CONTEÚDO

AOS LEITORES

Neste número apresentamos os resultados das equipes brasileiras e os problemas propostos na X Olimpíada de maio, na XV Olimpíada do Cone Sul, na XLV Olimpíada Internacional (IMO), na XI Olimpíada Internacional para Estudantes Universitários (IMC) e na XIX Olimpíada Ibero-americana. Realmente temos muito a comemorar: o primeiro colocado na Cone Sul, a maior nota do Ocidente no IMC (lembrem-se de que boa parte da Europa e os Estados Unidos ficam no Ocidente!), mais uma vez todos os integrantes de nossa equipe conquistaram medalhas na IMO, colocando o Brasil à frente de diversos países de grande tradição matemática, como a França e a Alemanha e fomos o primeiro país a conquistar 4 medalhas de ouro na Ibero.

Você ainda poderá ler três excelentes artigos de Geometria, com os quais certamente você aprenderá muito. Não se esqueça de que, caso não consiga entender algum agora (ou mesmo todos, não há problema), vale a pena retornar a eles depois.

Agradecemos as soluções de problemas propostos e os novos problemas enviados pelos nossos leitores, que continuamos estimulando a colaborar com a Eureka!. Agradecemos finalmente a Cícero Thiago Magalhães de Fortaleza – CE e a Wilberson Ivo Della Nina de São José dos Campos – SP que colaboraram com a revisão deste número.

Os editores

X OLIMPÍADA DE MAIO

Enunciados e Resultado Brasileiro

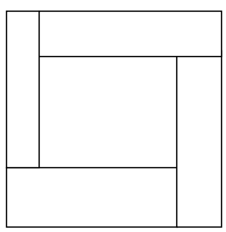
PRIMEIRO NÍVEL

Duração da Prova: 3 horas

PROBLEMA 1

Xavier multiplica quatro dígitos, não necessariamente distintos, e obtém um número terminado em 7. Determine quanto pode valer a soma dos quatros dígitos multiplicados por Xavier. Dê todas as possibilidades.

PROBLEMA 2



No interior de um quadrado 11×11, Pablo desenhou um retângulo e prolongando seus lados dividiu o quadrado em 5 retângulos, como mostra a figura.
Sofia fez o mesmo, conseguindo, além disso, que os comprimentos dos lados dos 5 retângulos fossem números inteiros entre 1 e 10, todos distintos.
Mostre uma figura como a que Sofia fez.

PROBLEMA 3

Em cada casa de um tabuleiro 5×5 está escrito 1 ou – 1. Em cada passo troca-se o número de cada uma das 25 casas pelo resultado da multiplicação dos números de todas as suas casas vizinhas.
Inicialmente se tem o tabuleiro da figura.
Mostre como fica o tabuleiro ao final de 2004 passos.

1	1	–1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Observação: Duas casas são vizinhas se tiverem um lado em comum.

PROBLEMA 4

Em um quadrado *ABCD* de diagonais *AC* e *BD*, chamamos de *O* o centro do quadrado. Constrói-se um quadrado *PQRS* de lados paralelos aos de *ABCD* com *P* no segmento *AO*, *Q* no segmento *BO*, *R* no segmento *CO*, *S* no segmento *DO*.
Se área (*ABCD*) = 2·área(*PQRS*) e *M* é o ponto médio do lado *AB*, calcule a medida do ângulo $A\widehat{M}P$. (Não vale medir.)

PROBLEMA 5

Tem-se 90 cartões e em cada um estão escritos dois dígitos distintos: 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 12, e assim sucessivamente até 98.
Um conjunto de cartões é *correto* se não contém nenhum cartão que tenha o primeiro dígito igual ao segundo dígito de outro cartão do conjunto.
Chamamos *valor* de um conjunto de cartões a soma dos números escritos em cada cartão.
Por exemplo, os quatros cartões 04, 35, 78 e 98 formam um conjunto correto e seu valor é 215, pois 04 + 35 + 78 + 98 = 215.
Encontre um conjunto correto que tenha o maior valor possível. Explique por que é impossível obter um conjunto correto de maior valor.

SEGUNDO NÍVEL

Duração da Prova: 3 horas

PROBLEMA 1

Juliano escreveu cinco números inteiros positivos, não necessariamente distintos, tais que seu produto seja igual à sua soma. Quais podem ser os números que Juliano escreveu?

PROBLEMA 2

A mãe de Zezinho quer preparar *n* pacotes de 3 balas para dar de presente na festa de aniversário, e para isto comprará balas sortidas de 3 sabores diferentes. Ela pode comprar qualquer número de balas, mas não pode escolher quantas são de cada sabor. Ela quer colocar em cada pacote uma bala de cada sabor, e se isto não for possível usará somente balas de um sabor e todos os pacotes terão 3 balas desse sabor. Determine o menor número de balas que ela deve comprar para poder preparar os *n* pacotes. Explique por que se ela compra menos balas não terá a certeza de poder preparar os pacotes como ela quer.

PROBLEMA 3

Temos uma mesa de bilhar de 8 metros de comprimento e 2 metros de largura, com uma única bola no centro. Lançamos a bola em linha reta e, depois de percorrer 29 metros, ela pára numa esquina da mesa. Quantas vezes a bola rebateu nas bordas da mesa?
Nota: Quando a bola rebate na borda da mesa, os dois ângulos que formam sua trajetória com a borda da mesa são iguais.

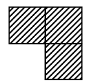
PROBLEMA 4

Ache todos os números naturais x, y, z que verificam simultaneamente

$$x \cdot y \cdot z = 4104 \qquad x + y + z = 77$$

PROBLEMA 5

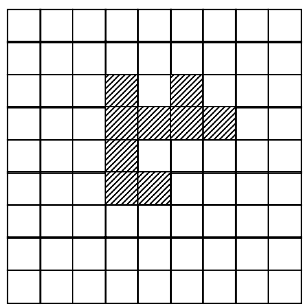
Sobre um tabuleiro 9×9, dividido em casas 1×1, se colocam sem superposições e sem sair do tabuleiro, peças da forma



Cada peça cobre exatamente 3 casas.

a) A partir do tabuleiro vazio, qual é a máxima quantidade de peças que se pode colocar?

b) A partir do tabuleiro com 3 peças e colocadas como mostra o diagrama seguinte,



qual é a máxima quantidade de peças que se pode colocar?

RESULTADOS

PRIMEIRO NÍVEL (Até 13 anos)

Gustavo Henrique dos Santos Figueiredo	Medalha de Ouro	Santo André - SP
Vinícius Henrique Campos Senra	Medalha de Prata	Belo Horizonte - MG
Rafael Pacheco Gomes	Medalha de Prata	Fortaleza - CE
Danilo Takeshi Abe Jaune	Medalha de Bronze	São Paulo - SP
Ilan Feiman Halpern	Medalha de Bronze	Itatiaia - RJ
Emanuelle Meneses Barros	Medalha de Bronze	Fortaleza - CE
Dayana Basilio Batista	Medalha de Bronze	Campo Grande - MS
Guilherme Albuquerque Pinto Rebello	Menção Honrosa	Rio de Janeiro - RJ
Bernardo Duque Guimarães Saraiva	Menção Honrosa	Rio de Janeiro - RJ
Amanda Maria Barradas M. de Santana	Menção Honrosa	Teresina - PI

SEGUNDO NÍVEL (Até 15 anos)

Eduardo Fischer	Medalha de Ouro	Encantado - RS
Lucio Eiji Assaoka Hossaka	Medalha de Prata	Curitiba - PR
Guilherme Nogueira de Souza	Medalha de Prata	São Paulo - SP
José Marcos Andrade Ferraro	Medalha de Bronze	São Paulo - SP
Paulo André Carvalho de Melo	Medalha de Bronze	Rio de Janeiro - RJ
Rodrigo Clemente de Brito Pereira	Medalha de Bronze	João Pessoa - PB
Henrique Pondé de Oliveira Pinto	Medalha de Bronze	Salvador - BA
Rafael Tupinambá Dutra	Menção Honrosa	Belo Horizonte - MG
Amanda Freitas Santos	Menção Honrosa	Rio de Janeiro - RJ
Edson Augusto Bezerra Lopes	Menção Honrosa	Fortaleza - CE

XV OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL

Enunciados e Resultado Brasileiro

A XV Olimpíada de Matemática do Cone Sul foi realizada na cidade de Caaguazú, Paraguai no período de 14 a 23 de Maio de 2004. A equipe brasileira foi liderada pelos professores Pablo Rodrigo Ganassim (São Paulo – SP) e Márcio Cohen (Rio de Janeiro – RJ).

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	**Gabriel Tavares Bujokas**	**Medalha de Ouro**
BRA2	**Leandro Farias Maia**	**Medalha de Prata**
BRA3	**André Linhares Rodrigues**	**Medalha de Bronze**
BRA4	**Telmo Luis Correa Júnior**	**Medalha de Bronze**

PROBLEMA 1

Maxi escolheu 3 dígitos e, fazendo todas as permutações possíveis, obteve 6 números distintos, cada um com 3 dígitos. Se exatamente um dos números que Maxi obteve é um quadrado perfeito e exatamente três são primos, encontrar os 3 dígitos que Maxi escolheu.
Dê todas as possibilidades para os 3 dígitos.

PROBLEMA 2

Dada uma circunferência C e um ponto P exterior a ela, traçam-se por P as duas tangentes à circunferência, sendo A e B os pontos de tangência.
Toma-se um ponto Q sobre o menor arco AB de C. Seja M a interseção da reta AQ com a perpendicular a AQ traçada por P, e seja N a interseção da reta BQ com a perpendicular a BQ traçada por P.
Demonstre que, ao variar Q no arco AB, todas as retas MN passam por um mesmo ponto.

PROBLEMA 3

Seja n um inteiro positivo. Chamamos C_n a quantidade de inteiros positivos x, menores que 10^n, tais que a soma dos dígitos de $2x$ é menor que a soma dos dígitos de x.

Demonstre que $C_n \geq \frac{4}{9}\left(10^n - 1\right)$.

PROBLEMA 4

Arnaldo escolhe um inteiro a, $a \geq 0$, e Bernaldo escolhe um inteiro b, $b \geq 0$. Ambos dizem, em segredo, o número que escolheram a Cernaldo, e este escreve em um quadro os números 5, 8 e 15, sendo um desses a soma $a + b$.

Cernaldo toca uma campainha e Arnaldo e Bernaldo, individualmente, escrevem em papéis distintos se sabem ou não qual dos números no quadro é a soma de a e b, e entregam seus papéis para Cernaldo.

Se em ambos os papéis está escrito NÃO, Cernaldo toca novamente a campainha, e o procedimento se repete.

Sabe-se que Arnaldo e Bernaldo são sinceros e inteligentes.

Qual é o número máximo de vezes que a campainha pode ser tocada até que um deles escreva que sabe o valor da soma?

PROBLEMA 5

Utilizando triangulinhos eqüiláteros de papel, de lado 1, forma-se um triângulo eqüilátero de lado 2^{2004}. Desse triângulo retira-se o triangulinho de lado 1 cujo centro coincide com o centro do triângulo maior.

Determine se é possível cobrir totalmente a superfície restante, sem superposições nem buracos, dispondo-se somente de fichas em forma de trapézio isósceles, cada uma formada por três triangulinhos eqüiláteros de lado 1.

PROBLEMA 6

Sejam m, n inteiros positivos. Em um tabuleiro $m \times n$, quadriculado em quadradinhos de lado 1, considere todos os caminhos que vão do vértice superior direito ao inferior esquerdo, percorrendo as linhas do quadriculado exclusivamente nas direções $\leftarrow$ e $\downarrow$.

Define-se a *área* de um caminho como sendo a quantidade de quadradinhos do tabuleiro que há abaixo desse caminho. Seja p um primo tal que $r_p(m) + r_p(n) \geq p$, onde $r_p(m)$ representa o resto da divisão de m por p e $r_p(n)$ representa o resto da divisão de n por p.

Em quantos caminhos a área é um múltiplo de p?

XLV OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA
Enunciados e Resultado Brasileiro

A XLV Olimpíada Internacional de Matemática foi realizada na cidade de Atenas, Grécia no período de 06 a 18 de julho de 2004. A equipe brasileira foi liderada pelos professores Carlos Gustavo Moreira (Rio de Janeiro – RJ) e Carlos Yuzo Shine (São Paulo – SP).

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	**Fábio Dias Moreira**	**Medalha de Bronze**
BRA2	**Gabriel Tavares Bujokas**	**Medalha de Prata**
BRA3	**Henry Wei Cheng Hsu**	**Medalha de Bronze**
BRA4	**Rafael Daigo Hirama**	**Medalha de Prata**
BRA5	**Rafael Marini Silva**	**Medalha de Bronze**
BRA6	**Thiago Costa Leite Santos**	**Medalha de Bronze**

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1
Seja ABC um triângulo acutângulo com $AB \neq AC$. A circunferência de diâmetro BC intersecta os lados AB e AC nos pontos M e N, respectivamente. Seja O o ponto médio do lado BC. As bissetrizes dos ângulos $\widehat{BAC}$ e $\widehat{MON}$ intersectam-se em R. Prove que as circunferências circunscritas aos triângulos BMR e CNR têm um ponto em comum que pertence ao lado BC.

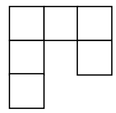
PROBLEMA 2
Determine todos os polinômios $P(x)$ de coeficientes reais que satisfazem a igualdade

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c)$$

para quaisquer números reais a, b, c, tais que $ab + bc + ca = 0$.

PROBLEMA 3

Um *gancho* é uma figura formada por seis quadrados unitários como no seguinte diagrama



ou qualquer uma das figuras obtidas desta aplicando rotações ou reflexões.
Determine todos os retângulos $m \times n$ que podem ser cobertos com ganchos de modo que:

i) O retângulo é coberto sem buracos e sem sobreposições;

ii) Nenhuma parte de nenhum gancho pode cobrir regiões fora do retângulo.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Seja $n \geq 3$ um inteiro. Sejam $t_1, t_2, ..., t_n$ números reais positivos tais que

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + ... + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + ... + \frac{1}{t_n}\right).$$

Mostre que t_i, t_j e t_k são as medidas dos lados de um triângulo para quaisquer *i*, *j*, *k* com $1 \leq i < j < k \leq n$.

PROBLEMA 5

Num quadrilátero convexo *ABCD* a diagonal *BD* não é bissetriz do ângulo $\widehat{ABC}$ nem do ângulo $\widehat{CDA}$. Um ponto *P* no interior de *ABCD* satisfaz

$$\angle PBC = \angle DBA \text{ e } \angle PDC = \angle BDA.$$

Prove que os vértices do quadrilátero *ABCD* pertencem a uma mesma circunferência se e só se *AP* = *CP*.

PROBLEMA 6

Um inteiro positivo é dito *alternante* se, na sua representação decimal, quaisquer dois dígitos consecutivos têm paridade diferente.
Determine todos os inteiros positivos *n* tais que *n* tem um múltiplo que é alternante.

XIX OLIMPÍADA IBERO-AMERICANA DE MATEMÁTICA

Enunciados e Resultado Brasileiro

A XIX Olimpíada Ibero-americana de Matemática foi realizada na cidade de Castellón, Espanha no período de 17 a 26 de setembro de 2004. A equipe brasileira foi liderada pelos professores Eduardo Wagner e Luciano Guimarães Monteiro de Castro, ambos do Rio de Janeiro – RJ.

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	**Alex Corrêa Abreu**	**Medalha de Ouro**
BRA2	**Fábio Dias Moreira**	**Medalha de Ouro**
BRA3	**Gabriel Tavares Bujokas**	**Medalha de Ouro**
BRA4	**Rafael Daigo Hirama**	**Medalha de Ouro**

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Deve-se colorir as casas de um tabuleiro 1001×1001 de acordo com as seguintes regras:
Se duas casas têm um lado comum, então pelo menos uma delas deve ser colorida.
De cada seis casas consecutivas de uma linha ou de uma coluna, devem colorir-se sempre pelo menos duas delas que sejam adjacentes.
Determinar o número mínimo de casas que devem ser coloridas.

PROBLEMA 2

Considera-se no plano uma circunferência de centro O e raio r, e um ponto A exterior a ela. Seja M um ponto da circunferência e N o ponto diametralmente oposto a M. Determinar o lugar geométrico dos centros das circunferências que passam por A, M e N quando M varia.

PROBLEMA 3

Sejam n e k números inteiros positivos tais que n é ímpar ou n e k são pares. Provar que existem inteiros a e b tais que

$$mdc(a,n) = mdc(b,n) = 1 \text{ e } k = a + b.$$

PROBLEMA 4

Determinar todos os pares (a, b), onde a e b são números inteiros positivos de dois dígitos cada um, tais que $100a + b$ e $201a + b$ são quadrados perfeitos de quatro dígitos.

PROBLEMA 5

Dado um triângulo escaleno ABC, designam-se por A', B', C' os pontos de interseção das bissetrizes interiores dos ângulos A, B e C com os lados opostos, respectivamente.

Sejam: A'' a interseção de BC com a mediatriz de AA',
B'' a interseção de AC com a mediatriz de BB' e
C'' a interseção de AB com a mediatriz de CC'.

Provar que A'', B'' e C'' são colineares.

PROBLEMA 6

Para um conjunto H de pontos no plano, diz-se que um ponto P do plano é um *ponto de corte* de H, se existem quatro pontos distintos A, B, C e D em H tais que as retas AB e CD são distintas e se cortam em P.
Dado um conjunto finito A_0 de pontos no plano, constrói-se uma sucessão de conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots$ da seguinte forma: para qualquer $j \geq 0$, A_{j+1} é a união de A_j com o conjunto de todos os pontos de corte de A_j.
Demonstrar que se a união de todos os conjuntos da sucessão é um conjunto finito então, para qualquer $j \geq 1$, tem-se $A_j = A_1$.

XI OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA PARA ESTUDANTES UNIVERSITÁRIOS

Enunciados e Resultado Brasileiro

A XI Olimpíada Internacional de Matemática para estudantes universitários foi realizada na cidade de Skopje, Macedônia no período de 23 a 29 de julho de 2004.

A equipe brasileira foi liderada pelo professor Fernando Pimentel, da cidade de Fortaleza – CE.

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

Yuri Gomes Lima	**UFC**	**Medalha de Ouro**
Humberto Silva Naves	**ITA**	**Medalha de Prata**
Carlos Stein Naves de Brito	**ITA**	**Medalha de Prata**
Alex Corrêa Abreu	**UFRJ**	**Medalha de Prata**
Eduardo Casagrande Stabel	**UFRGS**	**Medalha de Bronze**
Murilo Vasconcelos de Andrade	**IME**	**Medalha de Bronze**
Rafael Tajra Fonteles	**UFPI**	**Medalha de Bronze**
Thiago Barros Rodrigues Costa	**Unicamp**	**Menção Honrosa**
Diêgo Veloso Uchôa	**IME**	**Menção Honrosa**
Eduardo Famini Silva	**IME**	**Menção Honrosa**
Tertuliano Franco Santos Franco	**UFBA**	**Menção Honrosa**

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Seja S um conjunto infinito de números reais tal que $|x_1 + x_2 + ... + x_n| \leq 1$ para todo subconjunto finito $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset S$. Demonstre que S é enumerável.

PROBLEMA 2

Seja $f_1(x) = x^2 - 1$, e para cada inteiro positivo $n \geq 2$ defina $f_n(x) = f_{n-1}(f_1(x))$. Quantas raízes reais distintas tem o polinômio f_{2004} ?

PROBLEMA 3

Seja A_n o conjunto de todas as somas $\sum_{k=1}^{n} \arcsin x_k$, onde $n \geq 2$, $x_k \in [0,1]$, e $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1.$

i) Prove que A_n é um intervalo.

ii) Seja a_n o comprimento do intervalo A_n. Calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$.

PROBLEMA 4

Suponha $n \geq 4$ e seja *S* um conjunto finito de pontos no espaço $\mathbb{R}^3$, de maneira que quaisquer quatro de seus pontos não sejam coplanares. Suponha que todos os pontos de *S* podem ser coloridos de vermelho e azul de modo que qualquer esfera que intersecte *S* em ao menos 4 pontos tenha a propriedade de que exatamente a metade dos pontos na interseção de *S* com a esfera é azul. Prove que todos os pontos de *S* encontram-se numa esfera.

PROBLEMA 5

Seja *S* um conjunto de $\binom{2n}{n}$ + 1 números reais, onde *n* é um inteiro positivo. Prove que onde existe uma seqüência monótona $\{a_i\}_{1\leq i\leq n+2} \subset S$ tal que

$$|x_{i+1} - x_1| \geq 2|x_i - x_1|,$$

para todo *i* = 2, 3,…, *n*.

PROBLEMA 6

Para cada número complexo *z* diferente de 0 e 1 definimos a seguinte função:

$$f(z) = \sum \frac{1}{\log^4 z}$$

onde a soma é sobre todos os ramos do logaritmo complexo.

i) Prove que há dois polinômios *P* e *Q* tais que $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ para todo $z \in \mathbb{C} - \{0,1\}$.

ii) Prove que para todo $z \in \mathbb{C} - \{0,1\}$ temos

$$f(z) = \frac{z^3 + 4z^2 + z}{6(z-1)^4}.$$

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 7

Seja A uma matriz real 4×2 e B uma matriz real 2×4 tal que

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Encontre BA.

PROBLEMA 8

Sejam $f, g : [a,b] \to [0,\infty)$ duas funções continuas não decrescentes tais que para cada $x \in [a,b]$ temos

$$\int_a^x \sqrt{f(t)}\ dt \le \int_a^x \sqrt{g(t)}\ dt \ \text{ e } \int_a^b \sqrt{f(t)}\ dt = \int_a^b \sqrt{g(t)}\ dt.$$

Prove que

$$\int_a^b \sqrt{1+f(t)}\ dt \ge \int_a^b \sqrt{1+g(t)}\ dt.$$

PROBLEMA 9

Seja D um disco unitário fechado, e sejam $z_1, z_2, \ldots, z_n$ pontos fixados em D. Prove que existe um ponto z em D tal que a soma das distancias desde z a cada um dos n pontos é maior ou igual que n.

PROBLEMA 10

Para $n \geq 1$ seja M uma matriz complexa $n \times n$ com autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, distintos com respectivas multiplicidades $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Considere o operador linear L_M definido por $L_M X = MX + XM^T$, para qualquer X matriz complexa $n \times n$. Encontre os autovalores de L_M e suas multiplicidades.

PROBLEMA 11

Prove que

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx \ \ dy}{\frac{1}{x} + |\log y| - 1} \leq 1.$$

PROBLEMA 12

Para $n \geq 0$ defina as matrizes A_n e B_n como segue: $A_0 = B_0 = (1)$, e, para cada $n > 0$,

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & A_{n-1} \\ A_{n-1} & B_{n-1} \end{pmatrix} \text{ e } B_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & A_{n-1} \\ A_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Denote por $S(M)$ a soma de todos os elementos da matriz M. Prove que $S\left(A_n^{k-1}\right) = S\left(A_k^{n-1}\right)$, para quaisquer $n, k \geq 2$.

O TRIÂNGULO E SUAS PRINCIPAIS CIRCUNFERÊNCIAS

Eduardo Wagner, Rio de Janeiro - RJ

Nível Iniciante

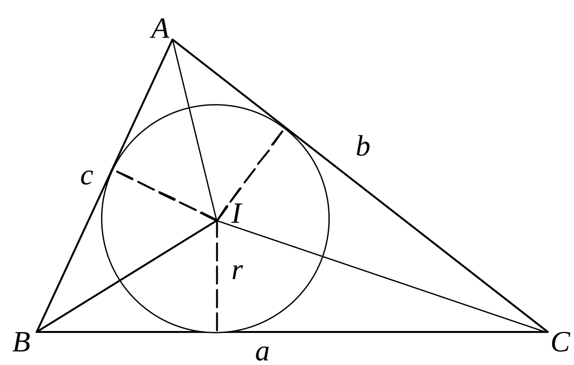
Vamos tratar neste artigo das circunferências inscrita, circunscrita e exinscritas de um triângulo. Mostraremos diversas propriedades, relações interessantes e alguns problemas.

Em todo o artigo, o triângulo ABC possui lados $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$. O seu semiperímetro é p e sua área é S. Será necessário que o leitor conheça a fórmula de Heron para área do triângulo em função de seus lados:

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

A circunferência inscrita

A circunferência inscrita tem centro I, incentro do triângulo, que é o ponto de interseção das bissetrizes internas.



A área do triângulo ABC é a soma das áreas dos triângulos AIB, BIC e CIA, que possuem altura igual a r, raio da circunferência inscrita. Portanto,

$$S = \frac{cr}{2} + \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} = \frac{a+b+c}{2} r = pr$$

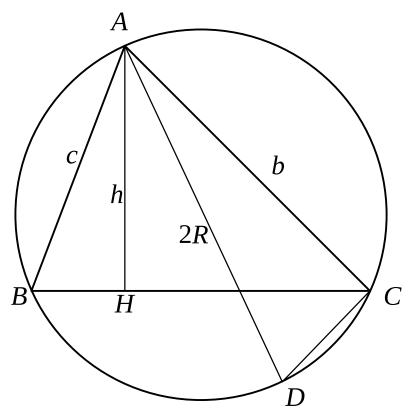
A nossa primeira relação é:

$$S = pr$$

que permite calcular o raio da circunferência inscrita em um triângulo em função de seus lados.

A circunferência circunscrita

Considere agora o triângulo ABC inscrito em uma circunferência de raio R. Seja $AH = h$ uma altura e seja AD um diâmetro dessa circunferência.



Os triângulos AHB e ACD são semelhantes uma vez que os ângulos AHB e ACD são retos e os ângulos ABC e ADC são iguais pois subtendem o mesmo arco. Logo,

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AH}{AC}$$

$$\frac{c}{2R} = \frac{h}{b}$$

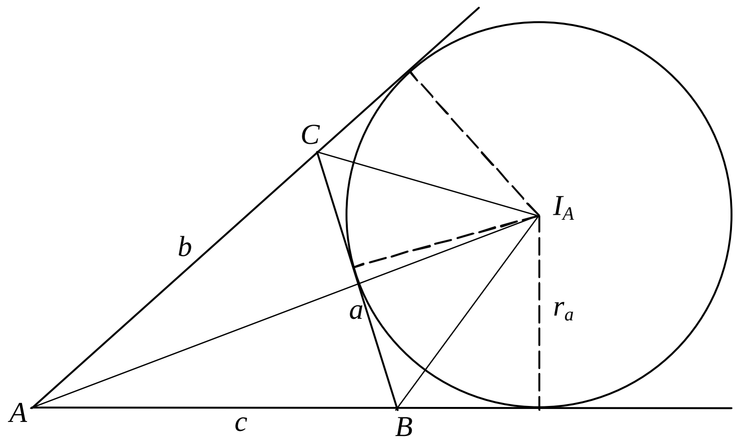
ou seja, $bc = 2Rh$. Multiplicando pelo comprimento do lado BC os dois lados, temos
$abc = 2Rah$. Mas ah é o dobro da área do triângulo ABC e assim encontramos a nossa segunda relação :

$$abc = 4RS$$

Ela permite calcular o raio da circunferência circunscrita a um triângulo em função dos seus lados.

As circunferências exinscritas

A circunferência exinscrita relativa ao vértice A do triângulo ABC é tangente ao lado BC e às retas AB e AC. Seu raio será designado por r_a e seu centro por I_A , chamado de exincentro (ou excentro) relativo ao vértice A do triângulo ABC. O ponto I_A é a interseção da bissetriz interna de A e das bissetrizes externas de B e C. As outras duas circunferências exinscritas e os dois outros exincentros são definidas de forma análoga.



A área do triângulo ABC é igual a área de ABI_A mais a área de ACI_A menos a área de BCI_A. Assim,

$$S = \frac{cr_a}{2} + \frac{br_a}{2} - \frac{ar_a}{2} = \frac{b+c-a}{2} r_a .$$

Observe que $b + c - a = a + b + c - 2a = 2p - 2a = 2(p - a)$. Logo, a nossa nova relação é:

$$S = r_a(p-a)$$

e, analogamente, temos

$$S = r_b(p-b)$$
$$S = r_c(p-c)$$

que permitem calcular os raios das circunferências exinscritas em função dos lados do triângulo ABC.

Para fixar o que apresentamos até aqui, resolva o problema a seguir.

Problema 1: Em um triângulo de lados 5, 7, e 8, calcule os raios das circunferências inscrita, circunscrita e exinscritas.

Respostas: $\sqrt{3},\ \dfrac{7\sqrt{3}}{3},\ 2\sqrt{3},\ \dfrac{10\sqrt{3}}{7},\ \dfrac{5\sqrt{3}}{4}$.

Duas relações

Primeira: $S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$

Esta é fácil de demonstrar. Multiplicando as relações da circunferência inscrita e das exinscritas obtemos:

$$S^4 = r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c \cdot p(p-a)(p-b)(p-c) = r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c \cdot S^2$$

o que demonstra a relação.

Segunda: $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c}$

Observe que

$$\frac{S}{r_a} + \frac{S}{r_b} + \frac{S}{r_c} = p - a + p - b + p - c = 3p - (a+b+c) = p = \frac{S}{r}$$

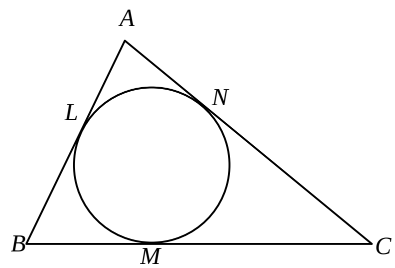
que demonstra a relação.

Problema: 2 Existe um triângulo cujas circunferências exinscritas tenham raios 1cm, 2cm e 6cm?

Resposta: sim. os lados medem $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}, \dfrac{7\sqrt{5}}{5}, \dfrac{9\sqrt{5}}{5}$ centímetros.

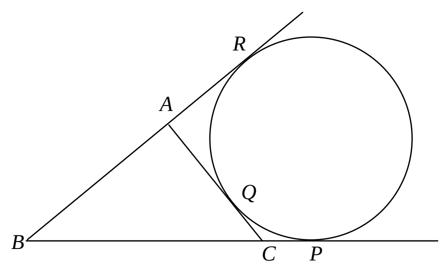
Os pontos de tangência

Vamos agora localizar os pontos de tangência das circunferências inscrita e exinscrita em relação da cada um dos lados. Consideremos inicialmente a circunferência inscrita tangenciando os lados *AB*, *BC* e *CA* nos pontos *L*, *M* e *N*, respectivamente.



Sejam $AL = AN = x$, $BL = BM = y$, $CM = CN = z$. Temos então o sistema:
$x + y = c$
$y + z = a$
$z + x = b$
que resolvido dá $AL = AN = p - a$, $BL = BM = p - b$, $CM = CN = p - c$.

Considerando uma das circunferências exinscritas como mostra a figura a seguir temos:

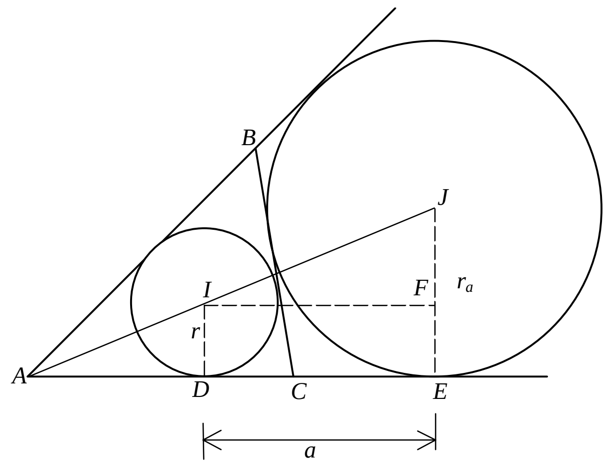


o perímetro do triângulo *ABC* é
$2p = BA + AC + BC = BA + AQ + CQ + BC = BA + AR + CP + BC = BR + BP = 2BP$.
Logo, $BP = p$, o semiperímetro do triângulo.

Uma desigualdade interessante

Em todo triângulo *ABC*, $r \cdot r_a \le \dfrac{a^2}{4}$.

Esta desigualdade, além de interessante pelo seu aspecto, vai ser útil para a resolução de outros problemas.
Observe a figura a seguir.



Na figura acima, I é o incentro de ABC e J é o exincentro relativo ao vértice A. Sabemos pelo ítem anterior que $CD = p - c$ e que $AE = p$. Logo, $CE = p - b$ e portanto,
$DE = p - c + p - c = 2p - (b + c) = a$.

No triângulo retângulo IJF temos $IJ \geq r + r_a$, valendo a igualdade se, e somente se $AB = AC$. Portanto,

$$(r + r_a)^2 \leq IJ^2 = a^2 + (r_a - r)^2$$
$$2r \cdot r_a = a^2 - 2r \cdot r_a$$
$$r \cdot r_a \leq \frac{a^2}{4}$$

como queríamos demonstrar. Repare que a igualdade ocorre se, e somente se, o triângulo ABC é isósceles com vértice A.

A desigualdade entre os raios das circunferências inscrita e circunscrita

Em qualquer triângulo, $\dfrac{r}{R} \leq \dfrac{1}{2}$.

Esta linda desigualdade é intrigante, pois afirma que o raio da circunferência circunscrita não é menor que o dobro do raio da circunferência inscrita.
Há diversas demonstrações desta desigualdade; todas muito engenhosas. Mas, seguindo o que estamos desenvolvendo neste artigo, vamos apresentar a demonstração seguinte.
Considerando a desigualdade que acabamos de demonstrar, temos:

$$r \cdot r_a \leq \frac{a^2}{4}$$
$$r \cdot r_b \leq \frac{b^2}{4}$$
$$r \cdot r_c \leq \frac{c^2}{4}$$

Multiplicando estas três relações temos:

$$r^2 \cdot r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c \leq \frac{a^2 b^2 c^2}{64}$$
$$r^2 S^2 \leq \frac{(4RS)^2}{64}$$

$$\frac{r}{R} \leq \frac{1}{2}$$

A pergunta natural que devemos fazer é quando vale a igualdade. Repare que na demonstração da desigualdade $r \cdot r_a \leq \frac{a^2}{4}$, a igualdade vale se, e somente se, $AB = AC$, quando as circunferências inscrita e exinscrita relativa ao vértice A são tangentes no ponto médio do lado BC. Utilizando o mesmo argumento para as outras desigualdades, concluímos que $\frac{r}{R} = \frac{1}{2}$ ocorre se, e somente se o triângulo ABC é equilátero.

Problema 3

Sabendo que em um triângulo ABC, $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ (isto você poderá demonstrar mais tarde), mostre que $\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$.

A relação dos cinco raios

Os raios das circunferências inscrita, circunscrita e exinscritas estão ligados pela relação:

$$r_a + r_b + r_c - r = 4R$$

Para demonstrar isto, necessitamos apenas de resultados anteriores e de alguma manipulação algébrica.

$$r_b + r_c = \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} = \frac{aS}{(p-b)(p-c)}$$

$$r_a - r = \frac{S}{p-a} - \frac{S}{p}$$

Somando,

$$r_a + r_b + r_c - r = aS\left(\frac{1}{(p-b)(p-c)} + \frac{1}{p(p-a)}\right)$$

$$= aS\frac{p(p-a)+(p-b)(p-c)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= aS\frac{2p^2 - p(a+b+c)+bc}{S^2}$$

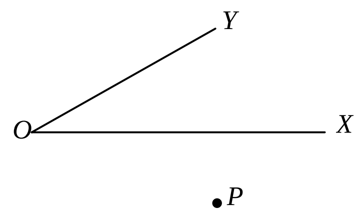
$$= \frac{abc}{S} = 4R$$

O assunto não tem fim. Há muitíssimas outras relações entre os elementos de um triângulo e suas principais circunferências; algumas legais e outras desinteressantes. Mas, nosso objetivo foi fornecer um material básico para que os alunos iniciantes possam se desenvolver e, por isso, paramos aqui.
Para fixar as idéias, você poderá curtir uns probleminhas bacanas na lista abaixo.

Problemas suplementares

Problema 4
Em um triângulo ABC com incentro I, a bissetriz interna do ângulo A encontra a circunferência circunscrita em E. Prove que $EB = EC = EI$.

Problema 5
Dados um ângulo agudo XOY, um ponto P exterior e um número positivo k (como sugerido na figura abaixo), mostre como se pode construir uma reta que passe por P e que corte os lados do ângulo dado formando um triângulo de perímetro k.



Problema 6
Em um triângulo acutângulo, mostre que o simétrico do ortocentro em relação a um lado pertence a circunferência circunscrita ao triângulo .

Problema 7 (de uma olimpíada internacional)
O triângulo acutângulo ABC está inscrito em uma circunferência. Sejam M, N e P os pontos médios dos arcos AB, BC e CA, respectivamente. Prove que a área do hexágono $AMBNCP$ é maior ou igual que o dobro da área do triângulo ABC.

Problema 8
Em um quadrilátero convexo $ABCD$, as bissetrizes dos ângulos A e B cortam-se em M, as bissetrizes dos ângulos C e D cortam-se em N e as retas AD e BC cortam-se em P. Mostre que os pontos M, N e P são colineares.

Problema 9
Em um triângulo ABC com incentro I, e exincentros J, K, L, mostre que I é o ortocentro do triângulo JKL.

Problema 10
Em um triângulo, mostre que a distância do ortocentro a um vértice é o dobro da distância do circuncentro ao lado oposto. Mostre a seguir que o ortocentro, o baricentro e o circuncentro são colineares.

Problema 11 (este é difícil)
Em um triângulo ABC, AX é uma bissetriz ($X \in BC$), N é o ponto médio de AX, e M é o ponto médio de BC. Sendo I o incentro do triângulo, mostre que M, I e N são colineares.

DOIS PROBLEMAS CHINESES SOBRE GEOMETRIA PROJETIVA

Helder Oliveira de Castro, São Paulo - SP

Nível Avançado

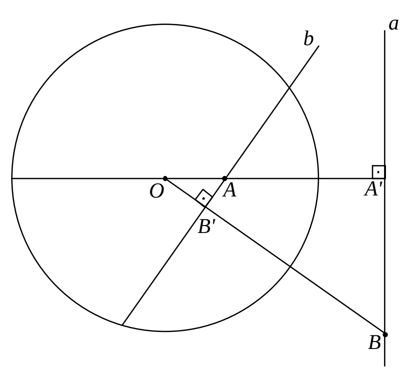
INTRODUÇÃO:

Para aqueles que nunca tiveram uma aula sobre esse assunto, depois de consultarem [1] ou até alguns problemas em [2], podem ficar meio em dúvida sobre como desenvolver essa poderosa ferramenta e apelarem para outros métodos. É muito interessante quando, depois de horas e mais horas fazendo centenas de cálculos intrincados de trigonometria e geometria analítica e gastando algumas dúzias de folhas de almaço, desistimos de um problema de geometria sem ter chegado a lugar algum. Motivado (na verdade irritado) por isso comecei a estudar Geometria Projetiva, e é com esse intuito que gostaria de expor dois problemas nos quais são exploradas técnicas de solução por polaridade, fornecendo bases para que o leitor possa aplicá-las em outras situações. Mas para começar é necessário retomar algumas definições de [1], que servem de alicerce para a solução dos dois problemas que nos interessam.

PÓLO E RETA POLAR

Dados uma circunferência S, de centro O e raio R, e um ponto A, distinto de O, definimos A' tal que $OA.OA' = R^2$, e esta transformação é chamada de inversão. A reta a que é perpendicular à OA', passando por A', é chamada de reta polar de A em relação a S, e o ponto A é chamado de pólo de a em relação a S.

Teorema 1: Dados uma circunferência S no plano e pontos A e B, sejam a e b suas respectivas polares em relação a S. Temos então que $A \in b \Rightarrow B \in a$.



Prova: Tome $B \in a$, e seja $B' \in OB$ tal que $AB' \perp OB$. Temos que $\Delta OAB' \approx \Delta OBA'$ pelo critério AA, e logo $OA/OB = OB'/OA' \Rightarrow OB.OB' = OA.OA' = R^2 \Leftrightarrow B'$ é o inverso de B em relação a S, e como $AB' \perp OB$ temos que $A \in b$.

Corolário 1: Para um ponto pertencente à própria circunferência, sua reta polar é tangente à circunferência por ele.

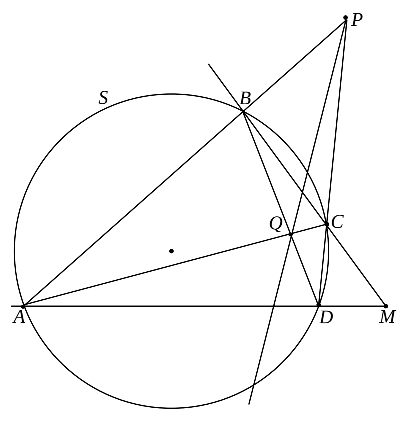
Corolário 2: Se A é exterior à circunferência, sejam B e C os pontos de contato das tangentes traçadas à circunferência por A. Então a reta polar de A passa por B e C.

Prova: Temos que A pertence às polares de B e C, e logo B e C devem pertencer à polar de A.
Bem, finalmente vamos aos problemas chineses:

(CHINA-1997) O quadrilátero $ABCD$ está inscrito num círculo S. Seja X o ponto de intersecção entre os lados AB e CD e W o ponto de intersecção entre os lados AD e BC. As tangentes traçadas por X intersectam S em Y e Z. Prove que W, Y e Z são colineares.

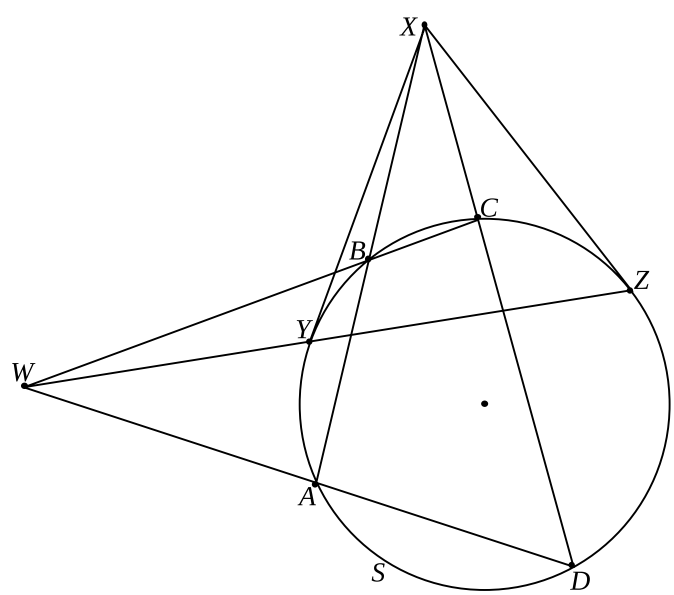
Resolução: Antes de mais nada vamos ter que enunciar e provar um lema, que também encontra-se em [1], mas que certamente no dia da prova você teria de demonstrar. É assim:

LEMA: Se por um ponto M exterior a um círculo S traçarmos secantes que intersectam-no nos pontos A, B, C e D (vide figura), e se tomarmos $\{P\} = AB \cap CD$ e $\{Q\} = AC \cap BD$, então a polar de M em relação a S será a reta PQ.



Há quem ache essa parte um pouco mais salgada, pois é justamente a parte mais difícil do assunto o qual vamos tratar. Tome as retas polares de A, B, C e D como a, b, c e d que, como vimos, são tangentes à S nos seus respectivos pólos. Defina $\{R\} = b \cap c$ e $\{T\} = a \cap d$. A reta polar de R será BC e a reta polar de T será AD, pelo Corolário 2, e pelo Teorema 1 teremos que a polar de M será a reta RT. Basta provar então que RT passa por P e Q, ou melhor, que R, P, Q e T são colineares. Considere o hexágono $ABB'CC'D$, no qual $B' \equiv B$ e $C' \equiv C$ (vamos usar aqui a estratégia proposta em [1]: fazer vértices de um hexágono coincidirem para obtermos novas relações). Pelo Teorema de Pascal, P, R e Q são colineares (os 3 pontos de encontro dos 3 pares de lados opostos do hexágono devem ser colineares). Analogamente no hexágono $AA'BCDD'$, com $A' \equiv A$ e $D' \equiv D$, teremos que P, Q e T são colineares. Segue que R, P, Q e T são colineares, como queríamos demonstrar.

Bem, fim de Lema. O problema agora fica fácil: suponha que, no dia da prova, você já conheça todas estas propriedades. Aí você as demonstra bem rápido na folha de respostas, e para dar o *Gran Finale*, bem... vejamos:

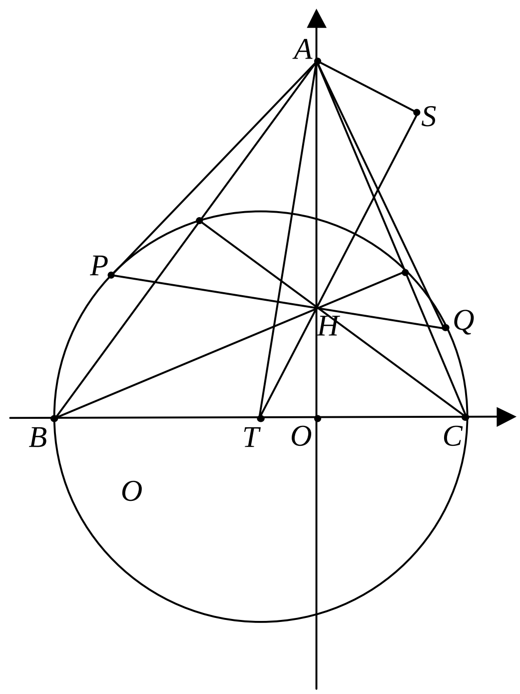


Note que podemos fazer uma certa analogia entre o problema e o Lema. O ponto W corresponde ao ponto M do Lema, e o ponto X ao ponto P. Temos então que a reta polar de W passa por $X \Rightarrow$ a reta polar de X passa por W. Mas a reta polar de X

passa por Y e Z, pelo Corolário 2 $\Rightarrow$ W, Y e Z são colineares, finalizando o problema.

(CHINA-1996) Seja H o ortocentro do triângulo acutângulo ABC. As tangentes traçadas por A ao círculo de diâmetro BC intersectam o círculo em P e Q. Prove que P, Q e H são colineares.

Resolução:



A idéia aqui é relativamente simples. Tome $S \in TH$ tal que $TS \perp AS$. Sabemos que $\Delta HTO \approx \Delta HSA$ (AA) $\Rightarrow$ $HS/AH = HO/TH \Rightarrow HS = (AH.HO)/HT \Rightarrow HS.HT = AH.HO$. Como visto na figura, vamos usar Geometria Analítica:

COORDENADAS:

$$\left\{\begin{array}{l} A\ (0, a) \\ B\ (-b, 0) \\ C\ (c, 0) \\ T((c-b)/2, 0) \rightarrow T \text{ é ponto médio de } BC. \end{array}\right\}$$

Temos que $BH \perp AC \Leftrightarrow m(BH).m(AC) = -1 \Leftrightarrow (h/b).(a/(-c)) = -1 \Leftrightarrow h = bc/a$.

MEDIDAS:

$$\left\{\begin{array}{l} r = (b + c)/2 \rightarrow \text{raio do círculo por } B \text{ e } C \\ AH = a - h = (a^2 - bc)/a \\ HO = h = bc/a \\ TH^2 = h^2 + ((c - b)/2)^2 = (bc/a)^2 + (b - c)^2/4. \end{array}\right\}$$

Assim vem que $TH.TS = TH.(TH + HS) = TH^2 + TH.HS = TH^2 + AH.HO = (bc/a)^2 + (b - c)^2/4 + bc/a.\ (a^2 - bc)/a = (bc/a)^2 + (b - c)^2/4 + bc - (bc/a)^2 =$
$((b - c)^2 + 4bc)/4 = ((b + c)/2)^2 = r^2 \Rightarrow$ de fato $S \equiv H'$, onde H' é o inverso de $H \Rightarrow A \in$ polar de $H \Rightarrow H \in$ polar de $A \Rightarrow H \in PQ$.

Referências:

[1] Luciano G. M. Castro, Introdução à Geometria Projetiva, Eureka! N.º 8, pp. 16 – 27.
[2] http://www.kalva.demon.co.uk/. Site muito bom com um verdadeiro arsenal de problemas.

RETA DE EULER E NÚMEROS COMPLEXOS

José Paulo Carneiro, Rio de Janeiro - RJ

Nível Intermediário

INTRODUÇÃO:

O fato de os números complexos terem nascido no contexto da resolução de equações algébricas fez com que muitas vezes sua utilidade em Geometria não seja suficientemente explorada (uma notável exceção a esta tendência pode ser encontrada em Eureka, Vol 6, no artigo *Aplicações dos Números Complexos à Geometria*, do Prof. Edmilson Motta). Aqui, vamos usar a álgebra dos números complexos para mostrar um belo resultado de Geometria, o fato de que, em qualquer triângulo, o circuncentro *K*, o baricentro *G* e o ortocentro *H* são colineares. A reta que contém estes três pontos é chamada *Reta de Euler*, já que foi Euler o primeiro a chamar a atenção para este fato. Mais que isto, vamos provar que, vetorialmente: $\overrightarrow{KH} = 3\overrightarrow{KG}$, o que, além de implicar que os três pontos estão alinhados, acarreta que a distância *KH* é o triplo da distância *KG* e que *G* e *H* estão na mesma semi-reta de origem *K* (ver Figura 1).

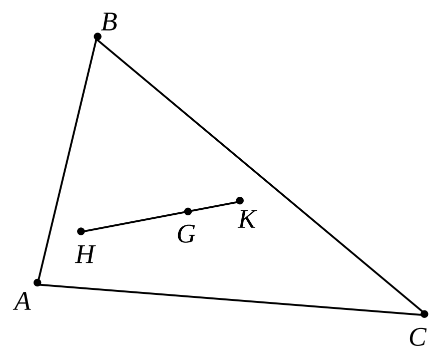


Figura 1

Para usar números complexos, de agora em diante estará fixado no plano um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais e as letras maiúsculas *A*, *B*,..., designarão pontos do plano ou números complexos, de modo que cada ponto $(x; y)$ esteja identificado com o número complexo mais usualmente representado por $x + yi$. Será fundamental a igualdade $\overrightarrow{AB} = B - A$, a qual traduz que a translação definida pelo vetor $\overrightarrow{AB}$ é a mesma que leva a origem no complexo $B - A$ (Figura 2).

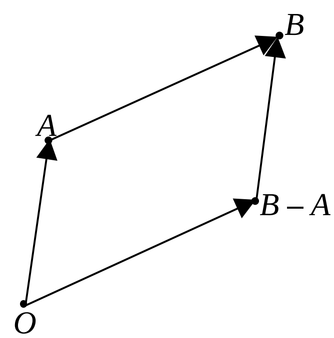


Figura 2

Deve ser observado que, mais usualmente, o símbolo *AB* designa o comprimento do segmento $\overline{AB}$. Porém aqui, como estamos identificando pontos do plano com números complexos, o símbolo *AB* não será usado para o comprimento do segmento $\overline{AB}$, e sim para o produto dos complexos *A* e *B*.

Baricentro

É bem sabido que $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM}$, onde *M* é o ponto médio de $\overline{BC}$ e *G* é o baricentro do triângulo *ABC*, isto é, o ponto de encontro das medianas do triângulo (Figura 3)

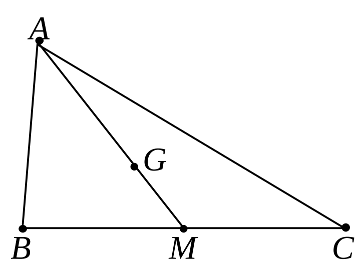


Figura 3

Logo: $G - A = 2(M - G)$, ou seja: $G = A + 2\left(\dfrac{B+C}{2} - G\right) = A + B + C - 2G$,

de onde se conclui que $G = \dfrac{A+B+C}{3}$.

Até aí, os complexos parecem não estar presentes. É que ainda não figura o produto de complexos, que é a sua mais forte característica. Para efeito de soma e de multiplicação por número real, os complexos funcionam apenas como vetores do plano.

Um caso particular

Comecemos com um caso particular, a saber: vamos supor que os três vértices do triângulo *ABC* estejam na circunferência unitária do plano, isto é, a circunferência de centro na origem e raio 1, que é o conjunto dos complexos de módulo 1. Então, o circuncentro de *ABC* coincide com a origem de coordenadas e $|A| = |B| = |C| = 1$. Mas para qualquer complexo *z* de módulo 1, temos: $z\overline{z} = |z|^2 = 1$ (onde $\overline{z}$ é o conjugado de *z*). Conseqüentemente, $\overline{A} = 1/A$, $\overline{B} = 1/B$, $\overline{C} = 1/C$.

Para usar agora a condição $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ (onde *H* é o ortocentro de *ABC*), vamos observar que o complexo *v* é perpendicular ao complexo *w* (considerados como vetores não nulos) se e só se forem colineares com a origem os complexos v e iw, ou seja, se e só se v/iw for real (ver Figura 4).

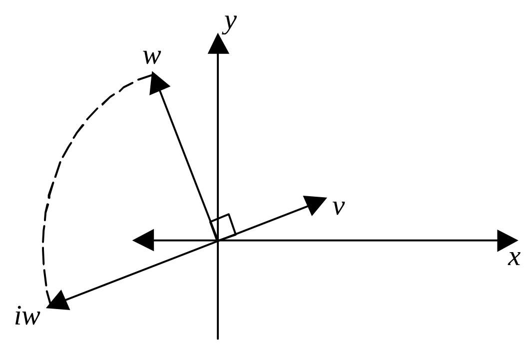


Figura 4

Por outro lado, um complexo é real se e só se for igual ao seu conjugado e, portanto: $v \perp w \iff \dfrac{v}{iw} = \dfrac{\overline{v}}{\overline{iw}} = \dfrac{\overline{v}}{-i\overline{w}} \iff v\overline{w} + \overline{v}w = 0$ (o leitor pode verificar, colocando isto em coordenadas, que esta condição equivale à nulidade do produto escalar dos dois vetores).

Temos, pois:

$$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \quad \Leftrightarrow \quad (H-A)(\bar{C}-\bar{B})+(\bar{H}-\bar{A})(C-B)=0$$
$$\Leftrightarrow \quad (H-A)\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{B}\right)+\left(\bar{H}-\frac{1}{A}\right)(C-B)=0$$
$$\Leftrightarrow \quad (H-A)\frac{(B-C)}{BC}+\left(\bar{H}-\frac{1}{A}\right)(C-B)=0$$
$$\Leftrightarrow \quad A(H-A)+BC\left(1-A\bar{H}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \quad AH=A^2+ABC\bar{H}-BC$$

Atenção! lembre que *AH* não é o comprimento do segmento do segmento $\overline{AH}$, e sim o produto dos complexos *A* e *H*! O mesmo vale para *BC*, etc.
Analogamente:

$$\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{CA} \quad \Leftrightarrow \quad BH=B^2+ABC\bar{H}-CA$$

Subtraindo:

$$(A-B)H=A^2-B^2+C(A-B)$$
$$(A-B)H=(A-B)(A+B)+C(A-B)$$
$$H=A+B+C$$

Este resultado significa que, dados três complexos de módulo 1, sua soma é o ortocentro do triângulo por eles formado.

Primeira generalização

Suponha agora que os três vértices do triângulo *ABC* estejam em uma circunferência Ω, de centro na origem e raio *r* qualquer, ou seja, o circuncentro de *ABC* coincide com a origem de coordenadas e $|A|=|B|=|C|=r>0$. Neste caso, como ilustra a Figura 5, os complexos (ou pontos) $A'=\frac{A}{r}$, $B'=\frac{B}{r}$ e $C'=\frac{C}{r}$ estarão na circunferência Γ, de centro na origem e raio 1. De fato: $\left|\frac{A}{r}\right|=\frac{|A|}{r}=1$, etc.

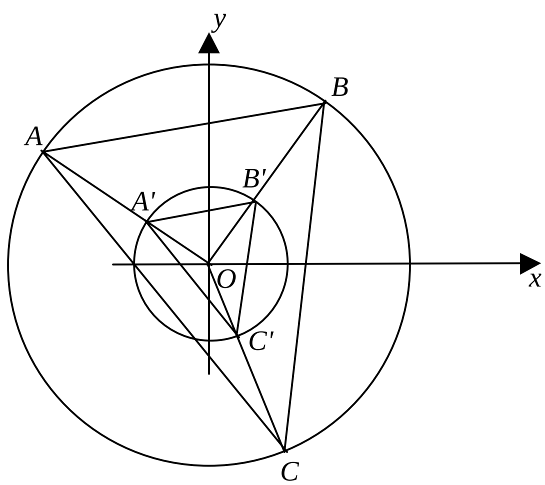


Figura 5

Na verdade, a circunferência Γ e o triângulo $A'B'C'$ são os transformados da circunferência Ω e do triângulo *ABC*, pela homotetia de centro *O* e razão $1/r$, a qual preserva ângulos, de modo que o ortocentro H' do triângulo $A'B'C'$ é a imagem do ortocentro *H* do triângulo *ABC*, isto é: $H' = \dfrac{H}{r}$. Mas então, pelo resultado do caso particular estudado, temos:

$H' = \dfrac{H}{r} = A' + B' + C' = \dfrac{A}{r} + \dfrac{B}{r} + \dfrac{C}{r}$, donde se conclui que: $H = A + B + C$.

Portanto: dados três complexos de mesmo módulo, sua soma é o ortocentro do triângulo por eles formado (o que, em si mesmo, é um resultado curioso).

Caso geral

Passemos agora ao caso geral: dado um triângulo *ABC* qualquer, sejam *K* o seu circuncentro e *r* o raio do seu círculo circunscrito. Transladando os pontos *A*, *B* e *C* pelo vetor $\overrightarrow{KO}$ (onde *O* é a origem do plano complexo), obtemos os complexos (ou pontos) $A - K$, $B - K$ e $C - K$, que pertencem a uma circunferência Ω de centro na origem e raio *r*, como ilustra a Figura 6.

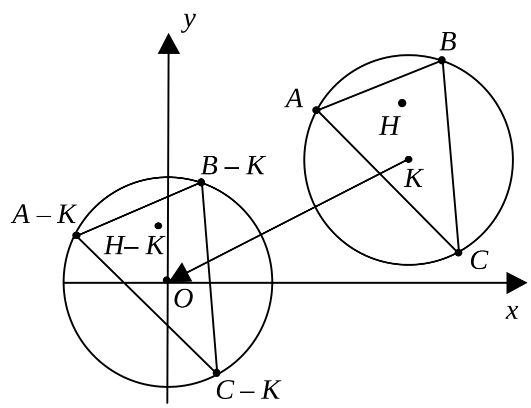


Figura 6

Sendo a translação uma isometria (que preserva distâncias e ângulos), o ponto $H-K$ será o ortocentro do triângulo de vértices $A-K$, $B-K$ e $C-K$. Mas então, pelo resultado anterior, temos:
$H-K=A-K+B-K+C-K=A+B+C-3K$. Como $A+B+C=3G$, onde G é o baricentro de *ABC*, temos: $H-K=3G-3K=3(G-K)$, ou $\overrightarrow{KH}=3\overrightarrow{KG}$, como se queria provar.

COMO É QUE FAZ?

PROBLEMA 4
PROPOSTO POR SAMUEL BARBOSA FEITOSA (FORTALEZA - CE)

a) Prove que, para todo inteiro positivo *m*, $\sum_{d|m}\mu(d)A^{m/d}$ é divisível por *m*, para todo inteiro *A*.

b) Defina a seqüência A_n por $\sum_{d|n}A_d = 2^n$. Prove que A_n é divisível por *n*, para todo inteiro positivo *n*.

SOLUÇÃO:

a) Podemos supor *A* > 0, pois a afirmação só depende da classe de congruência de *A* módulo *m*.

Seja $g(m)=\sum_{d|n}\mu(d)A^{m/d}$.

Temos $\sum_{k|n}g(k)=\sum_{k|n}\sum_{d|k}\mu(d)A^{k/d}=\sum_{r|n}A^r\cdot\sum_{d|n/r}\mu(d)=A^n$.

Dada uma seqüência $(x_n)_{n\geq 1}$.

Definimos seu *período* como o menor inteiro positivo *t* tal que $x_{n+t}=x_n, \forall n\geq 1$ (se existir). Veremos que *g*(*n*) é o número de seqüências de números inteiros $(x_k)_{k\geq 1}$ de período *n* tais que $1\leq x_k\leq A, \forall k\geq 1$. De fato, o número de seqüências $(x_k)_{k\geq 1}$ com $x_{k+n}=x_k, \forall k\geq 1$ e $x_k\in\{1,2,...,A\}, \forall k\geq 1$

é A^n (uma tal seqüência é determinada pela escolha de $x_1, x_2, ..., x_n\in\{1,2,...,A\}$). Essas seqüências são exatamente as seqüências cujo período é um divisor *d* de *n*. Assim, se *f*(*d*) é o número de tais seqüências de período *d*, $\sum_{d|n}f(d)=A^n, \forall n\geq 1$, donde $f(k)=g(k), \forall k\geq 1$. Finalmente, o número *g*(*n*) de tais seqüências com período *n* é múltiplo de *n*, pois, se declararmos duas seqüências $(x_k)_{k\geq 1}$ e $(y_k)_{k\geq 1}$ de período *n* equivalentes se existe $t\in\mathbb{N}$ com $x_{k+t}=x_k, \forall k\geq 1$, as classes de equivalência de seqüências de período *n* têm exatamente *n* elementos: a classe de equivalência de $(x_k)_{k\geq 1}$ é $\{(x_{k+t})_{k\geq 1}, 0\leq t\leq n-1\}$.

b) Temos, para *A* = 2, $A_n=g(n)$, na notação do item a), donde $n\,|\,A_n, \forall n\geq 1$, pelo item a).

PROBLEMA 5

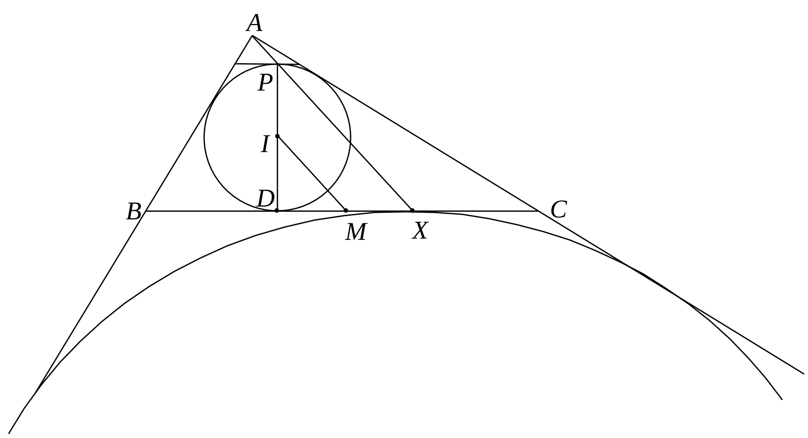
PROPOSTO POR WILSON CARLOS DA SILVA RAMOS (BELÉM - PA) **(de uma olimpíada chinesa)**

Seja *ABC* um triângulo acutângulo de incentro *I*, ortocentro *H* e tal que $AB \neq AC$. B_1 e C_1 são os pontos médios de *AC* e *AB*. B_2 é o ponto de interseção de IB_1 com *AB*. C_2 é definido analogamente. Sejam também *k* a interseção de B_2C_2 com *BC* e *O* o circuncentro de *BHC*. Se a área dos triângulos BKB_2 e CKC_2 é igual, mostre que *A*, *I* e *O* são colineares.

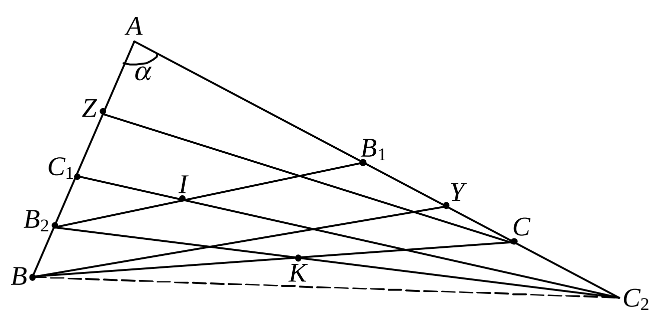
SOLUÇÃO DE YURI GOMES LIMA (FORTALEZA - CE):

Lema: Seja *ABC* um triângulo de incentro *I*. Se *M* é o ponto médio de *BC* e *X* é o ponto de tangência ao ex-incírculo relativo a *BC* com esse lado, então $MI \,//\, AX$.

Prova: Seja *D* como na figura e *P* a outra interseção de *DI* com o incírculo. A homotetia de centro *A* que leva o incírculo no ex-incírculo leva *P* em *X*, e portanto *A*, *P*, *X* são colineares. Sabemos que $BD = XC = p - b$.



Daí, *M* é médio de *DX* e assim *MI* é base média do triângulo $PDX \Rightarrow MI \,//\, AX$ ❑



Note que

$$[BKB_2]=[CKC_2]\Rightarrow[ABC]=[AB_2C_2]\Rightarrow\frac{AB\cdot ACsen\alpha}{2}=\frac{AB_2\cdot AC_2\cdot sen\alpha}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB\cdot AC=AB_2\cdot AC_2\Rightarrow\frac{AB}{AB_2}=\frac{AC_2}{AC}\Rightarrow BC_2\,//\,B_2C. \qquad (1)$$

Sejam Y, Z os pontos de tangência dos ex-incírculos relativos a AC e AB com esses lados, respectivamente. Então, pelo lema temos $B_1I\,//\,BY$ (2) e $C_1I\,//\,CZ$ (3).
Daí, as relações (2), (1) e (3) implicam, nessa ordem, em:

$$\frac{AY}{AB_1}=\frac{AB}{AB_2}=\frac{AC_2}{AC}=\frac{AC_1}{AZ}\Rightarrow$$

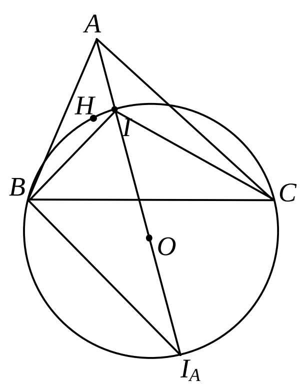
$$\Rightarrow\frac{AY}{AB_1}=\frac{AC_1}{AZ}\Rightarrow AY\cdot AZ=AB_1\cdot AC_1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(p-c)(p-b)=\frac{b}{2}\cdot\frac{c}{2}\Rightarrow(a+b-c)(a-b+c)=bc\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2-ab+ac+ab-b^2+bc-ac+bc-c^2=bc\Rightarrow a^2=b^2+c^2-bc\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cos\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=60^\circ.$$

Isso garante que $B\widehat{H}C=B\hat{I}C=120^\circ\Rightarrow B,H,I,C$ são concíclicos.



Para concluir, o centro I_A do ex-incírculo relativo a BC está em AI e satisfaz $I\hat{B}I_A=I\widehat{C}I_A=90^\circ\Rightarrow I\,I_A$ é diâmetro do circuncírculo de BHC, de modo que A, I e O são colineares.

SOLUÇÕES DE PROBLEMAS PROPOSTOS

Publicamos aqui algumas das respostas enviadas por nossos leitores.

83) Seja $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,...\}$.
Determine quantas funções $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ satisfazem $f(2003)=2003, f(n)\le 2003$ para todo $n\le 2003$ e $f(m+f(n))=f(f(m))+f(n)$, para todo $m, n\in\mathbb{N}$.

SOLUÇÃO DE ZOROASTRO AZAMBUJA NETO (RIO DE JANEIRO – RJ)

Fazendo *m* = *n* = 0, obtemos $f(f(0))=f(f(0))+f(0)$, donde $f(0)=0$, e logo $f(f(0))=f(0)=0$. Assim, fazendo *m* = 0, obtemos $f(f(n))=f(n)$ para todo $n\in\mathbb{N}$, donde $f(y)=y, \forall y\in \operatorname{Im}(f)$. Seja $t=\min\{f(n); n\in\mathbb{N}, f(n)>0\}$. Note que $t\le 2003$.
Temos $t=f(n_0)$ para um certo $n_0\in\mathbb{N}$, donde $f(t)=f(f(n_0))=f(n_0)=t$. Temos, por indução, $f(kt)=kt, \forall k\in\mathbb{N}$.
De fato,
$f((k+1)t)=f(kt+t)=f(kt+f(t))=f(f(kt))+f(t)=f(kt)+t=kt+t=(k+1)t.$
Além disso, para todo $m\in\mathbb{N}$ e $k\in\mathbb{N}$,
$f(m+kt)=f(m+f(kt))=f(f(m))+f(kt)=f(m)+kt.$
Afirmamos que $\operatorname{Im}(f)=\{f(n), n\in\mathbb{N}\}=\{kt, k\in\mathbb{N}\}$. De fato, já vimos que $kt=f(kt)\in\operatorname{Im}(f), \forall k\in\mathbb{N}$, e, se $kt\le f(n)<(k+1)t$, temos $f(f(n))=f(n)=kt+(f(n)-kt)$, donde $f(n)=f((f(n)-kt)+kt)=f((f(n)-kt)+f(kt))=f(f(f(n)-kt))+f(kt)=$ $f(f(f(n)-kt))+kt$, donde $f(f(f(n)-kt))=f(n)-kt$, e logo $f(n)-kt\in\operatorname{Im}(f)$, mas $0\le f(n)-kt<t$, donde $f(n)-kt=0$, para não contradizermos a definição de *t*.
No nosso caso, como $f(2003)=2003$, temos $t\,|\,2003$, donde, como 2003 é primo, *t* = 1 ou *t* = 2003. Se *t* = 1, $f(n)=n, \forall n\in\mathbb{N}$, o que claramente satisfaz as condições do enunciado. Se *t* = 2003, $2003\,|\,f(n), \forall n\in\mathbb{N}$. Se $1\le n\le 2002$, devemos ter $f(n)\le 2003$, donde $f(n)\in\{0, 2003\}$, e podemos escolher *f*(*n*) arbitrariamente em {0, 2003} para $1\le n\le 2002$ (para o que temos, portanto, 2^{2002} escolhas) estendendo *f* a $\mathbb{N}$ de modo que $f(n+k\cdot 2003)=f(n)+k\cdot 2003, \forall n<2003, k\in\mathbb{N}$ (lembremos que *f*(0) = 0). De fato, para quaisquer $m,n\in\mathbb{N}$, temos $f(n)=2003k$, para algum $k\in\mathbb{N}$, e, escrevendo
m = *r* + 2003 *s*, com $0\le r\le 2002, s\in\mathbb{N}$, temos

$$f(m+f(n))=f(r+2003(s+k))=f(r)+2003(s+k)=$$
$$=(f(r)+2003s)+2003k=f(m)+f(n)=f(f(m))+f(n).$$

Assim, temos $1+2^{2002}$ funções *f* que satisfazem as condições do enunciado.

84) Prove que se $A\subset\mathbb{N}^*=\{1,2,3,\ldots\}$ é um conjunto não-vazio tal que $n\in A\Rightarrow 4n\in A$ e $\lfloor\sqrt{n}\rfloor\in A$ então $A=\mathbb{N}^*$.

Obs: $\lfloor x\rfloor$ é o único inteiro tal que $x-1<\lfloor x\rfloor\le x$.

SOLUÇÃO DE RODRIGO VILLARD MILET (RIO DE JANEIRO – RJ)

(i) $n\in A\Rightarrow 4n\in A$

(ii) $n\in A\Rightarrow\lfloor\sqrt{n}\rfloor\in A$

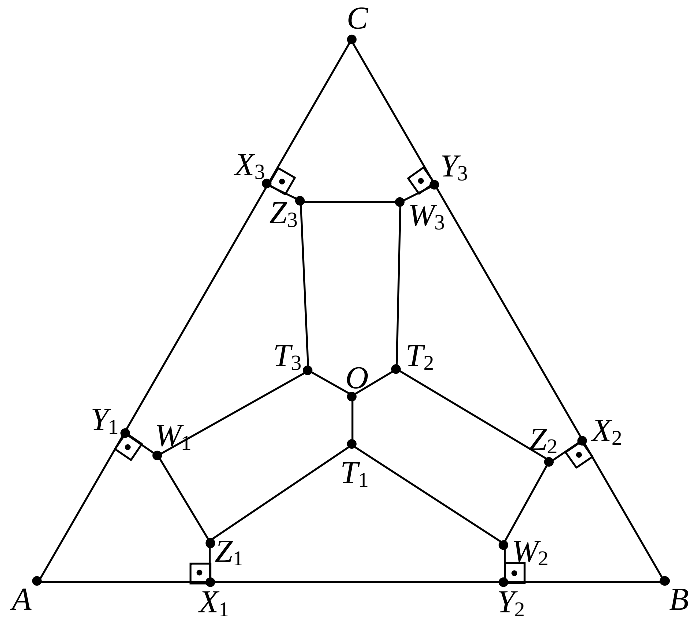
Seja *u* um elemento de *A* (existe, pois *A* é não vazio).Veja que $1\in A$, pois, se $u>1$, pela propriedade (ii), temos um elemento menor que *u* em *A*, logo, repetindo esse argumento um número finito de vezes, temos que $1\in A$. Isso mostra que todas as potências de 4 estão em *A* (por (i)).

Agora vou fazer o seguinte: dado *m* natural, mostrarei que existe alguma potência de 4 no intervalo $\left[m^{2^k},(m+1)^{2^k}\right[$, para algum *k* natural (daí, como a potência de 4 está em *A*, usando a propriedade (ii) *k* vezes, temos que *m* está em *A*; note que $\left\lfloor\sqrt{\lfloor x\rfloor}\right\rfloor=\lfloor\sqrt{x}\rfloor,\forall x\ge 1$). Suponha então que para todo *k* tenhamos um *t* tal que $4^t<m^{2^k}<(m+1)^{2^k}<4^{t+1}$. Daí, segue que $(m+1)^{2^k}<4^{t+1}=4.4^t<4m^{2^k}$, logo $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{2^k}<4$, para todo *k* natural, o que é uma contradição, pois $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{2^k}\ge 1+\frac{2^k}{m}>4$, para $k=m+2$, pois $2^k=2^{m+2}=4\cdot 2^m>4m$. Logo, $m\in A$, para todo *m* natural.

85) Mostre que todo triângulo pode ser dividido em 9 pentágonos convexos de áreas iguais.

SOLUÇÃO DE JOSÉ DE ALMEIDA PANTERA (RIO DE JANEIRO – RJ)

Em primeiro lugar, aplicando uma transformação afim (que preserva relações entre áreas e leva pentágonos convexos em pentágonos convexos) ao triângulo, podemos supor, sem perda de generalidade, que o triângulo é equilátero de lado 1 (digamos com vértices (0, 0), (1, 0) e $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$). Fazemos então a seguinte construção, simétrica em relação à rotação de 120° em torno do centro O do triângulo (e também simétrica em relação às bissetrizes internas do triângulo):



Temos $\overline{AX_1} = \overline{AY_1} = a = \frac{1}{3} - \varepsilon$, (onde ε > 0 é pequeno)

$Z_1\hat{X}_1A = W_1\hat{Y}_1A = 90°$, $\overline{X_1Z_1} = \overline{Y_1W_1} = b$ (assim, por exemplo, $X_1 = (a, 0)$ e $Z_1 = (a, b)$), onde b é escolhido de modo que a área $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \left(a - \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)\frac{b}{2}$ do pentágono $AX_1Z_1W_1Y_1$ seja igual a $\frac{\sqrt{3}}{36}$, que é $\frac{1}{9}$ da área do triângulo, ou seja, temos $b = \frac{1-3\varepsilon}{3\sqrt{3}} - \sqrt{\left(\frac{1}{27} - \frac{8\varepsilon}{9} + \varepsilon^2\right)}$. Note que, se $\varepsilon > 0$ é pequeno então $b > 0$ é pequeno.

Escolhemos $T_1 = \left(\frac{a}{2}, b + h\right)$ de modo que a área $(1-2a)\left(b + \frac{h}{2}\right)$do pentágono $X_1Y_2W_2T_1Z_1$ seja também igual a $\frac{\sqrt{3}}{36}$. Ou seja, temos

$h=\dfrac{\sqrt{3}}{18(1-2a)}-2b=\dfrac{\sqrt{3}}{18\left(\dfrac{1}{3}+2\varepsilon\right)}-2b<\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ (e h é próximo a $\dfrac{\sqrt{3}}{36}$ se $\varepsilon>0$ é pequeno).

Como os pentágonos $AX_1Z_1W_1Y_1$, $BX_2Z_2W_2Y_2$ e $CX_3Z_3W_3Y_3$ são congruentes, $X_1Y_2W_2T_1Z_1$, $X_2Y_3W_3T_2Z_2$ e $X_3Y_1W_1T_3Z_3$ são congruentes, $W_1Z_1T_1OT_3$, $W_2Z_2T_2OT_1$ e $W_3Z_3T_3OT_2$ são congruentes e os 6 primeiros têm $\dfrac{1}{9}$ da área do triângulo, todos têm $\dfrac{1}{9}$ da área do triângulo.

86) Encontre todas as triplas de inteiros positivos (a, m, n) tais que a^m+1 divide $(a+1)^n$.

SOLUÇÃO DE ANDERSON TORRES (SÃO PAULO – SP)

É fácil ver que (1; m; n), (a; 1; n) são soluções.

Vamos então supor $m\geq 2$, $a\geq 2$.

Lema 1: m é ímpar.

Demonstração: vamos dividir em casos:

Caso 1: 4 divide (a^m+1).

Assim, $a^m\equiv -1 \pmod 4$. É um fato muito conhecido que (– 1) não é resíduo quadrático módulo 4, pois todo quadrado perfeito ímpar é congruente a 1 módulo 4.

Logo a^m não é quadrado perfeito, e portanto m não pode ser par.

Caso 2: Existe um primo $\alpha\neq 2$ tal que $\alpha\,|\,(a^m+1)$.

Então $\alpha\,|\,(a^m+1)\,|\,(a+1)^n$, e, como α é primo, $\alpha\,|\,a+1$.

$a\equiv -1 \pmod{\alpha} \Rightarrow a^m+1\equiv(-1)^m+1 \pmod{\alpha}$, e já que $\alpha\,|\,(a^m+1)$, temos $(-1)^m\equiv(-1) \pmod{\alpha} \Rightarrow m$ é ímpar.

Caso 3: O complementar dos casos 1 e 2.

Assim sendo, $a^m+1=2\Rightarrow a^m=1$. Mas $a^m\geq 2^2=4>1$, absurdo e fim do lema.

Seja $p \mid m$ um primo (ímpar, como já sabemos).

Então $(a+1) \mid (a^p+1) \mid (a^m+1) \mid (a+1)^n \Rightarrow \dfrac{a^p+1}{a+1} \mid (a+1)^{n-1}.$

Seja $f(x)=\dfrac{x^p+1}{x+1}=x^{p-1}-x^{p-2}+x^{p-3}-\ldots-x+1.$

Temos $f(-1)=p,$ logo $f(x)=(x+1)g(x)+p$ para algum polinômio $g \in \mathbb{Z}[x].$ Em particular, $f(a)=(a+1)g(a)+p.$

Seja q um fator primo de $f(a)$. Então $q \mid f(a) \mid (a+1)^{n-1} \Rightarrow q \mid (a+1).$

Então $0 \equiv f(a) \equiv p (\bmod q).$

Como p e q são primos, $p = q$. Logo $p \mid (a+1)$ e $f(a)$ é potência de p. Note que $f(a)>1.$ Vamos fazer mais.

Lema 2: $f(a) = p$.
Demonstração: Em dois casos:

Caso 1: p^2 divide $a + 1$.

Então $f(a)=(a+1)g(a)+p \equiv p \not\equiv 0 (\bmod p^2) \Rightarrow p^2$ não divide $f(a)$

Caso 2: p^2 não divide $(a + 1)$.

Então $a+1=hp,$ onde p não divide h. Assim $a=hp-1,$ $\dfrac{a^p+1}{a+1}=\dfrac{(hp-1)^p+1}{hp}$

$$(hp-1)^p=\binom{p}{0}(hp)^p(-1)^p+\binom{p}{1}hp(-1)^{p-1}+\binom{p}{2}h^2p^2(-1)^{p-2}+\ldots+\binom{p}{p}h^pp^p,$$

$$\frac{(hp-1)^p+1}{hp}=\frac{p\cdot hp-\binom{p}{2}h^2p^2+\ldots+h^pp^p}{hp}=p-\binom{p}{2}hp+\binom{p}{3}h^2p^2+\ldots+h^{p-2}p^{p-1},$$

e assim,

$$\frac{(hp-1)^p+1}{hp}\equiv p-\binom{p}{2}hp\equiv p-\left(\frac{p-1}{2}\right)\cdot p\cdot hp\equiv p\not\equiv 0 \ (\bmod p^2).$$

Em todo caso, p^2 não divide $f(a)$ mas $p \mid f(a)$. Logo, como $f(a)$ é potência de *p*, $f(a) = p$.

Assim, $\dfrac{a^p+1}{a+1} = p$.

Lema 3: $p = 3$

Demonstração: vamos por absurdo. Suponha $p \geq 5$.

Então $\dfrac{a^p+1}{a+1}$ é crescente. De fato,

$$\frac{a^p+1}{a+1} = 1 + \frac{a^p - a}{a+1} = 1 + a(a-1)\frac{a^{p-1}-1}{a^2-1} \Leftrightarrow$$

$\dfrac{a^p+1}{a+1} = 1 + a(a-1)(a^{p-3} + a^{p-5} + \ldots + 1),$ uma composição de funções crescentes.

Assim, $p = \dfrac{a^p+1}{a+1} \geq \dfrac{2^p+1}{3}$ (pois $a \geq 2$) $\Rightarrow 3p \geq 2^p + 1 > 2^p$

Mas é fácil ver que $p \geq 5 \Rightarrow 3p < 2^p$ (é uma indução simples).

E isto é absurdo! Logo $p < 5$ e *p* é primo ímpar, logo $p = 3$.

Assim, $\dfrac{a^3+1}{a+1} = 3 \Leftrightarrow a^3 - 3a - 2 = 0.$ É fácil ver que (– 1) é raiz disto.

E $\dfrac{a^3 - 3a - 2}{a+1} = a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow a \in \{2, -1\}.$

Como $a > 0$, temos $a = 2$.

Se $m = pk$, e $2^m + 1$ divide 3^n, $(2^k)^p + 1$ divide $(2^k + 1)^n$, pois *k* é ímpar, donde $2^k + 1$ é múltiplo de 3. Assim, $(2^k; p; n)$ é solução, e logo $2^k = 2$, donde $k = 1$ e $m = p = 3$. Assim, todas as outras soluções são da forma (2; 3; *n*), com $n \geq 2$.

87) Seja $a(1) = 1$ e, para cada inteiro $n \geq 2$, $a(n)$ igual ao menor inteiro positivo que não pertence a $\{a(j), j < n\}$ tal que $\sum_{j=1}^{n} a(j)$ seja múltiplo de n. Prove que $a(a(n)) = n$ para todo inteiro positivo n.

SOLUÇÃO DE SAMUEL BARBOSA FEITOSA (FORTALEZA – CE)

Sejam $F_2 = F_1 = 1$ e, para $n \geq 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ os números de Fibonacci: Pelo Teorema de Zeckendorff sabemos que todo número natural pode ser escrito de maneira única como soma de números de Fibonacci com índices maiores que 1 e não consecutivos. (isso pode ser provado por indução: temos $1 = F_2$ e, se F_k é o maior número de Fibonacci que é menor ou igual a n, devemos ter $n - F_k < F_{k-1}$ pois, caso contrário, $n - F_k \geq F_{k-1}$, e logo $n \geq F_k + F_{k-1} = F_{k+1}$, absurdo; escrevemos então $n = F_k + (n - F_k)$ e aplicamos e resultado para $n - F_k$).

Vamos criar uma pequena variação desta representação; chamemos esta nova representação de representação F.

Suponha que $m = F_{i_1} + F_{i_2} + \ldots + F_{i_n}$ (na representação descrita no Teorema anterior)

Com $i_1 > i_2 > \ldots > i_n > 1$. Se $i_n \neq 2$ a representação de m na representação – F será a mesma. Se $i_n = 2 \Rightarrow m$ será representando na F como:

$F_{i_1} + F_{i_2} + \ldots + F_{i_{n-1}} + F_2$ se i_{n-1} é ímpar.

$F_{i_1} + F_{i_2} + \ldots + F_{i_{n-1}} + F_1$ se i_{n-1} é par. (1 será F_2).

Veja que todo número pode ser escrito na "F" de maneira única.

Seja $S_k = \sum_{i=1}^{n} A_i$. Afirmamos que:

Se $K = F_{i_1} + F_{i_2} + \ldots + F_{i_n}$ com $i_1 > i_2 > \ldots > i_n$ é a representação de K na F.

A) i_n par $\Rightarrow A_k = F_{i_1-1} + F_{i_2-1} + \ldots + F_{i_n-1} \in S_k = (F_{i_1} + F_{i_2} + \ldots + F_{i_n})(F_{i_1-1} + F_{i_2-1} + \ldots + F_{i_n-1})$

B) i_n ímpar $\Rightarrow A_k = F_{i_1-1} + F_{i_2-1} + \ldots + F_{i_n-1} \in S_k = F_{i_1+1} + F_{i_2+1} + \ldots + F_{i_n+1} \in S_k =$
$= (F_{i_1} + F_{i_2} + \ldots + F_{i_n})(F_{i_1-1} + F_{i_2-1} + \ldots + F_{i_n-1} + 1)$

Vamos provar a afirmação acima por indução:

Casos iniciais: $A_1 = 1,\ A_2 = 3,\ A_3 = 2,\quad S_1 = 1,\ S_2 = 4,\ S_3 = 6$ (verifica-se facilmente que eles satisfazem as condições.

Supondo a afirmação acima verdadeira todo $r \le k$. Provemos que ela também é verdadeira para $k + 1$. Suponhamos $i_n > 3$ (o caso em que $i_n = 1, 2, 3$ é totalmente análogo ao que faremos agora, a única diferença consiste na utilização das seguintes relações:
$F_1 + F_3 + \ldots + F_{2r+1} = F_{2r+2}$, $F_2 + F_4 + F_6 + \ldots + F_{2r} = F_{2r+1} - 1$)
Vamos dividir agora em dois casos:

i) i_n é par $\Rightarrow$ na "*F*" $k+1 = F_{i_1} + F_{i_2} + \ldots + F_{i_n} + F_1$. Sabemos que
$A_{k+1} + S_k \equiv 0 (\bmod\, k+1) = (\bmod\, F_{i_1} + F_{i_2} + \ldots + F_{i_n} + F_1)$. Mas
$S_k = (F_{i_1} + F_{i_2} + \ldots + F_{i_n})(F_{i_1-1} + F_{i_2-1} + \ldots + F_{i_n-1}) \equiv -(F_{i_1-1} + F_{i_2-1} + \ldots + F_{i_n-1})(\bmod\, k+1)$
$\Rightarrow A_{k+1} \equiv F_{i_1-1} + F_{i_2-1} + \ldots + F_{i_n-1} (\bmod\, k+1)$. Veja que o número $F_{i_1-1} + F_{i_2-1} + \ldots + F_{i_n-1} = A_k$ já está na seqüência. Logo $A_{k+1} \ge F_{i_1-1} + F_{i_2-1} + \ldots + F_{i_n-1} + (k+1) = F_{i_1+1} + F_{i_2+1} + \ldots + F_{i_n+1} + F_2$ (trocamos F_1 por F_2 para termos uma representação –*F*)
mas pela nossa hipótese de indução o número $F_{i_1+1} + F_{i_2+1} + \ldots + F_2$ só pode ter aparecido na seqüência oriundo do número $F_{i_1} + F_{i_2} + \ldots + F_1 = k+1 > k$ logo ele ainda não está na seqüência $\Rightarrow a(k+1) = F_{i_1+1} + F_{i_2+1} + \ldots + F_2$.
Vejamos que

$$S_{k+1} = a(k+1) + S_k = F_{i_1+1} + \ldots + F_2 + (F_{i_1} + F_{i_2} + \ldots + F_n)(F_{i_1-1} + \ldots + F_{i_n-1}) =$$
$$= F_{i_1} + F_{i_2} + \ldots + F_{i_n} + F_2 + F_{i_1-1} + F_{i_2-1} + \ldots + F_{i_n-1} + (F_{i_1} + F_{i_2} + \ldots + F_{i_n})(F_{i_1-1} + \ldots + F_{i_n-1}) =$$
$$= (F_{i_1-1} + F_{i_2-1} + \ldots + F_{i_n-1})(1 + F_{i_1} + F_{i_2} + \ldots + F_{i_n}) + (F_{i_1} + F_{i_2} + \ldots + F_{i_n} + F_2) =$$
$$= (1 + F_{i_1} + F_{i_2} + \ldots + F_{i_n})(F_{i_1-1} + F_{i_2-1} + \ldots + F_{i_n-1} + 1) =$$

$= (F_{i_1} + F_{i_2} + \ldots + F_{i_n} + F_1)(F_{i_1-1} + F_{i_2-1} + \ldots + F_{i_n-1} + 1)$ (que coincide exatamente com a nossa afirmação para $k + 1$).

ii) i_n é ímpar. Este caso é análogo ao anterior.

Com a afirmação verdadeira é fácil concluir que $a(a(n)) = n$. Na *F*, $a(a(n))$ é somar 1 a todos os índices e depois subtrair, ou o contrário, daí os índices ficam os mesmos.

88) Prove que se $r \in \mathbb{Q}$ e $\cos(r \cdot \pi) \in \mathbb{Q}$ então $\cos(r \cdot \pi) \in \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

SOLUÇÃO DE ANDRÉS SÁNCHEZ PÉREZ (LA HABANA, CUBA)

$r \in \mathbb{Q} \Rightarrow r = \frac{p}{q}$ onde $p, q \in \mathbb{Z}$, com $mdc(p;q) = 1$. $\cos(r \cdot \pi) \in Q \Rightarrow \cos(r \cdot \pi) = \frac{f}{g}$ donde $f, g \in Z$, também com $mdc(f;g) = 1$. Aplicando Moivre, se $z = cis\alpha = \cos\alpha + isen\alpha$ então

$$z^n = cis(n \cdot \alpha) = \cos(n \cdot \alpha) + isen(n \cdot \alpha) = (\cos\alpha + isen\alpha)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (\cos\alpha)^{n-j} (isen\alpha)^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^j \binom{n}{2j} (\cos\alpha)^{n-2j} (sen\alpha)^{2j} + i \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^j \binom{n}{2j+1} (\cos\alpha)^{n-2j-1} (sen\alpha)^{2j+1}$$

igualando parte real com parte real:

$$\cos(n \cdot \alpha) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^j \binom{n}{2j} (\cos\alpha)^{n-2j} (sen\alpha)^{2j} \Rightarrow$$

$$\cos(n \cdot \alpha) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^j \binom{n}{2j} (\cos\alpha)^{n-2j} \left[1 - (\cos\alpha)^2\right]^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^j \binom{n}{2j} (\cos\alpha)^{n-2j} \left[\sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} (\cos\alpha)^{2k}\right] = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^j \left[\sum_{k=j}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2k} \binom{k}{j}\right] (\cos\alpha)^{n-2j},$$

lembrando que $\binom{k}{k-j} = \binom{k}{j}$.

Logo temos que $\cos(n \cdot \alpha) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^j \left[\sum_{k=j}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2k} \binom{k}{j}\right] (\cos\alpha)^{n-2j}$. Agora, veja que sempre que $\cos\alpha \in \mathbb{Q}, \cos(n \cdot \alpha) \in \mathbb{Q},$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ (pois também $\cos\beta = \cos(-\beta)$). Se $a \in \mathbb{Z}$ e a é par então $\cos(a \cdot \pi + \alpha) = \cos\alpha$, e se $a \in \mathbb{Z}$ e a é ímpar então $\cos(a \cdot \pi + \alpha) = -\cos\alpha$..

Logo, se $\cos\alpha \in \mathbb{Q}, \cos(a\cdot\pi + b\cdot\alpha) \in \mathbb{Q}, \forall a,b \in \mathbb{Z}$.

Fazendo $\alpha = \frac{p}{q}\cdot\pi \Rightarrow \cos\left(a\cdot\pi + b\cdot\frac{p}{q}\cdot\pi\right) = \cos\left[\frac{\pi(aq+bp)}{q}\right] \in \mathbb{Q}$. Como $mdc(p;q)=1, \exists\, a,b$ inteiros tais que $aq+bp=1$. Por conseguinte, se $\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \in \mathbb{Q}$ com $q = 2^h\cdot(2c+1)$, onde $h\in\mathbb{N}, c\in\mathbb{Z}$, supondo sem perda de generalidade que $2c+1>0$ (pois $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$), temos $\cos\left(\frac{\pi}{2c+1}\right) \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists x,y\in\mathbb{Z}$ tais que $\cos\left(\frac{\pi}{2c+1}\right) = \frac{x}{y}$, com $mdc(x;y)=1$.

$$\cos\left((2c+1)\frac{\pi}{2c+1}\right) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{2c+1}{2}\right]}(-1)^j\left(\sum_{k=j}^{\left[\frac{2c+1}{2}\right]}\binom{2c+1}{2k}\binom{k}{j}\right)\left(\cos\frac{\pi}{2c+1}\right)^{2c+1-2j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{c}(-1)^j\left(\sum_{k=j}^{c}\binom{2c+1}{2k}\binom{k}{j}\right)\left(\cos\frac{\pi}{2c+1}\right)^{2c+1-2j} = \sum_{j=0}^{c}(-1)^j\left(\sum_{k=j}^{c}\binom{2c+1}{2k}\binom{k}{j}\right)\frac{x^{2c+1-2j}}{y^{2c+1-2j}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 = \sum_{j=0}^{c}(-1)^j\left(\sum_{k=j}^{c}\binom{2c+1}{2k}\binom{k}{j}\right)\frac{x^{2c+1-2j}}{y^{2c+1-2j}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -y^{2c+1} = \sum_{j=0}^{c}(-1)^j\left(\sum_{k=j}^{c}\binom{2c+1}{2k}\binom{k}{j}\right)x^{2c+1-2j}\cdot y^{2j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -y^{2c+1} = x\left(\sum_{j=0}^{c}(-1)^j\left(\sum_{k=j}^{c}\binom{2c+1}{2k}\binom{k}{j}\right)x^{2c-2j}\cdot y^{2j}\right)$$

$\Rightarrow x \mid -y^{2c+1}$, mas como $(x;y)=1 \Rightarrow x=-1, x=0$ ou $x=1$

Por outro lado

$$-y^{2c+1} = x\sum_{k=0}^{c}\binom{2c+1}{2k}\binom{k}{0} + y\sum_{j=1}^{c}(-1)^j\left[\sum_{k=j}^{c}\binom{2c+1}{2k}\binom{k}{j}\right]x^{2c+1-2j}\cdot y^{2j-1}$$

$$\Rightarrow y \left| \sum_{k=0}^{c}\binom{2c+1}{2k}\binom{k}{0} \right. \Rightarrow y \left| \sum_{k=0}^{c}\binom{2c+1}{2k} \right.$$

Do Binômio de Newton $(1+1)^{2c+1} = \sum_{k=0}^{2c+1} \binom{2c+1}{k} = \sum_{k=0}^{c} \binom{2c+1}{2k} + \sum_{k=0}^{c} \binom{2c+1}{2k+1}$ e $(1-1)^{2c+1} = \sum_{k=0}^{2c+1} (-1)^k \binom{2c+1}{k} = \sum_{k=0}^{c} \binom{2c+1}{2k} - \sum_{k=0}^{c} \binom{2c+1}{2k+1}$; somando e dividindo por 2, $\sum_{k=0}^{c} \binom{2c+1}{2k} = 2^{2c}$, logo $y = 2^t$ ou $y = -2^t$ com $t \in \mathbb{N}, t \le 2c$.

$\cos\left(\frac{\pi}{2c+1}\right) = sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2c+1}\right) = sen\left[\frac{2c-1}{2(2c+1)} \cdot \pi\right]$.

Se $e > 0$, $e \mid 2c-1$ e $e \mid 2(2c+1), e \mid 2(2c-1) - 2(2c+1) \Rightarrow e \mid -4$ porém como e é ímpar ($e \mid 2c-1$) então $e = 1 \Rightarrow mdc(2c-1; 4c+2) = 1$.

Volvendo a Moivre, e igualando parte imaginária a parte imaginária, com n ímpar:

$$
\begin{aligned}
sen(n \cdot \alpha) &= \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^j \binom{n}{2j+1} (\cos\alpha)^{n-2j-1} (sen\alpha)^{2j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^j \binom{n}{2j+1} (\cos\alpha)^{2\left(\frac{n-1}{2} - j\right)} (sen\alpha)^{2j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^j \binom{n}{2j+1} \left[1 - (sen\alpha)^2\right]^{\left(\frac{n-1}{2} - j\right)} (sen\alpha)^{2j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^j \binom{n}{2j+1} \left[\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2} - j} (-1)^k \binom{\frac{n-1}{2} - j}{k} (sen\alpha)^{2k}\right] (sen\alpha)^{2j+1}
\end{aligned}
$$

$$
= \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^j \left[\sum_{k=0}^{j} \binom{n}{2k+1} \binom{\frac{n-1}{2} - k}{j-k}\right] (sen\alpha)^{2j+1}
$$

Agora, veja que sempre que $sen\alpha \in \mathbb{Q}$ e n é ímpar, $sen(n \cdot \alpha) \in \mathbb{Q}$. Se $u \in \mathbb{Z}$ e u é par então $sen(u \cdot \pi + \alpha) = sen\alpha$, e se $u \in \mathbb{Z}$ e u é ímpar então

$sen(u\cdot\pi+\alpha)=-sen\alpha$, logo, se $sen\alpha\in\mathbb{Q}\Rightarrow sen(u\cdot\pi+v\cdot\alpha)\in\mathbb{Q},\forall u,v\in\mathbb{Z}$ com v ímpar. Fazendo $\alpha=\dfrac{2c-1}{2(2c+1)}\cdot\pi$,

$$sen\left(u\cdot\pi+v\cdot\frac{2c-1}{2(2c+1)}\cdot\pi\right)=sen\left(\frac{(2u(2c+1)+v(2c-1))}{2(2c+1)}\right)\in\mathbb{Q}.$$

Como $mdc(2c-1;4c+2)=1$, $\exists\, u,v$ inteiros tal que $u(4c+2)+v(2c-1)=1$. do Note que v é claramente ímpar. Por conseguinte, $sen\left(\dfrac{\pi}{2(2c+1)}\right)\in\mathbb{Q}$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2c+1}\right)=1-2\left(sen\left(\frac{\pi}{2(2c+1)}\right)\right)^2$$

Se $\cos\left(\dfrac{\pi}{2c+1}\right)=0$, $sen\left(\dfrac{\pi}{2(2c+1)}\right)=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ que é uma contradição.

Se $\cos\left(\dfrac{\pi}{2c+1}\right)=\dfrac{1}{2^t}$, $sen\left(\dfrac{\pi}{2(2c+1)}\right)=\pm\sqrt{\dfrac{2^t-1}{2^{t+1}}}$. Como ambos (numerador e denominador) são primos relativos (para $t\neq 0$), então são quadrados perfeitos, logo t é ímpar. Porém se $t\geq 3$, $4\mid 2^t\Rightarrow 2^t-1\equiv -1(\text{mod}\,4)$, o que é absurdo pois é um quadrado. Com $t=0$, $sen\left(\dfrac{\pi}{2(2c+1)}\right)=0$, mas $\dfrac{\pi}{2c+1}\neq 2k\pi$. Então, nesse caso, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2c+1}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Se $\cos\left(\dfrac{\pi}{2c+1}\right)=-\dfrac{1}{2^t}$, $sen\left(\dfrac{\pi}{2(2c+1)}\right)=\pm\sqrt{\dfrac{2^t+1}{2^{t+1}}}$. Como ambos (numerador e denominador) são primos relativos (para $t\neq 0$), então são quadrados perfeitos, e logo t é ímpar. Temos $2^t+1=d^2\Leftrightarrow 2^t=(d+1)(d-1)\Leftrightarrow d-1=2^\theta$, $d+1=2^\theta+2=2^\omega$. Dividindo por 2 concluímos que $\theta=1,\omega=2$ e $t=3\Rightarrow\cos\left(\dfrac{\pi}{2c+1}\right)=-\dfrac{1}{8}$, porém, se $c=0$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2c+1}\right)=-1$, e para $c\geq 1\Rightarrow$

$0<\dfrac{\pi}{2c+1}<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\cos\left(\dfrac{\pi}{2c+1}\right)>0$. Para $t=0$, $sen\left[\dfrac{\pi}{2(2c+1)}\right]=\pm1$. Então, nesse caso, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2c+1}\right)=-1$.

Finalmente $\cos\left(\dfrac{\pi}{2c+1}\right)\in\left\{\dfrac{1}{2},-1\right\}\Rightarrow 2c+1\in\{1,3\}\Rightarrow\dfrac{\pi}{q}\in\left\{\dfrac{\pi}{2^h},\dfrac{\pi}{3\cdot2^h}\right\}$ com $h\in\mathbb{N}$. Se para $\dfrac{\pi}{q}\in\left\{\dfrac{\pi}{2^h},h\geq2\right\}$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2^h}\cdot2^{h-2}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\in\mathbb{Q}$, o que é absurdo. Se $\dfrac{\pi}{q}\in\left\{\dfrac{\pi}{3\cdot2^h},h\geq1\right\}$,, $\cos\left(\dfrac{\pi}{3\cdot2^h}\cdot2^{h-1}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\in\mathbb{Q}$, o que também é absurdo. Assim, $\dfrac{\pi}{q}\in\left\{\pi,\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{3}\right\}$, $\dfrac{p}{q}\cdot\pi\in\left\{p\cdot\pi,p\cdot\dfrac{\pi}{2},p\cdot\dfrac{\pi}{3}\right\}$ e $\cos\left(\dfrac{p}{q}\cdot\pi\right)\in\left\{-1,-\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2},1\right\}$.

SEGUNDA SOLUÇÃO DE CARLOS GUSTAVO TAMM DE ARAUJO MOREIRA e JOSÉ PAULO CARNEIRO (RIO DE JANEIRO - RJ)

Note que se $\cos(x)=\dfrac{p}{q}$, então $z:=\dfrac{p}{q}+i\dfrac{\sqrt{q^2-p^2}}{q}$ é uma raiz da unidade (isto é, $z^n=1$ para algum inteiro positivo n) se e só se x é um múltiplo racional de π. Assim, se $x=r\pi$, com $r\in\mathbb{Q}$ então $z^n=1$ para um certo inteiro positivo n (e logo também temos $z^{2n}=1$). Vamos mostrar que $q\leq2$, o que resolve o problema. Para isso, vamos supor por absurdo que $q>2$ (e p é primo com q).

Temos então dois casos:

a) q é ímpar. Nesse caso, para cada $m\in\mathbb{N}$, seja $x_m=((p+i\sqrt{q^2-p^2})^m-(p-i\sqrt{q^2-p^2})^m)/2i\sqrt{q^2-p^2}$. Temos $x_0=0$, $x_1=1$ e, como $p+i\sqrt{q^2-p^2}$ e $p-i\sqrt{q^2-p^2}$ são raízes da equação $x^2-2px+q^2=0$, (x_m) satisfaz a recorrência $x_{m+2}=2px_{m+1}-q^2x_m,\forall m\in\mathbb{N}$.

Assim, $x_{m+2}\equiv2px_{m+1}(\text{mod}\,q)$, $\forall m\in\mathbb{N}$, donde, por indução, para todo $m\geq1$, $x_m\equiv(2p)^{m-1}$ (mod q). Em particular, como $mdc(2p,q)=1$, temos $mdc(x_m,q)=1$, para todo $m\geq1$, e logo $x_m\neq0$, $\forall m\geq1$, mas

$z^{2n}=1\Rightarrow\left(\frac{p+i\sqrt{q^2-p^2}}{q}\right)^{2n}=1\Rightarrow\left(p+i\sqrt{q^2-p^2}\right)^n=\left(p-i\sqrt{q^2-p^2}\right)^n$ (pois $\frac{p+i\sqrt{q^2-p^2}}{p-i\sqrt{q^2-p^2}}=\left(\frac{p+i\sqrt{p^2-q^2}}{q}\right)^2$), e logo $x_n=0$, absurdo.

b) q é par. Nesse caso, se

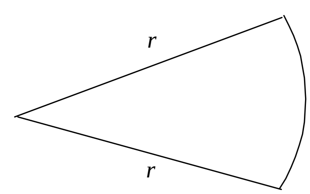
$y_m=\left(\left(\frac{p+i\sqrt{q^2-p^2}}{2}\right)^m-\left(\frac{p-i\sqrt{q^2-p^2}}{2}\right)^m\right)\Big/ i\sqrt{q^2-p^2}$, temos $y_0=0,\ y_1=1$

e, como $\frac{p+i\sqrt{q^2-p^2}}{2}$ e $\frac{p-i\sqrt{q^2-p^2}}{2}$ são raízes da equação $x^2-px+\frac{q^2}{4}=0$,

temos $y_{m+2}=py_{m+1}-\frac{q^2}{4}y_m,\forall m\in\mathbb{N}.$

Assim, $y_{m+2}\equiv py_{m+1}(\text{mod } q/2)$, donde, por indução, para todo $m\ge 1,\ y_m\equiv p^{m-1}(\text{mod}\, q/2)$, e logo $mdc\left(y_m,q/2\right)=1$, para todo $m\ge 1$, pois $mdc\left(p,q/2\right)=1$. Em particular, $y_m\ne 0,\forall m\ge 1$ (note que q > 2, logo $q/2\ge 2$, pois q é par). Por outro lado, $z^{2n}=1\Rightarrow\left(\frac{p+i\sqrt{q^2-p^2}}{q}\right)^{2n}=1$, donde $\left(\frac{p+i\sqrt{q^2-p^2}}{2}\right)^n=\left(\frac{p-i\sqrt{q^2-p^2}}{2}\right)^n$, como antes, e logo $y_n=0$, absurdo.

91) Um jardinero deve construir um canteiro com a forma de setor circular. Ele dispõe de 100 metros de fio para cercá-lo.
Figura:



Qual deve ser o valor do raio do círculo para que o canteiro tenha área máxima? Qual é a área máxima?

SOLUÇÃO DE GLAUBER MORENO BARBOSA (RIO DE JANEIRO - RJ)

Primeiramente nomeia-se os elementos do setor circular: (a) θ o ângulo do setor circular, (b) S, área máxima, (c) $2p$, o perímetro do setor circular,
(d) k, comprimento do arco do setor circular.

Comprimento da circunferência = $2\pi r$

Fazendo uma regra de três:

$$\frac{k}{2\pi r} = \frac{\theta}{360} \Rightarrow \theta = \frac{360k}{2\pi r} \Rightarrow \theta = \frac{180k}{\pi r} \qquad (1)$$

Conforme o enunciado, o jardineiro dispõe de 100 metros de fio para cercar o setor circular. Somando-se os segmentos referentes aos raios e ao arco do setor circular, tem-se:

$$2p = 2r + k = 100 \Rightarrow k = 100 - 2r \qquad (2)$$

Substituindo-se a relação (1) em (2) tem-se:

$$\theta = \frac{180k}{\pi r} \Rightarrow \theta = \frac{180\,(100-2r)}{\pi r} \qquad (3)$$

Com (3) determina-se a área do setor circular com uma relação entre a área do setor circular e a área da circunferência:

$$\frac{S}{\pi r^2} = \frac{\theta}{360} \Rightarrow S = \frac{\theta \pi r^2}{360} \qquad (4)$$

Substituindo-se o θ em (3) na relação (4), tem-se uma nova relação para a área do setor circular

$$S = \frac{\theta\pi r^2}{360} = \frac{\frac{180\,(100-2r)}{\pi r}\pi r^2}{360} = \frac{180\,(100-2r)r}{360} = \frac{(100-2r)r}{2} = -r^2 + 50r$$

$$S(r) = -r^2 + 50r \qquad (5)$$

Observando-se a função para a área S em (5), que é uma função do 2º grau, com $a < 0$, e logo tem-se um máximo para a função. Assim $S(r)$ é máximo em (5) para:

$$r = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{-50}{-2} = 25 \qquad (6)$$

Para o valor de r em (6), tem a área máxima da função $S(r)$ em (6):

$$-(25)^2 + 50(25) = -625 + 1250 \Rightarrow S = 625$$

Assim, se o raio para se ter área máxima é 25 metros e a área máxima correspondente é 625 m^2.

92) Seja $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a seqüência de Fibonacci, definida por $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Prove que $mdc(F_m, F_n) = F_{mdc(m,n)}$ para quaisquer inteiros positivos m e n.

SOLUÇÃO DE GIBRAN MEDEIROS DE SOUZA (NATAL - RN)

Para provarmos o que queremos temos que antes mostrar três premissas, que são:

I) Se $m \geq 1$ e $n > 1$, então $F_{n+m} = F_{n-1} \cdot F_m + F_n \cdot F_{m+1}$

Prova: (por indução sobre m)

$m = 1: F_{n+1} = F_{n-1} \cdot F_1 + F_n \cdot F_2 = F_{n-1} + F_n$ (verdadeira)

$m = 2: F_{n+2} = F_{n-1} \cdot F_2 + F_n \cdot F_3 = F_{n-1} + 2F_n = (F_{n-1} + F_n) + F_n = F_n + F_{n+1}$ (verdadeira)

Seja $r > 2$ e suponhamos a propriedade verdadeira para todo k, $2 \leq k < r$, e para todo $n > 1$.

Esta suposição, mais o fato de que a propriedade vale também para $k = 1$, nos garante que:

$$F_{n+(r-2)} = F_{n-1} \cdot F_{r-2} + F_n \cdot F_{r-1} \text{ e } F_{n+(r-1)} = F_{n-1} \cdot F_{r-1} + F_n \cdot F_r$$

Somando membro a membro essas igualdades e levando em conta a fórmula recursiva que define (F_n):

$$F_{n+r} = F_{n-1} \cdot F_r + F_n \cdot F_{r+1}$$

Ou seja, a fórmula vale também para r, sempre que $n > 1$. O segundo princípio de indução nos garante então que vale para todo $m \geq 1$ e qualquer $n > 1$.

II) Dois números de Fibonacci consecutivos (F_n e F_{n+1}) são primos entre si.

Prova: Seja $d = mdc(F_n F_{n+1})$. Como F_n e F_{n+1} são maiores que zero, o mesmo ocorre com d. O fato de d ser divisor de F_n e F_{n+1} implica que $d \mid F_{n-1}$ pois $F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$.

Dividindo F_n e F_{n-1}, então d divide F_{n-2}. Prosseguindo nesse raciocínio chegaremos a conclusão que $d \mid F_2$. Então $d = 1$, pois $F_2 = 1$

III) Se $m \mid n$, então $F_m \mid F_n$.

Prova: Por hipótese $n = mr$, para algum $r \in \mathbb{N}$. Procedemos por indução sobre r.
Se $r = 1$, então $m = n$ e é imediato que $F_m \mid F_n$.

Seja $r \geq 1$ e admitamos que $F_m \mid F_{mr}$.
Então levado em conta a relação fornecida por I:

$$F_{m(r+1)} = F_{mr+m} = F_{mr-1} \cdot F_m + F_{mr} \cdot F_{m+1}$$

Como $F_m \mid F_{mr-1} \cdot F_m$ e $F_m \mid F_{mr} \cdot F_{m+1}$ (pois, pela hipótese de indução, F_m divide F_{mr}), então F_m divide a soma desses dois produtos. Ou seja: $F_m \mid F_{m(r+1)}$
Com as três premissas em mão vamos à questão: Se $d = mdc(m,n)$, então prove que $mdc(F_m, F_n) = F_d$.

Prova: Mostraremos primeiro que se $m = nq + r$, então $mdc(F_m, F_n) = mdc(F_n, F_r)$.
Observando as premissas feitas e levando em conta I:

$$mdc(F_m, F_n) = mdc(F_{nq+r}, F_n) = mdc(F_{nq-1} \cdot F_r + F_{nq} \cdot F_{r+1}, F_n)$$

Considerando porém que $mdc(a,b) = mdc(a+c,b)$, sempre que $b|c$, e ainda que $F_n \mid F_{nq}$ (premissa III), chegamos a:

$$mdc(F_m, F_n) = mdc(F_{nq-1} \cdot F_r, F_n)$$

Mostremos que F_{nq-1} e F_n são primos entre si. De fato, se d é um divisor comum a esses dois números, então $d \mid F_{nq-1}$ e $d \mid F_{nq}$ (devido a premissa III). Daí a premissa II nos assegura que $d = 1$.
Ora, se $mdc(F_{nq-1}, F_n) = 1$, então $mdc(F_r, F_n) = mdc(F_{nq-1} \cdot F_r, F_n)$, donde:

$$mdc(F_m, F_n) = mdc(F_n, F_r).$$

Assim, supondo $m > n$, e aplicando o processo das divisões sucessivas para chegar a $d = mdc(m,n)$:

$$m = nq_1 + r_1 \quad (r_1 < n)$$
$$n = r_1 q_2 + r_2 \quad (r_2 < r_1)$$
$$r_1 = r_2 q_3 + r_3 \quad (r_3 < r_2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_r \quad (r_n < r_{n-1})$$
$$r_{n-1} = r_n q_{n+1} \quad (\text{onde } r_n = d)$$

o uso repetido do resultado anterior a cada uma das igualdades anteriores nos levará a concluir que:

$$mdc(F_m, F_n) = mdc(F_{r_{n-1}}, F_d)$$

Como $d \mid r_{n-1}$, em virtude da premissa III, $F_d \mid F_{r_{n-1}}$, logo: $mdc(F_m, F_n) = F_d$, cqd.

93) Um inteiro positivo n é dito **perfeito** se n é igual à soma dos divisores positivos de n que são menores que n. Prove que um número par n é perfeito se e somente se existe um número primo $p \geq 2$ tal que $2^p - 1$ é primo e $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$.

SOLUÇÃO DE CARLOS ALBERTO DA SILVA VICTOR (NILÓPOLIS - RJ)

(1) Lema: Se $2^k - 1$ é um número primo então k também é primo.

Prova: Suponha que k não seja primo, logo podemos escrever $k = x_1 \cdot x_2$ onde x_1 e x_2 são maiores que 1.

$2^k - 1 = 2^{x_1 \cdot x_2} - 1 = (2^{x_1} - 1)(2^{x_1(x_2-1)} + 2^{x_1(x_2-2)} + \ldots + 2^{x_1} + 1)$, ou seja, $2^k - 1$ não é primo. Logo k deverá ser necessariamente primo.

(2) Suponha $n = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ com p primo $(p \geq 2)$.

Seja $S(n)$ a soma dos divisores de n menores que n:

$S(n) = (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{p-1}) \cdot (1 + 2^p - 1) - 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$

$S(n) = (2^p - 1) \cdot 2^p - 2^{p-1} \cdot (2^p - 1) = 2^{p-1} \cdot (2^{p+1} - 2 - 2^p + 1)$

$S(n) = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1) = n.$

(3) Suponha $S(n) = n$ (n par). Vamos mostrar que existe um primo $(2^p - 1)$ tal que $n = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$.

Prova: Já que n é par podemos escrever na forma $n = 2^t \cdot m$, onde m é um número inteiro positivo ímpar.

Já que n é perfeiro, temos que $2n = \left(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^t\right) \cdot \left(\sum(m)\right)$, onde $\sum(m)$ é a soma dos divisores do ímpar m;

$\left(2^{t+1} - 1\right) \cdot \sum(m) = 2n = 2^{t+1} \cdot m$. Como $2^{t+1} - 1$ é ímpar temos que $(2^{t+1} - 1) m$, ou seja, $m = (2^{t+1} - 1) \cdot s$ onde s é um inteiro.

Suponha que $s > 1$, então 1, s e $(2^{t+1}-1)\cdot s$ são divisores de m, e logo:

$$\sum(m) \geq 1+s+(2^{t+1}-1)\cdot s > 2^{t+1}\cdot s \quad \text{e}$$

$$(2^{t+1}-1)\cdot\sum(m) > (2^{t+1}-1)\cdot 2^{t+1}\cdot s = 2^{t+1}\cdot m = 2n,$$

o que é uma contradição, donde $s = 1$ e $m = 2^{t+1}-1$. Observe que $\sum(m) = 2^{t+1} = \underbrace{2^{t+1}-1}_{m}+1$, ou seja, a soma dos divisores de m é a soma do próprio m com a unidade, daí $m = 2^{t+1}-1$ é primo, ou seja $n = 2^{p-1}\cdot(2^p-1)$ para $t + 1 = p$ e, pelo lema (1), concluímos que existe p primo como nas condições do enunciado.

94) A ilha das amazonas é habitada por amazonas e homens.

As amazonas mandam em tudo, são inteligentíssimas, ciumentíssimas e muito fofoqueiras. O que uma amazona mais gosta de fazer é trair outra amazona com o marido desta. Consumada a traição, ela conta o seu feito a todas as amazonas da ilha **menos** à amazona traída. As outras amazonas também não contam nada à vítima da traição. Mas se uma amazona descobre que está sendo traída ela mata o seu marido na próxima meia noite.

A rainha das amazonas, que é viúva, vê esta situação com desagrado. Ela vê que há traição na ilha mas, como nunca ninguém descobre nada, nenhum marido morre. No dia 1 de janeiro de 3333, então, contrariando a tradição, ela chama todas as amazonas para a praça central e faz uma proclamação solene: "Há traição nesta ilha."

Nenhuma amazona sonha em duvidar da palavra da rainha e todas as amazonas sabem disso. Como já foi dito, todas são inteligentes e ciumentas: estes e os outros fatos mencionados neste enunciado até aqui são conhecimento comum entre as amazonas.

Supondo que haja 1000 amazonas na ilha e que 365 delas tenham sido traídas, o que acontecerá?

SOLUÇÃO DE EDUARDO FISCHER (ENCANTADO - RS)

Se houvesse somente uma traição, a traída não saberia de nada, e como havia pelo menos uma traição que ela não soubesse, mataria o seu marido na primeira noite.

Como na primeira noite ninguém morreu, uma mulher que soubesse de uma única traição mataria seu marido na segunda noite, pois, como não houve morte na primeira noite, havia algo que ela não sabia. Assim, se houver exatamente duas traições, as traídas matarão seus maridos na seguinte noite.

...

Supondo que na (n –1)-ésima noite ninguém morreu, uma mulher que soubesse de apenas (n –1) traições mataria seu marido na n-ésima noite, pois, como não houve morte na (n –1)-ésima noite, havia algo que ela não sabia. Mostramos assim, por indução em n, que, se houver exatamente n traições (i.e., n maridos traidores) as traídas matarão seus maridos na n-ésima noite.
Lembrando que cada traída sabe de 364 traições, cada uma mataria o seu marido depois de uma ano, no 365° dia (isto é, no reveillon de 3334).

Enviaram soluções de problemas os seguintes leitores da EUREKA!

Besaleel Ferreira de Assunção Júnior	Teresina – PI
Carlos Augusto David Ribeiro	Fortaleza – CE
Georges Cobiniano Sousa de Melo	João Pessoa – PB
Glauber Moreno Barbosa	Rio de Janeiro – RJ
Guilherme Marques dos Santos Silva	Enviado via e-mail
José Renato Carneiro e Carneiro	Ribeirão Preto – SP
Marcos Francisco Ferreira Martinelli	Rio de Janeiro – RJ
Raphael Rodrigues Mata	Salvador – BA
Wallace Alves Martins	Rio de Janeiro – RJ
Wellington Klezewsky Pires	Aquidauana – MS
Zózimo Pereira	Campina Grande – PB

Continuamos aguardando soluções dos problemas 89, 90 e 95, propostos na Eureka! No. 18.

PROBLEMAS PROPOSTOS

✉ *Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e sugestões de novos problemas para os próximos números.*

96) No quadrilátero *ABCD* os ângulos *A*, *C* e *D* medem 100° e o ângulo *ACB* mede 40°. Demonstre que $BC \cdot DA = (BC + AB - DA)^2$.

97) Seja *p* um primo ímpar. Encontre todas as funções $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que satisfazem as seguintes condições:

i) Se $m \equiv n \pmod{p}$ então $f(m) = f(n)$.

ii) $f(mn) = f(m) \cdot f(n)$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$

98) Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência tal que $a_1 > 2$ e $a_{n+1} = a_n^2 - 2, \forall n \in \mathbb{N}$.

Mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4}}{2}$.

99) Num triângulo, a razão entre os raios das circunferências circunscrita e inscrita é $\frac{5}{2}$. Os lados do triângulo estão em progressão aritmética e sua área é numericamente igual ao seu perímetro. Determine os lados do triângulo.

100) a) Um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ é dito *impressionante* se existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$, existem elementos de *X*, $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$, tais que $a_{j+1} - a_j \le m, \forall j < k$.

Determine se é possível particionar $\mathbb{N}$ em um número finito de conjuntos, nenhum deles impressionante.

b) Determine se é possível particionar $\mathbb{N}$ em dois conjuntos *A* e *B* de modo que nem *A* nem *B* contêm progressões aritméticas infinitas mas, para cada $q \in \mathbb{N}$, *A* e *B* contêm progressões aritméticas de *q* termos.

101) a) Sejam a_i, b_i, c_i reais positivos, para $1 \le i \le 3$.

Prove que $(a_1^3 + a_2^3 + a_3^3)(b_1^3 + b_2^3 + b_3^3)(c_1^3 + c_2^3 + c_3^3) \ge (a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + a_3b_3c_3)^3$.

b) Sejam a, b, c, x, y, z reais positivos. Prove que

$$\frac{a^3}{x^2} + \frac{b^3}{y^2} + \frac{c^3}{z^2} \ge \frac{(a+b+c)^3}{(x+y+z)^2}.$$

Problema 96 proposto por Miguel Cruz (Holguin, Cuba), problema 97 (Coréia 2001) proposto por Samuel Barbosa Feitosa (Fortaleza - CE), problema 98 proposto por Gleydson Chaves Ricarte (Fortaleza - CE), problema 99 proposto por Geraldo Perlino (Itapecerica da Serra - SP), problema 100 proposto por Anderson Torres (São Paulo - SP), problema 101 proposto por Okakamo Matsubashi (São Paulo - SP).

COORDENADORES REGIONAIS

Alberto Hassen Raad	(UFJF)	Juiz de Fora – MG
Amarísio da Silva Araújo	(UFV)	Viçosa – MG
Ana Paula Bernardi da Silva	(Universidade Católica de Brasília)	Brasília – DF
Antonio Carlos Nogueira	(UFU)	Uberlândia – MG
Benedito Tadeu Vasconcelos Freire	(UFRN)	Natal – RN
Carlos Frederico Borges Palmeira	(PUC-Rio)	Rio de Janeiro – RJ
Claus Haetinger	(UNIVATES)	Lajeado – RS
Cleonor Crescêncio das Neves	(UTAM)	Manaus – AM
Élio Mega	(Colégio Etapa)	São Paulo – SP
Florêncio Ferreira Guimarães Filho	(UFES)	Vitória – ES
Ronaldo Alves Garcia	(UFGO)	Goiânia – GO
Reginaldo de Lima Pereira	(Escola Técnica Federal de Roraima)	Boa Vista – RR
Ivanilde Fernandes Saad	(UC. Dom Bosco)	Campo Grande– MS
Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia	(UFPB)	João Pessoa – PB
Janice T. Reichert	(UNOCHAPECÓ)	Chapecó – SC
João Benício de Melo Neto	(UFPI)	Teresina – PI
João Francisco Melo Libonati	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
José Carlos dos Santos Rodrigues	(Unespar)	Campo Mourão – PR
José Cloves Saraiva	(UFMA)	São Luis – MA
José Gaspar Ruas Filho	(ICMC-USP)	São Carlos – SP
José Luiz Rosas Pinho	(UFSC)	Florianópolis – SC
José Vieira Alves	(UFPB)	Campina Grande – PB
Krerley Oliveira	(UFAL)	Maceió – AL
Licio Hernandes Bezerra	(UFSC)	Florianópolis – SC
Luzinalva Miranda de Amorim	(UFBA)	Salvador – BA
Mário Rocha Retamoso	(UFRG)	Rio Grande – RS
Marcelo Rufino de Oliveira	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Marcelo Mendes	(Colégio Farias Brito, Pré-vestibular)	Fortaleza – CE
Pablo Rodrigo Ganassim	(Liceu Terras do Engenho)	Piracicaba – SP
Ramón Mendoza	(UFPE)	Recife – PE
Raúl Cintra de Negreiros Ribeiro	(Colégio Anglo)	Atibaia – SP
Reinaldo Gen Ichiro Arakaki	(INPE)	SJ dos Campos – SP
Ricardo Amorim	(Centro Educacional Logos)	Nova Iguaçu – RJ
Sérgio Cláudio Ramos	(IM-UFRGS)	Porto Alegre – RS
Tadeu Ferreira Gomes	(UEBA)	Juazeiro – BA
Tomás Menéndez Rodrigues	(U. Federal de Rondônia)	Porto Velho – RO
Valdenberg Araújo da Silva	(U. Federal de Sergipe)	São Cristovão – SE
Valdeni Soliani Franco	(U. Estadual de Maringá)	Maringá – PR
Vânia Cristina Silva Rodrigues	(U. Metodista de SP)	S.B. do Campo – SP
Wagner Pereira Lopes	(CEFET – GO)	Jataí – GO