1	1	1	1	1		1	1
2	0	1	0	1	0	1	…	0	1
3	0	0	1	0	0	1	…	1	0
4									
100	0	0						0	1

a) Qual a soma dos números escritos na linha 5?
b) Qual a soma dos números da coluna 60?

PROBLEMA 3:

a) É possível dividir o conjunto $\{1^2, 2^2,\ldots,7^2\}$ em dois grupos *A* e *B* de modo que a soma dos elementos de *A* seja igual à soma dos elementos de *B*? Justifique.

b) É possível dividir o conjunto $\{1^2, 2^2, 3^2,\ldots,9^2\}$ em dois grupos *C* e *D* de modo que a soma dos elementos de *C* seja igual à soma dos elementos de *D*? Justifique.

PROBLEMAS – NÍVEL 2 PARTE A
(Cada problema vale 3 pontos)

01. Veja o problema No. 6 do Nível 1.
02. Veja o problema No. 8 do Nível 1.

03. Qual é a soma dos algarismos do número $\sqrt{2004\times 2002\times 1998\times 1996+36}$?

04. Veja o problema No. 1 da Parte B do Nível 1.

05. Um polígono com 20 lados é chamado *icoságono*. Unindo-se três dos vértices de um icoságono regular obtemos triângulos. Quantos são triângulos retângulos?

PROBLEMAS – NÍVEL 2 PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1:
(a) É possível dividir o conjunto $\{1^2, 2^2, \ldots, 7^2\}$ em dois grupos A e B de modo que a soma dos elementos de A seja igual à soma dos elementos de B? Justifique.
(b) É possível dividir o conjunto $\{1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 9^2\}$ em dois grupos C e D de modo que a soma dos elementos de C seja igual à soma dos elementos de D? Justifique.

PROBLEMA 2:
(a) Simplifique a expressão

$$1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x}}},$$

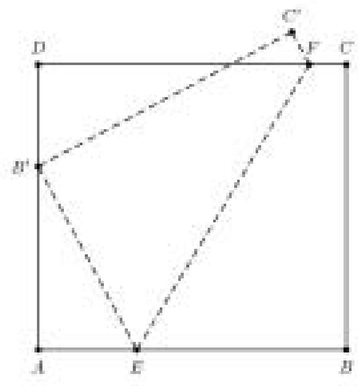
(b) Certa calculadora tem duas teclas especiais: ***A*** e ***B***. A tecla ***A*** transforma o número x que está no visor em $\frac{1}{x}$. A tecla ***B*** transforma o número x que está no visor em $1-x$.
Pedro tem um número no visor e aperta sucessivamente, de forma alternada, as duas teclas:

A, ***B***, ***A***, ***B***, ….

Após 1000 operações, o visor mostrava o número 2004. Que número Pedro tinha inicialmente no visor?

PROBLEMA 3:

Uma folha de papel retangular *ABCD* foi dobrada de modo que o vértice *B* foi levado no ponto *B*' sobre o lado *AD*. A dobra é *EF*, com *E* sobre *AB* e *F* sobre *CD*.



Sabe-se que $AE = 8$, $BE = 17$ e $C F = 3$.

(a) Calcule a medida do segmento *AB'*.
(b) Calcule a medida do lado *AD*.

PROBLEMA 4:

Um número de 4 algarismos *a b c d* é chamado de *legal* quando a soma dos números formados pelos dois primeiros e pelos dois últimos algarismos é igual ao número formado pelos algarismos centrais (ou seja, $ab + cd = bc$). Por exemplo, 2307 é um número legal pois 23 + 07 = 30.

(a) Qual é o menor número legal maior do que 2307?
(b) Quantos são os números legais de 4 algarismos?

PROBLEMAS – NÍVEL 3

PROBLEMA 1:

Cada um dos números $x_1, x_2, \ldots, x_{2004}$ pode ser igual a $\sqrt{2}-1$ ou a $\sqrt{2}+1$. Quantos valores inteiros distintos a soma

$$\sum_{k=1}^{2004} x_{2k-1}x_{2k} = x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 + \ldots + x_{2003}x_{2004}$$ pode assumir?

PROBLEMA 2

Seja *ABCD* um trapézio retângulo de bases *AB* e *CD*, com ângulos retos em *A* e *D*. Dado que a diagonal menor *BD* é perpendicular ao lado *BC*, determine o menor valor possível para a razão $\frac{CD}{AD}$.

PROBLEMA 3:

Os doze alunos de uma turma de olimpíada saíam para jogar futebol todos os dias após a aula de matemática, formando dois times de 6 jogadores cada e jogando entre si. A cada dia eles formavam dois times diferentes dos times formados em dias anteriores. Ao final do ano, eles verificaram que cada 5 alunos haviam jogado juntos num mesmo time exatamente uma vez. Quantos times diferentes foram formados ao longo do ano?

PROBLEMA 4:

Determine todas as soluções da equação $n \cdot 2^{n-1} + 1 = m^2$, com n e m naturais.

PROBLEMA 5:

Dizemos que um número inteiro positivo é sinistro quando a soma de seus fatores primos é igual à soma dos expoentes de sua decomposição em fatores primos. Encontre todos os números sinistros de quatro algarismos.

PROBLEMA 6:

Sejam H, I e O o ortocentro, o incentro e o circuncentro do triângulo ABC, respectivamente. A reta CI corta o circuncírculo de ABC no ponto L, distinto de C. Sabe-se que $AB = IL$ e $AH = OH$. Determine os ângulos do triângulo ABC.

SOLUÇÕES – SEGUNDA FASE – NÍVEL 1 – PARTE A

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**	**07**	**08**	**09**	**10**
Resposta	064	036	032	360	098	010	076	024	262	600

SOLUÇÕES – SEGUNDA FASE – NÍVEL 1 – PARTE B

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

O polígono consiste na reunião de dois retângulos: um deles tem largura 10 e altura 2 e o outro tem largura 5 e altura $x+2$; o triângulo tem catetos de medidas 15 e $x+2$. Como a área do polígono é igual à área do triângulo, temos

$$10\cdot 2+5(x+2)=\frac{15(x+2)}{2}\Leftrightarrow 40+10x+20=15x+30\Leftrightarrow 5x=30\Leftrightarrow x=6$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:

a) Cada linha apresenta 1 nas colunas cujos números são múltiplos do número da linha. Assim, a linha 5 tem 1 nas colunas 5, 10, 15, etc. Até 100, existem 20 múltiplos de 5, logo a soma dos números na linha 5 é igual a 20.

b) Cada coluna apresenta 1 no cruzamento com as linhas cujos números são divisores do número da coluna. Assim, a soma dos números da coluna 60 é igual ao número de divisores de 60. Como $60=2^2\times 3\times 5$, concluímos que 60 tem 3.2.2 = 12 divisores. Logo, a soma dos números da coluna 60 é 12.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

a) A soma total dos elementos é

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2=1+4+9+16+25+36+49=140\,.$$

Logo, cada um dos grupos deve conter elementos que somem 70. Examinando as parcelas, vemos que 49 + 1 + 4 +16 = 70. Assim podemos escrever, por exemplo, $A = \{1^2, 2^2, 4^2, 7^2\}$ e $B = \{3^2, 5^2, 6^2\}$.

b) Como

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 = 140 + 64 + 81 = 285$$

é ímpar, é impossível dividir em dois grupos de mesma soma.

SOLUÇÕES – SEGUNDA FASE – NÍVEL 2 – PARTE A

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**
Resposta	010	024	048	006	180

SOLUÇÕES – SEGUNDA FASE – NÍVEL 2 – PARTE B

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1: Ver o problema 3 – Parte B do Nível 1

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:

a) $$1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}=1-\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{x-1}{x}}}=1-\frac{1}{1-\frac{x}{x-1}}=1-\frac{1}{\frac{x-1-x}{x-1}}=1-\frac{x-1}{-1}=1+x-1=x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1-x}{x-1}=2004 \Leftrightarrow \frac{-1}{x-1}=2004 \Leftrightarrow 2004x-2004=-1 \Leftrightarrow x=\frac{2003}{2004}$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

a) A partir da dobra da folha podemos ver que $B'E$ = BE = 17, e como AE = 8, aplicando o teorema de Pitágoras temos $AB'=\sqrt{B'E^2-AE^2}=\sqrt{17^2-8^2}=15$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:

Como $ab + cd = bc \Leftrightarrow 10a+b+10c+d=10b+c \Leftrightarrow 10a+d=9(b-c)$, ou seja, $10a+d$ é o número de dois algarismo $a\ d$, e é um múltiplo de 9.

a) Mantendo a = 2, temos d = 7. Além disso, $10\cdot 2+7=9(b-c)\Leftrightarrow b-c=3$. O menor valor de b que podemos escolher, após 3, é 4, e nesse caso, c = 1. O número procurado é, então, 2417.

b) Uma vez que escolhemos $b-c$, a e d estão determinados: a é o algarismo das dezenas de $9(b-c)$, e d, o das unidades. Além disso, $9(b-c)\ge 10 \Leftrightarrow b-c\ge 2$.

Se $b-c=2$, $(b,c)\in\{(2,0);(3,1);(4,2);...;(9,0)\}$, um total de 8 possibilidades. Da mesma forma, vemos que se $b-c=3$, $(b,c)\in\{(3,0);(4,1);(5,2);...;(9,6)\}$, há um total de 7 possibilidades. Para $b-c=4$, $(b,c)\in\{(4,0);(5,1);(6,2);...;(9,5)\}$, 6 possibilidades, $b-c=5$,

$(b,c)\in\{(5,0);(6,1);(7,2);...;(9,4)\}$, 5 possibilidades, $b-c=6$,

$(b,c)\in\{(6,0);(7,1);(8,2);(9,3)\}$, 4 possibilidades, $b-c=7$,

$(b,c)\in\{(7,0);(8,1);(9,2)\}$, 3 possibilidades, $b-c=8$, $(b,c)\in\{(8,0);(9,1)\}$, 2 possibilidades e, finalmente, para $b-c=9$, $(b,c)=(9,0)$, 1 possibilidade.

Há, portanto, um total de $8+7+6+5+4+3+2+1=36$ números *legais*.

SOLUÇÕES – SEGUNDA FASE – NÍVEL 3

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

Os possíveis produtos $x_{2k-1}x_{2k}$ são $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)=3-2\sqrt{2}$, $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)=3+2\sqrt{2}$ e $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1$. Suponha que a produtos são iguais a $3-2\sqrt{2}$, b produtos são iguais a $3+2\sqrt{2}$ e $1002-a-b$ produtos são iguais a 1.

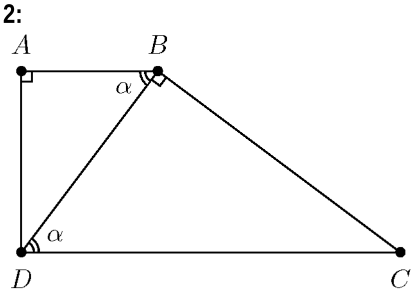
A soma é igual a

$$a(3-2\sqrt{2})+b(3+2\sqrt{2})+1002-a-b=1002+2a+2b+2(b-a)\sqrt{2}.$$

Assim, para que a soma seja inteira, devemos ter $a = b$. Logo a soma é igual a $1002+4a$.

Como a varia de 0 a 501 (pois $a + b$ não pode ser maior que 1002), a soma pode assumir 502 valores inteiros.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:

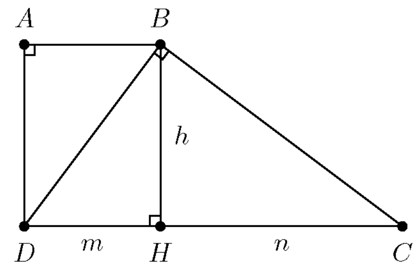


Seja $A\hat{B}D = BDC = \alpha.$ Então $DC = \dfrac{BD}{\cos\alpha}$ e $AD = BD \text{ sen } \alpha$, donde

$$\frac{DC}{AD}=\frac{\dfrac{BD}{\cos\alpha}}{BD \text{ sen } \alpha}=\frac{1}{\text{sen}\alpha\cos\alpha}=\frac{2}{\text{sen}2\alpha}\ge 2.$$

A igualdade ocorre quando $\text{sen } 2\alpha = 1,$ ou seja, quando $\alpha = 45°.$

SEGUNDA SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:



Sejam H a projeção de B sobre DC, $DH = m$, $HC = n$ e $BH = h$. $ABDH$ é então um retângulo, donde $AD = BH = h$.

Como o triângulo CBD é retângulo, temos $h^2 = mn$. Logo,

$$\frac{DC}{AD} = \frac{DC}{BH} = \frac{m+n}{h} = \frac{m+n}{\sqrt{mn}}.$$

Mas sabemos que $(\sqrt{m} - \sqrt{n})^2 \ge 0,$ donde $m + n \ge 2\sqrt{mn}.$ A igualdade ocorre quando $m = n$.

Segue que

$$\frac{DC}{AD} = \frac{m+n}{\sqrt{mn}} \ge 2.$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

Para cada grupo de 5 alunos, existe um único time formado que os contém. Logo, contamos $\binom{12}{5} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5!} = 792$ times para cada 5 alunos escolhidos. Por outro lado, em cada time de 6 jogadores, temos $\binom{6}{5} = 6$ modos de escolhermos cinco jogadores, ou seja, existem 6 grupos de 5 jogadores que geram o mesmo time na nossa primeira contagem. Logo, o total de times formados é igual a $\frac{792}{6} = 132$.

SEGUNDA SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

Há $\binom{12}{6}$ maneiras de escolher 6 dentre 12 alunos. Além disso, fixados 5 alunos, há 7 maneiras de montar um time com esses 5 alunos mais outro aluno. Assim, considerando que cada 5 alunos jogaram juntos num mesmo time exatamente uma vez, o total de maneiras de escolher 6 dentre 12 alunos é igual a 7 vezes o número de maneiras de formar os times ao longo do ano. Logo o número de maneiras de formar os times ao longo do ano é $\frac{1}{7}\binom{12}{6} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 132$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:

A equação é equivalente a $n\cdot 2^{n-1} = (m-1)(m+1)$. Suponha $n > 3$. Temos m ímpar, digamos $m = 2k + 1$. A equação fica então $n\cdot 2^{n-3} = k(k+1)$. Portanto, 2^{n-3} divide k ou $k + 1$, pois k ou $k + 1$ (o que for ímpar) divide n. Assim, $k+1 \ge 2^{n-3}$ e $k \le n$, donde $n+1 \ge 2^{n-3}$.

Mostremos, por indução, que $n+1 < 2^{n-3}$ para $n > 5$. Para $n = 6$ (base de indução), temos $6 + 1 = 7$ e $2^{6-3} = 8$. Supondo que a desigualdade é válida para $n = k$, provemos que a mesma é válida para $n = k + 1$ (passo indutivo). De fato, temos $k + 1 < 2^{k-3} \Leftrightarrow 2(k + 1) < 2^{k-2}$. Como $k + 2 < 2(k + 1)$, temos $k + 2 < 2^{k-2}$, completando a demonstração.

Assim, basta testar $0 \le n \le 5$. Portanto as soluções são $(m; n) = (1;0)$ e $(m; n) = (9;5)$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5:

Seja $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, (com $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ primos) um número sinistro. Como $p_i \ge 2$ para todo i, $n \ge 2^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k}$.

Como n tem 4 algarismos, $n < 10000$, donde $2^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k} \le n < 10000$, e logo $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k \le 13$.

Se um dos fatores primos fosse maior ou igual a 11, a soma dos fatores primos seria ≥ 11, donde $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k \ge 11$ e $n \ge 2^{10}\cdot 11 > 10000$, absurdo.

Assim, os únicos fatores primos possíveis são 2, 3, 5 e 7. Como $3^5 < 1000$, se a soma dos expoentes for ≤ 5, o número deve ser $5^5 = 3125$. A soma pode ser também igual a 7, donde o número pode ser $2^4\cdot 5^3 = 2000$, ou $2^3\cdot 5^4 = 5000$ (note que $7^7 > 10000$).

Não pode ser igual a $8 = 3 + 5$, pois $3^7\cdot 5 > 10000$.

Pode ser igual a 9 = 7 + 2, podendo o número ser igual a $2^8\cdot 7 = 1792$ ou $2^7\cdot 7^2 = 6272$.

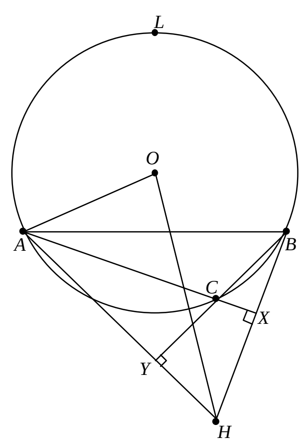
Pode ser igual a 10 = 2 + 3 + 5, podendo o número ser igual a
$2^8\cdot 3\cdot 5 = 3840$, $2^7\cdot 3^2\cdot 5 = 5760$, $2^7\cdot 3\cdot 5^2 = 9600$ ou $2^6\cdot 3^3\cdot 5 = 8640$ (note que os fatores primos não podem ser 3 e 7, pois $3^9\cdot 7 > 10000$).

A soma não pode ser 11, nem 12 (pois $2^{10}\cdot 3\cdot 7$ e $5^{11}\cdot 7$ são maiores que 10000) nem 13. Assim os números sinistros de quatro algarismos são $5^5 = 3125$,
$2^4\cdot 5^3 = 2000$, $2^3\cdot 5^4 = 5000$, $2^8\cdot 7 = 1792$, $2^7\cdot 7^2 = 6272$,
$2^8\cdot 3\cdot 5 = 3840$, $2^7\cdot 3^2\cdot 5 = 5760$, $2^7\cdot 3\cdot 5^2 = 9600$ e $2^6\cdot 3^3\cdot 5 = 8640$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6:

Sendo α, β e γ as medidas dos ângulos internos nos vértices A, B e C, respectivamente, temos $m(\angle IBL) = m(\angle BIL) = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$. Logo $BL = IL$, e como $BL = AL$ e $IL = AB$, concluímos que o triângulo ABL é equilátero, logo o arco AB mede 60° e, portanto, $m(\angle ACB) = 120^\circ$.

O quadrilátero $CXHY$ é inscritível, onde X e Y são os pés das alturas traçadas de A e B. Logo $\angle AHB$ mede $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Como $m(\angle AOB) = 120^\circ$, concluímos que o quadrilátero $OAHB$ é inscritível. (Isto também pode ser provado, por exemplo, utilizando-se a propriedade de que o simétrico de H em relação a AB pertence ao circuncírculo de ABC).
Isto implica que $m(\angle AHO) = m(\angle ABO) = 30^\circ$, e como $OH = AH$, temos $m(\angle AOH) = m(\angle OAH) = 75^\circ$.
Finalmente, temos $m(\angle BAC) = m(\angle OAH) - m(\angle OAB) - m(\angle XAH) = 75^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 15^\circ$; e $m(\angle ABC) = 180^\circ - 120^\circ - 15^\circ = 45^\circ$.



XXVI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e Soluções da Terceira Fase

PROBLEMAS – NÍVEL 1

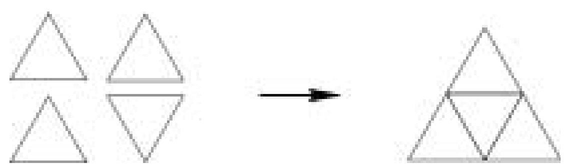
PROBLEMA 1:

Encontre todos os números naturais n de três algarismos que possuem todas as propriedades abaixo:

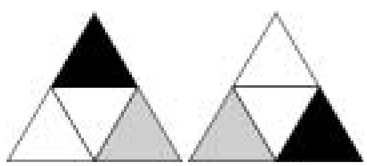
- n é ímpar;
- n é um quadrado perfeito;
- A soma dos quadrados dos algarismos de n é um quadrado perfeito.

PROBLEMA 2:

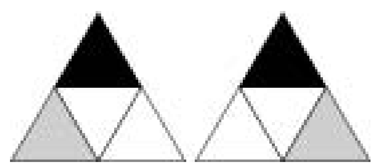
Com quatro triângulos eqüiláteros de lado 1 é possível formar uma peça, no formato de um triângulo eqüilátero de lado 2, como mostra a figura ao lado.



Imagine que você tenha muitos triângulos eqüiláteros de lado 1 de três tipos: *brancos*, *pretos* e *cinzas* para formar peças como no exemplo acima. Duas peças assim formadas são consideradas iguais quando podemos obter uma delas girando a outra, conforme ilustrado abaixo, à esquerda.



Par de peças iguais



Par de peças diferentes

Quantas peças diferentes podem ser formadas nas condições apresentadas?

PROBLEMA 3:

Dizemos que um número natural é *composto* quando pode ser escrito como produto de dois números naturais maiores que 1. Assim, por exemplo, 91 é composto porque podemos escrever $91 = 7 \times 13$.

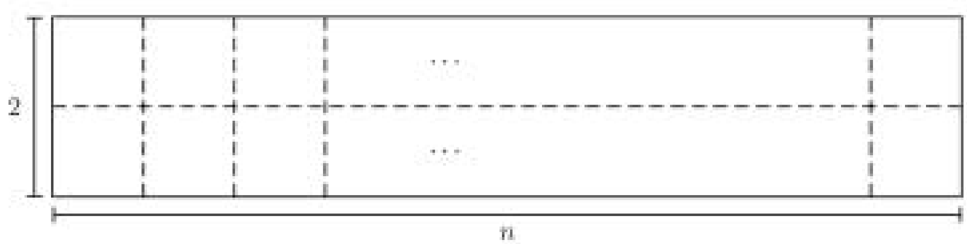
Mostre que o número

$$2^{\left(2^{2004}+2\right)}+1$$

é composto.

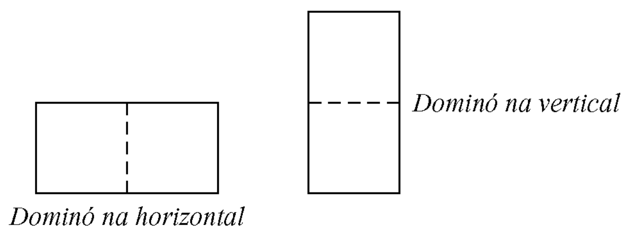
PROBLEMA 4:

Arnaldo e Bernaldo disputam um jogo num tabuleiro $2 \times n$:



As peças do jogo são dominós 2×1. Inicialmente Arnaldo coloca um dominó cobrindo exatamente duas casas do tabuleiro, na horizontal ou na vertical. Os jogadores se revezam colocando uma peça no tabuleiro, na horizontal ou na vertical, sempre cobrindo exatamente duas casas do tabuleiro. Não é permitido colocar uma peça sobre outra já colocada anteriormente.

Quem não conseguir colocar uma peça no tabuleiro perde.



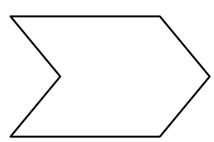
Qual dos dois jogadores tem uma estratégia vencedora, ou seja, uma estratégia que o leva à vitória quaisquer que sejam as jogadas de seu adversário, para:

(a) $n = 2004$?

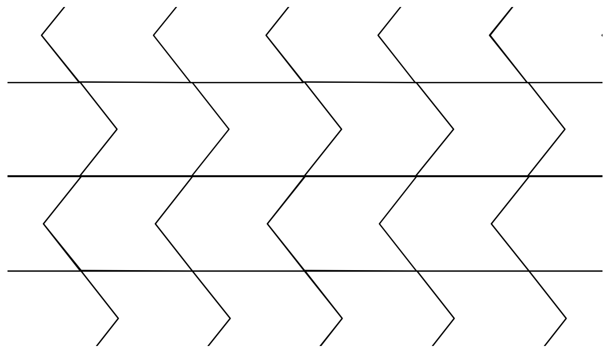
(b) $n = 2005$?

PROBLEMA 5:

Considere o polígono $\boldsymbol{P}$ de 6 lados.



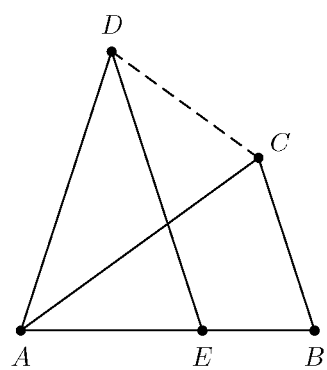
Com cópias de ***P***, podemos cobrir todo o plano, sem sobreposições, como mostrado a seguir.



Existe um polígono de 13 lados com o qual é possível cobrir todo o plano com suas cópias, sem sobreposições? Caso seja possível, apresente um polígono. Caso não seja, diga o porquê.

PROBLEMAS – NÍVEL 2

PROBLEMA 1:
Na figura, *ABC* e *DAE* são triângulos isósceles (*AB* = *AC* = *AD* = *DE*) e os ângulos *BAC* e *ADE* medem 36°.



a) Utilizando propriedades geométricas, calcule a medida do ângulo $E\hat{D}C$.
b) Sabendo que *BC* = 2, calcule a medida do segmento *DC*.
c) Calcule a medida do segmento *AC*.

PROBLEMA 2:
A seqüência de algarismos

$$1, 2, 3, 4, 0, 9, 6, 9, 4, 8, 7, \ldots$$

é construída da seguinte maneira: cada elemento, a partir do quinto, é igual ao último algarismo da soma dos quatro anteriores.
a) Os algarismos 2, 0, 0, 4, juntos e nesta ordem, aparecem na seqüência?
b) Os algarismos iniciais 1, 2, 3, 4, juntos e nesta ordem, aparecem novamente na seqüência?

PROBLEMA 3:
Esmeralda tem uma pilha com 100 pedras. Ela divide essa pilha em duas novas pilhas e em seguida multiplica as quantidades de pedras nessas duas novas pilhas e escreve o produto em um quadro. Ela então escolhe uma pilha com mais de uma pedra e repete esse procedimento: a pilha é dividida em duas, as quantidades de pedras nessas duas pilhas são multiplicadas e o produto escrito no quadro. Esta operação é realizada até se obter apenas pilhas com 1 pedra cada.
Quais são os possíveis valores da soma de todos os produtos escritos no quadro?

PROBLEMA 4:
Em um jogo para dois participantes, Arnaldo e Bernaldo alternadamente escolhem um número inteiro positivo. A cada jogada, deve-se escolher um número maior que o último número escolhido e menor que o dobro do último número escolhido.
Nesse jogo, vence o jogador que conseguir escolher o número 2004. Arnaldo joga primeiro e inicia com o número 2. Qual dos dois tem estratégia vencedora, ou seja, consegue escolher o número 2004 independentemente das jogadas do adversário?

PROBLEMA 5:
Seja D o ponto médio da hipotenusa AB de um triângulo retângulo ABC. Sejam O_1 e O_2 os circuncentros dos triângulos ADC e DBC, respectivamente.
a) Mostre que $O_1\hat{D}O_2$ é reto.
b) Mostre que AB é tangente ao círculo de diâmetro O_1O_2.

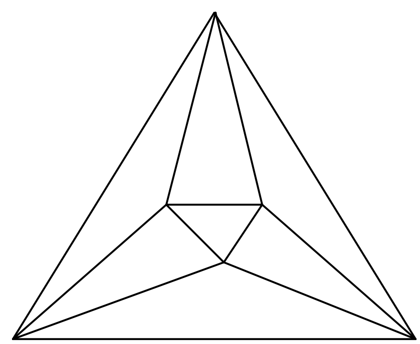
PROBLEMA 6:
Considere todas as maneiras de colocarmos nas casas de um tabuleiro 10×10 exatamente dez vezes cada um dos algarismos 0, 1, 2, …, 9.
Encontre o maior inteiro n com a propriedade de que, em cada tabuleiro, alguma linha ou alguma coluna contenha pelo menos n algarismos diferentes.

PROBLEMAS – NÍVEL 3

PROBLEMA 1:
Seja *ABCD* um quadrilátero convexo. Prove que os incírculos de *ABC*, *BCD*, *CDA* e *DAB* têm um ponto em comum se, e somente se, *ABCD* é um losango.

PROBLEMA 2:
Determine todos os valores de n tais que é possível dividir um triângulo em n triângulos de modo que não haja três vértices alinhados e em cada vértice incida o mesmo número de segmentos.

Mostramos a seguir tal divisão para $n = 7$. Observe que em cada um dos seis vértices incidem quatro segmentos.



PROBLEMA 3:
Seja $x_1, x_2, \ldots, x_{2004}$ uma seqüência de números inteiros satisfazendo $x_{k+3} = x_{k+2} + x_{k+1}x_k$, $1 \le k \le 2001$.

É possível que mais da metade de seus termos sejam negativos?

PROBLEMA 4:
Considere todas as maneiras de colocarmos nas casas de um tabuleiro 10×10 exatamente dez vezes cada um dos algarismos 0, 1, 2, …, 9.

Encontre o maior inteiro n com a propriedade de que, em cada tabuleiro, alguma linha ou alguma coluna contenha pelo menos n algarismos diferentes.

PROBLEMA 5:

Considere a seqüência $(a_n)_{n\in N}$ com $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 1$ e $a_n a_{n-4} = a_{n-1}a_{n-3} + a_{n-2}^2$.

Mostre que todos os termos dessa seqüência são números inteiros.

PROBLEMA 6:

Sejam a e b números reais. Considere a função $f_{a,b}: R^2 \to R^2$ definida por $f_{a,b}(x;y) = (a - by - x^2; x)$. Sendo $P = (x;y) \in R^2$, definimos $f_{a,b}^0(P) = P$ e $f_{a,b}^{k+1}(P) = f_{a,b}(f_{a,b}^k(P))$, para k inteiro não negativo.

O conjunto *per*(a; b) dos *pontos periódicos* da função $f_{a,b}$ é o conjuntos dos pontos P de R^2 para os quais existe um inteiro positivo n tal que $f_{a,b}^n(P) = P$.

Fixado o real b, prove que o conjunto $A_b = \{a \in R \mid per(a,b) \neq \emptyset\}$ tem um menor elemento. Calcule esse menor elemento.

SOLUÇÕES – NÍVEL 1

PROBLEMA 1: SOLUÇÃO DE DIANA VAISMAN (RIO DE JANEIRO - RJ)

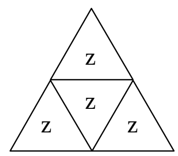
Números ímpares que são quadrados perfeitos	Soma dos quadrados dos algarismos
121	1 + 4 + 1 = 6
169	1 + 36 + 81 = 118
225	4 + 4 + 25 = 33
289	4 + 64 +81 = 149
361	9 + 36 + 1 = 46
441	16 + 16 + 1 = 33
529	25 + 4 + 81 = 110
625	36 + 4 + 25 = 65
729	49 + 4 + 81 = 134
841	64 + 16 + 1 = 81
961	81 + 36 + 1 = 118

Resposta: 841

PROBLEMA 2: SOLUÇÃO DE HUGO FONSECA ARAÚJO (JUIZ DE FORA - MG):

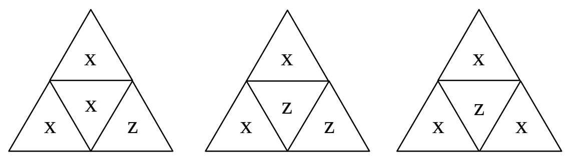
Posso pintar de 33 modos.

Com 1 cor o desenho é este:



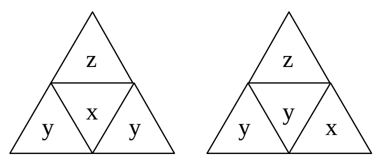
sendo *z* uma das três cores.

Com 2 cores tenho estes desenhos:



Sendo x uma das três cores e z também.

Com 3 cores tenho estes desenhos



Sendo x uma das três cores e y e z também.

Com 1 cor tenho 3×1 possibilidades.

Com 2 cores tenho $3 \times 2 \times 3 = 18$ possibilidades.

Com 3 cores tenho $3 \times 2 \times 1 \times 2 = 12$ possibilidades.

No total tenho $12 + 18 + 3 = 33$ possibilidades.

PROBLEMA 3: SOLUÇÃO DE ILLAN FEIMAN HALPERN (ITATIAIA - RJ):

O número $2^{(2^{2004}+2)}+1$ é equivalente a $4^{(2^{2003}+1)}+1$.

Como toda potência de 2 é par então $2^{2003}+1$ será ímpar.

Como 4 elevado a um número ímpar dá um número cujo último algarismo é 4, então $4^{(2^{2003}+1)}+1$ terá 5 como último algarismo.

Como todo número que termina com 5 é múltiplo de 5 então o número $2^{(2^{2004}+2)}+1$ será múltiplo de 5 e poderá ser escrito como $5x$, com x maior do que 1, o que prova que $2^{(2^{2004}+2)}+1$ é composto.

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DE JAMES JUN HONG (SÃO PAULO – SP):

Para n ímpar, Arnaldo tem a estratégia vencedora. Para n par, Bernaldo tem a estratégia vencedora.

Quando o número n for ímpar, basta Arnaldo começar com um dominó na vertical.

Sejam quais forem as jogadas de Bernaldo, Arnaldo vencerá. Se Bernaldo puser um dominó na vertical, Arnaldo deverá por na vertical também, em qualquer lugar do tabuleiro. Se Bernaldo puser na horizontal, Arnaldo deverá por um exatamente acima ou abaixo da peça de Bernaldo. Seguindo as regras, Arnaldo vencerá porque não sobrará nenhum espaço e o número de jogadas será ímpar. Como Arnaldo começa, ele também termina e Bernaldo não poderá colocar uma peça no tabuleiro cheio.

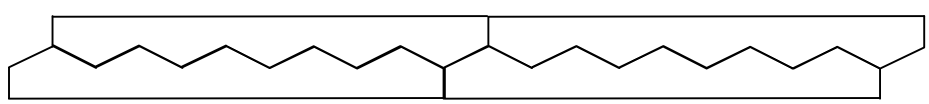
Se o número n for par, Bernaldo vence. As regras para preenchimento são as mesmas já citadas: se Arnaldo puser um dominó na vertical, Bernaldo deverá fazer o mesmo. Se Arnaldo puser na horizontal, Bernaldo deverá colocar na horizontal, acima ou abaixo da peça de Arnaldo. Como o número de jogadas, seguindo as regras, será par, Bernaldo terminará de preencher o tabuleiro porque Arnaldo começa. Conseqüentemente, Arnaldo não poderá colocar nenhuma peça e perderá.

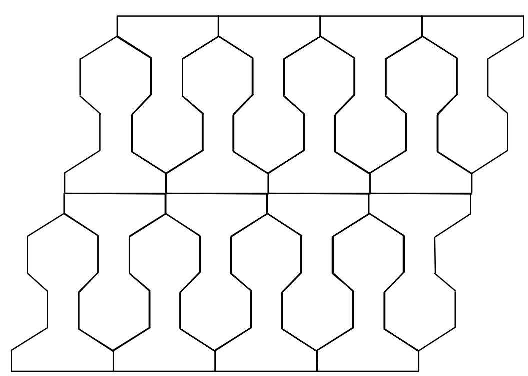
Lembramos que sendo o tabuleiro $2 \times n$, n é o número máximo de jogadas pois o dominó ocupa 2 casas do tabuleiro.

a) sendo 2004 par, Bernaldo vence.

b) sendo 2005 ímpar, Arnaldo vence.

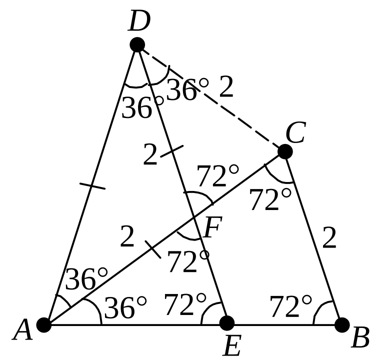
PROBLEMA 5:
SOLUÇÕES DE WALLACE J. INOCÊNCIO e CAROLINE RIGOLON VEIGA (RIO DE JANEIRO - RJ)





SOLUÇÕES – NÍVEL 2

PROBLEMA 1: SOLUÇÃO DE VALTER BARBALHO LIMA FILHO :



a) I) $\overline{AD} = \overline{DE} \Rightarrow D\hat{E}A = D\hat{A}E = \dfrac{180° - 36°}{2} = 72° \Rightarrow DAF = 36°$

II) $\overline{AD} = \overline{AC} \Rightarrow A\hat{D}C = A\hat{C}D = \dfrac{180° - 36°}{2} = 72° \Rightarrow EDC = 36°$

b) I) $\Delta ADE \equiv \Delta ACB (LAL) \Rightarrow AE = 2.$

II) $\angle AFE = 72° \Rightarrow AE = AF = 2$

III) $A\hat{D}F = F\hat{A}D = 36° \Rightarrow AF = FD = 2$

IV) $D\hat{F}C = D\hat{C}F = 72° \Rightarrow DC = FD = 2$

c) I) Seja $AC = AB = x.$

Temos $\Delta AFE \sim \Delta ACD = \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{FE}{CB} \Rightarrow \dfrac{2}{x} = \dfrac{FE}{2} \Rightarrow x \cdot FE = 4 \Rightarrow FE = \dfrac{4}{x}$

II) $DE = x \Rightarrow DF = DE - FE \Rightarrow DF = x - \dfrac{4}{x} \Rightarrow DF = \dfrac{x^2 - 4}{x}$

III) $DF = AF = 2 \Rightarrow \dfrac{x^2 - 4}{x} = 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1 + \sqrt{5}$

IV) $AC = DE = x = 1 + \sqrt{5}.$

PROBLEMA 2: SOLUÇÃO DE RÉGIS PRADO BARBOSA (FORTALEZA - CE):

a) note que se um natural n é par ou ímpar, $n - 10k$ terá mesma paridade pois

$$\begin{cases} n \text{ par } = 2t \Rightarrow 2t - 10k = 2(t - 5k) \rightarrow \text{ par} \\ n \text{ ímpar } = 2t + 1 \Rightarrow 2t + 1 - 10k = 2(t - 5k) + 1 \rightarrow \text{ par} \end{cases}$$

logo se a soma de quatro números da seqüência tiver certa paridade o quinto número terá a mesma.
Seja agora: i = No. ímpar p = No. par
1, 2, 3, 4, 0, 9, 6, 9, 4, 8, 7, 8, 7, 0, 2…
i, p, i, p, p,   i, p, i, p, p,   i, p, i, p, p…

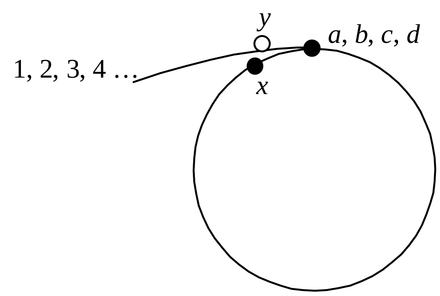
Note que as paridades se repetem de 5 em 5 números. Provemos que de fato ela é sempre assim.

Por indução: 1, 2, 3, 4, 0, 9, 6, 9, 4, 8…
Caso inicial: $\underbrace{i, p, i, p, p}_{a_1}, \underbrace{i, p, i, p, p}_{a_2}...$

Hipótese: suponha que dá certo até o a_k –ésimo período.
Passo indutivo: $...\underbrace{i, p, i, p, p}_{a_k}\ a, b, c, d, e\ldots$

$a \equiv p + i + p + p \equiv i (mod 10),$ logo a é ímpar.
$b \equiv i + p + p + a \equiv i + p + p + i \equiv p (mod 10),$ logo b é par.
$c \equiv p + p + a + b \equiv p + p + i + p \equiv i (mod 10),$ logo c é ímpar.
$d \equiv p + a + b + c \equiv p + i + p + i \equiv p (mod 10),$ logo d é par.
$e \equiv a + b + c + d \equiv i + p + i + p \equiv p (mod 10),$ logo e é par.
Assim, *a*, *b*, *c*, *d*, *e* = $\underbrace{i, p, i, p, p}_{a_{k+1}}$, e logo nunca poderemos chegar a 2, 0, 0, 4, pois não poderemos ter 4 p's seguidos.

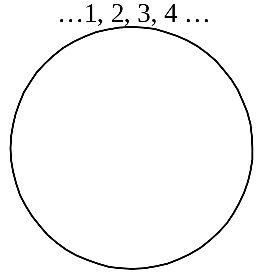
b) Veja que, para esta seqüência, a seqüência dos grupos de 4 termos consecutivos dela não poderá ter infinitos termos diferentes, pois não temos infinitas possibilidades para *a*, *b*, *c*, *d*: serão no máximo
$\underbrace{a}_{10}, \underbrace{b}_{10}, \underbrace{c}_{10}, \underbrace{d}_{10} = 10^4$ possibilidades (aqui são contadas possibilidades que, assim como vimos no item *a*), não podem aparecer, mas o que queremos com isso não é achar um número exato mas sim um máximo e mostrar que as possibilidades são finitas). Assim, num certo ponto começarão a se repetir os números formando um período, assim:



Mas note que se: y é o último número antes de começar a repetição, x é o último número do período e a, b, c, d são os 4 primeiros números do período, teremos $y + a + b + c \equiv d \pmod{10}$ e $x + a + b + c \equiv d \pmod{10}$

logo $y \equiv d - a - b - c \equiv x \pmod{10}$, e $x \equiv y \pmod{10}$, $0 \le x \le 9$ e $0 \le y \le 9 \Rightarrow x = y$.

Se fizermos isso várias vezes veremos que na verdade o período é:



Logo ele aparecerá novamente.

PROBLEMA 3: SOLUÇÃO DE RÉGIS PRADO BARBOSA (FORTALEZA - CE):

Note que se temos uma pilha com a pedras e fazemos o processo dividindo-a em duas pilhas com b e e pedras o número escrito será $b \times e$, mas se a foi dividido em b e, temos:

$$b + e = a \Rightarrow (b+e)^2 = a^2 \Rightarrow b^2 + 2be + e^2 = a^2 \Rightarrow 2be = a^2 - b^2 - e^2 \Rightarrow be = \frac{a^2 - b^2 - e^2}{2}.$$

Assim note que a soma será:

$b_1 \cdot b_2 + b_3 \cdot b_4 ... + b_i \cdot b_{i+1} = S$ (b_i = No. de pedras na pilha i)

$$\frac{100^2 - b_1^2 - b_2^2}{2} + \frac{b_1^2 - b_3^2 - b_4^2}{2} ... + \frac{{b_{i-1}}^2 - b_i^2 - {b_{i+1}}^2}{2} = S$$

veja só que se $b_t > 1$ ele ainda será dividido em mais pilhas, ou seja quando ele aparecer será: $\frac{b_x^2 - b_t^2 - b_y^2}{2}$ mas se é $b_t > 1$ aparecerá também $\frac{b_t^2 - b_z^2 - b_w^2}{2}$. Assim, os b_t^2 terão soma 0, a não ser quando $b_t = 1$ e, como a pilha inicial tem 100 pedras, no fim são 100 pilhas com 1 pedra cada, e teremos:

$$S = \frac{100^2 - \underbrace{1^2 - 1^2 - \ldots - 1^2}_{100 \text{ vezes}}}{2} = \frac{10000 - 100 \cdot 1^2}{2} = \frac{9900}{2}.$$

$S = \frac{9900}{2} \Rightarrow S = 4950$ e esta é a única possibilidade.

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DE HENRIQUE PONDÉ DE OLIVEIRA PINTO (SALVADOR - BA):

Seja uma Rodada definida como a jogada de cada jogador assim na 1ª Rodada Arnaldo escolheu o número 2 e na 2ª Rodada Bernaldo será obrigado a escolher um número maior que 2 e menor que 2 × 2 = 4 logo na 2ª Rodada será escolhido o número 3. Sejam os dois jogadores do enunciado os jogadores *X* e *Y*.

1. Suponha que o jogador *X* escolhe 2004 e ganha na Rodada *n*.
2. Para isso *Y* teria que ter escolhido qualquer número entre 1003 e 2003 na Rodada *n* – 1 e isso é visto facilmente.
3. A jogada de *X* na Rodada *n* – 2 teria que ser 1002, pois se fosse maior ou menor que 1002 *Y* não seria obrigado a escolher um número entre 1003 e 2003 na Rodada *n* – 1.
4. Para *X* ter escolhido 1002 na Rodada *n* – 2 *Y* teria que ter escolhido um número entre 502 e 1001 na Rodada *n* – 3.
5. A jogada de *X* na Rodada *n* – 4 teria que ser 501, pois se fosse maior ou menor que 501, *Y* não seria obrigado a escolher um número entre 502 e 1001 na Rodada *n* – 3.
6. Para *X* ter escolhido 501 na Rodada *n* – 4, *Y* teria que ter escolhido um número entre 251 e 500 na Rodada *n* – 5.
7. A jogada de *X* na Rodada *n* – 6 teria que ser 250, pois se fosse maior ou menor que 250, *Y* não seria obrigado a escolher um número entre 251 e 500 na Rodada *n* – 5.

Agora que o raciocínio da questão já foi monstrado podemos continuar sem escrever tanto.

Rodada *n* – 6: (*X*): 250 (Como 7. mostrou)
Rodada *n* – 7: (*Y*): Entre 126 e 249
Rodada *n* – 8: (*X*): 125

Rodada n – 9: (Y): Entre 63 e 124
Rodada n – 10: (X): 62
Rodada n – 11: (Y): Entre 32 e 61
Rodada n – 12: (X): 31
Rodada n – 13: (Y): Entre 16 e 30
Rodada n – 14: (X): 15
Rodada n – 15: (Y): Entre 8 e 14
Rodada n – 16: (X): 7
Rodada n – 17: (Y): Entre 4 e 6
Rodada n – 18: (X): 3
Rodada n – 19: (Y): 2

Logo X = Bernaldo e Y = Arnaldo, e como X ganha, Bernaldo ganha.

Obs: Quando falo números entre r e s, r e s estão incluídos neste intervalo.

PS: Observe as jogadas de Bernaldo: 3, 7, 15, 31, 62, 125, 250, 501, 1002, 2004. Se ele escolhe x na Rodada a escolhe $2x$ ou $2x + 1$ na Rodada $a + 2$. Isso nos leva a uma observação que se Bernaldo escolhe x na Rodada a, Arnaldo pode escolher entre $x + 1$ e $2x – 1$ na Rodada $a + 1$, o que implica que Bernaldo pode escolher $2x$ ou $2x + 1$ na Rodada $a + 2$, SEMPRE. Isso nos leva a pensar no sistema binário de numeração. Ou seja, se na Rodada a o Jogador escolheu o número $A_nA_{n-1}...A_0$, na Rodada $a + 2$ pode escolher os números $A_nA_{n-1}.....A_00$ ou $A_nA_{n-1}...A_01$. Logo ele pode ir "adicionando" algarismos à direita da representação binária do número. Veja que os dois algarismos à esquerda de um número no sistema binário são 10 ou 11 e que o 1º número do 1º jogador é $2 = (10)_2$ e o do 2º é $3 = (11)_2$. Logo se K é o número a ser alcançado, se K começar com 10 no sistema binário o 1º ganha e se K começar com 11, no sistema binário o 2º ganha. Como a representação binária de 2004 é 11111010100 que começa com 11 temos que o 2º ganha.

PROBLEMA 5: SOLUÇÃO DE LÚCIO EIJI ASSAOKA HOSSAKA (CURITIBA - PR):

a) Primeiro, é necessário dizer que ΔABC pode ser inscrito em uma circunferência de raio AD, onde AB é o diâmetro, pois $A\widehat{C}B$ e reto e deve estar compreendendo um arco $\overset{\frown}{AB} = 180°$, que é uma semi-circunferência. Logo, por D ser centro dessa circunferência, $AD = BD = CD$, e os triângulos ACD e BCD são isósceles, tendo AC e BC como base, respectivamente.

Logo, a mediatriz de AC contém O_1 assim como D (pois D está à mesma distância de A e C, assim como todos os pontos da mediatriz). Da mesma maneira, a mediatriz

de $\overline{CB}$ contém O_2 e D (lembrando que o circuncentro é o encontro das mediatrizes dos lados do triângulo).
A mediatriz de AC é perpendicular a AC, e a mediatriz de CB é perpendicular a CB. Logo, ambas são perpendiculares entre si, pois AC e BC também o são. Como ambas contém D e são retas, elas se interceptam em D, e além disso cada uma contém um dos circuncentros, o que mostra que $O_1\widehat{D}O_2$ é reto.

b) Seja E o ponto médio de AD, e F o ponto médio de BD. A mediatriz de AD contém E e O_1, e portanto $O_1\widehat{E}D$ é um ângulo reto. Analogamente, $D\widehat{F}O_2$ é reto também.
Como E, D e F são colineares (AB contém os três), então EO_1 e FO_2 são segmentos paralelos entre si. Seja G o ponto médio de O_1O_2. Como O_1O_2D é um triângulo retângulo G é o centro do círculo que deveremos provar que é tangente a AB.
Perceba que G é o ponto médio de O_1O_2 assim como D é o ponto médio de EF (é óbvio que $ED = DF$, pois D é o ponto médio de AB), e que portanto $\frac{ED}{DF} = \frac{O_1G}{GO_2}$. DG é, portanto, paralelo a EO_1 e FO_2, pelo teorema de Tales. Assim, DG é perpendicular a AB, e como DG é raio do círculo de diâmetro O_1O_2, AB tangencia esse círculo.

PROBLEMA 6: SOLUÇÃO DE LÚCIO EIJI ASSAOKA HOSSAKA (CURITIBA - PR):
Se são 10 linhas e 10 colunas, então há espaço para 20 "presenças" de alguns dos 10 algarismos. "Presença" significa que cada vez que um número aparece em alguma linha ou coluna, significa uma "presença". No caso das linhas, por exemplo. Se um algarismo estiver distribuído dez vezes em duas linhas, são duas "presenças".
Assim como se algarismo aparecer apenas 3 vezes em 3 linhas, são 3 "presenças". n é maior que 3. Como já disse, cada algarismo ocupa pelo menos 3 linhas ou 3 colunas. Se um algarismo ocupar, por exemplo, 3 linhas, ocupará 4 colunas, pois se fossem 3 linhas e 3 colunas, apareceria, no máximo, 9 vezes. E vice-versa. O melhor jeito de distribuir os algarismos é fazer com que cada um tenha o mínimo de presenças. A soma das presenças de cada algarismo é no mínimo 7 (3 linhas e 4 colunas, e vice-versa, e 2 linhas e 5 colunas, e vice-versa), sendo $7 \times 10 = 70$ presenças no total. Se são 60 disponíveis (10 linhas e 10 colunas, cada uma podendo comportar 3 algarismos distintos), é impossível criar um tabuleiro com no máximo 3 algarismos diferentes em cada coluna e cada linha. portanto, n é maior que 3.
Assim, n é 4, pois é possível distribuir os números de forma e que cada linha e cada coluna tenha até 4 algarismos diferentes:

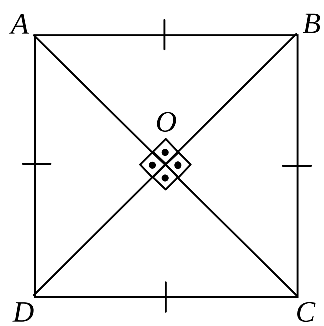
Assim, existe um arranjo que limita o valor de *n*, e esse valor é 4.

9	0	9	0	9	0	9	0	9	0
9	0	9	0	9	0	9	0	9	0
6	6	5	5	5	7	7	7	8	8
6	6	5	5	5	7	7	7	8	8
6	6	5	5	6	8	7	7	8	8
6	6	5	5	6	8	7	7	8	8
1	2	2	2	2	3	3	3	3	4
1	1	2	2	2	3	3	3	4	4
1	1	1	2	2	3	3	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4	4

SOLUÇÕES – NÍVEL 3

PROBLEMA 1: SOLUÇÃO DE EDSON AUGUSTO BEZERRA LOPES (FORTALEZA - CE):

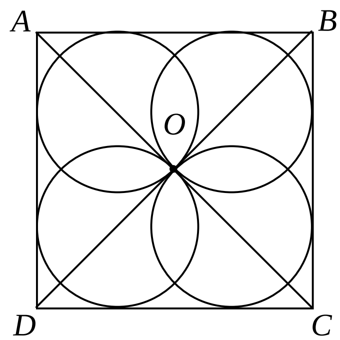
Parte 1)



Se *ABCD* é um losango, então *AB* = *BC* = *CD* = *DA*, ou seja, os triângulos *ABC*, *BCD*, *CDA*, *DAB* são todos isósceles. Veja também que $AC \perp BD$. Seja $AC \cap BD = O$. Como em um triângulo isósceles a altura relativa à base é também bissetriz. *AO*, *OB*, *OC*, *OD* possam pelos incentros de *DAB*, *ABC*, *BCD* e *CDA* respectivamente.

Como ao traçarmos uma perpendicular ao lado pelo incentro obtemos o ponto de toque do incírculo a esse lado, *O* está contido nos 4 incirculos, já que é o ponto de toque do incírculo na base dos 4 triângulos.

Parte 2)



Suponhamos agora que os 4 círculos têm um ponto em comum. Temos então que os incírculos dos triângulos ABC e ACD tocam AC no mesmo ponto, pois do contrário não teriam nenhum ponto em comum. Seja O esse ponto. Veja que se O estiver no interior do triângulo ABC o incírculo do triângulo BDC não o conterá, e seguindo o mesmo raciocínio vemos que O não está no interior do triângulo BDC. Logo O está sobre $BD \Rightarrow AC \cap BD = O$.

Sejam O_1, O_2, O_3 e O_4 Os incentros dos triângulos DAB, ABC, BCD e CDA, respectivamente. Suponhamos que AC e BD não são perpendiculares. Suponhamos agora, sem perda de generalidade, que $A\hat{O}B$ e $D\hat{O}C$ são obtusos e $B\hat{O}C$ e $A\hat{O}D$ são agudos. Claramente O_2 está no interior do triângulo AOB, pois já que $O_2O \perp AC$, temos $O_2\hat{O}C > B\hat{O}C$. Com o mesmo raciocínio encontramos que O_1 e O_2 estão no interior do triângulo AOB e que O_3 e O_4 estão no interior do triângulo COD. Seja $G_1 = AO_1 \cap BO_2$.

Claramente $G_1\hat{A}B = \dfrac{D\hat{A}B}{2}$ e $G_1\hat{B}A = \dfrac{A\hat{B}C}{2} \Rightarrow \dfrac{D\hat{A}B + A\hat{B}C}{2} = 180° - A\hat{G_1}B$

$= 180° - (O\hat{A}G_1 + O\hat{B}G_1 + A\hat{O}B) < 180° - A\hat{O}B \Rightarrow D\hat{A}B + A\hat{B}C < 2(180° - A\hat{O}B) < 180°,$

pois $A\hat{O}B > 90°$. De modo análogo temos

$B\hat{C}D + C\hat{D}A < 180° \Rightarrow D\hat{A}B + A\hat{B}C + B\hat{C}D + C\hat{D}A < 360° \Rightarrow 360° < 360°$. Absurdo!

Assim, $AC \perp BD$, donde $O_1 \in AO, O_2 \in BO, O_3 \in CO, O_4 \in DO \Rightarrow AO, BO, CO$ e DO são, além de alturas, bissetrizes $\Rightarrow ABC, BCD, CDA, DAB$ são isósceles $\Rightarrow AB = BC = CD = DA$

$\Rightarrow ABCD$ é um losango.

PROBLEMA 2: SOLUÇÃO DE LARISSA CAVALCANTE QUEIROZ DE LIMA (FORTALEZA - CE):

Seja N tal que o triângulo está dividido em N triângulos de modo que não há 3 vértices colineares e em cada vértice incida exatamente k segmentos.

Seja M o total de vértices (incluindo os vértices do triângulo dividido ABC).

Contando a soma dos ângulos de todos os triângulos temos:

$$\underbrace{180^\circ \cdot N}_{\text{pois há N } \Delta\text{'s}} = \underbrace{360^\circ(M-3)}_{\substack{\text{soma dos ângulos de cada} \\ \text{vértice do interior de } ABC}} + \underbrace{180^\circ}_{\substack{\text{soma dos ângulos} \\ \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}}}$$

$$\Rightarrow N = 2(M-3)+1 = 2M-6+1 = 2M-5$$

$$\Rightarrow M = \frac{N+5}{2}$$

Contando o total de segmentos:

$$\left.\underbrace{\frac{M \cdot k}{2}}_{\substack{\text{há } m \text{ vértices de} \\ \text{grau } k \text{ cada}}} = \frac{N \cdot 3 + 3}{2}\right\} \text{há } N \text{ triângulos e cada segmento é lado de dois triângulos, exceto os três segmentos: } AB, BC, CA.$$

$$\Rightarrow M \cdot k = 3N+3 \Rightarrow k = \frac{3N+3}{M} = \frac{3N+3}{(N+5)/2} = \frac{6N+6}{N+5} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow k = \frac{6(N+5)}{N+5} - \frac{24}{N+5} = 6 - \frac{24}{N+5}.$$

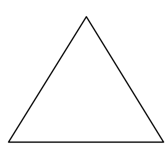
como k é inteiro, $N + 5$ deve ser um divisor de 24.

Assim, $N+5 = 6, 8, 12$ ou 24 (pois N é inteiro positivo)

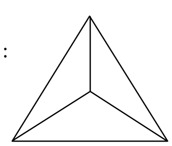
$\Rightarrow N = 1, 3, 7$ ou 19.

De fato, para cada um desses valores, há uma divisão do triângulo:

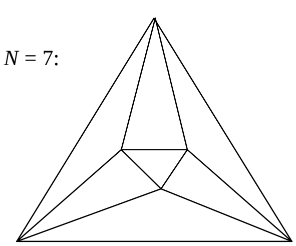
N = 1:



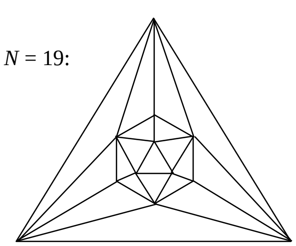
N = 3 :



N = 7:



N = 19:



Observação: as duas contagens feitas pela Larissa, se generalizadas, levam a uma demonstração do *Teorema de Euler*: sendo V, A, e F o número de vértices, arestas e faces, respectivamente, de um poliedro (ou se você quiser, um grafo plano), então $V - A + F = 2$. No problema 2, $F = n + 1$, $V = M$ e A é o número de segmentos.
Em contrapartida, também é possível resolver este problema usando o Teorema de Euler.

PROBLEMA 3: SOLUÇÃO DE FÁBIO DIAS MOREIRA (RIO DE JANEIRO - RJ):
Sim. Se tomarmos a suficientemente grande e $(x_1, x_2, x_3) = (a, -a, a)$, é trivial ver que cada x_i é um polinômio em a. Em particular, como a seqüência possui um número finito de termos, podemos tomar a suficientemente grande de tal forma que cada termo x_i da seqüência tenha o sinal do coeficiente líder do polinômio.
Mas é fácil ver que a seqüência dos termos líderes é:
$(a, -a, a, -a^2, -2a^2, -a^3, 2a^4, 2a^5, -2a^7, 4a^9, -4a^{12}, ...)$ e é fácil provar, por indução que dois termos líderes nunca se cancelam (basta notar que a partir de $-4a^{12}$, os exponentes dos dois termos anteriores são sempre maiores que metade do expoente do termo atual: isso é verdade para $-4a^{12}$, e se os expoentes são a, b e c, com $a > \frac{c}{2}$ e $b > \frac{c}{2}, a < b < c$ (já que a seqüência dos expoentes é crescente), então $b > \frac{a+b}{2}$ pois $b > a$ e $c > \frac{a+b}{2}$ pois $c > a$ e $c > b$). Mas a seqüência dos sinais dos termos líderes é claramente periódica de período 7:

$(+, -, +, -, -, -, +, +, -, +, -, -, -, +, +, -, +, ...)$

Logo a seqüência definida com o a supracitado e $x_1 = a, x_2 = -a, x_3 = a$ tem pelo menos $\left\lfloor \frac{4}{7} \cdot 2004 \right\rfloor > 1002$ termos negativos.

PROBLEMA 4:
Veja a solução do problema No. 6 do nível 2.

PROBLEMA 5: SOLUÇÃO DE FÁBIO DIAS MOREIRA (RIO DE JANEIRO - RJ):

Vamos demonstrar que a_n é sempre inteiro por indução: isto é evidentemente verdadeiro para n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (pois $a_4 = 2, a_5 = 3, a_6 = 7$ e $a_7 = 23)$. Suponha então que $n \geq 8$, e $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ são todos inteiros.

Lema: Se $0 < k < n,$ então $(a_k, a_{k-1}) = 1.$

Prova: O resultado é evidentemente verdadeiro para k =1.

Suponha-o verdadeiro para k – 1. Então

$(a_k, a_{k-1}) = \left(\dfrac{a_{k-1}a_{k-3} + a_{k-2}^2}{a_{k-4}}, a_{k-1}\right) \leq (a_{k-1}a_{k-3} + a_{k-2}^2, a_{k-1}) = (a_{k-2}^2, a_{k-1}) = 1,$ pois $(a_{k-1}, a_{k-2}) = 1.$ Logo o resultado é válido para todo $0 < k < n.$

Corolário: $1 < k < n \Rightarrow (a_k, a_{k-2}) = 1$ e $2 < k < n \Rightarrow (a_k, a_{k-3}) = 1.$

Prova: Basta notar que

$(a_k, a_{k-2}) \leq (a_{k-1}a_{k-3} + a_{k-2}^2, a_{k-2}) = (a_{k-1}a_{k-3}, a_{k-2}) \leq (a_{k-1}, a_{k-2}) \cdot (a_{k-3}, a_{k-2}) = 1 \cdot 1 = 1$

e $(a_k, a_{k-3}) \leq (a_{k-1}a_{k-3} + a_{k-2}^2, a_{k-3}) = (a_{k-2}^2, a_{k-3}) \leq (a_{k-2}, a_{k-3})^2 = 1^2 = 1.$

Para provar que a_n é inteiro, basta provar que $a_{n-4} \mid a_{n-1}a_{n-3} + a_{n-2}^2.$

Em outras palavras, temos que demonstrar que

$$a_{n-3}a_{n-1} + a_{n-2}^2 \equiv 0 \pmod{a_{n-4}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{a_{n-6}a_{n-4} + a_{n-5}^2}{a_{n-7}} \cdot \frac{a_{n-4} \cdot a_{n-2} + a_{n-3}^2}{a_{n-5}} + \left(\frac{a_{n-5}a_{n-3} + a_{n-4}^2}{a_{n-6}}\right)^2 \equiv 0 \pmod{a_{n-4}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{a_{n-6}^2(a_{n-6}a_{n-4} + a_{n-5}^2)(a_{n-4}a_{n-2} + a_{n-3}^2) + a_{n-5}a_{n-7}(a_{n-5}a_{n-3} + a_{n-4}^2)^2}{a_{n-5}a_{n-6}^2a_{n-7}} \equiv 0 \pmod{a_{n-4}}$$

Pelo Lema, podemos multiplicar por $a_{n-5}a_{n-6}^2a_{n-7}$ e manter a equivalência, logo basta provar que

$$a_{n-6}^2(a_{n-6}a_{n-4} + a_{n-5}^2)(a_{n-4}a_{n-2} + a_{n-3}^2) + a_{n-5}a_{n-7}(a_{n-5}a_{n-3} + a_{n-4}^2)^2 \equiv 0 \pmod{a_{n-4}}$$

$$\Leftrightarrow a_{n-5}^2a_{n-3}^2(a_{n-6}^2 + a_{n-7}a_{n-5}) \equiv 0 \pmod{a_{n-4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{n-5}^2a_{n-3}^2a_{n-4}a_{n-8} \equiv 0 \pmod{a_{n-4}} \Leftrightarrow 0 \equiv 0 \pmod{a_{n-4}}.$$

PROBLEMA 6: SOLUÇÃO DE GABRIEL TAVARES BUJOKAS (SÃO PAULO - SP):

Resposta: $\dfrac{-(b+1)^2}{4}.$

Seja k o tamanho do ciclo, $P = (x_1, x_0)$, $f_{a,b}^r(P) = (x_{r+1}, x_r)$, para todo $r \in \mathbb{N}$.

Logo $\left| \begin{array}{l} x_0 = a - bx_{k-2} - x_{k-1}^2 \\ x_1 = a - bx_{k-1} - x_0^2 \\ x_2 = a - bx_0 - x_1^2 \\ \quad\quad \vdots \\ x_{k-1} = a - bx_{k-3} - x_{k-2}^2 \end{array} \right.$ $\Rightarrow$ Sendo $S_1 = \sum x_i$, $S_2 = \sum x_i^2$, temos $S_1(b+1) + S_2 = k_a$

$$\underbrace{\sqrt{\frac{S_2}{k}} \geq \frac{\sum |x_i|}{k}}_{MQ \geq MA} \geq \frac{S_1}{k} \Rightarrow S_2 \geq \frac{S_1^2}{k}$$

Logo: $ka \geq \frac{S_1^2}{k} + S_1(b+1) \Rightarrow \frac{x^2}{k} + x(b+1) - ka$ tem raiz $\Rightarrow \Delta = (b+1)^2 + 4a \geq 0 \Rightarrow a \geq \frac{-(b+1)^2}{4}$.

Para $a = \frac{-(b+1)^2}{4}$: $f_{a,b}\left(-\frac{(b+1)}{2}; -\frac{(b+1)}{2}\right) = \left(-\frac{(b+1)}{2}; -\frac{(b+1)}{2}\right) \Rightarrow$ *per* $(a,b) \neq \varnothing$.

XXVI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e Soluções da Primeira Fase – Nível Universitário

PROBLEMA 1:

Considere a matriz complexa $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule A^{2004}.

PROBLEMA 2:

Calcule a integral: $\int_{-1}^{1} \frac{x^{2004}}{1+e^x} dx$

PROBLEMA 3:

Determine a equação da reta que tangencia a curva de equação $y = 3x^4 - 4x^3$ em dois pontos distintos.

PROBLEMA 4:

Quantas triplas ordenadas (A, B, C) de subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ existem para as quais $A \cap B \cap C = \varnothing$; $A \cap B \neq \varnothing$; $A \cap C \neq \varnothing$?

PROBLEMA 5:

Considere a matriz A $n \times n$ definida por $a_{ij} = n(i-1) + j$, para todos $1 \le i, j \le n$.

As interseções de k linhas e k colunas quaisquer de A determinam uma ***submatriz*** de ordem k de A. Seja $\varphi(n)$ a soma dos determinantes de todas as submatrizes de A.

a) Determine λ real de forma que $\lim_{n \to +\infty} \frac{\varphi(n)}{n^\lambda}$ exista e seja não nulo.

b) Determine o valor do limite acima para o valor de λ encontrado.

PROBLEMA 6:

Calcule $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)(3k+3)}$.

SOLUÇÕES – PRIMEIRA FASE – NÍVEL UNIVERSITÁRIO

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

Temos $A^4 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, donde $A^{4k} = \begin{pmatrix} (-4)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^k \end{pmatrix}$.

Em particular, $A^{2004} = \begin{pmatrix} -2^{1002} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2^{1002} \end{pmatrix}$.

Soluções cujo único erro se refere aos sinais:

SEGUNDA SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

Diagonalizando A, temos $A = XDX^{-1}$ onde $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}$

Assim,

$$A^{2004} = X\begin{pmatrix} (1+i)^{2004} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-i)^{2004} \end{pmatrix}X^{-1} = X\begin{pmatrix} -2^{1002} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2^{1002} \end{pmatrix}X^{-1} = \begin{pmatrix} -2^{1002} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2^{1002} \end{pmatrix}.$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:

Por substituição, $\int_{-1}^{1} \frac{x^{2004}}{1+e^x}dx = \int_{-1}^{1} \frac{x^{2004}}{1+e^{-x}}dx$.

Assim

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^{2004}}{1+e^x}dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} \frac{x^{2004}}{1+e^x}dx + \int_{-1}^{1} \frac{x^{2004}}{1+e^{-x}}dx\right) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^{2004}\left(\frac{1}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^{-x}}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^{2004}dx = \int_{0}^{1} x^{2004}dx = \frac{1}{2005}.$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

Queremos encontrar a e b tais que, $P = 3x^4 - 4x^3 - ax - b$ tenha duas raízes reais duplas; em particular, P deve ser um quadrado perfeito.

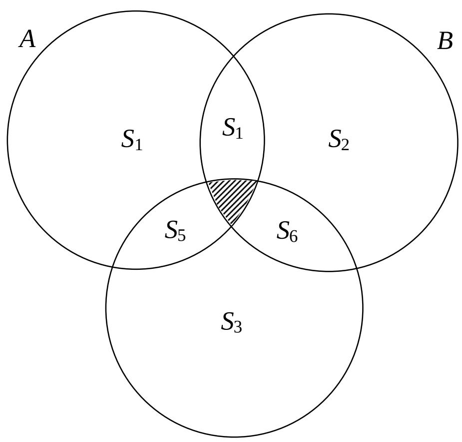
$$3x^4 - 4x^3 - ax - b = (cx^2 + dx + e)^2$$
$$= c^2x^4 + 2cdx^3 + (2ce + d^2)x^2 + 2dex + e^2$$

implica em $c = \pm\sqrt{3}, d = -2\dfrac{c}{3},\ e = -2\dfrac{c}{9}$ donde $a = \dfrac{-8}{9},\ \ b = \dfrac{-4}{27}.$

Assim a reta tem equação $y = -\dfrac{8}{9}x - \dfrac{4}{27}.$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:

Vamos contar inicialmente o número de escolhas tais que $A \cap B \cap C = \varnothing$.



Cada elemento de $\{1,2,\ldots,n\}$ pode ser colocado em um dos 7 subconjuntos indicados acima

(S_1, S_2, …,S_7). Logo há 7^n tais escolhas.

Fazendo um raciocínio similar, temos, dentre essas escolhas, 6^n com $A \cap B = \varnothing$; 6^n com $A \cap C = \varnothing$ e 5^n com $A \cap B = \varnothing$ e $A \cap C = \varnothing$.

Portanto, pelo princípio de Inclusão-Exclusão, há $7^n - 2 \cdot 6^n + 5^n$ maneiras de escolher A, B, C.

SOLUÇÃO ALTERNATIVA DO PROBLEMA 4:

Fixe o número k de elementos de $A \cap B$ $(1 \le k \le n)$, e j de $A \cap C$ $(1 \le j \le n - k)$.

Há $\binom{n}{k}$ modos de escolher esses k elementos, $\binom{n-k}{j}$ modos de escolher os j e 5 regiões permitidas para cada um dos outros $n-k-j$ elementos, de forma que a resposta é:

$$R = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-k}\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}5^{n-k-j} = \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}\cdot\sum_{j=1}^{n-k}\binom{n-k}{j}5^{n-k-j}\right)$$

Utilizando o binômio de Newton, tem-se

$$\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}5^{n-k-j} = (1+5)^{n-k} = 6^{n-k}.$$

Portanto,

$$R = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}6^{n-k} - \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}5^{n-k} = 7^n - 6^n - (6^n - 5^n) = 7^n - 2\cdot 6^n + 5^n.$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5:

Se $k \geq 3$, qualquer submatriz de ordem k de A determinada por k linhas e k colunas tem determinante O. De fato, se $j_1 < j_2 < j_3$ são índices de 3 das k colunas da submatriz, denotando essas colunas por C_{j_1}, C_{j_2} e C_{j_3}, temos que todas as entradas de $C_{j_2} - C_{j_1}$ são iguais a $j_2 - j_1$ e todas as entradas de $C_{j_3} - C_{j_2}$ são iguais a $j_3 - j_2$, donde $C_{j_3} - C_{j_2} = \dfrac{j_3 - j_2}{j_2 - j_1}\cdot(C_{j_2} - C_{j_1})$, e logo $C_{j_3} = \dfrac{j_3 - j_1}{j_2 - j_1}\cdot C_{j_2} - \dfrac{j_3 - j_2}{j_2 - j_1}\cdot C_{j_1}$.

Assim, $\varphi(n)$ é a soma dos determinantes das submatrizes de A de ordem 1 ou 2. A soma dos determinantes das submatrizes de A de ordem 1 é $\sum_{m=1}^{n^2} m = \dfrac{n^2(n^2+1)}{2}$.

As submatrizes de ordem 2 são obtidas da seguintes forma:

Dados $1 \leq a < b \leq n$ e $1 \leq c < d \leq n$, associamos a seguinte submatriz de ordem 2:

$\begin{pmatrix} n(a-1)+c & n(a-1)+d \\ n(b-1)+c & n(b-1)+d \end{pmatrix}$, cujo determinante é

$n((a-1)d + (b-1)c - (b-1)d - (a-1)c) = n(a-b)(d-c)$. Assim, a soma dos determinantes das submatrizes de ordem 2 é

$$n\left(\sum_{1\le a<b\le n}(a-b)\right)\left(\sum_{1\le c<d\le n}(d-c)\right)=-n\left(\sum_{1\le i<j\le n}(j-i)\right)^2=-n\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{j-1}r\right)^2=-n\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{j(j-1)}{2}\right)^2=$$

$=-\dfrac{n}{4}\left(\dfrac{n^3}{3}+g(n)\right)^2$, onde $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{g(n)}{n^3}=0$ (de fato, $g(n)$ é um polinômio de grau 2).

Assim, como $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^7}\left(\dfrac{n^2(n^2+1)}{2}\right)=0$ e

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^7}\cdot\left(-\frac{n}{4}\left(\frac{n^3}{3}+g(n)\right)^2\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{g(n)}{n^3}\right)^2\right)=-\frac{1}{36},$$

Temos $\lambda=7$ e $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\varphi(n)}{n^7}=-\dfrac{1}{36}$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6:

Decompondo em frações parciais, procuramos constantes A, B e C tais que:

$$\frac{1}{(3k+1)(3k+2)(3k+3)}=\frac{A}{3k+1}+\frac{B}{3k+2}+\frac{C}{3k+3}\quad (1)$$

Comparando os numeradores, verifica-se que (1) é identidade para

$A=\dfrac{1}{2},\ B=-1,\ C=\dfrac{1}{2}$.

Sendo S a soma procurada: $2S=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3k+1}-\frac{2}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}$.

Como $\dfrac{1}{3k+1}=\displaystyle\int_0^1 x^{3k}dx$, tem-se $2S=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1\left(x^{3k}-2x^{3k+1}+x^{3k+2}\right)dx$.

Trocando a integral com o somatório e somando a PG infinita:

$$2S=\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^{3k}-2x^{3k+1}+x^{3k+2}\right)dx=\int_0^1\left((1-2x+x^2)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}x^{3k}\right)dx=\int_0^1\frac{(1-x)^2}{1-x^3}dx$$

$$2S=\int_0^1 \frac{1-x}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{-(2x+1)+3}{x^2+x+1}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{3}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\arctan\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2}\Bigg|_0^1=-\frac{1}{2}\ln 3+\sqrt{3}\cdot\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)$$

Logo, $S=\dfrac{\pi\sqrt{3}-3\ln 3}{12}$

XXVI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e Soluções da Segunda Fase – Nível Universitário

PROBLEMA 1:

A função derivável $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tem as seguintes propriedades:

a) $f(0)=0$ e $f(2)=2$.

b) Para todo $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, a reta tangente ao gráfico de f no ponto $P=(a, f(a))$ corta o eixo x em um ponto A e o eixo y em um ponto B de tal forma que A é o ponto médio do segmento BP.

Calcule $f(3)$.

PROBLEMA 2:

Prove que não existe um conjunto $A\subseteq\mathbb{R}^2$ tal que:

- Para todo $x\in\mathbb{R}$, $\{y\in\mathbb{R}\,|\,(x,y)\in A\}$ é finito.
- Para todo $y\in\mathbb{R}$, $\{x\in\mathbb{R}\,|\,(x,y)\notin A\}$ é enumerável.

Obs: Um conjunto A é dito *enumerável* se $A=\varnothing$ ou existe uma função sobrejetiva $f:\mathbb{N}\to A$.

PROBLEMA 3:

Seja A uma matriz real inversível de ordem n e A^t a sua transposta. Sejam $\lambda_1\ge\lambda_2\ge\ldots\ge\lambda_n>0$ os autovalores de A^tA. Definimos a *norma* de A por $\|A\|=\sqrt{\lambda_1}$ e o *fator de dilatação* de A por $d(A)=\sqrt{\lambda_1/\lambda_2}$. Prove que, para quaisquer matrizes reais inversíveis A e B, $d(AB)\ge\dfrac{\|AB\|}{\|A\|\cdot\|B\|}\cdot d(B)$.

PROBLEMA 4:

Seja $\mathbb{Z}^n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n);\,x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{Z}\}$.

Seja p um primo, k um inteiro positivo e $P_1,P_2,\ldots,P_k,\ Q\in\mathbb{Z}^n$ tais que para todo j, $1\le j\le k, \dfrac{P_j-Q}{p}\notin\mathbb{Z}^n$.

Prove que existe um polinômio $f(x_1,...,x_n)$ com coeficientes inteiros com $f(P_j)=0$ para todo j, $1 \le j \le k$, e $\frac{f(Q)}{p} \notin \mathbb{Z}$.

PROBLEMA 5:
Seja $m \ge 2$ um inteiro.
Arnaldo e Bernaldo disputam o seguinte jogo: cada jogador recebe, alternadamente, um número N_k e devolve para o outro jogador *ou* $N_{k+1} = N_k - 1$ *ou* $N_{k+1} = \left\lfloor N_k / m \right\rfloor$.
Arnaldo começa recebendo um número inteiro positivo N_0. Quem devolver zero vence o jogo.
Seja A_n (resp. B_n) o conjunto dos valores de $N_0, N_0 < n$, tais que Arnaldo (resp. Bernaldo) tem estratégia vencedora.
Calcule $\lim_{n\to\infty} \frac{|A_n|}{|B_n|}$ em função de m.

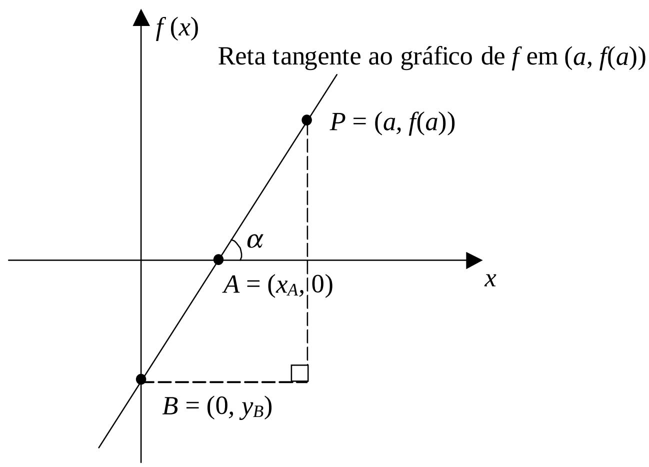
PROBLEMA 6:
Seja $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ uma função derivável, com derivada contínua, com $|\gamma'(t)| = 1$ para todo t e cuja imagem é uma curva simples fechada, isto é,

$$\gamma(t_0) = \gamma(t_1), t_0 < t_1 \Leftrightarrow t_0 = 0, \ \ t_1 = 2\pi .$$

Prove que existem $0 \le t_0 < t_1 < 2\pi$ tais que
$|\gamma(t_0) - \gamma(t_1)| \le \frac{2}{\pi} \min \{t_1 - t_0, 2\pi + t_0 - t_1\}$.

PROBLEMA 1: SOLUÇÃO DE LEONARDO AUGUSTO ZÃO (NILÓPOLIS – RJ)

De acordo com o item (b) do enunciado, ao traçarmos a reta tangente ao gráfico no ponto (a, $f(a)$), com $a \neq 0$, obtemos:



Como A é ponto médio de BP, então: $A = \dfrac{B+P}{2}$

Assim, $x_A = \dfrac{a}{2}$ e $y_B = -f(a)$.

Portanto, o coeficiente angular da reta é dado por $tg\alpha = \dfrac{(f(a) - y_B)}{(a - a/2)} = \dfrac{2f(a)}{a}$

Assim, $f'(a) = \dfrac{2f(a)}{a}, \forall a \in \mathbb{R}^*$.

Então chegamos à equação diferencial: $f'(x) = \dfrac{2f(x)}{x}, x \in \mathbb{R}^*$

Resolvendo, temos: $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{2}{x} \Rightarrow [ln\, f(x)]' = [2ln\, x]',\ x \in \mathbb{R}_+^*$

Então $ln\, f(x) = 2ln\, x + k \Rightarrow ln\, f(x) = ln\, x^2 \cdot e^k \Rightarrow f(x) = e^k \cdot x^2, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

Para $x = 2$, $f(x) = 2$. Então $f(2) = e^k \cdot 2^2 \Rightarrow e^k = \dfrac{1}{2}$.

Assim, a função f obedece $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2$, para $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Então, $f(3) = \dfrac{1}{2} \cdot 3^2$, e finalmente, $f(3) = \dfrac{9}{2}$.

PROBLEMA 2: SOLUÇÃO DE DAVI MÁXIMO ALEXANDRINO NOGUEIRA (FORTALEZA – CE)

Sejam

$A_y = \{x \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in A\}$

$B_x = \{y \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in A\}$

Logo B_x é finito, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} - A_y$ é enumerável, $\forall y \in \mathbb{R}$.

Agora sejam $y_1 < y_2 < y_3 < \dots,$ uma seqüência crescente infinita em $\mathbb{R}$.

Logo, $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_{y_i} = \mathbb{R} - \bigcup_{i=1}^{\infty} (\mathbb{R} - A_{y_i}) \neq \varnothing,$ pois, do contrário, teríamos $\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\mathbb{R} - A_{y_i}),$ mas cada $\mathbb{R} - A_{y_i}$ é enumerável $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} (\mathbb{R} - A_{y_i})$ enumerável $\Rightarrow \mathbb{R}$ enumerável, absurdo!

Agora, tome $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} Ay_i$. Temos $\{y_1, y_2, \dots,\} \subset B_x$, absurdo! (pois B_x é finito). Logo A não existe.

PROBLEMA 3: SOLUÇÃO DE ALEX CORRÊA ABREU (NITERÓI – RJ)

Sejam $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0;$ $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n > 0;$ $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n > 0$ os autovalores de $(AB)^t AB,$ $B^t B$ e $A^t A$ respectivamente. A desigualdade pedida é claramente equivalente a $\lambda_2 \leq \alpha_1 \cdot \beta_2$.

Como $X^T X$ é sempre simétrica e $< X^T Xu, u > = < Xu, Xu >$, temos pelo teorema do min-max (que provaremos no fim desta solução) que:

$$\lambda_2 = \min_{\dim S = n-1} \left(\max_{x \in S} \frac{< ABx, ABx >}{< x, x >} \right) = \min_{\dim S = n-1} \left(\max_{x \in S \setminus \{0\}} \frac{< ABx, ABx >}{< Bx, Bx >} \cdot \frac{< Bx, Bx >}{< x, x >} \right).$$

Por outro lado, como só há um subespaço de dimensão n (e ele inclui todos os vetores), temos:

$$\alpha_1 = \max_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{< Ax, Ax >}{< x, x >}, \text{ e } \beta_2 = \min_{\dim S = n-1} \left(\max_{x \in S \setminus \{0\}} \frac{< Bx, Bx >}{< x, x >} \right).$$

Seja $\overline{S}$ o subespaço no qual β_2 é atingido, i.e, $\beta_2 = \max_{x \in \overline{S} \setminus \{0\}} \frac{< Bx, Bx >}{< x, x >}$.

Temos então:

$$\lambda_2 \leq \max_{x \in \overline{S} \setminus \{0\}} \left(\frac{< ABx, ABx >}{< Bx, Bx >} \cdot \frac{< Bx, Bx >}{< x, x >} \right) \leq \max_{x \in \overline{S} \setminus \{0\}} \frac{< ABx, ABx >}{< Bx, Bx >} \cdot \max_{x \in \overline{S} \setminus \{0\}} \frac{< Bx, Bx >}{< x, x >},$$

(usamos respectivamente que o mínimo é $\leq$ que qualquer elemento do conjunto e $\max(uv) \leq \max u \cdot \max v$)

O segundo termo do produto é exatamente β_2. Fazendo $x' = Bx$ e notando que $B(\overline{S}) \subset \mathbb{R}^n$, tem-se:

$\max\limits_{x \in \overline{S} \setminus \{0\}} \dfrac{<ABx, ABx>}{<Bx, Bx>} \leq \max\limits_{x' \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \dfrac{<Ax', Ax'>}{<x', x'>} \alpha_1$, e juntando tudo obtemos $\lambda_2 \leq \alpha_1 \cdot \beta_2$

Lema: (Teorema do Min Max): $\lambda_1 = \max\limits_{|x|=1} <Ax, x>$,

$\lambda_2 = \min\limits_{\dim S = n-1} \max\limits_{\substack{x \in S \\ |x|=1}} <Ax, x>$, para toda A matriz simétrica, onde $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ são seus autovalores.

Prova: Como A é simétrica existe base ortonormal $x_1, \ldots, x_n$ tal que $Ax_i = \lambda_i x_i$ logo, se $x = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$, $<Ax, x> = \lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 + \ldots + \lambda_n a_n^2 \leq \lambda_1 (a_1^2 + \ldots + a_n^2) = \lambda_1 \Rightarrow$ $\max <Ax, x> \leq \lambda_1$, mas, tomando $x = x_1, <Ax_1, x_1> = \lambda_1$. Para o λ_2, seja L subespaço gerado por x_1 e x_2.

Assim, $\dim S = n-1 \Rightarrow \max\limits_{\substack{x \in S \\ |x|=1}} <Ax, x> \geq \max\limits_{\substack{x \in L \cap S \\ |x|=1}} <Ax, x>$, mas se $y = a_1 x_1 + a_2 x_2 \in L \cap S$,

$a_1^2 + a_2^2 = 1 \Rightarrow \max\limits_{\substack{x \in L \cap S \\ |x|=1}} <Ax, x> \geq <Ay, y> = \lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 \geq \lambda_2 (a_1^2 + a_2^2) = \lambda_2 \Rightarrow$

$\min\limits_{\dim S = n-1} \max\limits_{x \in S} <Ax, x> \geq \lambda_2$. Agora, tomando $S = (x_1)^{\perp}$ temos que o mínimo é atingido.

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DE YURI GOMES LIMA (FORTALEZA - CE)

Seja $Q = (b_1, \ldots, b_n)$. Sejam também $P_j = (a_{j1}, \ldots, a_{jn})$, $a_{j\ell} \in \mathbb{Z}$, $1 \leq j \leq k$, $1 \leq \ell \leq n$.

Observe que $\dfrac{P_j - Q}{p} \notin \mathbb{Z}^n \Leftrightarrow \left(\dfrac{a_{j1} - b_1}{p}, \ldots, \dfrac{a_{jn} - b_n}{p} \right) \notin \mathbb{Z}^n \Leftrightarrow$ existe $i_j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $\dfrac{a_{ji_j} - b_{i_j}}{p} \notin \mathbb{Z} \Leftrightarrow p \nmid (a_{ji_j} - b_{i_j})$

Tome então

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{k} (x_{i_j} - a_{ji_j})$$

Note que:

$$f(x_1,...,x_n)=(x_{i_j}-a_{ji_j})\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq j}}^{k}(x_{i_\ell}-a_{ji_\ell})=(x_{i_j}-a_{ji_j})R_j(x_1,...,x_n)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(P_j)=f(a_j,...,a_{jn})=(a_{ji_j}-a_{ji_j})R_j(a_{j1},...,a_{jn})=0\Rightarrow f(P_j)=0$$

Ademais, $f(Q)=f(b_1,...,b_n)=\prod_{j=1}^{k}(b_{ij}-a_{ji_j})$. Como $p\nmid(b_{ij}-a_{ji_j}),\forall j,$ e p é primo segue que $p\nmid f(Q)\Rightarrow \dfrac{f(Q)}{p}\notin\mathbb{Z}$ (c.q.d.)

PROBLEMA 5: SOLUÇÃO OFICIAL

Consideremos a seqüência $a_0,a_1,a_2,...$ com $a_n\in\{0,1\},\forall n\in\mathbb{N}$ tal que $a_n=1$ se Arnaldo tem estratégia vencedora recebendo $N_0=n$ e $a_n=0,$ caso contrário, i.e., caso Bernaldo tenha estratégia vencedora se Arnaldo recebe $N_0=n$. É fácil ver que, para $k\ge 1,$ se $a_k=0,$ $a_{km+r}=1$ para $0\le r\le m-1$ (nesse caso $\left\lfloor\dfrac{km+r}{m}\right\rfloor=k$), e, se $a_k=1$ caso $a_{km-1}=1,$ temos $a_{km+r}=\dfrac{1-(-1)^r}{2}=\begin{cases}0, \text{ se } r \text{ é par}\\ 1, \text{ se } r \text{ é ímpar}\end{cases}$ para $0\le r\le m-1,$ e, caso $a_{km-1}=0,$ temos, para $0\le r\le m-1, a_{km+r}=\dfrac{1+(-1)^r}{2}=\begin{cases}1, \text{ se } r \text{ é par}\\ 0, \text{ se } r \text{ é ímpar}\end{cases}.$

Suponhamos inicialmente que m é par. Assim, pela discussão acima, se $a_k=1,$ para $\dfrac{m}{2}$ valores de $r,$ com $0\le r\le m-1,$ temos $a_{km+r}=0,$ e para os demais $\dfrac{m}{2}$ valores de r nesse intervalo temos $a_{km+r}=1.$ Assim, se $|B_n|=|\{0\le k<n|a_k=0\}|$ e $|A_n|=|\{0\le k<n|a_k=1\}|$, temos $|B_n|+|A_n|=n$, $|B_{mn}|=\dfrac{m}{2}\cdot V_n+1$ e $|A_{mn}|=m\cdot U_n+\dfrac{m}{2}\cdot V_n-1,\forall n\ge 1,$ donde, como $|A_n|=n-|B_n|,$ temos $|B_{mn}|=\dfrac{m}{2}\cdot\left(n-|B_n|\right)+1,$ e logo $\dfrac{|B_{mn}|}{mn}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(1-\dfrac{|B_n|}{n}\right)+\dfrac{1}{mn}.$ Como a solução de $t=\dfrac{1}{2}(1-t)$ é $t=\dfrac{1}{3},$ fazemos $\dfrac{|B_n|}{n}=\dfrac{1}{3}+\delta_n,$ e obtemos $\delta_{mn}=-\dfrac{1}{2}\delta_n+\dfrac{1}{mn}.$ De $|B_{mn}|\le|B_{mn+r}|\le|B_{mn}|+(m-1)$ para $0\le r\le m-1,$ obtemos $\dfrac{|B_{mn}|}{m(n+1)}\le\dfrac{|B_{mn+r}|}{mn+r}\le\dfrac{|B_{mn}|+m-1}{mn},$

donde, para $0 \le r \le m-1$, $\left|\delta_{mn+r} - \delta_{mn}\right| < \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{m}{mn+r}$, desde que $n \ge m-1$. Assim, se $N \ge m(m-1), \left|\delta_n\right| \le \dfrac{m}{N} + \left|\delta_{m\cdot\lfloor N/m \rfloor}\right| \le \dfrac{2m}{N} + \dfrac{1}{2}\left|\delta_{\lfloor N/m \rfloor}\right|$, de onde é fácil provar por indução em k que, se $k \ge 2$ e $m^k \le n < m^{k+1}$, temos $\left|\delta_n\right| \le k/2^{k-2}$, donde $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$.

Portanto, se m é par $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|B_n|}{n} = \dfrac{1}{3}$, donde $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|A_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n-|B_n|}{n} = 1 - \lim_{n\to\infty} \dfrac{|B_n|}{n} = \dfrac{2}{3}$, e $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|A_n|}{|B_n|} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{|A_n|/n}{|B_n|/n} = \dfrac{2/3}{1/3} = 2.$

Suponha agora m ímpar. Para cada seqüência finita α de 0's e 1's denotaremos por α^n a seqüência $\underbrace{\alpha\alpha...\alpha}_{n \text{ vezes}}$ obtida pela concatenação de n cópias da seqüências α.

No que se segue, usaremos o termo bloco para denotar uma seqüência do tipo $1^r 0$, com $r \ge 1$. Veremos agora que $(a_n)_{n \ge m+1}$ é obtida por uma concatenação de blocos dos tipos 10, $1^m 0$ e $1^{m+1} 0$.

A seqüência $a_{m+1} a_{m+2} ... a_{m(m+1)}$ é $(10)^{\frac{m(m-1)}{2}-1} \cdot 1^{m+1} 0.$ Vamos mostrar por indução que, para todo $k \ge 2$, a seqüência $\beta_k = \left(a_j, \dfrac{m^k - 1}{m-1} \le j \le \dfrac{m^{k+1} - m}{m-1} = \dfrac{m^{k+1} - 1}{m-1} - 1 \right)$ é obtida por uma concatenação de blocos dos tipos 10 e $1^m 0$, seguida por um único bloco de tipo $1^{m+1} 0$ (note que $\dfrac{m^2 - 1}{m-1} = m+1$ e $\dfrac{m^3 - m}{m-1} = m(m+1)$, e logo já verificamos o caso $k = 2$).

Se $a_{j-1} = 0$, $a_{j+t} = 1$ para $0 \le t \le r-1$ e $a_{j+r} = 0$, temos $a_{m(j+r)+s} = a_{m(j+1)+s} = 1$ para $0 \le s \le m-1$, e, para $0 \le s \le mr-1, a_{mj+s} = \dfrac{1-(-1)^s}{2} = \begin{cases} 0, \text{ se } s \text{ é par} \\ 1, \text{ se } s \text{ é ímpar} \end{cases}$. Assim, se $r = 1$ ou $r = m$, $(a_{mj+s})_{0 \le s \le mr-1}$ começa e termina por 0, e, se $r = m+1$, $(a_{mj+s})_{0 \le s \le mr-1}$ começa por 0 e termina por 1. Logo, blocos dos tipos 10 e $1^m 0$ geram apenas blocos desses mesmos tipos, e blocos do tipo 1^{m+1} só podem ser gerados por blocos do tipo $1^{m+1} 0$ (eles aparecem no fim da seqüência gerada por $1^{m+1} 0$). Essas observações provam a nossa afirmação.

Como os únicos blocos diferentes desses que aparecem são os do tipo $1^{m+1}0$ de tamanho total $m + 2$, os quais só aparecem entre as posições $\frac{m^{k+1}-m}{m-1}-m$ e $\frac{m^{k+1}-m}{m-1}$, $k \geq 2,$ e como $\frac{m^{k+1}-m}{m-1} > m^k + m,$ temos

$2u_n + (m+1)v_n \geq n-(m+1)-(m+2)\cdot\left(\frac{\log n}{\log m}-1\right) \geq n - \frac{(m+2)\log n}{\log m},$ donde $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2u_n+(m+1)v_n}{n}=1.$ Além disso, pela discussão acima, seqüências dos tipos 10 e

1^m0 geram seqüências desses mesmos tipos, donde $u_{mn}=\left(\frac{m-1}{2}\right)u_n+\left(\frac{m^2-1}{2}\right)v_n+r_n$ e $v_{mn}=u_n+v_n+s_n,$ para $n \geq m+1,$ onde $|r_n| \leq \frac{m^2\log n}{\log m}$ e $|s_n| \leq \frac{\log n}{\log m}$ os desvios r_n e s_n se devem a blocos gerados por blocos incompletos e pelos blocos do tipo $1^{m+1}0,$ que são no máximo $\frac{\log n}{\log m}$ em $(a_k)_{k \leq n}).$ Como vimos acima, $2u_n+(m+1)v_n = n-w_n$, onde $w_n \leq \frac{(m+2)\log n}{\log m}.$ Sejam $x_n=\frac{u_n}{n}$ e $y_n = m\frac{v_n}{n}.$ Temos $u_n+mv_n \leq |A_n| \leq u_n+mv_n+w_n$, donde $x_n+y_n=\frac{|A_n|}{n}+O\left(\frac{\log n}{n}\right),$ e, de $2u_n+(m+1)v_n=n-w_n$, segue que $2x_n+\frac{m+1}{m}\cdot y_n = 1-O\left(\frac{\log n}{n}\right).$

De $V_{mn}=u_n+v_n+s_n$ e de $\left|v_N - v_{m\left\lfloor\frac{N}{m}\right\rfloor}\right| \leq 1$ segue que $v_N = u_{\left\lfloor\frac{N}{m}\right\rfloor}+v_{\left\lfloor\frac{N}{m}\right\rfloor}+O(\log N),$ donde $y_N = x_{\left\lfloor\frac{N}{m}\right\rfloor}+\frac{1}{m}y_{\left\lfloor\frac{N}{m}\right\rfloor}+O\left(\frac{\log N}{N}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{m+1}{m}\cdot y_{\left\lfloor\frac{N}{m}\right\rfloor}\right)+\frac{1}{m}y_{\left\lfloor\frac{N}{m}\right\rfloor}+O\left(\frac{\log N}{N}\right)=$

$=\frac{1}{2}-\frac{m-1}{2m}y_{\left\lfloor \frac{N}{m}\right\rfloor}+O\left(\frac{\log N}{N}\right)$. Escrevendo $y_n=\frac{m}{3m-1}+\varepsilon_n$ (note que a solução de $t=\frac{1}{2}-\frac{m-1}{2m}\cdot t$ é $t=\frac{m}{3m-1}$), temos $\varepsilon_N=-\left(\frac{m-1}{2m}\right)\cdot\varepsilon_{\left\lfloor \frac{N}{m}\right\rfloor}+O\left(\frac{\log N}{N}\right)$, donde $0\le\limsup\limits_{n\to\infty}|\varepsilon_n|\le 1$ e $\limsup\limits_{n\to\infty}|\varepsilon_n|\le\frac{m-1}{2m}\cdot\limsup\limits_{n\to\infty}|\varepsilon_n|+0$, e logo $\limsup\limits_{n\to\infty}|\varepsilon_n|=0$, ou seja, $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$, donde $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\frac{m}{3m-1}$ e, de $x_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{m+1}{m}\cdot y_n\right)+O\left(\frac{\log n}{n}\right)$, segue que $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{m+1}{m}\cdot\frac{m}{3m-1}\right)=\frac{m-1}{3m-1}$. De $x_n+y_n=\frac{|A_n|}{n}+O\left(\frac{\log n}{n}\right)$, segue que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|A_n|}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\frac{2m-1}{3m-1}$, e $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|B_n|}{n}=1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|A_n|}{n}=\frac{m}{3m-1}$.

Portanto, se m é ímpar, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|A_n|}{|B_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|A_n|/n}{|B_n|/n}=\frac{(2m-1)/(3m-1)}{m/(3m-1)}=\frac{2m-1}{m}$.

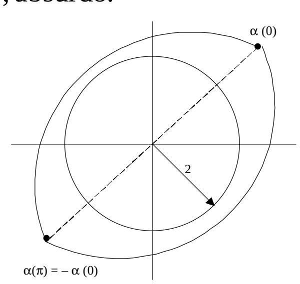
PROBLEMA 6: SOLUÇÃO OFICIAL
(do Prof. Alexandre Fernandes, comunicada pelo Prof. Lev Birbrair, de Fortaleza, CE)

Suponha por absurdo que exista um contra-exemplo γ. Defina $\alpha:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ por $\alpha(t)=\gamma(t)-\gamma(t+\pi)$, para $0\le t\le\pi$ e $\alpha(t)=\gamma(t)-\gamma(t-\pi)$ para $\pi\le t\le 2\pi$.

Pela hipótese de absurdo temos $|\alpha(t)|>2$ para todo t. A função α é contínua (pois $\gamma(0)=\gamma(2\pi)$) e derivável exceto talvez para $t=0,\pi$.

Temos ainda $|\alpha'(t)|\le|\gamma'(t)|+|\gamma'(t+\pi)|=2$ para todo t, donde o comprimento da curva α é menor ou igual a 4π.

Mas a imagem de α é uma curva fechada simétrica em relação à origem (pois $\alpha(t+\pi)=-\alpha(t),\forall t\in[0,\pi]$), que está no exterior da bola de raio 2, donde seu comprimento é maior que 4π, absurdo.



XXVI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Resultado – Nível 1 (5ª. e 6ª. Séries)

NOME	CIDADE – ESTADO	PRÊMIO
Illan Feiman Halpern	Itatiaia – RJ	Ouro
Leonardo Pereira Stédile	São Paulo – SP	Ouro
James Jung Hong	São Paulo – SP	Ouro
Victor Reis de Abreu Cavalcanti	Maceió – AL	Ouro
Wagner Carlos Morêto Loyola Filho	Vitória – ES	Ouro
Rafael Alves da Silva	Teresina – PI	Ouro
Marcelo Tadeu de Sá Oliveira Sales	Barreiras – BA	Prata
Lereno Soares Netto	Rio de Janeiro – RJ	Prata
Dan Zylberglejd	Rio de Janeiro – RJ	Prata
Clarissa Maria Grosso Fabris	São Paulo – SP	Prata
Matheus Barros de Paula	Taubaté – SP	Prata
Renan Henrique Finder	Joinville – SC	Prata
Leonardo Shinizu Yojo	São Paulo – SP	Prata
Ana Luiza Ferron Zanella	Pato Branco – PR	Prata
Fernanda Daltro Costa Knoblauch	Salvador – BA	Prata
Thiago Ribeiro Ramos	Varginha – MG	Prata
Lucas Gouveia Omena Lopes	Maceió – AL	Prata
José Rodolfo Bezerra Mesquita Araújo	João Pessoa – PB	Prata
Débora Kiame Paias	Atibaia – SP	Bronze
Daniel Caueh Dunaiski Figueira Leal	Curitiba – PR	Bronze
Alessandro D'Alessio de Souza	São Paulo – SP	Bronze
Eduardo Kaiser Urubahy Nunes Fonseca	Rezende – RJ	Bronze
Caroline Rigolon Veiga	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
Erick Magno Costa Alonso	Uberaba – MG	Bronze
Vinicius Tineli Paiva	Vitória – ES	Bronze
Marcelo Aires Moreira	João Pessoa – PB	Bronze
Rafael Fernandes Paixão	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
Diana Vaisman	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
Camila Miraglia Ribeiro	Curitiba – PR	Bronze
Stefano Tonnasini	Itu – SP	Bronze
Vitor Cruth Sturn	São Paulo – SP	Bronze
Hugo Fonseca Araújo	Juiz de Fora – MG	Bronze
Bárbara Seccato Ruis Chagas	Vitória – ES	Bronze
Rafael Sarto Müller	Vitória – ES	Menção Honrosa
Thiago Gonçales	Piracicaba – SP	Menção Honrosa
José Nilo Alves de Souza Neto	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Vitor Costa Fabris	Criciúma – SC	Menção Honrosa
Ana Luísa de Almeida Losnak	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Rebeca Meirelles de Araújo Assis	Salvador – BA	Menção Honrosa
Gabriela Barini de Oliveira	São José dos Campos – SP	Menção Honrosa
Ítalo Leite de Camargo	Assis – SP	Menção Honrosa
Arthur Lerer	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
André Saraiva Nobre dos Santos	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
José Ailton Azevedo Araújo Filho	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
César Ilharco Magalhães	Juiz de Fora – MG	Menção Honrosa
Mariana Hollos Fiorencio	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Fernando Fonseca Andrade Oliveira	Belo Horizonte – MG	Menção Honrosa
Beatriz Arruda Asfora	Recife – PE	Menção Honrosa
João Paulo Sousa Lucas	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Tayrini da Cruz Beligoli	Juiz de Fora – MG	Menção Honrosa
Mônica Monteiro Gondim	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Izabela Karennina Travizani Maffra	Belo Horizonte – MG	Menção Honrosa
Maíra Islena Tavares da Silva	Belo Horizonte – MG	Menção Honrosa
Caio Menezes Facó	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
André Yoshio Oshiro Bastos	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Natasha Scaranello Cartolano	Rio Claro – SP	Menção Honrosa
Laura Andrade Santiago	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Guilherme Alencar Sorensen Colares	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Eduardo de Almeida Grande	Valinhos – SP	Menção Honrosa
Breno Augusto Cardoso Barroso	Fortaleza – CE	Menção Honrosa

Resultado – Nível 2 (7^a. e 8^a. Séries)

NOME	CIDADE – ESTADO	PRÊMIO
Lucio Eiji Assaoka Hosaka	Curitiba – PR	Ouro
Regis Prado Barbosa	Fortaleza – CE	Ouro
Henrique Pondé de Oliveira Pinto	Salvador – BA	Ouro
Rafael Sampaio de Rezende	Fortaleza – CE	Ouro
Wilson Camara Marriel	Rio de Janeiro – RJ	Ouro
Rafael Tupynambá Dutra	Belo Horizonte – MG	Prata
Adenilson Arcanjo de Moura Júnior	Fortaleza – CE	Prata
José Airton Coêlho Lima Filho	Fortaleza – CE	Prata
Filipe Alves Tomé	Fortaleza – CE	Prata
Rafael Moura e Sucupira	Fortaleza – CE	Prata
Ramon Moreira Nunes	Fortaleza – CE	Prata
Rodrigo Clemente de Brito Pereira	João Pessoa – PB	Prata
Sérgio Ricardo Furtado Sampaio Filho	Fortaleza – CE	Prata
Giuliano Pezzolo Giacaglia	Santo André – SP	Prata
Daniel Ungaretti Borges	Belo Horizonte – MG	Bronze
Gabriel Marcos Pasmanik Eisencraft	São Paulo – SP	Bronze
Anna Kelly Krislane de Vasconcelos	Fortaleza – CE	Bronze
Paulo Vitor de Souza Albuquerque	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
Artur de Almeida Losnak	São Paulo – SP	Bronze
Ricardo Turolla Bortolotti	Rio Claro – SP	Bronze
Henrique Hiroshi Motoyama Watanabe	São Paulo – SP	Bronze
Guilherme Philippe Figueiredo	Fortaleza – CE	Bronze
Alfredo Roque de Oliveira Freire Filho	Salvador – BA	Bronze
Lucas Zanotto Portela	Curitiba – PR	Bronze
Nathana Alcântara Lima	Fortaleza – CE	Bronze
Flávio Domingos de Azevedo Quadros	Osasco – SP	Bronze
Mateus Oliveira de Figueiredo	Fortaleza – CE	Bronze
Marilia Valeska Costa Medeiros	Fortaleza – CE	Bronze
Grazielly Muniz da Cunha	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Fábio Yoshiteru Nukui	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Ana Luiza Viegas de Almeida	Marília – SP	Menção Honrosa
Vinicius Marques Regitano	Piracicaba – SP	Menção Honrosa
André Antonio Battagello	Araçatuba – SP	Menção Honrosa
Anderson Unlin Tsai	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Mateos Kruchelski Tschá	Curitiba – PR	Menção Honrosa
Caio Gustavo Mesquita Angelo	Taguatinga – DF	Menção Honrosa
Guilherme Zatieff Topolski Chaves	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Marlen Lincoln da Silva	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Janailson Rodrigues Lima	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Gilson Mauro Costa Fernandes Filho	João Pessoa – PB	Menção Honrosa
Diogo Bonfim Moraes Morant de Holanda	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Paulo Wayner Carvalho dos Santos	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Douglas Tirre Carnevale Oliveira	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Ivan Hitoshi Oyama	Osasco – SP	Menção Honrosa
Marlon Vieira de Lima Júnior	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Cássio Kendi Takamori	São José dos Campos – SP	Menção Honrosa
Jessica de Aguiar França	Brasília – DF	Menção Honrosa
Karin Naomi Harada de Oliveira	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Diogo Soares Dórea da Silva	Feira de Santana – BA	Menção Honrosa
Mauricio Henrique Bezerra Cardoso	Aracajú – SE	Menção Honrosa
Érik Fernando de Amorim	Araraquara – SP	Menção Honrosa
Caio Prado Siqueira Campos	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Luan Leal Oliveira	Tremembé – SP	Menção Honrosa
Diego Eloi Misquita Gomes	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Cintia Mayumi Sakurai Kimura	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Carolina Santos Andrade	São Cristóvão – SE	Menção Honrosa

Resultado – Nível 3 (Ensino Médio)

NOME	CIDADE – ESTADO	PRÊMIO
Fábio Dias Moreira	Rio de Janeiro – RJ	Ouro
Rafael Marini Silva	Vila Velha – ES	Ouro
Gabriel Tavares Bujokas	São Paulo – SP	Ouro
Rafael Daigo Hirama	Campinas – SP	Ouro
Guilherme Rodrigues Nogueira de Souza	São Paulo – SP	Ouro
Telmo Luis Correa Junior	Santo André – SP	Ouro
Thiago Costa Leite Santos	São Paulo – SP	Prata
Thomás Yoiti Sasaki Hoshina	Rio de Janeiro – RJ	Prata
Larissa Cavalcante Queiroz de Lima	Fortaleza – CE	Prata
Henry Wei Cheng Hsu	São Paulo – SP	Prata
Elton Gomes Coriolano	Fortaleza – CE	Prata
Larissa Rodrigues Ribeiro	Fortaleza – CE	Prata
Rodrigo Aguiar Pinheiro	Fortaleza – CE	Prata
Felipe Rodrigues Nogueira de Souza	São Paulo – SP	Prata
Ricardo Mizoguchi Gorgoll	São Paulo – SP	Prata
Guilherme Rodrigues Salerno	Goiânia – GO	Bronze
Edson Augusto Bezerra Lopes	Fortaleza – CE	Bronze
Luiz Adolfo Schiller	Niterói – RJ	Bronze
Marcus Edson Barreto Brito	Fortaleza – CE	Bronze
Lucas Pavan Barros	Vila Velha – ES	Bronze
Diogo dos Santos Suyama	Belo Horizonte – MG	Bronze
Felipe Ferreira Villar Coelho	Serra – ES	Bronze
José Marcos Andrade Ferraro	São Paulo – SP	Bronze
Francisco Bruno de Lima Holanda	Fortaleza – CE	Bronze
Luty Rodrigues Ribeiro	Fortaleza – CE	Bronze
Israel Franklin Dourado Carrah	Fortaleza – CE	Bronze
Douglas Bokliang Ang Cunha	São José dos Campos – SP	Bronze
Levi Máximo Viana	Fortaleza – CE	Bronze
Leandro Farias Maia	Fortaleza – CE	Bronze
Victor de Andrade Lazarte	São Paulo – SP	Bronze
Rafael Mendes de Oliveira	Mesquita – RJ	Menção Honrosa
Raphael Rodrigues Mata	Salvador – BA	Menção Honrosa
Thiago Jorge Marinho Vieira	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Ana Cláudia Onuchic	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Paulo Victor Teixeira Eufrásio	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Carlos Augusto David Ribeiro	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Eduardo Fischer	Encantado – RS	Menção Honrosa
Edson Leandro Finotti Bittar	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Leandro Farias Nogueira	Recife – PE	Menção Honrosa
Sheyne Cristina Leal	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Hugo Caetano da Silva Junior	Teresina – PI	Menção Honrosa
Erasto Villa Branco Neto	Curitiba – PR	Menção Honrosa
Antonia Taline de Souza Mendonça	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
José Gerardo Arruda Junior	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
José Mário da Silva Filho	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Bruno Cardoso Vieira	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Pedro Henrique Milet Pinheiro Pereira	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Mateus Gomes Filgueiras	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Vicente Matheus Moreira Zuffo	São Paulo – SP	Menção Honrosa

Resultado – Nível Universitário

NOME	CIDADE - ESTADO	PRÊMIO
Carlos Stein Naves de Brito	São José dos Campos – SP	Ouro
Alex Corrêa Abreu	Niterói – RJ	Ouro
Humberto Silva Naves	São José dos Campos – SP	Ouro
Bernardo Freitas Paulo da Costa	Rio de Janeiro – RJ	Ouro
Daniel Massaki Yamamoto	São Paulo – SP	Ouro
Murilo Vasconcelos Andrade	Rio de Janeiro – RJ	Ouro
Davi Máximo Alexandrino Nogueira	Fortaleza – CE	Prata
Carlo Pietro Sousa da Silva	São Cristóvão – SE	Prata
Yuri Gomes Lima	Fortaleza – CE	Prata
Tertuliano Franco Santos Franco	Salvador – BA	Prata
Rodrigo Roque Dias	São Paulo – SP	Prata
Diêgo Veloso Uchôa	Teresina – PI	Prata
Pietro Kreitlon Carolino	Campinas – SP	Prata
Thiago Barros Rodrigues Costa	Fortaleza – CE	Prata
Thiago da Silva Sobral	Fortaleza – CE	Prata
Leonardo Augusto Zão	Nilópolis – RJ	Bronze
Samuel Barbosa Feitosa	Fortaleza – CE	Bronze
Eduardo Famini Silva	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
Einstein do Nascimento Júnior	Fortaleza – CE	Bronze
Eduardo Bertoldi	Vila Velha – ES	Bronze
Rafael Tajra Fonteles	Teresina – PI	Bronze
Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva	Campina Grande – PB	Bronze
Kellem Corrêa Santos	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
Domingos Dellamonica Junior	São Paulo – SP	Bronze
Luis Daniel Barbosa Coelho	São José dos Campos – SP	Bronze
Jorge Peixoto de Morais Neto	São José dos Campos – SP	Bronze
Anne Caroline Bronzi	Ribeirão Preto – SP	Bronze
Evandro Makiyama de Melo	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Helder Oliveira de Castro	Mogi das Cruzes – SP	Menção Honrosa
Moyses Afonso Assad Cohen	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Rogério de Assis Medeiros	Franco da Rocha – SP	Menção Honrosa
Rodrigo Angelo Muniz	Cariacica – ES	Menção Honrosa
Fabrício Siqueira Benevides	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Giuliano Boava	Florianópolis – SC	Menção Honrosa
Filipe Rodrigues de Souza Moreira	São José dos Campos – SP	Menção Honrosa
Antonio Carlos Maldonado S. A. Munhoz	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Anderson Rodrigues Ferreira	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Eduardo Ferraz Castelo Branco Ferreira	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Arthur Omar de Andrade Lazarte	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Vitor Gabriel Kleine	Mogi das Cruzes – SP	Menção Honrosa

AGENDA OLÍMPICA

XXVII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

NÍVEIS 1, 2 e 3

Primeira Fase – Sábado, 11 de junho de 2005
Segunda Fase – Sábado, 03 de setembro de 2005
Terceira Fase – Sábado, 22 de outubro de 2005 (níveis 1, 2 e 3)
Domingo, 23 de outubro de 2005 (níveis 2 e 3 - segundo dia de prova).

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Primeira Fase – Sábado, 03 de setembro de 2005
Segunda Fase – Sábado, 22 e Domingo, 23 de outubro de 2005

♦

XI OLIMPÍADA DE MAIO
14 de maio de 2005

♦

XVI OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL
23 a 28 de maio de 2005
Sucre, Bolívia

♦

XLVI OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA
08 a 16 de julho de 2005
Yucatán, México

♦

XII OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
22 a 28 de julho de 2005
Blagoevgrad, Bulgária

♦

XX OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA
24 a 30 de setembro de 2005
Cartagena de Índias, Colômbia

♦

VIII OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
19 de novembro de 2005

♦ ♦ ♦

COORDENADORES REGIONAIS

Alberto Hassen Raad	(UFJF)	Juiz de Fora – MG
Américo López Gálvez	(USP)	Ribeirão Preto – SP
Amarísio da Silva Araújo	(UFV)	Viçosa – MG
Ana Paula Bernardi da Silva	(Universidade Católica de Brasília)	Brasília – DF
Antonio Carlos Nogueira	(UFU)	Uberlândia – MG
Ali Tahzibi	(USP)	São Carlos – SP
Benedito Tadeu Vasconcelos Freire	(UFRN)	Natal – RN
Carlos Frederico Borges Palmeira	(PUC-Rio)	Rio de Janeiro – RJ
Claus Haetinger	(UNIVATES)	Lajeado – RS
Cleonor Crescêncio das Neves	(UTAM)	Manaus – AM
Cláudio de Lima Vidal	(UNESP)	S.J. do Rio Preto – SP
Edson Roberto Abe	(Colégio Objetivo de Campinas)	Campinas – SP
Élio Mega	(Colégio Etapa)	São Paulo – SP
Éder Luiz Pereira de Andrade	(UNESPAR/FECILCAM)	Campo Mourão – PR
Eudes Antonio da Costa	(Univ. do Tocantins)	Arraias – TO
Florêncio Ferreira Guimarães Filho	(UFES)	Vitória – ES
Ivanilde Fernandes Saad	(UC. Dom Bosco)	Campo Grande– MS
Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia	(UFPB)	João Pessoa – PB
Janice T. Reichert	(UNOCHAPECÓ)	Chapecó – SC
João Benício de Melo Neto	(UFPI)	Teresina – PI
João Francisco Melo Libonati	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
José Carlos dos Santos Rodrigues	(Unespar)	Campo Mourão – PR
José Cloves Saraiva	(UFMA)	São Luis – MA
José Gaspar Ruas Filho	(ICMC-USP)	São Carlos – SP
José Luiz Rosas Pinho	(UFSC)	Florianópolis – SC
José Vieira Alves	(UFPB)	Campina Grande – PB
Krerley Oliveira	(UFAL)	Maceió – AL
Licio Hernandes Bezerra	(UFSC)	Florianópolis – SC
Luzinalva Miranda de Amorim	(UFBA)	Salvador – BA
Mário Rocha Retamoso	(UFRG)	Rio Grande – RS
Marcelo Rufino de Oliveira	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Marcelo Mendes	(Colégio Farias Brito, Pré-vestibular)	Fortaleza – CE
Marilane de Fraga Sant'Ana	FACOS	Osório – RS
Pablo Rodrigo Ganassim	(Liceu Terras do Engenho)	Piracicaba – SP
Ramón Mendoza	(UFPE)	Recife – PE
Raúl Cintra de Negreiros Ribeiro	(Colégio Anglo)	Atibaia – SP
Ronaldo Alves Garcia	(UFGO)	Goiânia – GO
Reginaldo de Lima Pereira	(Escola Técnica Federal de Roraima)	Boa Vista – RR
Reinaldo Gen Ichiro Arakaki	(UNIVAP)	SJ dos Campos – SP
Ricardo Amorim	(Centro Educacional Logos)	Nova Iguaçu – RJ
Sérgio Cláudio Ramos	(IM-UFRGS)	Porto Alegre – RS
Seme Guevara Neto	(UFMG)	Belo Horizonte – MG
Tadeu Ferreira Gomes	(UEBA)	Juazeiro – BA
Tomás Menéndez Rodrigues	(U. Federal de Rondônia)	Porto Velho – RO
Valdenberg Araújo da Silva	(U. Federal de Sergipe)	São Cristovão – SE
Valdeni Soliani Franco	(U. Estadual de Maringá)	Maringá – PR
Vânia Cristina Silva Rodrigues	(U. Metodista de SP)	S.B. do Campo – SP
Wagner Pereira Lopes	(CEFET – GO)	Jataí – GO