CONTEÚDO

AOS LEITORES

Chegamos a este número 21 com dois artigos: um de geometria e outro sobre a seqüência de Fibonacci. São as primeiras publicações dos respectivos autores na Eureka!. Esperamos que venham outras e que cada vez mais autores contribuam com a revista. Apresentamos as soluções da Olimpíada do Cone Sul e da Olimpíada Internacional de 2004, competições nas quais as equipes brasileiras tiveram muito bom desempenho. Agradecemos mais uma vez as contribuições dos leitores para a seção "Como é que faz?" e para a seção dos problemas propostos, com soluções e novos problemas, que fazem da Eureka! cada vez mais uma obra de criação coletiva.

Aproveitamos para registrar que foi criada em 2004 a Associação Olimpíada Brasileira de Matemática – AOBM, uma pessoa jurídica destinada a ajudar as Olimpíadas de Matemática no Brasil a crescerem e se consolidarem.

Esperamos que a AOBM sirva como instrumento para maior integração e organização da comunidade olímpica. Estimulamos nossos leitores a se associarem à AOBM, cujos sócios recebem gratuitamente a revista Eureka!. As informações sobre como se associar à AOBM podem ser encontradas na nossa página na internet: www.obm.org.br

Os editores

XV OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL
Enunciados e Soluções

PROBLEMA 1
Maxi escolheu 3 dígitos e, fazendo todas as permutações possíveis, obteve 6 números distintos, cada um com 3 dígitos. Se exatamente um dos números que Maxi obteve é um quadrado perfeito e exatamente três são primos, encontrar os 3 dígitos que Maxi escolheu.
Dê todas as possibilidades para os 3 dígitos.

SOLUÇÃO DE LEANDRO FARIAS MAIA (FORTALEZA – CE)
Sejam x_1, x_2, x_3 os dígitos escolhidos por Maxi. Note que $x_1 \neq x_2,\ x_1 \neq x_3,\ x_2 \neq x_3$ pois as 6 reordenações: $x_1x_2x_3, ..., x_3x_2x_1$ são distintas.
Agora faremos a lista de todos os números de 3 dígitos quadrados perfeitos:

$10^2 = 100$	$20^2 = 400$	$30^2 = 900$
$11^2 = 121$	$21^2 = 441$	$31^2 = 961$
$12^2 = 144$	$22^2 = 484$	
$13^2 = 169$	$23^2 = 529$	
$14^2 = 196$	$24^2 = 576$	
$15^2 = 225$	$25^2 = 625$	
$16^2 = 256$	$26^2 = 676$	
$17^2 = 289$	$27^2 = 729$	
$18^2 = 324$	$28^2 = 784$	
$19^2 = 361$	$29^2 = 841$	

Perceba que:
- Os números que têm algum zero não satisfazem o enunciado: $10^2, 20^2, 30^2$.
- Reordenando 1, 6, 9 podemos obter $13^2, 14^2, 31^2$. Assim, $13^2, 14^2, 31^2$ não satisfazem o enunciado.
- O número deverá apresentar no mínimo 2 dígitos ímpares, pois se tiver no máximo um, teremos (se tivermos) no máximo 2 números primos. Assim; $16^2, 17^2, 18^2, 25^2, 28^2, 29^2$ não satisfazem o enunciado.
- Os dígitos são distintos. Assim, $11^2, 12^2, 15^2, 21^2, 22^2, 26^2$ não satisfazem o enunciado.

Nos restam os números: $19^2, 23^2, 24^2, 27^2$. Reordenando:

$19^2 = 361; 136, 163, 316, 361, 613, 631.$

$23^2 = 529; 259, 295, 529, 592, 925, 952.$

$24^2 = 576; 567, 576, 657, 675, 756, 765.$

$27^2 = 729; 279, 297, 729, 792, 927, 972.$

Perceba que os dígitos:

- 1, 3, 6 satisfazem o enunciado, pois, 163, 613, 631 (apenas) são primos e 361 (apenas) é quadrado perfeito.
- 2, 5, 9 não satisfazem o enunciado, pois, 295, 592, 925, 952 são compostos e 529 (apenas) é quadrado perfeito, assim teremos no máximo um primo.
- 5, 6, 7 não satisfazem o enunciado pelo mesmo raciocínio acima: 675, 765, 756 e 576 são compostos.
- 2, 7, 9 não satisfazem o enunciado pois todas as suas reordenações são múltiplos de 9.

Portanto, os dígitos que Maxi escolheu foram 1, 3, 6.

PROBLEMA 2

Dada uma circunferência *C* e um ponto *P* exterior a ela, traçam-se por *P* as duas tangentes à circunferência, sendo *A* e *B* os pontos de tangência.

Toma-se um ponto *Q* sobre o menor arco *AB* de *C*. Seja *M* a interseção da reta *AQ* com a perpendicular a *AQ* traçada por *P*, e seja *N* a interseção da reta *BQ* com a perpendicular a *BQ* traçada por *P*.

Demonstre que, ao variar *Q* no arco *AB*, todas as retas *MN* passam por um mesmo ponto.

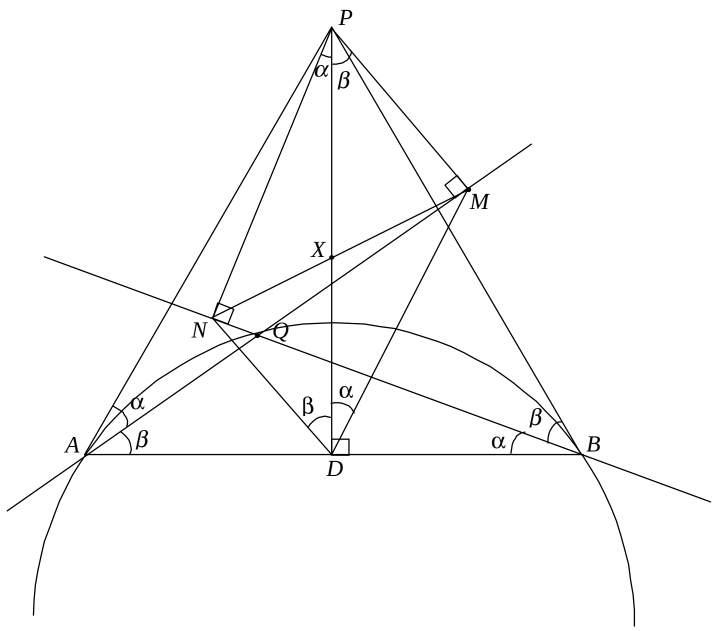
SOLUÇÃO DE LEANDRO FARIAS MAIA (FORTALEZA – CE)

Sejam $\alpha = \measuredangle QBA$, $\beta = \measuredangle QAB$ e *"D"* um ponto sobre $\overline{AB}$ de modo que $\overline{PD} \perp \overline{AB}$.

Como $\overline{AP}$ é tangente a *"C"*, então: $\measuredangle QBA = \measuredangle QAP = \alpha$. Analogamente: $\measuredangle PBQ = \beta$.

Agora veja que:

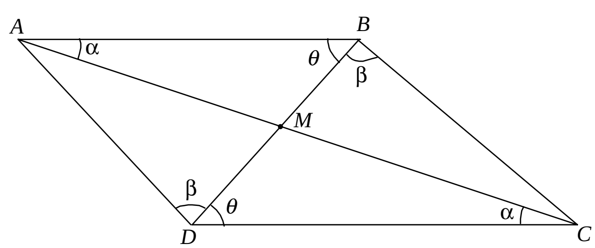
i) $PNDB$ é inscritível, pois
$\measuredangle PNB = 90° = \measuredangle PDB$. Assim;
$\measuredangle NPD = \measuredangle NBD = \alpha$ e $\measuredangle NDP = \measuredangle NBP = \beta$.



ii) $PMDA$ é inscritível, pois $\measuredangle PMA = 90° = \measuredangle PDA$.
Assim; $\measuredangle PDM = \measuredangle PAM = \alpha$ e $\measuredangle MPD = \measuredangle MAD = \beta$. Portanto, de *i*) e *ii*) temos que

- $\measuredangle NPD = \measuredangle MDP = \alpha \Rightarrow NP \,//\, MD$.
- $\measuredangle NDP = \measuredangle MPD = \beta \Rightarrow PM \,//\, ND$.

Logo, $PMDN$ é paralelogramo, e então $\overline{NM}$ e $\overline{PD}$ se cruzam no ponto médio (*), assim para qualquer "Q" e $\overset{\frown}{AB}$ (menor), $\overline{MN}$ passará por um ponto fixo que é o ponto médio da altura $\overline{PD}$.
Prova de (*):



$AB \,//\, DC \Rightarrow \measuredangle ACD = \measuredangle CAB,\ \measuredangle ABD = \measuredangle BDC.$
$BC \,//\, AD \Rightarrow \measuredangle ADB = \measuredangle CBD.$

Assim, $\Delta ACD \equiv \Delta ACB(LAA_O) \Rightarrow \overline{DC} = \overline{AB}$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$.

$\Delta MDC \equiv \Delta ABM\,(ALA) \Rightarrow \overline{AM} = \overline{MC}$ e $\overline{BM} = \overline{MD}$.

PROBLEMA 3

Seja n um inteiro positivo. Chamamos C_n a quantidade de inteiros positivos x, menores que 10^n, tais que a soma dos dígitos de $2x$ é menor que a soma dos dígitos de x.

Demonstre que $C_n \geq \frac{4}{9}\left(10^n - 1\right)$.

SOLUÇÃO:

Se $m = \sum_{j=0}^{k} a_j \cdot 10^j$, com $a_j \in \{0,1,2,...,9\}, \forall j \leq k$, temos $2m = \sum_{j=0}^{k} (2a_j) \cdot 10^j$. Note que, se $a \in \{0,1,2,3,4\}$, $2a \in \{0,2,4,6,8\}$ tem apenas um dígito, e, se $a \in \{5,6,7,8,9\}$, $2a \in \{10,12,14,16,18\}$ tem dois dígitos, sendo o primeiro deles igual a 1. Assim, na soma $\sum_{j=0}^{k} (2a_j) \cdot 10^j$, não há "vai um", pois, se $(2a_i) \cdot 10^i$ e $(2a_j) \cdot 10^j$ têm dígitos não nulos na k-ésima, posição, com $i < j$, então $k = j = i + 1$, sendo o dígito de $(2a_i) \cdot 10^i$ igual a 1, nessa k-ésima posição, donde sua soma é menor que 10 (pois o dígito corresponde de $(2a_j) \cdot 10^j$ é no máximo 8). Portanto, se $s(m)$ denota a soma dos dígitos de m, $s(m) = \sum_{j=0}^{k} a_j$ e $s(2m) = \sum_{j=0}^{k} s(2a_j)$. Agora, para $a \in \{0,1,2,3,4\}$, $s(2a) = 2a$, e, para $a \in \{5,6,7,8,9\}$, $s(2a) = 2a - 9$. Portanto, para $0 \leq a \leq 9$, $s(2a) + s(2 \cdot (9-a)) = 2a + 2(9-a) - 9 = 9 = a + (9-a)$. Assim, se $x = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \cdot 10^j$, (com $0 \leq a_j \leq 9, \forall j$) é um inteiro positivo menor que 10^n, temos $(10^n - 1) - x = \sum_{j=0}^{n-1} (9 - a_j) \cdot 10^j$, e logo, $s(2x) + s(2(10^n - 1 - x)) =$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} s(2a_j) + \sum_{j=0}^{n-1} s(2 \cdot (9 - a_j)) = \sum_{j=0}^{n-1} (s(2a_j) + s(2 \cdot (9 - a_j)) = \sum_{j=0}^{n-1} (a_j + (9 - a_j)) =$$

$= \sum_{j=0}^{n-1} a_j + \sum_{j=0}^{n-1}(9 - a_j) = s(x) + s((10^n - 1) - x).$ Assim, $s(2x) < s(x)$ se e somente se $s(2(10^n - 1 - x)) > s(10^n - 1 - x),$ e $s(2x) = s(x)$ se e somente se $s(2(10^n - 1 - x)) = s(10^n - 1 - x).$ Portanto, $C_n = \dfrac{10^n - 1 - A}{2},$ onde $A = \#\{1 \le x < 10^n \mid s(2x) = s(x)\}.$ Note agora que $s(x) \equiv x (\text{mod}\, 9)$ e $s(2x) \equiv 2x \ (\text{mod}\, 9)$, donde, se $s(2x) = s(x),$ então $2x \equiv x \ (\text{mod}\, 9)$, e logo $x \equiv 0 (\text{mod}\, 9).$ Assim, $A \le \#\{1 \le x < 10^n \mid x \equiv 0 (\text{mod}\, 9)\} = \dfrac{10^n - 1}{9},$ donde $C_n \ge \dfrac{4}{9}(10^n - 1).$

PROBLEMA 4

Arnaldo escolhe um inteiro a, $a \ge 0$, e Bernaldo escolhe um inteiro b, $b \ge 0$. Ambos dizem, em segredo, o número que escolheram a Cernaldo, e este escreve em um quadro os números 5, 8 e 15, sendo um desses a soma $a + b$.
Cernaldo toca uma campainha e Arnaldo e Bernaldo, individualmente, escrevem em papéis distintos se sabem ou não qual dos números no quadro é a soma de a e b, e entregam seus papéis para Cernaldo.
Se em ambos os papéis está escrito NÃO, Cernaldo toca novamente a campainha, e o procedimento se repete.
Sabe-se que Arnaldo e Bernaldo são sinceros e inteligentes.
Qual é o número máximo de vezes que a campainha pode ser tocada até que um deles escreva que sabe o valor da soma?

SOLUÇÃO DE TELMO LUIS CORREA JÚNIOR (SANTO ANDRÉ – SP)

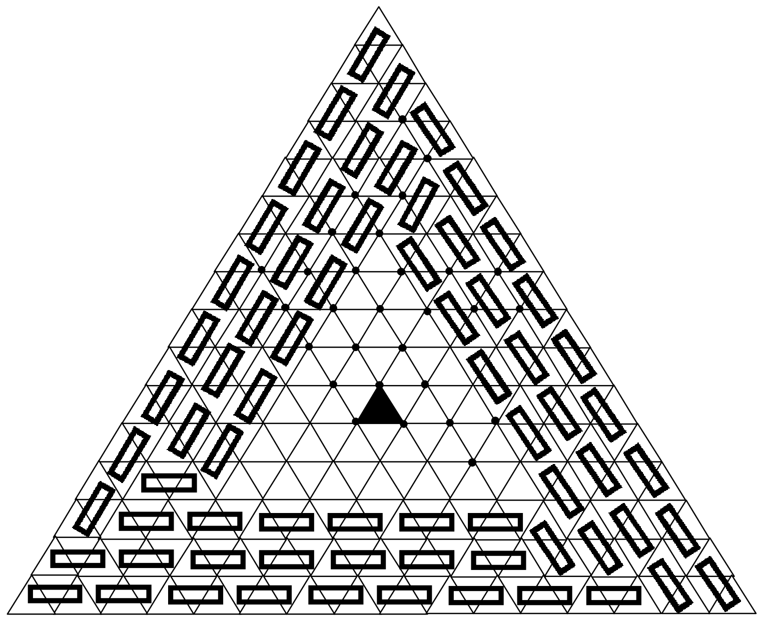
Se $a \ge 9$, a campainha toca apenas 1 vez: Arnaldo sabe que $b \ge 0$, logo a única soma possível é 15. O mesmo ocorre se $b \ge 9$, com Bernaldo.
Caso contrário, a campainha toca 2 vezes: com $a, b \le 8$ não é possível decidir entre as somas dadas na primeira vez.
Se a = 6, Arnaldo agora sabe que $b \le 8$, então a soma não pode ser 5 ou 15, apenas 8. O mesmo ocorre se b = 6. Se $a \in \{0,1,2,3,4,5,7,8\}$, ainda não é possível decidir entre 5, 8 e 15. O mesmo ocorre para Bernaldo.
Caso a campainha toque pela terceira vez $a, b \in \{0,1,2,3,4,5,7,8\}$.

Se a = 2, Arnaldo sabe que $b \neq 6$ e $b \leq 8$, logo a única soma possível é 5. O mesmo ocorre se b = 2. Caso $a \neq 2$ e $b \neq 2$, ninguém escreve o SIM. De fato:
Se $a \in \{0,1,3,4,5\}$, Arnaldo não pode decidir entre as somas 5 e 8.
Se $a \in \{7,8\}$, Arnaldo não pode decidir entre as somas 8 e 15. O mesmo ocorre para Bernaldo.
A campainha toca pela quarta vez, e ambos sabem que $a, b \in \{0,1,3,4,5,7,8\}$.
Se a = 3, Arnaldo sabe que $b \neq 2$, logo a soma deve ser 8. Se $a \in \{0,1,4,5\}$ não é possível decidir entre 5 e 8, se $a \in \{7,8\}$, não é possível decidir entre 8 e 15. O mesmo ocorre com Bernaldo.
A campainha toca pela quinta vez: ambos sabem que $a, b \in \{0,1,4,5,7,8\}$.
Se a = 5, Arnaldo sabe que $b \neq 3$, logo a soma deve ser 5. Se $a \in \{0,1,4\}$ não é possível decidir entre 5 e 8, se $a \in \{7,8\}$ não é possível decidir entre 8 e 15.
O mesmo para Bernaldo.
A campainha toca: sexta vez - ambos sabem que $a, b \in \{0,1,4,7,8\}$.
Se a = 0, Arnaldo sabe que $b \neq 5$, logo a soma deve ser 8. Se $a \in \{1,4\}$, não é possível decidir entre 5 e 8, se $a \in \{7,8\}$, entre 8 e 15.
O mesmo para Bernaldo.
Sétima vez: ambos sabem que $a, b \in \{1,4,7,8\}$. Se a = 8, Arnaldo sabe que a soma deve ser 15, se $a \in \{1,4\}$, não pode decidir entre 5 e 8, se a = 7, não pode decidir entre 8 e 15. O mesmo com Bernaldo.
Oitava vez: ambos sabem que $a, b \in \{1,4,7\}$. Se a = 7, Arnaldo sabe que a soma deve ser 8, se $a \in \{1,4\}$, não pode decidir entre 5 e 8.
O mesmo para Bernaldo.
Nona vez: ambos sabem que $a, b \in \{1,4\}$. Arnaldo sabe que única soma possível se a = 1 é 5;
se a = 4, a soma pode ser 5 ou 8. O mesmo para Bernaldo.
A campainha toca pela décima vez: agora ambos sabem que a = b = 4, e determinam a soma com segurança. Logo, a campainha pode ser tocada no máximo dez vezes.

PROBLEMA 5

Utilizando triangulinhos eqüiláteros de papel, de lado 1, forma-se um triângulo eqüilátero de lado 2^{2004}. Desse triângulo retira-se o triangulinho de lado 1 cujo centro coincide com o centro do triângulo maior.
Determine se é possível cobrir totalmente a superfície restante, sem superposições nem buracos, dispondo-se somente de fichas em forma de trapézio isósceles, cada uma formada por três triangulinhos eqüiláteros de lado 1.

SOLUÇÃO DE GABRIEL TAVARES BUJOKAS (SÃO PAULO – SP)



Vamos mostrar por indução que qualquer $n \equiv 1 \pmod 9$ é possível cobrir o triângulo dividido em n partes cada lado. Como $2^{2004} \equiv (+1) \pmod 9$ já que $2^{6n} \equiv 1$ e $6 \mid 2004$, $2^{6n} \equiv 1 \pmod 9$ e $6 \mid 2004$ para $n = 2^{2004}$ é possível.

Vamos mostrar que se para $n \equiv 1 \pmod 9$ é possível, então para $n + 9$ também é.

Temos que $n + 9 \equiv 1 \pmod 9$. Cobriremos os 3 lados do triângulo maior assim: Comece por um vértice A e cubra um lado a que este pertença com peças até restarem 2 espaços (como $n \equiv 1 \pmod 3$, isto é possível). Agora preencha da mesma forma a segunda linha, até restarem 4 espaços.

Na terceira linha, deixe um espaço à esquerda e preencha até onde foi a segunda linha (como indicado na figura acima). E, acima das primeiras duas peças da terceira linha, ponha mais uma (como na figura).

Faça isso para todos os vértices. Observe que não há nem espaços nem superposições. Assim criamos uma "barba" e o meio é um triângulo de lado

$(n + 9) – 9$ (muito fácil de ver, já que a borda tem "largura" 3). O centro do triângulo grande coincide com o do de lado n. Assim, por hipótese de indução, este triângulo central pode ser preenchido, logo o triângulo grande também!. A base da indução é n =1, caso em que não há nada a fazer. Assim, nossa afirmação está provada.

PROBLEMA 6

Sejam m, n inteiros positivos. Em um tabuleiro $m \times n$, quadriculado em quadradinhos de lado 1, considere todos os caminhos que vão do vértice superior direito ao inferior esquerdo, percorrendo as linhas do quadriculado exclusivamente nas direções $\leftarrow$ e $\downarrow$.

Define-se a *área* de um caminho como sendo a quantidade de quadradinhos do tabuleiro que há abaixo desse caminho. Seja p um primo tal que $r_p(m) + r_p(n) \geq p$, onde $r_p(m)$ representa o resto da divisão de m por p e $r_p(n)$ representa o resto da divisão de n por p.

Em quantos caminhos a área é um múltiplo de p?

SOLUÇÃO:

Para resolver este problema, usaremos técnicas de funções geratrizes descritas no artigo "Séries formais", de Eduardo Tengan, da Eureka! No. 11, pp. 34 – 39.

Representaremos o tabuleiro por $\{1, 2,\ldots,m\} \times \{1, 2,\ldots,n\}$.

Desta forma, os quadradinhos são representados por pares $(i,\ j)$, com $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$ Considere agora um caminho como no enunciado. Para $1 \leq i \leq m,$ seja b_i o número de quadradinhos da forma $(i,\ y)$ que estão abaixo do caminho. Como o caminho só desce ou anda para a esquerda, temos $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \ldots \leq b_m$ (e, reciprocamente, tais b_i determinam um caminho). A área do caminho é $\sum_{i=1}^{m} b_i$. Definamos $b_{m+1} = n$ e $b_0 = 0$. Para $1 \leq i \leq m+1$, seja $y_i = b_i - b_{i-1}$. Temos $\sum_{i=1}^{m+1} y_i = b_{n+1} - b_0 = n$, e, em geral, para $k \leq m+1$, $\sum_{i=1}^{k} y_i = b_k - b_0 = b_k$. Portanto, a área do caminho é

$$A = \sum_{i=1}^{m} b_i = \sum_{i=1}^{m} (m+1-i) \cdot y_i = \sum_{i=1}^{m+1} (m+1-i) \cdot y_i = \sum_{j=0}^{m} j \cdot y_{m+1-j}.$$

Assim, fazendo $z_j = y_{m+1-j}$, temos $\sum_{j=0}^{m} z_j = n$ e $\sum_{j=0}^{m} j \cdot z_j = A$.

Assim, o problema é equivalente a achar o número de soluções de $z_0 + z_1 + \ldots + z_m = n$, com $z_i \geq 0$ para $0 \leq i \leq m+1$ e $\sum_{j=0}^{m} j \cdot z_j$ múltiplo de p. Para isso, considere a função $F(x,y) = \prod_{k=0}^{m} \frac{1}{1-x^k y} = \frac{1}{1-y} \cdot \frac{1}{1-xy} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-x^m y}$. Como

$\frac{1}{1-x^k y}=1+x^k y+(x^k y)^2+\ldots$, $F(x,y)=\sum_{r,s\in\mathbb{N}} a_{r,s}x^r y^s$, onde $a_{r,s}$ é o número de soluções de $z_0+z_1+\ldots+z_m=s$ com $z_i\geq 0, \forall i\geq 0$ e $z_i+2z_2+3z_3+\ldots=\sum_{j=0}^{m} jz_j=r.$ Em particular, $a_{r,n}$ é o número de caminhos como no enunciado com área r. Queremos então calcular $\sum_{p|r} a_{r,n}$, i.e., a soma dos $a_{r,n}$ para os r múltiplos de p.

Para isso, consideremos a soma $\sum_{k=0}^{p-1} F(\xi^k,y)$, onde $\xi=e^{2\pi i/p}$ é uma raiz p-ésima da unidade (e logo $\sum_{k=0}^{p-1}\xi^{kr}=0$, sempre que r não é múltiplo de p). Temos $\sum_{k=0}^{p-1}F(\xi^k,y)=\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{r,s\in\mathbb{N}}a_{r,s}\cdot\xi^{kr}\cdot y^s=\sum_{r,s\in\mathbb{N}}a_{r,s}\cdot\left(\sum_{k=0}^{p-1}\xi^{kr}\right)\cdot y^s=\sum_{\substack{r,s\in\mathbb{N}\\ p|r}} p\cdot a_{r,s}\cdot y^s$ (pois, se $p\mid r$, $\sum_{k=0}^{p-1}\xi^{kr}=p$) . Em particular, o coeficiente de y^n em $\sum_{k=0}^{p-1}F(\xi^k,y)$ é p vezes o número de caminhos como no enunciado cuja área é um múltiplo de p.

Para $k=0$, $F\left(\xi^k,y\right)=F(1,y)=\frac{1}{(1-y)^{m+1}}=(1+y+y^2+\ldots)^{m+1}$, e o coeficiente de y^n em $F(1,y)$ é o número de soluções de $k_1+k_2+\ldots+k_{m+1}=n$, $k_i\geq 0$, $\forall i$, que é $\binom{m+n}{m}$. Por outro lado, para $1\leq k\leq p-1$, $F\left(\xi^k,y\right)=\prod_{r=0}^{m}\frac{1}{1-\xi^{kr}y}=\frac{1}{y^{m+1}}\prod_{r=0}^{m}\frac{1}{y^{-1}-\xi^{kr}}$. Escrevendo $m=qp+r_p(m)=(q+1)p-(p-r_p(m))$, com $0\leq r_p(m)<p$, temos

$$F\left(\xi^k,y\right)=\frac{1}{y(q+1)p}\cdot\frac{\prod_{r=m+1}^{(q+1)p-1}\left(1-\xi^{kr}y\right)}{\prod_{r=0}^{(q+1)p-1}\left(y^{-1}-\xi^{kr}\right)}=\frac{1}{y^{(q+1)p}}\frac{\prod_{r=m+1}^{(q+1)p-1}(1-\xi^{kr}y)}{(y^{-p}-1)^{q+1}}=\frac{\prod_{r=m+1}^{(q+1)p-1}\left(1-\xi^{kr}y\right)}{\left(1-y^p\right)^{q+1}}.$$

Como o produto $\prod_{r=m+1}^{(q+1)p-1}\left(1-\xi^{kr}y\right)$ tem $p-r_p(m)-1$ termos, ao desenvolver esse produto, obtemos termos da forma $a\cdot y^s$, com $0\leq s\leq p-r_p(m)-1$. Por outro lado, todas as potências de y em $\frac{1}{(1-y^p)^{q+1}}=\left(1+y^p+y^{2p}+\ldots\right)^{q+1}$ têm expoente múltiplo de *p*, donde os termos não-nulos em $F(\xi^k, y)$ têm o expoente de *y* congruente a *s* módulo *p*, para algum *s* com $0 \le s \le p - r_p(m) - 1$. Entretanto, $r_p(m) + r_p(n) \ge p$, donde $r_p(n) > p - r_p(m) - 1$, e, como *n* é congruente a $r_p(n)$ módulo *p*, nenhum termo não nulo em $F\left(\xi^k, y\right)$ tem expoente *n*. Assim, o número procurado de caminhos cuja área é um múltiplo de *p* é $\frac{1}{p}\binom{m+n}{m}$.

Você sabia…

Que $2^{25964951} - 1$ é primo? Este número de 7.816.230 dígitos é o maior primo conhecido, e é um primo de Mersenne, assim como o segundo, o terceiro e o quarto maiores primos conhecidos, que são $2^{24036583} - 1$, $2^{20996011} - 1$ e $2^{13466917} - 1$.

O descobridor deste novo primo (o 42°. primo de Mersenne conhecido), Dr. Martin Nowak, é um oftalmologista alemão que participa do GIMPS, um projeto cooperativo para procurar primos de Mersenne, responsável pela descoberta dos oito maiores primos de Mersenne atualmente conhecidos.

Veja: http://www.mersenne.org para maiores informações.

XLV OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

Enunciados e Soluções

Caros leitores: nossa equipe da IMO-2004 tinha seis alunos muito diferentes, mas com uma característica em comum: garra. Todos eles adotaram a tática de escrever tudo o que passava pelas suas cabeças, de modo a maximizar as suas pontuações. Assim, não podemos transcrever as suas soluções *ipsis literis*. Ao contrário, vamos colocar somente partes das soluções deles, com alguns comentários sobre as suas idéias.

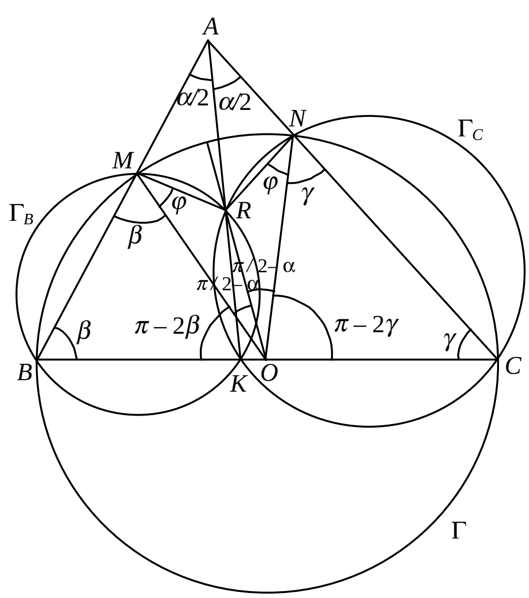
Carlos Yuzo Shine, vice-líder do Brasil na IMO-2004

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Seja ABC um triângulo acutângulo com $AB \neq AC$. A circunferência de diâmetro BC intersecta os lados AB e AC nos pontos M e N, respectivamente. Seja O o ponto médio do lado BC. As bissetrizes dos ângulos $\widehat{BAC}$ e $\widehat{MON}$ intersectam-se em R. Prove que as circunferências circunscritas aos triângulos BMR e CNR têm um ponto em comum que pertence ao lado BC.

SOLUÇÃO DE THIAGO COSTA LEITE SANTOS (SÃO PAULO - SP)



Seja Γ a circunferência com diâmetro BC, Γ_B o circuncírculo de BMR e Γ_C o circuncírculo de CNR. Suponhamos sem perda de generalidade que o circunraio de ABC mede 1/2, de modo que $BC = sen\ \alpha$, $AC = sen\ \beta$ e $AB = sen\ \gamma$.

Aqui, Thiago nota (e prova) que o ponto comum às duas circunferências e o lado BC só pode ser o pé da bissetriz:

Temos $pot_{\Gamma} A = AM \cdot AB = AN \cdot AC$. Mas $pot_{\Gamma_B} A = AM \cdot AB$ e $pot_{\Gamma_C} A = AN \cdot AC$, logo A pertence ao eixo radical de Γ_B e Γ_C. Como R também pertence ao eixo radical, a reta AR é o eixo radical de Γ_B e Γ_C. Logo o ponto comum a Γ_B e Γ_C e BC só pode ser a interseção de AR e BC, ou seja, a interseção da bissetriz de $\angle BAC$ e BC.

Mais algumas considerações geométricas: como $OM = ON$ (raios de Γ), $\angle NOR = \angle MOR$ (OR é bissetriz de $\angle MON$) e OR é comum, os triângulos MOR e NOR são congruentes (caso LAL), portanto $\angle RNO = \angle RMO$.

Nesse momento, Thiago percebe como poderia terminar o problema: seja K a interseção da bissetriz de $\angle BAC$ e BC. A idéia dele é provar que K pertence a BC, Γ_B e Γ_C. Que pertence a BC é óbvio. Para provar que pertence a Γ_B, basta provar que B, M, R e K são concíclicos; e, de modo análogo, para provar que pertence a Γ_C, basta provar que C, N, R e K são concíclicos.

Aqui está a formalização dele: se provarmos que $\angle RNO = \alpha/2$, teríamos $\angle RNC = \gamma + \alpha/2$ e $\angle RNC + \angle RKC = \gamma + \alpha/2 + \beta + \alpha/2 = \pi$, portanto K pertence a Γ_C. Analogamente (aqui você deve verificar que Thiago usa o fato que ele provou antes de que $\angle RNO = \angle RMO$), vamos ter K pertencente a Γ_B, portanto Γ_B e Γ_C têm um ponto comum em BC.

Deste modo, só falta provar que $\angle RNO = \alpha/2$. Isso é um problema que costuma ser resolvido de duas maneiras: (1) com "arrastão" (isto é, calculando todos os ângulos na figura) ou (2) "arrastão" seguido de contas (isto é, com trigonometria, geometria analítica ou complexos). Thiago resolveu adotar a opção (2), com trigonometria (quando o coordenador viu as contas, ele comentou, "estava indo tão bem até aqui, por que ele teve que fazer essas contas??")

O triângulo NBO é isósceles, logo $\angle ONC = \angle OCN = \gamma$ e $\angle NOC = \pi - 2\gamma$. Analogamente, $\angle MOB = \pi - 2\beta$ e $\theta = \angle MOR = \angle NOR = \dfrac{\pi-(\pi-2\beta)-(\pi-2\gamma)}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$.

Seja $\angle RNO = \varphi$. A idéia é calcular alguma função trigonométrica de φ (geralmente acaba sendo a cotangente, por causa do truque da cotangente – veja o artigo *Geometria com Contas*, Eureka! 17) e compará-la com a mesma função trigonométrica de $\alpha/2$ para provar que $\varphi = \alpha/2$.

Mas por onde começar? Primeiro devemos procurar por triângulos que envolvam φ. Um deles vem da própria definição de φ: RNO. Outro bem interessante é o ARN, cujos ângulos envolvem tanto φ como $\alpha/2$, além de ter RN em comum (um segmento a menos para calcular, como você vai ver depois!). Então parece ser uma boa estratégia utilizar esses dois triângulos.

Lei dos senos em RNO:

$$\frac{RN}{sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{NO}{sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\varphi\right)} \qquad (1)$$

Lei dos senos em ARN:

$$\frac{RN}{sen\frac{\alpha}{2}} = \frac{AN}{sen\left(\gamma+\varphi-\frac{\alpha}{2}\right)} \qquad (2)$$

Veja que se dividirmos (1) por (2), RN se cancela, então não precisamos calcular RN. Só precisamos de NO e AN. NO é fácil: é o raio $\dfrac{BC}{2} = \dfrac{sen\alpha}{2}$. Além disso, $AN = AC - NC = \text{sen}\,\beta - NC$. Só falta NC!

Pela lei dos senos em NOC,

$$\frac{NC}{sen2\gamma} = \frac{OC}{sen\gamma} \Leftrightarrow NC = \frac{sen\alpha sen2\gamma}{2sen\gamma} = \frac{sen\alpha\cdot 2sen\gamma\cos\gamma}{2sen\gamma} = sen\alpha\cos\gamma$$

logo $AN = \text{sen}\,\beta - \text{sen}\,\alpha\cos\gamma = \text{sen}(\alpha+\gamma) - \text{sen}\,\alpha\cos\gamma = \text{sen}\,\alpha\cos\gamma + \text{sen}\,\gamma\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha\cos\gamma = \text{sen}\,\gamma\cos\alpha$.

Vamos usar repetidas vezes o fato de que $\text{sen}(\pi/2 - x) = \cos x$ e as fórmulas de Prostaférese (que os gregos tiveram que deduzir na coordenação! procure-as na

Eureka! 17). Agora sim, dividindo (1) por (2) e substituindo *NO* e *AN*, obtemos a nossa conta final:

$$\frac{sen\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}=\frac{\frac{sen\alpha}{2}sen\left(\gamma+\varphi-\frac{\alpha}{2}\right)}{sen\gamma\cos\alpha\cdot\cos(\alpha-\varphi)}\Leftrightarrow\frac{sen\left(\gamma+\varphi-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos(\alpha-\varphi)}=\frac{sen\gamma}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$
$$\Leftrightarrow sen\gamma\cos(\alpha-\varphi)=sen\left(\gamma+\varphi-\tfrac{\alpha}{2}\right)\cos\tfrac{\alpha}{2}\ \ (*)$$

Parece loucura, mas Thiago abriu os senos e co-senos. Mas isso tinha um motivo: ele queria achar *cotg* φ (lembre-se: o segredo do sucesso nas contas é sempre ter uma meta em mente!).

$$(*)\Leftrightarrow\cos\varphi\cos\alpha sen\gamma+sen\varphi sen\gamma sen\alpha=sen\varphi\cos\left(\gamma-\tfrac{\alpha}{2}\right)\cos\tfrac{\alpha}{2}+\cos\varphi sen\left(\gamma-\tfrac{\alpha}{2}\right)\cos\tfrac{\alpha}{2}$$
$$\Leftrightarrow\cos\varphi\left(\cos\alpha sen\gamma-sen\left(\gamma-\tfrac{\alpha}{2}\right)\cos\tfrac{\alpha}{2}\right)=sen\varphi\left(\cos\left(\gamma-\tfrac{\alpha}{2}\right)\cos\tfrac{\alpha}{2}-sen\gamma sen\alpha\right)$$
$$\Leftrightarrow\cos\varphi(sen(\alpha+\gamma)+sen(\gamma-\alpha)-sen\gamma-sen(\gamma-\alpha))=$$
$$sen\varphi(\cos\gamma+\cos(\gamma-\alpha)-\cos(\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha))$$
$$\Leftrightarrow\text{cotg }\varphi=\frac{\cos\gamma-\cos\beta}{sen\beta-sen\gamma}=\frac{2sen\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)sen\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}{2sen\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}=\frac{sen\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)}=\text{cotg}\frac{\alpha}{2}$$

Como *cotg* φ = *cotg* $\frac{\alpha}{2}$ e φ e $\frac{\alpha}{2}$ pertencem ao intervalo]0; π[, temos $\varphi=\frac{\alpha}{2}$, o que precisávamos.

PROBLEMA 2

Determine todos os polinômios $P(x)$ de coeficientes reais que satisfazem a igualdade

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c)$$

para quaisquer números reais a, b, c, tais que $ab+bc+ca=0$.

SOLUÇÃO DE FÁBIO DIAS MOREIRA (RIO DE JANEIRO - RJ)

Note inicialmente que

$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c)$
$P(b-a)+P(a-c)+P(c-b)=2P(b+a+c)$ (*)
$P(b-a)+P(c-b)+P(a-c)=2P(-a-b-c)$ (**)

Desde que $ab + bc + ca = 0$ (a primeira equação é uma aplicação direta; a segunda segue se permutarmos a e b; a terceira se levarmos $(a; b; c)$ em $(-a; -b; -c)$, o que é permitido pois $(-a)(-b) + (-b)(-c) + (-c)(-a) = ab + bc + ca = 0$).

Igualando (*) e (**), $P(a + b + c) = P(-a - b - c)$ desde que $ab + bc + ca = 0$. Mas dado S real, se tomarmos $a = S$, $b = 0$ e $c = 0$, então $a + b + c = S$ e $ab + bc + ca = 0$. Logo $P(x) = P(-x)$ para todo x real, ou seja, P é par. Em particular, isto implica que o grau de P, $\mathrm{gr}(P)$, é par.

Agora vem a parte da solução que usa análise. Ele provou um lema geral bem útil para o problema.

Note inicialmente que se $P(x) = k$ para todo x real então $3k = 2k \Leftrightarrow k = 0$ que, de fato, é uma solução. Suponha agora que P não é constante, de grau n. Seja $Q_x(\lambda) = P(x\lambda)$ (aqui, Fábio usa uma idéia relacionada a homogeneidade). Fixado x, Q_x é um polinômio em λ de grau $\le n$ (de fato, de grau n se $x \neq 0$ e de grau 0 se $x = 0$).

Lema. $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{Q_x(\lambda)}{\lambda^n} = C_n x^n$, sendo C_n o coeficiente líder de $P(x)$.

Demonstração:
Note que $Q_x(\lambda)$, $Q_x'(\lambda)$, …, $Q_x^{(n-1)}(\lambda)$, λ^n, λ^{n-1}, …, λ são todos polinômios, logo são deriváveis, e que para um desses polinômios qualquer, digamos R, temos $\lim\limits_{\lambda \to \infty} |R(\lambda)| = +\infty$, pois todos eles têm grau maior ou igual a 1. Então, aplicando o teorema de L'Hôpital repetidas vezes, temos $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{Q_x(\lambda)}{\lambda^n} = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{Q_x^{(n)}(\lambda)}{n!}$. Mas se $P(x) = C_n x^n + \ldots + C_1 x + C_0$, $Q_x(\lambda) = C_n x^n \lambda^n + \ldots + C_1 x\lambda + C_0$, logo $Q_x^{(n)}(\lambda) = n! C_n x^n$, logo o limite desejado é mesmo $C_n x^n$.

Agora, Fábio aproveita-se da homogeneidade da condição $ab + bc + ca = 0$: como $ab + bc + ca = 0 \Leftrightarrow (\lambda a)(\lambda b) + (\lambda b)(\lambda c) + (\lambda c)(\lambda a) = 0$ para todo λ real, logo
$P(\lambda(a - b)) + P(\lambda(b - c)) + P(\lambda(c - a)) = 2P(\lambda(a + b + c)) \Leftrightarrow$
$Q_{a-b}(\lambda) + Q_{b-c}(\lambda) + Q_{c-a}(\lambda) = 2Q_{a+b+c}(\lambda)$ para todos λ, a, b, c reais, $ab + bc + ca = 0$.
Como cada um dos limites $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{Q_x(\lambda)}{\lambda^n}$, $x \in \{a - b;\ b - c;\ c - a\}$, $n = gr(P)$ existe, existe o limite da soma, que é a soma dos limites. Logo

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{Q_{a-b}(\lambda)+Q_{b-c}(\lambda)+Q_{c-a}(\lambda)}{\lambda^n}=2\lim_{\lambda\to\infty}\frac{Q_{a+b+c}(\lambda)}{\lambda^n}$$

$$\Leftrightarrow C_n(a-b)^n+C_n(b-c)^n+C_n(c-a)^n=2C_n(a+b+c)^n$$

sendo a, b, c reais tais que $ab + bc + ca = 0$ e $n = gr(P)$. Como C_n, coeficiente líder de P, é não-nulo por hipótese, $(a – b)^n + (b – c)^n + (c – a)^n = 2(a + b + c)^n$ (***)

Tome $a = – 2$, $b = 3$ e $c = 6$ (note que $ab + bc + ca = 0$). Então, substituindo em (***), $(–5)^n + (–3)^n + 8^n = 2 \cdot 7^n$

Como n é par, obtemos $5^n + 3^n + 8^n = 2 \cdot 7^n$. Se $n \ge 7$,

$$8^n=\left(\frac{8}{7}\right)^n 7^n \ge 7^n\left(1+\frac{1}{7}\right)^7 > 7^n\left(1+7\cdot\frac{1}{7}\right)=2\cdot 7^n,$$ absurdo.

Logo $n \le 6$. Mas $n = 6$ implica $0 \equiv 2 \cdot 7^6 \equiv 3^6 + 5^6 + 8^6 \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 3 \pmod{7}$, absurdo. Logo $P(x) = Ax^2 + B$ ou $P(x) = Ax^4 + Bx^2 + C$.

Fábio não precisava estudar o caso $P(x) = Ax^2 + B$, pois isso é um caso particular do caso $P(x) = Ax^4 + Bx^2 + C$, mas ele estudou. Na hora de estudar o caso $P(x) = Ax^4 + Bx^2 + C$, ele viu que a conta seria grande. Mas nesse momento ele lembrou as palavras que o prof. Luciano sempre diz: "tem que ter garra para ser campeão!" e não fraquejou, fazendo as contas:

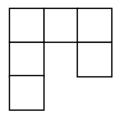
Substitua $a = b = c = 0$ na equação do enunciado. Segue imediatamente que $C = 0$. Logo $P(x) = Ax^4 + Bx^2$. Substituindo (isso mesmo!) e tendo em mente que $ab + bc + ca = 0$ e que *"hay que hacer las cuentas, pero sin perder la simetría jamás"*,

$(a – b)^2[A(a – b)^2 + B] + (b – c)^2[A(b – c)^2 + B] + (c – a)^2[A(c – a)^2 + B] =$
$= 2(a + b + c)^2 [A(a + b + c)^2 + B]$
$\Leftrightarrow A[(a – b)^4 + (b – c)^4 + (c – a)^4] + B[(a – b)^2 + (b – c)^2 + (c – a)^2]$
$= 2A(a + b + c)^4 + 2B(a + b + c)^2$
$\Leftrightarrow A[a^4 – 4a^3b + 6a^2b^2 – 4ab^3 + b^4 + b^4 – 4b^3c + 6b^2c^2 – 4bc^3 + c^4 + c^4 – 4c^3a + 6c^2a^2 – 4ca^3 + a^4] + B[a^2 – 2ab + b^2 + b^2 – 2bc + c^2 + c^2 – 2ca + a^2]$
$= 2A(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca)^2 + 2B(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca)$
$\Leftrightarrow 2A[a^4 + b^4 + c^4 – 2ab(a^2 + b^2) – 2bc(b^2 + c^2) – 2ca(c^2 + a^2) + 3a^2b^2 + 3b^2c^2 + 3c^2a^2] + 2B[a^2 + b^2 + c^2] = 2A[a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2] + 2B[a^2 + b^2 + c^2] \Leftrightarrow A[a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 – 2ab(a^2 + b^2) – 2bc(b^2 + c^2) – 2ca(c^2 + a^2)] = 0$
$\Leftrightarrow A[a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 – 2a^2(ab + bc + ca) + 2a^2bc – 2b^2(ab + bc + ca) +$
$2ab^2c – 2c^2(ab + bc + ca) + 2abc^2] = 0 \Leftrightarrow A[(ab + bc + ca)^2 – 2abc(a + b + c) +$
$2abc(a + b + c)] = 0 \Leftrightarrow 0 = 0.$

Como todas as passagens são equivalências, não há restrição sobre A e B. Portanto os únicos polinômios que satisfazem as condições do enunciado são os da forma $P(x) = Ax^4 + Bx^2$, A, B reais.

PROBLEMA 3

Um *gancho* é uma figura formada por seis quadrados unitários como no seguinte diagrama



ou qualquer uma das figuras obtidas desta aplicando rotações ou reflexões.

Determine todos os retângulos $m \times n$ que podem ser cobertos com ganchos de modo que:

i) O retângulo é coberto sem buracos e sem sobreposições;

ii) Nenhuma parte de nenhum gancho pode cobrir regiões fora do retângulo.

SOLUÇÃO OFICIAL

Considere um preenchimento do tabuleiro $m \times n$. Para cada gancho A, existe um único gancho B cobrindo o quadradinho "interno" de A com uma de suas "extremidades". Além disso, o quadradinho "interno" de B deve ser coberto por uma das "extremidades" de A. Assim, num recobrimento, todos os ganchos formam pares. Há apenas duas maneiras de formar tais pares. Em um caso, A e B formam um retângulo 3×4; no outro, a sua união é um octógono, com lados 3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2.

Então um tabuleiro $m \times n$ pode ser coberto por ganchos se e somente se pode ser coberto com os pares de 12 quadradinhos acima. Suponha que tal recobrimento exista. Então mn é divisível por 12. Provaremos que m ou n é divisível por 4.

Assuma por absurdo que isso não acontece; então m e n são ambos pares, pois mn é divisível por 4. Imagine o tabuleiro dividido em quadradinhos unitários, com linhas e colunas rotuladas 1, 2, …, m e 1, 2, …, n, respectivamente. Escreva 1 no quadradinho (i, j) se exatamente um entre os números i e j é divisível por 4, e 2, se i e j são ambos divisíveis por 4. Como o número de quadrados em cada linha e coluna é par, a soma de todos os números escritos é par. Mas não é difícil verificar que um retângulo 3×4 sempre cobre números com soma 3 ou 7; e o outro tipo de par sempre cobre números com soma 5 ou 7. Conseqüentemente, o número de pares de peças é par. Assim, mn é divisível por 24 e, portanto, por 8, absurdo, pois supusemos que nem m nem n é múltiplo de 4.

Note também que nem m nem n pode ser 1, 2 ou 5 (qualquer tentativa de colocar as peças nesses casos falha). Concluímos então que se um recobrimento é possível então m ou n é divisível por 3, m ou n é divisível por 4 e m, $n \notin \{1; 2; 5\}$.

Reciprocamente, se essas condições acima são verificadas, o recobrimento é possível (utilizando somente retângulos 3×4). Isso é imediato quando 3 divide m e 4 divide n (ou vice-versa). Seja m divisível por 12 e $n \notin \{1; 2; 5\}$ (ou vice-versa). Então n pode ser representado como a soma de vários 3's e vários 4's. Então o tabuleiro pode ser particionado em retângulos $m \times 3$ e $m \times 4$, que são fáceis de cobrir, utilizando novamente retângulos 3×4.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Seja $n \geq 3$ um inteiro. Sejam $t_1, t_2, ..., t_n$ números reais positivos tais que

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + ... + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + ... + \frac{1}{t_n}\right).$$

Mostre que t_i, t_j e t_k são as medidas dos lados de um triângulo para quaisquer i, j, k com $1 \leq i < j < k \leq n$.

SOLUÇÃO DE HENRY WEI CHENG HSU (SÃO PAULO - SP)

Suponha $t_n \geq t_{n-1} \geq \ldots \geq t_2 \geq t_1$ e seja $t_n = t_1 + t_2 + k$.

Temos

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \cdots + t_{n-1})\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_{n-1}}\right) + \frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_{n-1}}{t_n} + t_n\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_{n-1}}\right) + 1$$

Por Chebyshev (na verdade, poderíamos usar Cauchy ou MA-MH…),

$$\frac{(t_1 + t_2 + \cdots + t_{n-1})}{n-1} \frac{\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_{n-1}}\right)}{n-1} \geq \frac{n-1}{n-1}$$

$$\Leftrightarrow (t_1 + t_2 + \cdots + t_{n-1})\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_{n-1}}\right) \geq (n-1)^2$$

Assim,

$$n^2+1>(n-1)^2+1+\frac{t_1+t_2+\cdots+t_{n-1}}{t_n}+t_n\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_{n-1}}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2n-1>\frac{t_1+t_2}{t_n}+\frac{t_n}{t_1}+\frac{t_n}{t_2}+\frac{t_3+\cdots+t_{n-1}}{t_n}+\frac{t_n}{t_3}+\cdots+\frac{t_n}{t_{n-1}}$$

Como $\frac{t_k}{t_n}+\frac{t_n}{t_k}\geq 2$, temos

$$2n-1>2n-6+\frac{t_1+t_2}{t_n}+\frac{t_n}{t_1}+\frac{t_n}{t_2}\Leftrightarrow 5>\frac{t_1+t_2}{t_n}+\frac{t_n}{t_1}+\frac{t_n}{t_2}$$

Sendo $t_n = t_1 + t_2 + k$,

$$5>\frac{t_1+t_2}{t_1+t_2+k}+\frac{t_1+t_2+k}{t_1}+\frac{t_1+t_2+k}{t_2}\Leftrightarrow 5>1-\frac{k}{t_1+t_2+k}+1+\frac{t_2}{t_1}+\frac{k}{t_2}+\frac{t_1}{t_2}+1+\frac{k}{t_1}$$

$$\Leftrightarrow 2>\frac{t_1}{t_2}+\frac{t_2}{t_1}+\frac{k}{t_2}+\frac{k}{t_1}-\frac{k}{t_1+t_2+k}$$

Mas $\frac{t_1}{t_2}+\frac{t_2}{t_1}\geq 2$. Deste modo,

$$0>k\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_1+t_2+k}\right)\Leftrightarrow 0>k\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_n}\right)$$

Veja que $\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}>\frac{1}{t_n}$ pois $t_1 \leq t_2 \leq t_n$. Logo $k < 0$ e $t_n < t_1 + t_2$.

O resto é mais fácil: sejam $1 \leq i < j \leq n$. Temos $t_i + t_j \geq t_1 + t_2 > t_n \geq t_k$ para $1 \leq k \leq n$ e, portanto, t_i, t_j e t_k são sempre lados de um triângulo.

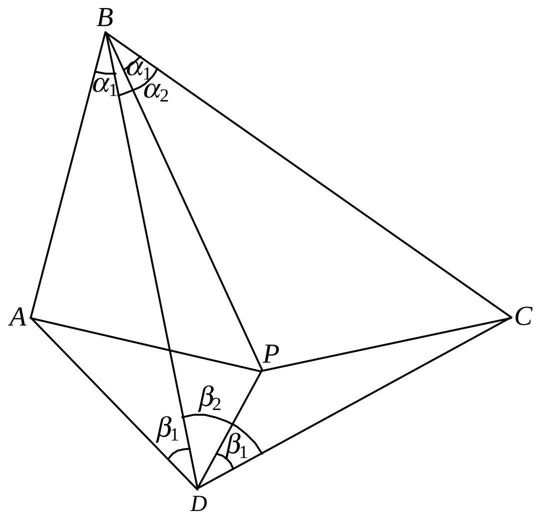
PROBLEMA 5

Num quadrilátero convexo *ABCD* a diagonal *BD* não é bissetriz do ângulo $\widehat{ABC}$ nem do ângulo $\widehat{CDA}$. Um ponto *P* no interior de *ABCD* satisfaz

$$\angle PBC=\angle DBA \text{ e } \angle PDC=\angle BDA.$$

Prove que os vértices do quadrilátero *ABCD* pertencem a uma mesma circunferência se e só se $AP = CP$.

SOLUÇÃO DE RAFAEL DAIGO HIRAMA (CAMPINAS - SP)



Primeiro ato: considerações gerais.
Vamos determinar a figura a partir de quatro ângulos: sejam $\angle ABD = \alpha_1$, $\angle BDA = \beta_1$, $\angle CBD = \alpha_2$, $\angle CDB = \beta_2$. Então $\angle DBP = \alpha_2 - \alpha_1$ e $\angle BDP = \beta_2 - \beta_1$.

Veja que esses ângulos não dependem de P estar dentro do triângulo ABD (o que implica $\angle ABD > \angle DBC$ e $\angle ADB > \angle BDC$) ou P estar dentro do triângulo BCD (o que implica $\angle ABD < \angle DBC$ e $\angle ADB < \angle BDC$) pois se $\angle ABD = \angle PBC$ então $\angle ABD \pm \angle DBP = \angle PBC \pm \angle DBP$ (+ se P está dentro de BDC e – se P está dentro de ABD) $\Rightarrow \angle ABP = \angle DBC = \alpha_2$. Para os ângulos com vértice D é análogo.

Usando lei dos senos nos triângulos ABP, BCP, ADP e DCP, temos

$$\frac{AP}{sen\alpha_2} = \frac{AB}{sen\angle APB} \quad (1) \qquad \frac{CP}{sen\alpha_1} = \frac{BC}{sen\angle BPC} \quad (2)$$

$$\frac{AP}{sen\beta_2} = \frac{AD}{sen\angle APD} \quad (3) \qquad \frac{CP}{sen\beta_1} = \frac{DC}{sen\angle DPC} \quad (4)$$

De (1) e (4), temos

$$\frac{AP}{CP} = \frac{AB}{DC} \cdot \frac{sen\alpha_2}{sen\beta_1} \cdot \frac{sen\angle DPC}{sen\angle APB} \quad (I)$$

De (2) e (3), temos

$$\frac{AP}{CP}=\frac{AD}{BC}\cdot\frac{sen\beta_2}{sen\alpha_1}\cdot\frac{sen\angle BPC}{sen\angle APD}\quad \text{(II)}$$

As equações (I) e (II) são fundamentais para a solução do problema, pois envolvem *AP* e *CP*, lados do quadrilátero *ABCD* e, além disso, observando a figura e essas equações, notamos algumas simetrias interessantes. Rafael começa a usá-las a partir de agora.

Vamos lá: $sen\angle APD = sen(\angle APD + \angle BPC - \angle BPC) = sen(\angle APD + \angle BPC)\cdot cos\angle BPC - cos(\angle APD + \angle BPC)\cdot sen\angle BPC$.

Seja $\theta = \angle APD + \angle BPC = 360º - (\angle APB + \angle CPD)$. Logo $sen\angle APD = sen\theta\cdot cos\angle BPC - cos\theta\cdot sen\angle BPC$ (III) e $sen\angle APB = sen(\angle APB + \angle CPD - \angle CPD) = sen(\angle APB + \angle CPD)\cdot cos\angle CPD - sen(\angle APB + \angle CPD)\cdot cos\angle CPD = -sen\theta\cdot cos\angle CPD - cos\theta\cdot sen\angle CPD$ (IV) (lembre-se de que $sen(360º - x) = -sen\,x$ e $cos(360º - x) = \cos x$).

Segundo ato: *ABCD* cíclico $\Rightarrow AP = CP$.
Supondo que *ABCD* é cíclico (esta é a primeira vez que vamos usar este fato), temos, pela lei dos senos estendida, que $\frac{AB}{sen\beta_1}=\frac{CD}{sen\alpha_2}$ e $\frac{AD}{sen\alpha_1}=\frac{BC}{sen\beta_2}$.
Substituindo essas duas últimas igualdades e (III) e (IV) em (I) e (II), respectivamente, temos

(VI): $\frac{PC}{AP}=\frac{sen\angle APD}{sen\angle BPC}=\frac{sen\theta}{tg\angle BPC}-\cos\theta$

(V): $\frac{PC}{AP}=\frac{sen\angle APB}{sen\angle CPD}=-\frac{sen\theta}{tg\angle CPD}-\cos\theta$

Logo $tg\angle BPC = -tg\angle CPD$ ou $sen\theta = 0$. A primeira possibilidade implica $\angle BPC + \angle CPD = 180º$, mas aí *B*, *P* e *C* seriam colineares e então *BD* bissectaria os ângulos $\angle ABC$ e/ou $\angle ADC$.

Portanto $sen\theta = 0$ e então $\theta = 180º$, pois $\theta = \angle APD + \angle BPC$ está entre 0 e 360º.

Então $\frac{PC}{AP}=\frac{sen180^\circ}{tg\angle BPC}-\cos180^\circ = 1$, ou seja, $AP = PC$.

Terceiro ato: $AP = CP \Rightarrow ABCD$ cíclico.

De (II) e (I), temos $\frac{AD}{BC}\cdot\frac{sen\beta_2}{sen\alpha_1}=\frac{sen\angle APD}{sen\angle BPC}$ e $\frac{CD}{AB}\cdot\frac{sen\beta_1}{sen\alpha_2}=\frac{sen\angle CPD}{sen\angle APB}$.

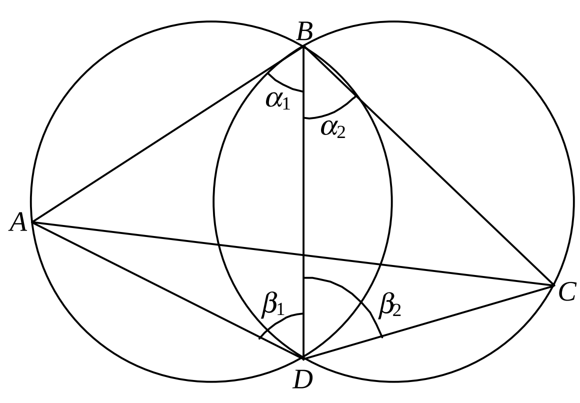
Multiplicando, temos $\frac{AD}{BC}\cdot\frac{sen\beta_2}{sen\alpha_1}\cdot\frac{CD}{AB}\cdot\frac{sen\beta_1}{sen\alpha_2}=\frac{sen\angle APD}{sen\angle BPC}\cdot\frac{sen\angle CPD}{sen\angle APB}$.

Aplicando a lei dos senos em ABD e BCD temos $\frac{AD}{sen\alpha_1}=\frac{AB}{sen\beta_1}$ e $\frac{CD}{sen\alpha_2}=\frac{BC}{sen\beta_2}$.

Assim, $\frac{sen\angle APD}{sen\angle BPC}=\frac{sen\angle APB}{sen\angle CPD}$

Mas, fazendo as mesmas contas que fizemos em (V) e em (VI) (veja que as igualdades **à direita** em (V) e (VI) não dependem de *ABCD* ser cíclico), vemos que $\frac{sen\angle APD}{sen\angle BPC}=\frac{sen\angle APB}{sen\angle CPD}$ = 1. E então $\frac{AD}{BC}\times\frac{sen\beta_2}{sen\alpha_1}=1 \Leftrightarrow \frac{AD}{sen\alpha_1}=\frac{BC}{sen\beta_2}$. Sejam R_1 e R_2 os circunraios de ABD e BCD. Pela lei dos senos estendida, $2R_1=\frac{AD}{sen\alpha_1}=\frac{BC}{sen\beta_2}=2R_2 \Rightarrow R_1 = R_2$.

Logo os triângulos *ABD* e *BCD* têm o mesmo circunraio. Só temos duas possibilidades para um circuncírculo de raio fixado em um segmento fixado: uma das possibilidades é *A*, *B*, *C* e *D* serem concíclicos, que é o que queremos; a outra é a circunferência que passa por *A*, *B* e *D* ser a simétrica da que passa por *B*, *C* e *D* em relação a *BD*.



Neste último caso vamos ter $\angle BAD = \angle BCD$. Como $\alpha_1 + \beta_1 + \angle BAD = 180º$ e $\alpha_2 + \beta_2 + \angle BCD = 180º$, $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2$.

Mas veja que ($\alpha_1 > \alpha_2$ e $\beta_1 > \beta_2$) ou ($\alpha_1 < \alpha_2$ e $\beta_1 < \beta_2$) pois caso contrário, como P está no interior do quadrilátero $ABCD$, P deveria estar no interior de ABD e BCD ao mesmo tempo, o que é impossível. Logo não é possível que $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2$, e o problema acabou.

Enfim, uma solução muito parecida com uma trilogia grega, porém sem nenhuma tragédia.

PROBLEMA 6

Um inteiro positivo é dito *alternante* se, na sua representação decimal, quaisquer dois dígitos consecutivos têm paridade diferente.
Determine todos os inteiros positivos n tais que n tem um múltiplo que é alternante.

SOLUÇÃO DE RAFAEL MARINI SILVA (RIO DE JANEIRO - RJ)

O principal diferencial da solução do Marini é que, em vez de procurar exemplos particulares para múltiplos alternantes de n, como a maioria dos estudantes fez, ele deu uma caracterização bastante interessante dos números alternantes. Vamos à solução:

Seja T o conjunto dos números cuja representação decimal consiste em algarismos todos menores do que 5. Veja que todo número alternante a pode ser escrito em uma das duas seguintes formas:

se a é ímpar, $a = \underbrace{101010...101}_{2n-1\ \text{dígitos}} + 2k = \dfrac{10^{2n}-1}{99} + 2k$, $k \in T$, k com no máximo $2n$ dígitos; (I)

se a é par, $a = \underbrace{101010...1010}_{2n\ \text{dígitos}} + 2k = \dfrac{10^{2n}-1}{99} \cdot 10 + 2k$, $k \in T$, k com no máximo $2n + 1$ dígitos; (II)

Agora, Marini divide o problema em casos:

Caso 1: $mdc(10; p) = 1$.

Aqui, Marini toma sim um número particular. Não é muito difícil encontrar um número alternante nesse caso, se você conhece o teorema de Euler-Fermat.

Tome $k = 0$ na forma (I) e $n = \varphi\,(99p)$. Pelo teorema de Euler-Fermat, $10^{\varphi\,(99p)} \equiv 1$ (mod $99p$) (veja que $mdc(10; 99p) = 1$) e portanto o número alternante $\dfrac{10^{2\varphi(99p)}-1}{99}$ é múltiplo de p.

Caso 2: p é par, mas não é múltiplo de 5.
Assim, $p = 2^{e+1}u$, sendo u ímpar e não múltiplo de 5. O número alternante que devemos encontrar é da forma (II). Assim, $2^{e+1}u | \dfrac{10^{2n}-1}{99} \cdot 10 + 2k, \Leftrightarrow$

$2^{e}u | \dfrac{10^{2n}-1}{99} \cdot 5 + k$, $k \in T$, k com no máximo $2n + 1$ algarismos.

A nova dificuldade nesse caso é a potência de 2, ou seja, que $2^{e} | \dfrac{10^{2n}-1}{99} \cdot 5 + k$. Para n suficientemente grande (maior que $e/2$), temos $\dfrac{10^{2n}-1}{99} \cdot 5 + k \equiv 0 \ (mod\ 2^{e}) \Leftrightarrow$ $k \equiv 5 \cdot 99^{-1} \ (mod\ 2^{e})$. Marini resolveu, então, provar um lema um pouco mais geral, mas que faz muito sentido: o conjunto T contém uma boa parte dos números inteiros, então…

Lema. Fixados a e m naturais e $q \in \{2,5\}$, existe $t \in T$ tal que $t \equiv a \ (mod\ q^{m})$.

Demonstração. Indução sobre m.

Base de indução: $m = 1$: imediato, pois $T > \{0, 1, 2, 3, 4\} > \{0, 1\}$.

Passo de indução: suponha o fato válido para $m = k$. Vamos provar para $m = k + 1$.

Suponha que $0 \le t < 10^{k}$. Seja $X_t = \{t;\ t + 10^{k};\ \ldots;\ t + (q-1) \cdot 10^{k}\}$. Note que esse conjunto está contido em T (pois $q \le 5$) e que X_t contém todos os possíveis restos congruentes a t módulo q^{k+1} (q^{k+1} não divide 10^{k} e q divide 10). Da hipótese de indução, dado x natural existe $t \in T$ com $t \in T$ com $t < 10^{k}$ (se $t \ge 10^{k}$, trocamos t pelo número formado pelos seus k últimos dígitos que é congruente a t módulo 10^{k}, e logo módulo q^{k}) tal que $x \equiv t \ (mod\ q^{k})$. Vendo módulo q^{k+1} temos que x é congruente a um elemento de X_t. Considerando a união de todos os conjuntos X_t, com t variando entre 0 e $q^{k} - 1$, vemos que cobrimos todos os possíveis restos (de fato, como X_t tem q elementos, a união tem q^{k+1} elementos) e portanto o lema está demonstrado.

Assim, aplicando o lema à congruência $k \equiv 5 \cdot 99^{-1}$ ($mod\ 2^e$), vemos que podemos escolher $k_0 \in T$ que satisfaz essa congruência. Seja m o número de dígitos de k_0. Tome s cópias de k_0 (com alguns zeros à esquerda para que fique com m + e + 1 dígitos) e concatene-as, isto é, seja $k = k_0 \sum_{j=0}^{s-1} 10^{(m+e+1)j} = k_0 \left(\frac{\left(10^{m+e+1}\right)^s - 1}{10^{m+e+1} - 1} \right)$. Veja que k ainda é um elemento de T e que $k \equiv 5 \cdot 99^{-1}$ ($mod\ 2^e$), pois $10^{m+e+1} \equiv 0$ ($mod\ 2^e$). Vamos fazer com que k seja múltiplo de u. Para isso, basta tomar $s = \varphi((10^{m+e+1} - 1) \cdot u)$ que o resto segue de Euler-Fermat.

Retomando: o número alternante que procuramos é $a = \frac{10^{2n} - 1}{99} \cdot 10 + 2k$. Já encontramos k. Agora, basta escolher um n adequado par acertar o número de algarismos de a. Tome $n = \varphi(99u)v$ maior que a quantidade de dígitos de k. Pronto! Temos

$a = \frac{10^{2n} - 1}{99} \cdot 10 + 2k = 2(\frac{10^{2n} - 1}{99} \cdot 5 + k) \equiv 0$ ($mod\ 2^{e+1}$) (graças ao lema!)

$a = \frac{10^{2n} - 1}{99} \cdot 10 + 2k \equiv 0 + 0 \equiv 0$ ($mod\ u$)

Logo a é múltiplo de p.

Caso 3: p é múltiplo de 5, mas é ímpar.

Seja $p = 5^e u$, u ímpar. Agora vamos procurar um número alternante da forma (I), ou seja, da forma $\frac{10^{2n} - 1}{99} + 2k$, $k \in T$. Para n suficientemente grande,

$\frac{10^{2n} - 1}{99} + 2k \equiv 0$ ($mod\ 5^e$) $\Leftrightarrow k \equiv 198^{-1}$ ($mod.\ 5^e$)

Novamente pelo lema, existe $k_0 \in T$ que satisfaz essa congruência. Assim como no caso anterior, tomemos $k = k_0 \sum_{j=0}^{s-1} 10^{m+e+1} = k_0 \left(\frac{\left(10^{m+e+1}\right)^s - 1}{10^{m+e+1} - 1} \right)$, com $s = \varphi((10^{m+e+1} - 1) \cdot u)$ e $n = \varphi(99u)v$ maior que a quantidade de dígitos de k. De modo análogo ao caso anterior, conseguimos um alternante múltiplo de p.

Caso 4: p é par e múltiplo de 5, ou seja, p é múltiplo de 10.

Neste caso, devemos tomar um alternante da forma (II), ou seja, $a = \dfrac{10^{2n}-1}{99} \cdot 10 + 2k$, $k \in T$. Seja $p = 10u$. Temos que $10u \mid \dfrac{10^{2n}-1}{99} \cdot 10 + 2k \Rightarrow 5 \mid k$. Como $k \in T$, seu último dígito só pode ser zero, de modo que $10 \mid k$. Seja $k = 10w$, $w \in T$. Temos então que $u \mid \dfrac{10^{2n}-1}{99} + 2w$, $w \in T$. Como $\dfrac{10^{2n}-1}{99} + 2w$ é ímpar, u deve ser ímpar, e caímos no caso 1 ou 3. Logo existe um múltiplo alternante de u só quando u é ímpar, ou seja, quando p não é múltiplo de 20.

Logo os inteiros positivos que não possuem múltiplo alternante são exatamente os múltiplos de 20.

Você sabia…

Que existem progressões aritméticas arbitrariamente longas formadas apenas por números primos? Isto foi provado recentemente por Ben Green e Terence Tao (dois ex-olímpicos), e era até então uma conjectura bastante antiga - o último progresso importante em sua direção havia sido o resultado de Van der Corput, que provou em 1939 que existem infinitas progressões aritméticas de três termos formadas por primos.

Veja o artigo (um preprint, ainda não publicado) de Green e Tao em http://arxiv.org/abs/math.NT/0404188 e o artigo expositório de Bryna Kra sobre o assunto em http://math.northwestern.edu/~kra/papers/primes.pdf

CENTRO DE MASSA E APLICAÇÕES À GEOMETRIA

Emanuel Carneiro & Frederico Girão – UFC

Nível Avançado

1. INTRODUÇÃO

Chamaremos de sistema de massas um conjunto de *n* pontos $P_1, P_2, ..., P_n$ no plano, sendo que ao ponto $P_k = (x_k, y_k)$ está associada uma massa $m_k \in \mathbb{R}$, de modo que $m_1 + m_2 + ... + m_n \neq 0.$ Definiremos o centro de massa desse sistema como sendo o ponto (x, y) tal que:

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + ... + m_nx_n}{M}; \quad y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + ... + m_ny_n}{M},$$

Onde $M = m_1 + m_2 + ... + m_n$ é a massa associada a ele.

Notação:
Quando ao ponto (*x*, *y*) estiver associada uma massa *m* escreveremos (*x*, *y*)[*m*].

Observações:
(i) Podemos interpretar fisicamente o centro de massa de um sistema como sendo o ponto onde ele concentra toda sua massa. Em termos práticos, isso nos ajuda a simplificar, por exemplo, problemas de Dinâmica onde há aplicações de forças sobre o sistema.

(ii) Podemos considerar os pontos em $\mathbb{R}^n$. Neste caso, o cálculo do centro de massa de um sistema é análogo.

(iii) Claramente o centro de massa é único.

2. PROPRIEDADES BÁSICAS

Proposição 1.
Seja (*x*, *y*)[*m*] *o centro de massa do sistema* $S_1 = \{(x_1, y_1)[m_1], (x_2, y_2)[m_2], ..., (x_k, y_k)[m_k]\}$, *e seja* (*a*, *b*)[*N*] *o centro de massa do sistema* $S_2 = \{(a_1, b_1)[n_1], (a_2, b_2)[n_2], ..., (a_l, b_l)[n_l]\}$. Então, se

$M+N\neq 0,$ *o centro de massa do sistema* $S=S_1\cup S_2$ *é o centro de massa do sistema* $\{(x,y)[M],(a,b)[N]\}$.

Demonstração:
Por definição o centro de massa do sistema $S=S_1\cup S_2$ é o ponto $(X,Y)[M+N]$, onde:

$$X=\frac{\sum_{i=1}^{k} m_i x_i+\sum_{j=1}^{l} n_j a_j}{M+N}=\frac{M_x+N_a}{M+N}$$

que é justamente a primeira coordenada do centro de massa do sistema $\{(x,y)[M],(a,b)[N]\}$. Para a segunda coordenada é análogo.

A proposição acima nos dá um algoritmo para calcular o centro de massa de um sistema com n pontos. Para isso tomamos dois pontos $(x_1,y_1)[m_1]$ e $(x_2,y_2)[m_2]$ quaisquer desse sistema e os substituímos pelo seu centro de massa com a massa m_1+m_2. Recaímos assim num sistema com n – 1 pontos e continuamos o processo. Assim o cálculo de centros de massa resume-se apenas ao caso n = 2, que estudamos a seguir:

Centro de massa de um sistema com duas massas
O centro de massa $(x,y)[M]$ de um sistema $\{(x_1,y_1)[m_1],(x_2,y_2)[m_2]\}$ é colinear com os pontos (x_1,y_1) e (x_2,y_2) pois

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x & y & 1\end{vmatrix}=x_1y_2+xy_1+x_2y-xy_2-x_2y_1-x_1y$$

$$=x_1y_2+\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}\right)y_1+\left(\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}\right)x_2$$

$$-\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}\right)y_2-x_2y_1-\left(\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}\right)x_1$$

$$=0$$

E além disso se chamamos $(x_1,y_1)=A,\ (x_2,y_2)=B$ e $(x,y)=G$ vale que:

$$m_1 \overrightarrow{AG} + m_2 \overrightarrow{BG} = 0$$

tal fato é deixado como exercício para o leitor.

Observação:

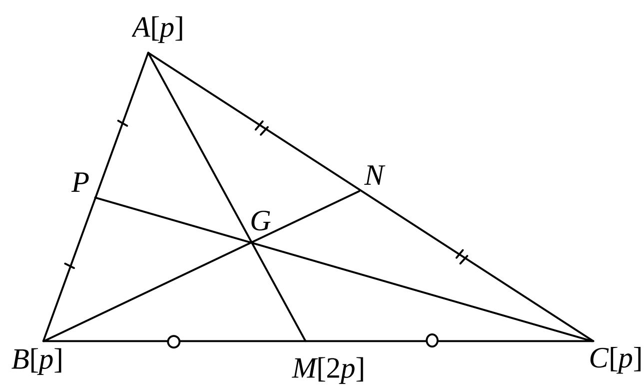
Pela equação acima distinguimos alguns casos:

• As duas massas têm o mesmo sinal. Nesse caso o ponto *G* está entre *A* e *B* e vale que $|m_1||AG| = |m_2||BG|$.

• As duas massas têm sinais contrários. Nesse caso *G* está fora do segmento *AB* e vale que $|m_1||AG| = |m_2||BG|$.

3. APLICAÇÕES À GEOMETRIA

Exemplo 1: Vamos tomar um triângulo *ABC* qualquer e pôr massas iguais em seus três vértices, ou seja consideraremos o sistema $A[p], B[p], C[p]$. Chamaremos de *G* o centro de massa desse sistema. Como encontrar o ponto *G*?
(hummm…) denotaremos C.M. = centro de massa.



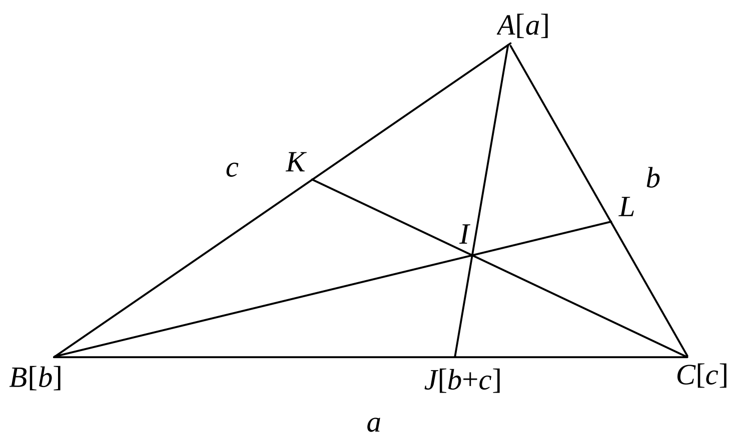
Vamos usar a proposição da seção anterior. O.C.M. de $B[p]$ e $C[p]$ é o seu ponto médio *M*. Podemos então trocar $B[p]$ e $C[p]$ por $M[2p]$. Logo o ponto *G* será o C.M. de $A[p]$ e $M[2p]$, que está sobre AM e divide AM na razão

$$\frac{AG}{GM} = \frac{2}{1}.$$

Sejam *N* e *P* os pontos médios de *AC* e *AB*. De modo análogo poderíamos ter provado que $G \in BN$ e que $G \in CP$. Esta é uma demonstração diferente que as três medianas concorrem em *G*, que é portanto o baricentro do triângulo. Além disso, segue do exposto acima que:

$$\frac{AG}{GM} = \frac{BG}{GN} = \frac{OG}{GP} = \frac{2}{1}$$

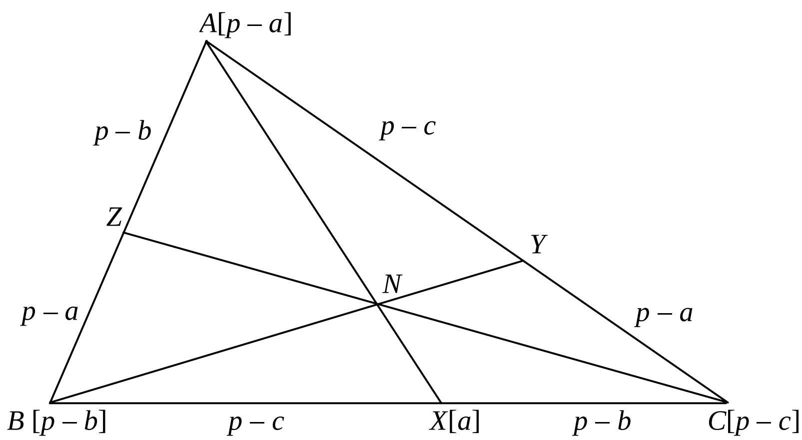
Exemplo 2: Denote por *a*, *b*, *c*, os lados do triângulo *ABC* da maneira usual.
Vamos pôr agora massas nos vértices do triângulo proporcionais aos lados opostos, ou seja, considere o sistema $A[a], B[b], C[c]$. Seja *I* o C.M. desse sistema.
Você merece um prêmio se descobrir quem é *I*…



O raciocínio é igual ao do exemplo anterior. O C.M. de $B[b]$ e $C[c]$ é um ponto *J* no lado *BC* tal que $\frac{JB}{JC} = \frac{c}{b}$, ou seja, *J* é o pé da bissetriz interna. Logo *I* será o C.M. de $A[a]$ e $J[b+c]$. Tiramos daí que $I \in AJ$ e que $\frac{AI}{IJ} = \frac{b+c}{a}$.
Sejam *BL* e *CK* bissetrizes internas. De modo análogo poderíamos ter provado que $I \in BL$ e que $I \in CK$, o que mostra que *I* é o incentro. As razões saem de graça:

$$\frac{BI}{IL} = \frac{a+c}{b}; \ \frac{CI}{IK} = \frac{a+b}{c}$$

Exemplo 3: Seja p o semiperímetro do triângulo. Agora uma novidade: o sistema de massas será $A[p-a], B[p-b], C[p-c]$. Seja *N* o C.M. desse sistema.
Você realmente merece um prêmio se descobrir quem é o *N*.



O C.M. de $B[p-b]$ e $C[p-c]$ é um ponto X sobre o lado BC tal que $\dfrac{BX}{CX}=\dfrac{p-c}{p-b}$, donde concluímos que $BX = p-c$ e que $CX = p-b$. Este ponto X é onde o exincírculo relativo ao lado a toca este lado (como referência sobre este fato podemos indicar [1]). Logo N será o C.M. de $A[p-a]$ e $X[p-c+p-b]=X[a]$.

Portanto $N \in AX$ e $\dfrac{AN}{NX}=\dfrac{a}{p-a}$. Se considerarmos os pontos Y e Z onde os exincírculos relativos aos lados b e c tocam estes lados, respectivamente, podemos mostrar que $N \in BY$ e $N \in CZ$. Conclusão: AX, BY e CZ sào concorrentes em N que é chamado *Ponto de Nagel* do ΔABC. Ora, ora, poderíamos saber disso usando o teorema de Ceva (veja por exemplo [3]). Calma, o melhor ainda está por vir. As razões aqui são cortesias para nós:

$$\frac{BN}{NY}=\frac{b}{p-b};\ \frac{CN}{NZ}=\frac{c}{p-c}$$

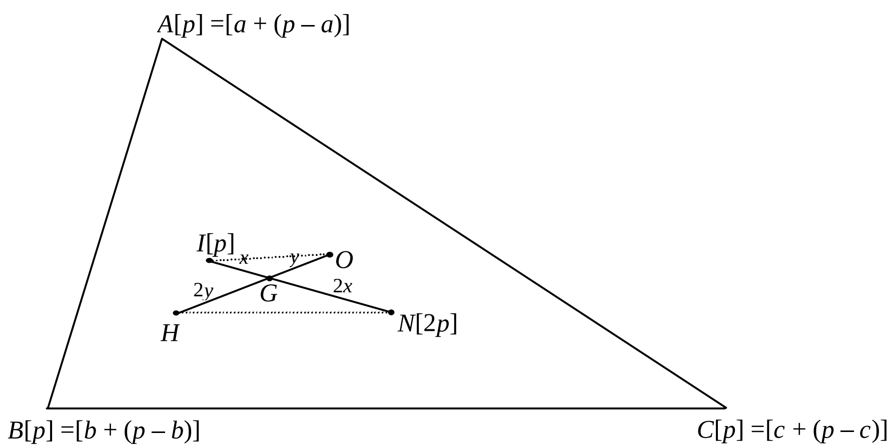
O próximo resultado foi o que nos motivou a escrever este artigo. Ele mostra toda a beleza desta teoria, enquanto outros métodos são ineficazes. Para uma demonstração completa (e bastante extensa) do próximo resultado usando a geometria plana clássica, veja [2].

Teorema 3.1. *No* ΔABC *considere os pontos I, G* e *N como definidos acima. Vale então que I, G* e *N são colineares e ainda*:

$$\frac{NG}{GI} = \frac{2}{1}$$

Prova: Seja p o semiperímetro do triângulo. Considere um sistema de massas $A[p], B[p], C[p]$. Já sabemos que o C.M. desse sistema é o baricentro *G*. Fazendo uso da proposição 1, podemos dividir esse sistema em dois subsistemas $S_1 = A[a], B[b], C[c]$ e $S_2 = A[p-a], B[p-b], C[p-c]$. O C.M. de S_1 é o incentro *I* com massa $[a+b+c] = [2p]$, enquanto o C.M. de S_2 é o ponto da Nagel *N* com massa $[p-a+p-b+p-c] = [p]$. Logo *G* será o C.M. de $I[2p], N[p]$ o que implica *I*, *N*, *G* colineares (com *G* entre *I* e *N*) e ainda pela equação do momento linear:

$$\frac{NG}{GI} = \frac{2}{1}$$



Corolário 3.1.1. *Em um triângulo qualquer ABC, sejam I,G,N como acima, O o circuncentro e I o ortocentro. Então os pontos I, O, N, H formam um trapézio.*

Prova: Sabemos que *H*, *G*, *O* são colineares (reta de Euler) e que:

$$\frac{HG}{GO}=\frac{2}{1}$$

Segue então do teorema anterior que *IO* é paralelo a *NH*, logo *I*, *O*, *N*, *H* formam um trapézio, cujo encontro das diagonais é *G*.

Podemos aplicar estes métodos do centro de massa em problemas que envolvem o ortocentro, o baricentro e os exincentros, para saber que massas devem estar nos vértices, veja o problema 1. Divirta-se resolvendo estes problemas. Vale usar tudo, mas experimente a sua mais nova arma.

4. PROBLEMAS RELACIONADOS

Problema 1

(a) Verifique que o sistema $A\left[\frac{a}{\cos A}\right], B\left[\frac{b}{\cos B}\right], C\left[\frac{c}{\cos C}\right]$ tem como C.M. o ortocentro do triângulo.

(b) Verifique que o sistema $A[sen2A], B[sen2B], C[sen2C]$ tem como C.M. o circuncentro.

(c) Prove que o C.M. do sistema $A[-a], B[b], C[c]$ é o exincentro relativo ao lado *a*. Verifique os análogos para os outros exincentros.

Problema 2

Sejam *A*, *B*, *C*, *D* pontos concíclicos. Sejam G_A, G_B, G_C, G_D os baricentros dos triângulos *BCD*, *ACD*, *ABD* e *ABC*. Prove que G_A, G_B, G_C, G_D são concíclicos.

Problema 3

Sejam *ABCD* um quadrilátero no espaço de forma que *AB*, *BC*, *CD* e *DA* sejam tangentes a uma esfera γ nos pontos *X*, *Y*, *Z*, *W*. Prove que estes pontos são coplanares.

Problema 4

Sejam *X*, *Y* e *Z* os pontos onde o incírculo do triângulo *ABC* toca os lados *BC*, *AC* e *AB*, respectivamente. Mostre que o incentro de ΔABC está sobre a reta que passa pelos pontos médios de *BC* e *AX*. (veja uma solução em [5]).

Problema 5
Considere 6 pontos em uma dada circunferência. Tomamos três destes pontos e marcamos seu baricentro G_1. Em seguida, marcamos o ortocentro H_2 dos outros três pontos e traçamos o segmento G_1H_2. Mostre que todos os $\binom{6}{3} = 20$ possíveis segmentos G_1H_2 passam por um ponto fixo.

Problema 6
Seja *ABCD* um quadrilátero convexo inscritível com os lados opostos *AD* e *BC* se encontrando em *P*, e *AB* e *CD* em *Q*. Prove que o quadrilátero *EFGH*, determinado em *ABCD* pelas bissetrizes de $D\hat{P}C$ e $C\hat{Q}B$, é um losango.

Problema 7
Seja *PABC* um tetraedro e sejam A_1, B_1, C_1 os pontos médios das arestas *BC*, *AC* e *AB*, respectivamente. Seja α um plano paralelo à face *ABC* que intercepta as arestas *PA*, *PB*, *PC* nos pontos A_2, B_2, C_2 respectivamente.

(a) Prove que A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 concorrem em um ponto *D*.

(b) Determine o lugar geométrico dos pontos *D* quando α varia.

Problema 8
(a) Considere 4 pontos que formam um sistema ortocêntrico (cada um é o ortocentro do triângulo formado pelos outros três). Ponha massas iguais nesses 4 pontos. Prove que o centro de massa é o centro do círculo dos nove pontos de cada um desses 4 triângulos (veja [1] e o problema proposto No. 107 na página 61).

(b) (Beltrami) Prove que o C.M. do sistema formado pelo incentro e pelos três exincentros com massas iguais é o circuncentro.

Problema 9
Seja *ABCD* um quadrilátero convexo inscritível com os lados opostos *AD* e *BC* se encontrando em *P*, e *AB* e *CD* em *Q*. Prove que as bissetrizes dos ângulos $D\hat{P}C$ e $C\hat{Q}B$ e a reta que une os pontos médios das diagonais do quadrilátero *ABCD* (diagonal de Euler) concorrem.

Problema 10

(Banco IMO/97) No ΔABC acutângulo, sejam *AD*, *BE* alturas e *AP*, *BQ* bissetrizes internas. Sejam *I* e *O* o incentro e o circuncentro do triângulo *ABC*, respectivamente. Prove que os pontos *D*, *E* e *I* são colineares se e somente se *P*, *Q* e *O* são colineares.

Agradecimentos: A nosso amigo Carlos Shine pela primeira versão digitada deste material, na Semana Olímpica de 2001, em Salvador - BA.

REFERÊNCIAS:

[1] Coxeter, H.S.M.; Greitzer, S.L., *Geometry Revisited*, MAA, 1967.
[2] Johnson, R.A., *Advanced Euclidean Geometry*, Dover Publications, 1960.
[3] Castro, L.G.M., *Introdução à Geometria Projetiva, Eureka!*, vol 8, pp 16-27, 2000.
[4] Honsberger, R., *Mathematical Morsels*, MAA, 1978.
[5] Moreira, C.G.T., Wagner, E., *10 Olimpíadas Iberoamericanas de Matemática*, OEI, 1996.

Você sabia…

Que $28433 \cdot 2^{7830457} + 1$ é primo?

Este número de 2357207 dígitos é o quinto maior primo conhecido, e foi descoberto em 30/12/2004.

Isto mostra que 28433 não é um número de Sierpinski (isto é, um natural ímpar *k* tal que $k \cdot 2^n + 1$ é composto para todo $n \in \mathbb{N}$; veja a Eureka! 18, pág 61), reduzindo para 10 o número de naturais menores que 78557 (que é o menor número de Sierpinski conhecido), sobre os quais não se sabe se são números de Sierpinski ou não (conjectura-se que nenhum deles seja): 4847, 10223, 19249, 21181, 22699, 24737, 27653, 33661, 55459 e 67607.

Veja: http://www.seventeenorbust.com para mais informações (inclusive sobre como ajudar a provar essa conjectura).

SEQÜÊNCIA DE FIBONACCI

Cícero Thiago B. Magalhães

Nível Avançado

INTRODUÇÃO

O nome seqüência de Fibonacci, foi dado pelo matemático francês Edouard Lucas no século XIX. Porém, a seqüência surgiu de um problema que estava proposto na obra "Liber Abaci" de Leonardo de Pisa (1180 – 1250), conhecido como Fibonacci. O problema era o seguinte: "Um homem põe um casal de coelhos dentro de um cercado. Quantos pares de coelhos serão produzidos em um ano, se a natureza desses coelhos é tal que a cada mês um casal gera um novo casal, que se torna fértil a partir do segundo mês?" Depois de séculos de trabalho, é possível hoje citar uma quantidade enorme de propriedades da seqüência do número de coelhos existentes após *n* meses. O objetivo deste trabalho é apresentar algumas propriedades básicas desta seqüência.

Definição

A seqüência de Fibonacci é definida da seguinte maneira:

$f_1 = f_2 = 1$ e $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \forall n > 2.$

Por conveniência, algumas vezes usaremos $f_0 = 0.$

Propriedades básicas

(I) Para todo $n \geq 1: f_1 + f_2 + ... + f_n = f_{n+2} - 1$

Prova: $n = 1: f_1 = f_3 - 1$

Vamos supor $q \geq 1$ e $f_1 + f_2 + ... + f_q = f_{q+2} - 1$

$n = q + 1: f_1 + f_2 + ... + f_q + f_{q+1} = f_{q+2} - 1 + f_{q+1} = f_{q+3} - 1$

(II) Se $m \geq 1$ e $n > 1,$ então $f_{n+m} = f_{n-1} f_m + f_n f_{m+1}$

Prova: Vamos fazer indução sobre *m*:

$m = 1: f_{n+1} = f_{n-1} f_1 + f_n f_2 = f_{n-1} + f_n$ (verdadeira)

$m = 2: f_{n+2} = f_{n-1} f_2 + f_n f_3 = f_{n-1} + 2 f_n = (f_{n-1} + f_n) + f_n = f_n + f_{n+1}$

(verdadeira)

Seja $q > 2$ e suponhamos a propriedade válida para todo $k, 2 \leq k < q,$ e para todo $n > 1$. Esta suposição, mais o fato de que a propriedade vale também para $k = 1$, nos garante:

$$f_{n+(q-2)} = f_{n-1} f_{q-2} + f_n f_{q-1}$$
$$f_{n+(q-1)} = f_{n-1} f_{q-1} + f_n f_q$$

Somando membro a membro essas igualdades e levando em consideração a fórmula recursiva que define (f_n):

$$f_{n+q} = f_{n-1} f_q + f_n f_{q+1}$$

Ou seja, a fórmula vale também para *q*, sempre que $n > 1$. O princípio da indução nos garante então que vale para todo $m \geq 1$ e qualquer $n > 1$.

(III) Dois números de Fibonacci consecutivos f_n e f_{n+1} são primos entre si.

A prova fica como exercício.

(IV) Se $m \mid n$, então $f_m \mid f_n$.

Prova: Por hipótese $n = mq$, para algum $q \in \mathbb{N}$. Usaremos indução sobre *r*.

Se $q = 1$, então $m = n$ e é fácil ver que $f_m \mid f_n$. Seja $q \geq 1$ e admitamos que $f_m \mid f_{mq}$.

Então, usando a propriedade (II):

$f_{m(q+1)} = f_{mq+m} = f_{mq-1} f_m + f_{mq} f_{m+1}$

Como $f_m \mid f_{mq-1} f_m$ e $f_m \mid f_{mq} f_{m+1}$ (pois, pela hipótese de indução, f_m divide f_{mq}), então f_m divide a soma desses dois produtos. Ou seja: $f_m \mid f_{m(q+1)}$.

(V) Seja $d = mdc(m, n)$, então $mdc(f_m, f_n) = f_d$.

Prova: Indução em $m + n$. Se $m = 1$, $mdc(m, n) = 1$ e $mdc(f_m, f_n) = mdc(1, f_n) = 1 = f_1$.
Se $m + n = 2$ é trivial. Se $m = n$ não há o que provar.

Se $2 \leq m < n$, $f_n = f_{m+(n-m)} = f_{m-1} f_{n-m} + f_m f_{n-m+1} \Rightarrow mdc(f_m, f_n) =$

$mdc(f_m, f_{m-1} f_{n-m}) \overset{(III)}{=} mdc(f_m, f_{n-m})$, que é igual, por hipótese de indução a $f_{mdc(m,n-m)} = f_{mdc(m,n)}$.

Veja também a solução do problema proposto No. 92 na Eureka! 20, pp 55 – 57.

(VI) Seja $x^2 = x + 1$, então, para $n = 2, 3, \ldots$ nós temos que

$x^n = f_n x + f_{n-1}$.

Prova: É trivial o caso $n = 2$. E se $x^n = f_n x + f_{n-1}$ para algum $n \geq 2$, então

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= x^n \cdot x = (f_n x + f_{n-1}) x \\ &= f_n x^2 + f_{n-1} x \end{aligned}$$

$$= f_n(x+1) + f_{n-1}x$$
$$= (f_n + f_{n-1})x + f_n$$
$$= f_{n+1}x + f_n,$$

como desejado!

Vejamos que as raízes de $x^2 = x+1$ são os números $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Então, para todo n = 2, 3, … nós temos

$$\alpha^n = f_n\alpha + f_{n-1}$$

e

$$\beta^n = f_n\beta + f_{n-1}.$$

Subtraindo as duas últimas equações temos que $\alpha^n - \beta^n = f_n(\alpha - \beta)$, e notando que $\alpha - \beta = \sqrt{5}$, nós encontramos a fórmula de *Binet*

$$f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

Problema 1

Seja $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Determine todos os $n \in \mathbb{N}$ tais que $\alpha^n - n^2\alpha$ seja inteiro.

Solução:

Note que α é raiz do polinômio $p(x) = x^2 - x - 1$, com isso e usando a expressão da propriedade (V) temos que:

$\alpha^n - n^2\alpha = f_n\alpha + f_{n-1} - n^2\alpha = (f_n - n^2)\alpha + f_{n-1}$.

Uma vez que α é irracional, segue da igualdade acima que $\alpha^n - n^2\alpha$ só será inteiro quando $f_n - n^2 = 0$, e nosso problema equivale a determinar todos os $n \in \mathbb{N}$ tais que $f_n = n^2$. Para tanto, observe que:

$$f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ f_3 = 2,\ f_4 = 3,\ f_5 = 5,\ f_6 = 8,\ f_7 = 13,$$
$$f_8 = 21,\ f_9 = 34,\ f_{10} = 55,\ f_{11} = 89,\ f_{12} = 144,\ f_{13} = 233,\ f_{14} = 377.$$

Assim, $f_{12} = 12^2$ e $f_{13} > 13^2, f_{14} > 14^2$. Por outro lado, se $f_n > n^2$ e $f_{n+1} > (n+1)^2$, então

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n > n^2 + (n+1)^2 > (n+2)^2, \text{ desde que } n > 3,$$

donde segue por indução que $f_n > n^2$ para $n > 13$. Assim, as únicas soluções são $n = 1$ e $n = 12$.

Problema 2:
Sejam n e k dois inteiros positivos quaisquer. Então entre duas potências consecutivas n^k e n^{k+1} não podemos ter mais que n números de Finonacci.
Sugestão: use a propriedade (I)

Problema 3:
Seja f_n a seqüência de Fibonacci $(f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1})$. Calcule a série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n}{f_{n-1} \cdot f_{n+1}}.$$

Problema 4:
Ache a, se a e b são números inteiros tais que $x^2 - x - 1$ é um fator de $ax^{17} + bx^{16} + 1$.
Fortemente ligada à seqüência de Fibonacci, e tão interessante quanto, é a seqüência de Lucas que é definida da seguinte maneira:

$$L_n = f_{n-1} + f_{n+1}$$
$$L_1 = 1, L_2 = 3, L_3 = 4, \ldots$$

Obs: é fácil perceber que de acordo com a definição da seqüência de Lucas temos que $L_0 = 2$.
Usando a fórmula de *Binet* temos que:

$$L_n = f_{n-1} + f_{n+1} = \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$$
$$= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\alpha^n\left(\frac{1}{\alpha} + \alpha\right) - \beta^n\left(\frac{1}{\beta} + \beta\right)\right].$$

Como $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, então $\dfrac{1}{\alpha} + \alpha = \sqrt{5}$ e $\dfrac{1}{\beta} + \beta = -\sqrt{5}$. Portanto, $L_n = \alpha^n + \beta^n$.

Problema 5:
Prove que $f_{2n} = f_n L_n$.

Problema 6:
Sejam $L_0 = 2, L_1 = 1,$ e $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$, para $n \geq 0,$ a seqüência de Lucas. Prove que, para todo $m \geq 1,$

$$\prod_{k=1}^{m} L_{2^k} = f_{2^{m+1}},$$

onde f_n é a seqüência de Fibonacci.

Problema 7:
Achar o termo geral p_n se $p_0 = 1$ e $p_{n+1} = 5p_n^3 - 3p_n$, para $n \geq 0.$

Problema 8:
Todo natural pode ser unicamente escrito como soma de números de Fibonacci distintos, de índices não consecutivos e maiores que 1. (Teorema de Zeckendorff).

Problema 9:
Sejam a e b inteiros positivos tais que b^{93} é divisível por a^{19} e a^{93} é divisível por b^{19}. Prove que $(a^4 + b^8)^{f_{n+1}}$ é divisível por $(ab)^{f_n}$ para todo $n > 1$.

Problema 10:
Prove que nenhum número de Fibonacci é potência de 7.

Problema 11:
Sejam (f_n) a seqüência de Fibonacci e, para todo inteiro positivo n, $V_n = \sqrt{f_n^2 + f_{n+2}^2}$.

Prove que, para todo inteiro positivo n, V_n, V_{n+1}, V_{n+2} são lados de um triângulo de área $\frac{1}{2}$.

REFERÊNCIAS:

[1] Ross Honsberger, *Mathematical Gems III*, MAA, 1985.
[2] Hygino H. Domingues, Fundamentos da Aritmética, Atual, 1991.

COMO É QUE FAZ?

PROBLEMA 6

PROPOSTO POR RAFAEL ALVES DA SILVA (TERESINA - PI) da Olimpíada Ibero-americana de Matemática de 1999.

Seja n um inteiro maior que 10 tal que cada um dos seus dígitos pertence ao conjunto $S = \{1, 3, 7, 9\}$. Prove que n tem algum divisor primo maior ou igual a 11.

Solução: Como o último dígito de n é ímpar, n é ímpar.
Como o último dígito de n não é 0 nem 5, n não é múltiplo de 5. Assim, se n não tivesse nenhum fator primo maior ou igual a 11, os únicos possíveis fatores primos de n seriam 3 e 7. Mostraremos por indução que todo número natural cujos únicos fatores primos são 3 e 7 é da forma $n = 20k + r$, onde k é natural e $r \in \{1, 3, 7, 9\}$, e portanto o dígito das dezenas de n deve ser par, e logo não pode pertencer a $S = \{1, 3, 7, 9\}$ (e assim, se todos os dígitos de n pertencem a S, devemos ter $n < 10$).
Para isso, note que $1 = 20 \cdot 0 + 1$, e ainda

$n = 20k + 1 \Rightarrow 3n = 20 \cdot (3k) + 3$ e $7n = 20 \cdot (7k) + 7$
$n = 20k + 3 \Rightarrow 3n = 20 \cdot (3k) + 9$ e $7n = 20 \cdot (7k + 1) + 1$
$n = 20k + 7 \Rightarrow 3n = 20 \cdot (3k + 1) + 1$ e $7n = 20 \cdot (7k + 2) + 9$
$n = 20k + 9 \Rightarrow 3n = 20 \cdot (3k + 1) + 7$ e $7n = 20 \cdot (7k + 3) + 3$,
e nossa afirmação está provada.

PROBLEMA 7

PROPOSTO POR RAFAEL ALVES DA SILVA (TERESINA - PI) da Olimpíada da Bielorrúsia de 2000.

Seja $M = \{1, 2, 3, ..., 40\}$. Ache o menor inteiro n para o qual é possível particionar M em M subconjuntos disjuntos tais que, sempre que a, b e c (não necessariamente distintos) pertencem ao mesmo subconjunto, então $a \neq b + c$.

Solução: Mostraremos que $n = 4$. Vamos ver como construir um exemplo de uma partição de n em 4 conjuntos de acordo com o enunciado, a partir de exemplos menores: temos a partição $\{1\} = \{1\}$, com $n = 1$, para $M = \{1\}$; a partição $\{1, 2, 3, 4\} = \{1, 4\} \cup \{2, 3\}$, com $n = 2$, para $M = \{1, 2, 3, 4\}$; a partição $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\} = \{1, 4, 10, 13\} \cup \{2, 3, 11, 12\} \cup \{5, 6, 7, 8, 9\}$ com $n = 3$, para $M = \{1, 2, \ldots, 13\}$; a idéia é, dada uma partição $\{1, 2, \ldots, k\} =$

$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$, obter uma partição $\{1, 2, ..., 3k+1\} = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_k \cup B_{k+1}$, tomando $B_{k+1} = \{k+1, k+2, ..., 2k+1\}$ e, para $i \le k$, $B_i = A_i \cup (A_i + (2k+1))$. Assim, obtemos, para $M = \{1, 2, ..., 40\}$, $M = \{1, 4, 10, 13, 28, 31, 37, 40\} \cup \{2, 3, 11, 12, 29, 30, 38, 39\}$ $\cup \{5, 6, 7, 8, 9, 32, 33, 34, 35, 36\} \cup \{14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27\}$, e é fácil verificar que esta partição satisfaz a condição do enunciado.

Para mostrar que não é possível obter uma tal partição de *M* em apenas 3 subconjuntos, suponha que $M = A \cup B \cup C$. Como *M* tem 40 elementos, algum dos conjuntos *A*, *B* ou *C* tem pelo menos 14 elementos. Digamos que *A* contenha os 14 elementos $x_1 < x_2 < ... < x_{14}$. Os 13 elementos $x_{14} - x_1, x_{14} - x_2, ..., x_{14} - x_{13}$ devem pertencer a $B \cup C$, pois, se $x_{14} - x_j = y \in A$, então $x_{14} = x_j + y$, com $y, x_j, x_{14} \in A$, contradição. Assim, *B* ou *C* contém pelo menos 7 desses 13 elementos, digamos $y_1 < y_2 < ... < y_7$, onde $y_i = x_{14} - x_{j_i}$, onde $j_7 < j_6 < ... < j_1$. Suponhamos que esses elementos pertencem a *B*. Temos então $y_3 - y_2 \in C$ e $y_3 - y_1 \in C$, pois, se $y_3 - y_j = z \in B$, para algum $j \in \{1, 2\}$, $y_3 = y_j + z$, com $y_3, y_j, z \in B$, absurdo, e, $(x_{14} - x_{j_3}) - (x_{14} - x_{j_i})$ como $y_3 - y_i = (x_{14} - x_{j_3}) - (x_{14} - x_{j_i}) = x_{j_i} - x_{j_3}$, se $y_3 - y_i = z \in A$, para algum $i \in \{1, 2\}$, teríamos $x_{j_i} = x_{j_3} + z$, com x_{j_i}, x_{j_3}, $z \in A$, absurdo. Vamos agora considerar o elemento $y_2 - y_1 > 0$. Como y_1 e y_2 pertencem a *B*, $y_2 - y_1$ não pode pertencem a *B*. Como $y_2 - y_1 = (y_3 - y_1) - (y_3 - y_2)$, com $(y_3 - y_2)$, $(y_3 - y_1) \in C$, $y_2 - y_1$ não pode pertencer a *C*. Finalmente, como $y_2 - y_1 = (x_{14} - x_{j_2}) - (x_{14} - x_{j_1}) = x_{j_1} - x_{j_2}$, com $x_{j_1} \in A$ e $x_{j_2} \in A$, $y_2 - y_1$ não pode pertencer a *A*, absurdo, pois $y_2 - y_1 \in M = A \cup B \cup C$.

Publicamos a seguir as soluções dos problemas 121 e 195 da seção "Olimpíadas ao redor do mundo", por sugestão de Bruno, da Espanha.

121. (Rússia-2001) Os valores da função quadrática $f(x) = x^2 + ax + b$ para dois inteiros consecutivos são os quadrados de dois inteiros também consecutivos. Mostre que os valores da função quadrática são quadrados perfeitos para todos os inteiros coincide com o conjunto dos valores de *g* para os inteiros.

Solução: Suponha $f(m) = k^2$ e $f(m+1) = (k+1)^2$, com *m* e *k* inteiros. Seja $g(x) = f(x+m)$. O conjunto dos valores de *f* para os inteiros.

Temos $g(x) = x^2 + cx + d$ para certos valores de c e d. Temos $d = g(0) = f(m) = k^2$ e $1 + c + d = g(1) = f(m+1) = (k+1)^2$, donde $d = k^2$ e $c = (k+1)^2 - 1 - k^2 = 2k$, ou seja, $g(x) = x^2 + 2kx + k^2 = (x+k)^2$, e logo $g(x)$ é um quadrado perfeito para todo x inteiro.

195.(Eslovênia-2002) Sejam M o ponto médio da base AB do trapézio $ABCD$; E um ponto interior ao segmento AC tal que BC e ME intersectam-se em F; G o ponto de interseção de FD e AB; H o ponto de interseção de DE e AB. Mostre que M é o ponto médio do segmento GH.

Solução: Podemos supor sem perda de generalidade, aplicando uma transformação afim, que $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (1, 1)$, e logo $D = (a, 1)$, para algum $a < 1$. Então $M = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e $E = (t, t)$, para algum $t \in (0,1)$. Como F pertence a BC, $F = (1, y)$ para algum y, e, supondo $t \neq \frac{1}{2}$, como F pertence a ME, $y \big/ \left(\frac{1}{2}\right) = t \big/ \left(t - \frac{1}{2}\right)$, donde $y = \frac{t}{2t-1}$ (caso $t = \frac{1}{2}$, BC e ME são paralelas e não se intersectam, logo não existiria o ponto F). Como H pertence a AB, $H = (x, 0)$ para um certo x. Como H pertence a DE, $\frac{t}{t-x} = \frac{1}{a-x}$, donde $(1-t)x = t(1-a)$, ou seja, $x = \frac{t(1-a)}{1-t}$. Finalmente, como G pertence a AB, $G = (z, 0)$ para um certo z, e como G pertence a FD, $\frac{1}{a-z} = \frac{t/(2t-1)}{1-z}$, donde $\frac{t-1}{2t-1} \cdot z = \frac{(2t-1) - at}{2t-1}$, ou seja, $z = \frac{at - (2t-1)}{1-t}$. Assim, $\frac{x+z}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-t}{1-t} = \frac{1}{2}$, e logo $M = \frac{G+H}{2}$, ou seja, M é o ponto médio do segmento GH.

SOLUÇÕES DE PROBLEMAS PROPOSTOS

Publicamos aqui algumas das respostas enviadas por nossos leitores.

90) Prove que, para todo inteiro positivo n e para todo inteiro não nulo a, o polinômio $x^n + ax^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + ax - 1$ é irredutível, i.e., não pode ser escrito como o produto de dois polinômios não constantes com coeficientes inteiros.

SOLUÇÃO (baseada em um argumento de Artur Avila):

Seja $P_a(x) = x^n + ax^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + ax - 1.$ Como $P_{-a}(x) = -x^n P_a\left(\frac{1}{x}\right),$ $P_a(x)$ é irredutível se e somente se $P_{-a}(x)$ é irredutível. Assim, podemos supor sem perda de generalidade que a é um inteiro positivo. Nesse caso, $P_a(0) = -1$ e $P_a(1) = (n-1)a > 0, \forall n \geq 2.$

É claro que para $n = 1$ o polinômio $P_a(x) = x - 1$ é irredutível.

Para $n \geq 2$, deve existir $\alpha \in (0,1)$ com $P_a(\alpha) = 0.$

Seja $Q_a(x) = P_a(x) \cdot (x-1) = (x-1)(x^n - 1) + ax(x^{n-1} - 1) = x^{n+1} + (a-1)x^n - (a+1)x + 1.$

Como α é raiz de $P_a(\alpha) = 0.$

Seja $Q_a(x) = P_a(x) \cdot (x-1) = (x-1)(x^n - 1) + ax(x^{n-1} - 1) = x^{n+1} + (a-1)x^n - (a+1)x + 1.$

Como α é raiz de $P_a(x),$ α também é raiz de $Q_a(x).$ Seja então

$$R(x) = \frac{Q_a(x)}{x-\alpha} = x^n + (a+\alpha-1)x^{n-1} + \alpha(a+\alpha-1)x^{n-2} + \alpha^2(a+\alpha-1)x^{n-3} + \ldots + \alpha^{n-2}(a+\alpha-1)x - \frac{1}{\alpha}.$$

Temos $R(1) = Q_\alpha(1)/(1-\alpha) = 0,$ e, se $\beta \neq \alpha$ é raiz de $P_a(x),$ β é raiz de $Q_a(x)$ e de $R(x).$ Mostraremos que $|\beta| > 1$ para todo $\beta \in \mathbb{C},$ $\beta \neq \alpha$ tal que β é raiz de $P_a(x).$

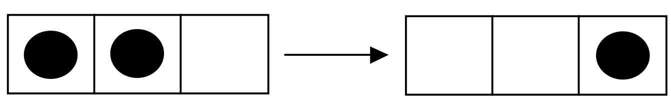
Como β é raiz de $R(x),$ temos $\beta^n + (a+\alpha-1)\beta^{n-1} + \alpha(a+\alpha-1)\beta^{n-2} + \ldots +$
$+ \alpha^{n-2}(a+\alpha-1)\beta = \dfrac{1}{\alpha}.$

Se $|\beta| \leq 1,$ $\left|\beta^n + (a+\alpha-1)\beta^{n-1} + \alpha(a+\alpha-1)\beta^{n-2} + \ldots + \alpha^{n-2}(a+\alpha-1)\beta\right|$
$\leq |\beta|^n + (a+\alpha-1)|\beta|^{n-1} + \ldots + \alpha^{n-2}(a+\alpha-1)|\beta| \leq 1^n + (a+\alpha-1)1^{n-1} + \ldots +$

$+\ \alpha^{n-2}(a+\alpha-1)\cdot 1 = R(1)+\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}=\left|\dfrac{1}{\alpha}\right|,$ valendo a igualdade se, e somente se, $\beta=|\beta|=1,$ mas $P_a(1)\neq 0,$ donde $\beta\neq 1,$ absurdo (na verdade, mostramos que todas as raizes de $R(x)$ têm módulo maior ou igual a 1; em particular, α é raiz simples de $P_a(x),$ caso contrário $\alpha\in(0,1)$ seria raiz de $R(x)$).

Suponha agora que $P_a(x)=f(x)\cdot g(x),$ onde f e g são polinômios não constantes com coeficientes inteiros. Como o coeficiente constante de $P_a(x)$ é –1, os coeficientes constantes de $f(x)$ e de $g(x)$ pertencem a {–1, 1} (e podemos supor sem perda de generalidade que seus coeficientes líderes são iguais a 1). Assim, o produto das raízes de $g(x)$ (e de $f(x)$) pertencem a {–1, 1}. Por outro lado, podemos supor sem perda de generalidade que α é raiz de $f(x)$. Como todas as raízes de $g(x)$ são raízes de $P_a(x)$ distintas de α, elas têm todas módulo maior que 1, e logo seu produto não pode pertencer a {–1, 1}, absurdo.

95) "Resta-Um" é um jogo de tabuleiro na qual as peças ocupam um tabuleiro formando parte de um reticulado retangular (na verdade, existem variações em tabuleiros de reticulado triangular). O único movimento permitido consiste em tomar duas peças em casas adjacentes vizinhas a uma casa vazia, e fazer a peça mais distante da casa vazia pular sobre a outra peça, ocupando a casa vazia. A peça pulada é retirada.



(esse movimento pode ser feito para a direita, para a esquerda, para cima ou para baixo).

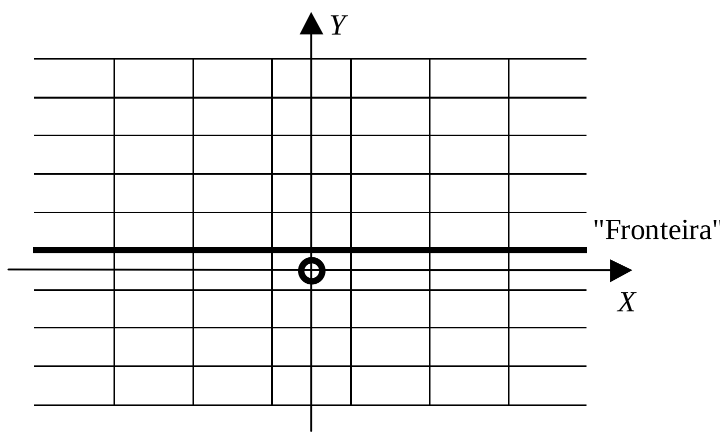
Agora imagine um tabuleiro que é um reticulado retangular infinito e uma reta que contém uma linha do reticulado, dividindo-o em dois lados. Todas as casas de um dos lados da linha estão vazias e cada casa do outro lado da linha pode ou não ter uma peça.

Quantas peças, no mínimo, precisamos para chegar a uma casa do lado vazio do tabuleiro, a uma distância n da linha ? Abaixo indicamos uma casa a distância n, para n = 1,2,3,4,5.

			5			
			4			
			3			
			2			
			1			
…	●	●	●	●	●	…
…	●	●	●	●	●	…
…	●	●	●	●	●	…
…	…	…	…	…	…	…

SOLUÇÃO DE BERNARDO FREITAS PAULO DA COSTA (RIO DE JANEIRO – RJ)

Vamos botar eixos no quadriculado, de acordo com a posição:



Assim, a casa marcada com ○ é (0, 0), sua vizinha à esquerda é (1, 0) e acima é (0, 1). Supomos, sem perda de generalidade, que a peça final termina na casa (0, n) para n = 1, 2, 3, 4, 5. Usando isto, vemos que o movimento deveria "tender para o centro e para cima".

Com esta idéia, vamos associar energias às peças nos quadrados do tabuleiro, através da seguinte função:

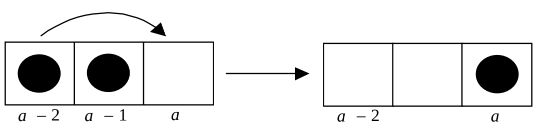
$$E(a,b)=\varphi^{b}\Phi^{|a|} \text{ onde } \begin{cases} \varphi^{2}=\varphi+1, & \varphi>1 \\ \Phi^{2}+\Phi=1, & 0<\Phi<1 \end{cases}$$

Como as equações que os definem são simétricas, temos $\Phi\varphi = 1$

Só para conferir: $$\varphi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

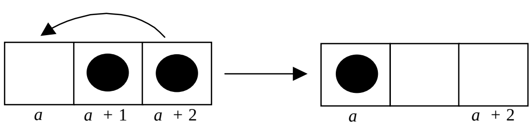
$$\Phi = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \begin{cases} \frac{\sqrt{5}-1}{2} \in (0,1) \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0 \end{cases} \Rightarrow \Phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Assim, se fizermos um movimento



, $a \leq 0$

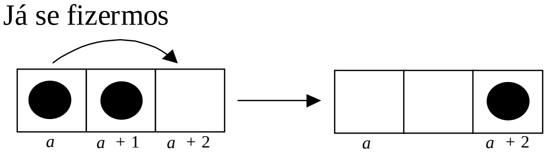
ou um movimento



, $a \geq 0$

na direção do centro, estaremos trocando uma energia $\varphi^b \Phi^{|a|+2} + \varphi^b \Phi^{|a|+1}$ por $\varphi^b \Phi^{|a|}$, que são iguais por construção.

Já se fizermos

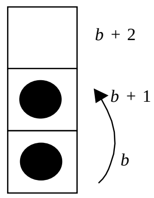


, $a > 0$

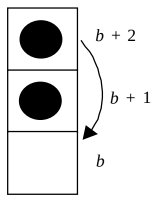
ou o contrário (com $a < 0$)

trocaremos energia com perdas, pois $|a| \leq |a+2|$ (para $a > 0$; se $a < 0$ é $|a| \leq |a-2|$).

Para movimentos verticais, vemos que



conserva energia $\left(\varphi^b\Phi^{|a|}+\varphi^{b+1}\Phi^{|a|}=\varphi^{b+2}\Phi^{|a|}\right)$ e que



perde (pois $\varphi^{b+2}>\varphi^b$ e $\varphi^{b+1}>0$).

Assim, a energia das peças no tabuleiro não aumenta.

Vejamos a energia máxima do tabuleiro:

E_T = E (coluna central) + E (quadrantes negativos) = E(coluna central) + 2E(1 quadrante negativo) =

$$=\sum_{b=-\infty}^{0}\varphi^b\Phi^{|0|}+2\sum_{a=1}^{\infty}E\ \text{ (coluna em } a)$$

$$=\sum_{b=-\infty}^{0}\varphi^b+2\sum_{a=1}^{\infty}\left(\sum_{b=-\infty}^{0}\varphi^b\Phi^{|a|}\right)$$

$$=\sum_{b=0}^{+\infty}\varphi^{-b}+2\sum_{a=1}^{\infty}\Phi^{|a|}\left(\sum_{b=0}^{\infty}\varphi^{-b}\right)$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{\varphi}}+2\sum_{a=1}^{\infty}\Phi^{|a|}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\varphi}}\right)\ \text{Mas } \varphi^2=\varphi+1\Rightarrow 1=\frac{1}{\varphi}+\frac{1}{\varphi^2}\Rightarrow 1-\frac{1}{\varphi}=\frac{1}{\varphi^2}$$

$$=\frac{1}{1/\varphi^2}+2\sum_{a=1}^{\infty}\Phi^a\frac{1}{1/\varphi^2}$$

$$=\varphi^2\left(1+2\sum_{a=1}^{\infty}\Phi^a\right)=\varphi^2\left(1+\frac{2\Phi}{1-\Phi}\right)$$

Como $\Phi^2 + \Phi = 1$, temos $1 - \Phi = \Phi^2$, e assim

$$E_T = \varphi^2\left(1 + \frac{2\Phi}{\Phi^2}\right) = \varphi^2\left(1 + {}^2\!/_{\Phi}\right) = \varphi^2(1 + 2\varphi) = \varphi^2(1 + \varphi + \varphi)$$

$$= \varphi^2\left(\varphi^2 + \varphi\right) = \varphi^2\varphi^3 = \varphi^5$$

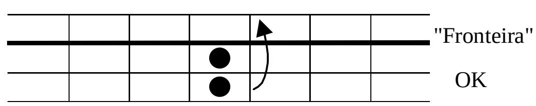
Ora, como a energia total do tabuleiro é φ^5, se tivermos um número finito de movimentos (para poder chegar em (0, 5) de verdade) teremos usado um conjunto finito de peças e portanto de energia estritamente menor do que φ^5. Desta forma, é impossível chegar a esta casa com movimentos "resta-um".

Decomponhamos φ^n para n = 1, 2, 3, 4 para sabermos o número de peças necessárias. Vale lembrar as relações: $\begin{cases} \varphi^{a+2} = \varphi^{a+1} + \varphi^a \\ \Phi^a = \Phi^{a+1} + \Phi^{a+2} \\ \varphi = 1 + \Phi = 1 + \dfrac{1}{\varphi} \end{cases}$

$(\varphi^2 = \varphi + 1)$

$\Phi = {}^1\!/_{\varphi}$

$\varphi^1 = 1 + \Phi \rightarrow$ 2 peças:

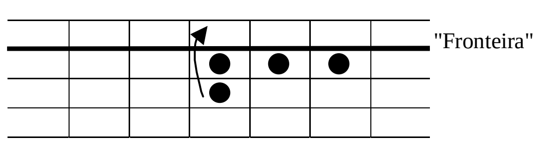


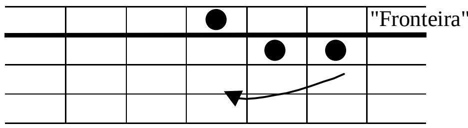
Altura 2: $\varphi^2 = \varphi + 1 = 1 + (1 + \Phi)$ só temos 1 peça com energia 1

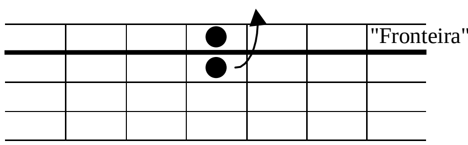
$= 1 + \left(\Phi + \Phi^2 + \Phi\right)$ só temos 3 peças com energia Φ

só temos 5 peças com energia Φ^2

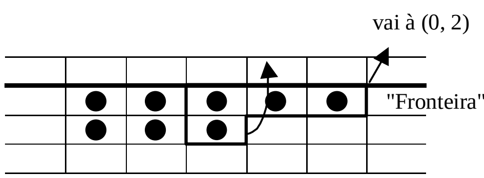
4 peças: (em geral, para $h \geq 0$, só temos $2h + 1$ peças com energia Φ^h)

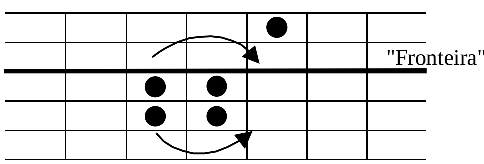


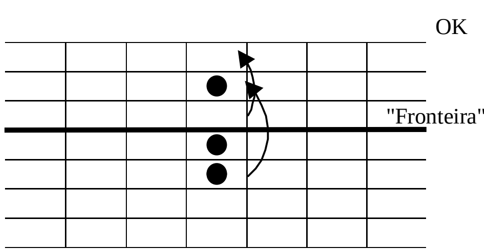




Altura 3: $\varphi^3 = \varphi^2 + \varphi = 2\varphi + 1 = 3 + 2\Phi = 1 + 2\Phi + (2)$
$= 1 + 2\Phi + (2\Phi + 2\Phi^2) = 1 + 3\Phi + 2\Phi^2 + (\Phi)$
$= 1 + 3\Phi + 3\Phi^2 + \Phi^3 \rightarrow 8$ peças:







Vamos ao último caso (altura 4):

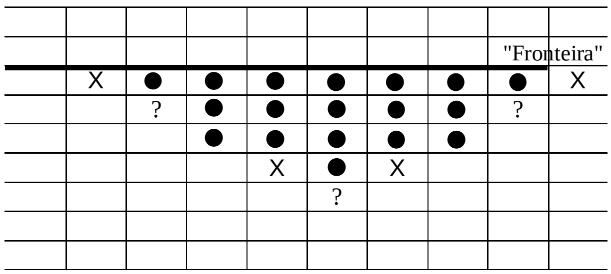
$$\varphi^4 = \varphi^3 + \varphi^2 = 2\varphi^2 + \varphi = 3\varphi + 2 = 5 + 3\Phi$$
$$= 1 + 3\Phi + (4) = 1 + 3\Phi + (4\Phi + 4\Phi^2)$$
$$= 1 + 3\Phi + 4\Phi^2 + (4\Phi^2 + 4\Phi^3)$$
$$= 1 + 3\Phi + 5\Phi^2 + 4\Phi^3 + (3\Phi^2) = 1 + 3\Phi + 5\Phi^2 + 7\Phi^3 + 3\Phi^4$$

Teoricamente, isto daria 1 + 3 + 5 +7 + 3 = 19 peças para chegar a altura 4.
Entretanto, isto é impossível. Vejamos:
Pintemos o tabuleiro com 3 cores em diagonal

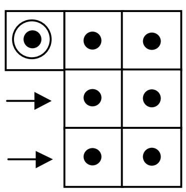
B	A	C	B	A				
C	B	A	C	B	A			
A	C	B	A	C	B	A		
B	A	C	B	A	C	B	A	"Fronteira"
C	B	A	C	B	A	C	B	A
	C	B	A	C	B	A	C	B
		C	B	A	C	B	A	C
			C	B	A	C	B	A
				C				

Toda vez que realizarmos um movimento, tiramos uma peça de duas cores adjacentes e a terceira cor recebe uma peça a mais.
Assim, invertemos a paridade dos 3 simultaneamente. Portanto, a paridade relativa se mantém.
As casas dentro da região indicada estarão todas ocupadas (suas energias somam $1 + 3\Phi + 5\Phi^2 + 7\Phi^3$).
A soma das cores é 5A + 7B + 4C
Se a soma final é 1A + 0B + 0C, temos que a paridade de B e C é a mesma, e oposta à paridade de A, logo das $3\Phi^4$ que restam, temos uma quantidade par da cor A, uma quantidade ímpar de cor B e uma quantidade para da cor C.
Assim, temos as seguintes possibilidades:
2A + 1B + 0C
0A + 3B + 0C
0A + 1B + 2C
Mas só há 1 casa B valendo Φ^4 logo a possibilidade OA + 3B + 0C está excluída.
Assim, concluímos que há 1 peça numa casa B, a única do nível Φ^4.
Por simetria (ou seja, pintando o tabuleiro na outra direção : ///),

temos que deve haver também uma peça na casa simétrica a essa casa B do nível Φ^4 em relação à coluna central, a qual é uma casa C, e logo a solução é $OA + 1B + 2C$.
Assim, temos a seguinte configuração:

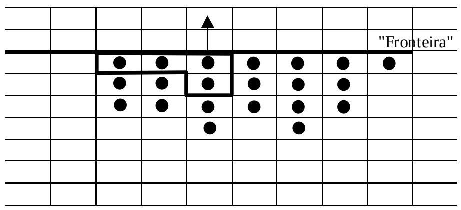


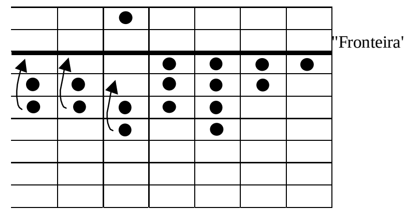
As casas marcadas com X são A ou simétricas a casas A, e logo estão proibidas.
As casas com • estão forçosamente ocupadas, e das casas com ?, uma, e apenas uma, será ocupada (para fazer 19).
Isolemos a coluna central; sobra (pelo menos) um bloco consistindo apenas das seguintes peças:

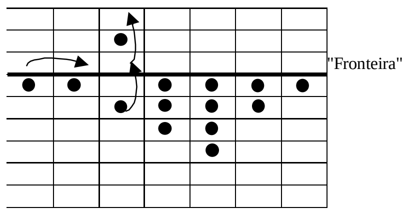


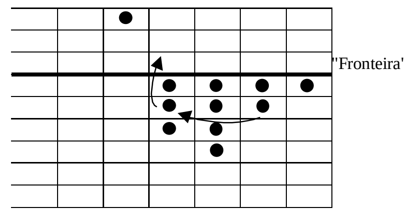
(ou do outro lado, por simetria é igual).

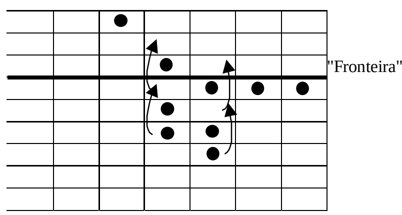
Ora, a peça $\odot$, para ser aproveitada, deve tomar uma peça que está a sua direita e ir para a coluna – 1.
Entretanto, para terminarmos com peças apenas na coluna zero, as duas indicadas pelas setas devem tomar as peças que estão à direita (pois senão não conseguiríamos mandar todas as peças desse bloco para a coluna central usando apenas essas peças; se usássemos outras peças para isso perderíamos energia). Nesse caso, as peças que sobram do lado esquerdo ficam todas na altura 0, e a peça que estava originalmente na coluna 0 e na coluna – 1 não conseguiría chegar na coluna central sem que haja perda de energia. Assim, não conseguimos (agora por impedimento de movimento, não de energia) chegar em (0, 4) com 19 peças.
Mas é possível com 20 (faço $\Phi^3 = \Phi^4 + \Phi^5$):

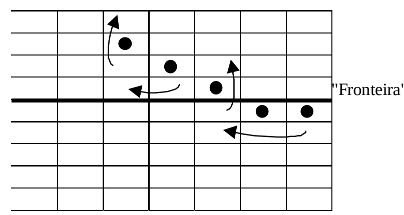


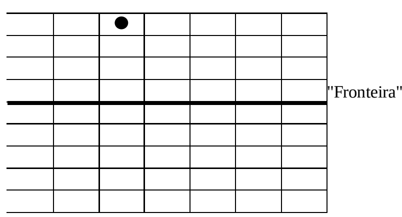










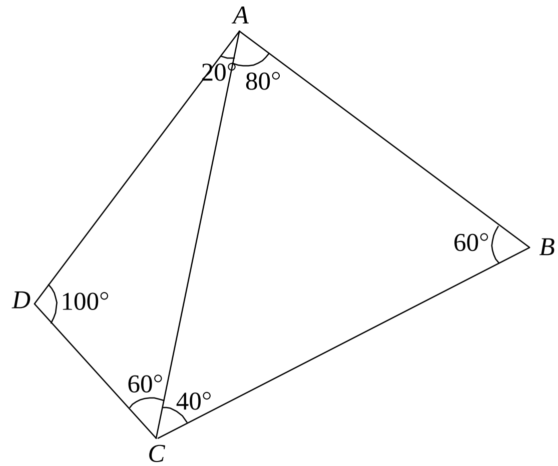


OK!!

96) No quadrilátero *ABCD* os ângulos *A*, *C* e *D* medem 100° e o ângulo *ACB* mede 40°. Demonstre que $BC \cdot DA = (BC + AB - DA)^2$.

SOLUÇÃO DE HEYTOR BRUNO E MARLON JÚNIOR (FORTALEZA – CE)

A figura ilustra o problema:



ΔACD (Lei dos Senos): $\dfrac{AC}{DA} = \dfrac{sen100°}{sen60°}$

ΔACB (Lei dos Senos): $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{sen80°}{sen60°}$

$\Rightarrow \dfrac{AC}{DA} = \dfrac{BC}{AC} \Rightarrow AC^2 = BC \cdot DA$

Assim,

$BC \cdot DA = (BC + AB - DA)^2 \Leftrightarrow AC^2 = (BC + AB - DA)^2$. Basta provar então que $AC = BC + AB - DA$.

ΔACD (Lei dos Senos): $DA = \dfrac{AC\ sen60°}{sen100°}$

ΔACB (Lei dos Senos): $BC = \dfrac{AC\ sen80°}{sen60°}$ e $AB = \dfrac{AC\ sen40°}{sen60°}$

Daí, $AC + DA = BC + AB \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow AC + \frac{AC\ sen60°}{sen100°} = \frac{AC\ sen80°}{\text{sen}60°} + \frac{AC\ sen40°}{\text{sen}60°} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{sen100° + sen60°}{sen100°} = \frac{sen80° + sen40°}{\text{sen}60°}.$$

Usando o fato de que

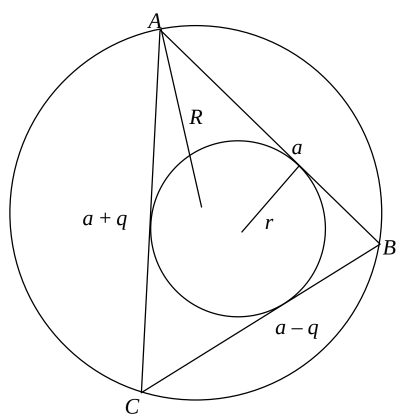
$$sen\ p + sen\ q = 2sen\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right),$$

A equação acima é verdadeira se e somente se

$\dfrac{2sen80°\cos 20°}{sen100°} = \dfrac{2sen60°\cos 20°}{sen60°}$, o que é obviamente verdade.

99) Num triângulo, a razão entre os raios das circunferências circunscrita e inscrita é $\frac{5}{2}$. Os lados do triângulo estão em progressão aritmética e sua área é numericamente igual ao seu perímetro. Determine os lados do triângulo.

SOLUÇÃO DE KELLEM CORRÊA SANTOS (RIO DE JANEIRO – RJ)



$$\frac{R}{r} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2R = 5r$$

Perimetro de $ABC \Rightarrow 2p = a + (a+q) + (a-q) = 3a \Rightarrow p = \dfrac{3a}{2}$

$pr = A(ABC) = \dfrac{a(a+q)(a-q)}{4R}$

$$\frac{3a}{2}r = \frac{a(a^2-q^2)}{4R} \Rightarrow 3r = \frac{a^2-q^2}{2R} = \frac{a^2-q^2}{5r} \Rightarrow 15r^2 = a^2-q^2 \qquad (1)$$

Como a área é numericamente igual ao perímetro, temos:

$pr = 2p \Rightarrow r = 2$

Por outro lado,

$$A(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-a-q)(p-a+q)} = \sqrt{\frac{3a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}-q\right)\left(\frac{a}{2}+q\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}a\sqrt{3\left(\frac{a^2}{4}-q^2\right)}$$

De (1), temos:

$15r^2 = a^2-q^2 \Rightarrow 15\cdot 2^2 = a^2-q^2 \Rightarrow 60 = a^2-q^2 \Rightarrow q^2 = a^2-60$

Logo $A(ABC) = \frac{a}{2}\sqrt{3\left(\frac{a^2}{4}-a^2+60\right)} = \frac{a}{2}\sqrt{3\left(60-\frac{3a^2}{4}\right)}$

Também podemos escrever:

$$A(ABC) = pr = \frac{3a}{2}\cdot 2 = 3a$$

Igualando:

$$3a = \frac{a}{2}\sqrt{3\left(60-\frac{3a^2}{4}\right)}$$

$$6^2 = 3\left(60-\frac{3a^2}{4}\right) \Rightarrow \frac{36}{3} = 60-\frac{3a^2}{4} \Rightarrow 12 = 60-\frac{3a^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 48 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow a^2 = 16\cdot 4 \Rightarrow a = 8, \quad \text{pois } a > 0.$$

De (1):

$15r^2 = a^2-q^2 \Rightarrow 60 = 64-q^2 \Rightarrow q = \pm 2$

Logo, os lados do triângulo *ABC* são 6, 8 e 10.

101) a) Sejam a_i, b_i, c_i reais positivos, para $1 \le i \le 3$.

Prove que $(a_1^3+a_2^3+a_3^3)(b_1^3+b_2^3+b_3^3)(c_1^3+c_2^3+c_3^3) \ge (a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+a_3b_3c_3)^3$.

b) Sejam a, b, c, x, y, z reais positivos. Prove que

$$\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}+\frac{c^3}{z^2}\ge\frac{(a+b+c)^3}{(x+y+z)^2}.$$

SOLUÇÃO DE MARCELO RIBEIRO DE SOUZA e WALLACE MARTINS (RIO DE JANEIRO – RJ)

a) Como esta é uma desigualdade homogênea, podemos supor

$(a_1^3+a_2^3+a_3^3)=1$

$(b_1^3+b_2^3+b_3^3)=1$

$(c_1^3+c_2^3+c_3^3)=1$

Com isto nossa desigualdade passa a ser:

$1\ge(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+a_3b_3c_3)^3$. Isto é imediato de MA – MG:

$$\frac{(a_1^3+b_1^3+c_1^3)}{3}\ge a_1b_1c_1$$

$$\frac{(a_2^3+b_2^3+c_2^3)}{3}\ge a_2b_2c_2$$

$$\frac{(a_3^3+b_3^3+c_3^3)}{3}\ge a_3b_3c_3$$

Somando tudo e elevando ao cubo ficamos com:

$1\ge\left(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+a_3b_3c_3\right)^3$ cqd.

b) Este item decorre diretamente do anterior, tendo em vista que

$$\left[\left(\frac{a}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^3+\left(\frac{b}{y^{\frac{2}{3}}}\right)^3+\left(\frac{c}{z^{\frac{2}{3}}}\right)^3\right]\left[\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(z^{\frac{1}{3}}\right)^3\right]\left[\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(z^{\frac{1}{3}}\right)^3\right]\ge$$

$$\left(\frac{a}{x^{\frac{2}{3}}}\cdot x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{3}}+\frac{b}{y^{\frac{2}{3}}}\cdot y^{\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{1}{3}}+\frac{c}{z^{\frac{2}{3}}}\cdot z^{\frac{1}{3}}\cdot z^{\frac{1}{3}}\right)^3$$

Portanto segue que

$$\left(\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}+\frac{c^3}{z^2}\right)\ge\frac{\left(a+b+c\right)^3}{\left(x+y+z\right)^2}.$$

PROBLEMAS PROPOSTOS

Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e sugestões de novos problemas para os próximos números.

102) Você recebe x metros de arame para cercar um terreno na forma de um triângulo pitagórico (os lados são números inteiros), com a condição de que a medida do cateto menor seja 24 metros. Qual deverá ser a medida do cateto maior e o comprimento do arame, a fim de que a área seja:
a) máxima?
b) mínima?

103) Sejam A e B matrizes 2×2 com elementos inteiros.
Sabendo que A, $A + B$, $A + 2B$, $A + 3B$ e $A + 4B$ são invertíveis e que os elementos das respectivas inversas também são todos inteiros, mostre que $A + 5B$ também é invertível e que os elementos da sua inversa também são inteiros.

104) ABC é um triângulo. Mostre que existe um único ponto P de modo que:
$$(PA)^2 + (PB)^2 + (AB)^2 = (PB)^2 + (PC)^2 + (BC)^2 = (PC)^2 + (PA)^2 + (CA)^2$$

105) O baricentro do triângulo ABC é G. Denotamos por g_a, g_b, g_c as distâncias desde G aos lados a, b e c respectivamente.
Seja r o rádio da circunferência inscrita. Prove que:

a) $g_a \geq \dfrac{2r}{3}$, $g_b \geq \dfrac{2r}{3}$, $g_c \geq \dfrac{2r}{3}$

b) $\dfrac{g_a + g_b + g_c}{r} \geq 3$

106) Os polinômios $P_0(x, y, z), P_1(x, y, z), P_2(x, y, z), \ldots$ são definidos por $P_0(x, y, z) = 1$ e $P_{m+1}(x, y, z) = (x+z)(y+z)P_m(x, y, z+1) - z^2 P_m(x, y, z)$, $\forall m \geq 0$. Mostre que os polinômios $P_m(x, y, z), m \in \mathbb{N}$ são simétricos em x, y, z, i.e., $P_m(x,y,z) = P_m(x,z,y) = P_m(y,x,z) = P_m(y,z,x) = P_m(z,x,y) = P_m(z,y,x)$, para quaisquer x, y, z.

107) a) Dado um triângulo qualquer, prove que existe um círculo que passa pelos pontos médios dos seus lados, pelos pés das suas alturas e pelos pontos médios dos segmentos que unem o ortocentro aos vértices do triângulo (o chamado "círculo dos nove pontos").

b) Prove que, se X é o centro do círculo dos nove pontos de um triângulo, H o seu ortocentro, O seu circuncentro e G seu baricentro, então $\overrightarrow{OX} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{OG} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OH}$.

Problema 102 proposto por Sebastião Vieira do Nascimento (Campina Grande – PB); Problema 103 proposto por Carlos A. Gomes (Natal – RN); Problemas 104 e 106 propostos por Wílson Carlos da Silva Ramos (Belém – PA); Problema 105 selecionado da XXXV Olimpíada Matemática Espanhola, fase nacional, 1999 e enviado por Bruno Salgueiro Fanego (Espanha).

Agradecemos também o envio das soluções e a colaboração de:

Carlos Alberto da Silva Victor	Nilópolis – RJ
Daniel Lopes Alves de Medeiros	Fortaleza – CE
Gabriel Ponce	Por e-mail
Georges Cobiniano Sousa de Melo	João Pessoa – PB
Glauber Moreno Barbosa	Rio de Janeiro – RJ
Jônatas de Souza Júnior	Recife – PE
Rafael Silva	Teresina – PI
Raphael Constant da Costa	Rio de Janeiro – RJ

Seguimos aguardando o envio de soluções dos problemas propostos Nos. 89, 97, 98 e 100.

COORDENADORES REGIONAIS

Alberto Hassen Raad	(UFJF)	Juiz de Fora – MG
Américo López Gálvez	(USP)	Ribeirão Preto – SP
Amarísio da Silva Araújo	(UFV)	Viçosa – MG
Ana Paula Bernardi da Silva	(Universidade Católica de Brasília)	Brasília – DF
Antonio Carlos Nogueira	(UFU)	Uberlândia – MG
Ali Tahzibi	(USP)	São Carlos – SP
Benedito Tadeu Vasconcelos Freire	(UFRN)	Natal – RN
Carlos Frederico Borges Palmeira	(PUC-Rio)	Rio de Janeiro – RJ
Claus Haetinger	(UNIVATES)	Lajeado – RS
Cleonor Crescêncio das Neves	(UTAM)	Manaus – AM
Cláudio de Lima Vidal	(UNESP)	S.J. do Rio Preto – SP
Edson Roberto Abe	(Colégio Objetivo de Campinas)	Campinas – SP
Élio Mega	(Colégio Etapa)	São Paulo – SP
Éder Luiz Pereira de Andrade	(UNESPAR/FECILCAM)	Campo Mourão – PR
Eudes Antonio da Costa	(Univ. do Tocantins)	Arraias – TO
Florêncio Ferreira Guimarães Filho	(UFES)	Vitória – ES
Ivanilde Fernandes Saad	(UC. Dom Bosco)	Campo Grande– MS
Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia	(UFPB)	João Pessoa – PB
Janice T. Reichert	(UNOCHAPECÓ)	Chapecó – SC
João Benício de Melo Neto	(UFPI)	Teresina – PI
João Francisco Melo Libonati	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
José Carlos dos Santos Rodrigues	(Unespar)	Campo Mourão – PR
José Cloves Saraiva	(UFMA)	São Luis – MA
José Gaspar Ruas Filho	(ICMC-USP)	São Carlos – SP
José Luiz Rosas Pinho	(UFSC)	Florianópolis – SC
José Vieira Alves	(UFPB)	Campina Grande – PB
Krerley Oliveira	(UFAL)	Maceió – AL
Licio Hernandes Bezerra	(UFSC)	Florianópolis – SC
Luzinalva Miranda de Amorim	(UFBA)	Salvador – BA
Mário Rocha Retamoso	(UFRG)	Rio Grande – RS
Marcelo Rufino de Oliveira	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Marcelo Mendes	(Colégio Farias Brito, Pré-vestibular)	Fortaleza – CE
Marilane de Fraga Sant'Ana	FACOS	Osório – RS
Pablo Rodrigo Ganassim	(Liceu Terras do Engenho)	Piracicaba – SP
Ramón Mendoza	(UFPE)	Recife – PE
Raúl Cintra de Negreiros Ribeiro	(Colégio Anglo)	Atibaia – SP
Ronaldo Alves Garcia	(UFGO)	Goiânia – GO
Reginaldo de Lima Pereira	(Escola Técnica Federal de Roraima)	Boa Vista – RR
Reinaldo Gen Ichiro Arakaki	(UNIVAP)	SJ dos Campos – SP
Ricardo Amorim	(Centro Educacional Logos)	Nova Iguaçu – RJ
Sérgio Cláudio Ramos	(IM-UFRGS)	Porto Alegre – RS
Seme Guevara Neto	(UFMG)	Belo Horizonte – MG
Tadeu Ferreira Gomes	(UEBA)	Juazeiro – BA
Tomás Menéndez Rodrigues	(U. Federal de Rondônia)	Porto Velho – RO
Valdenberg Araújo da Silva	(U. Federal de Sergipe)	São Cristovão – SE
Valdeni Soliani Franco	(U. Estadual de Maringá)	Maringá – PR
Vânia Cristina Silva Rodrigues	(U. Metodista de SP)	S.B. do Campo – SP
Wagner Pereira Lopes	(CEFET – GO)	Jataí – GO