CONTEÚDO

AOS LEITORES

Iniciamos este segundo número da revista EUREKA! transmitindo aos leitores nossa satisfação pela acolhida do primeiro número por alunos e professores. A comunidade estudantil e os professores das escolas passam a ter, de forma que esperamos permanente, uma publicação específica que, além de fornecer material para tornar as aulas mais ricas e interessantes, é um veículo de contato entre todos para expor experiências, dirimir dúvidas e nos aproximarmos cada vez mais.

Já estamos recebendo correspondência de muitos alunos e alguns professores com respeito às soluções dos problemas propostos. Isto muito nos alegra e temos a certeza de que nos próximos números essa correspondência só tenderá a crescer. Entretanto, gostaríamos de pedir aos professores que nos enviem também colaborações para os números seguintes da revista: problemas interessantes com soluções, pequenos artigos, experiências em sala de aula, olimpíadas ou torneios regionais, enfim, material que seja adequado aos alunos da 5ª série do ensino fundamental à última série do ensino médio. Estas colaborações serão fundamentais para que nossa revista permaneça viva e seja sobretudo útil a toda a comunidade.

A Olimpíada Brasileira de Matemática de 1998

Realizamos a primeira fase da Olimpíada Brasileira de Matemática em mais de mil colégios do nosso país. Em nosso projeto pretendíamos atingir, nesta primeira etapa dessa nova atividade, cerca de 20 000 alunos mas, para nossa surpresa, esse número já superou o dobro do pretendido. Através dos relatórios enviados pelas escolas aos Coordenadores Regionais, estabelecemos as notas de corte para a promoção dos alunos à segunda fase que se realizará em setembro. A terceira fase, já mais centralizada, será feita em outubro e esperamos que no final de novembro possamos divulgar a lista dos alunos premiados.

Como em toda competição, é natural que o número de premiados seja relativamente pequeno em relação ao número inicial de participantes. Porém, aqui não há perdedores. Todos são de alguma forma ganhadores: de uma experiência nova, de um estímulo para estudar mais e crescer, ou da possibilidade de ver que objetivos que pareciam longínquos realmente podem ser atingidos.

Devemos ainda relatar que alguns colégios não participaram da Olimpíada Brasileira de Matemática com receio de que, sem uma preparação adequada, seus alunos não tivessem um resultado satisfatório. Especialmente para estes colégios enviamos nossa mensagem final:

A Olimpíada Brasileira de Matemática não é uma competição entre colégios. A OBM tem como objetivo principal estimular o estudo de Matemática entre os jovens, desenvolver professores e propiciar uma melhoria do ensino e do aprendizado desta matéria nas escolas brasileiras.

Comitê Editorial.

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas de treinamento para a Segunda Fase

Primeiro Nível

1) Determine o menor inteiro cuja representação decimal consiste somente de 1's e que é divisível pelo número 333…333 formado por 100 algarismos iguais a 3. (Problema proposto por *Antonio Luiz Santos.*)

2) Numa gaveta há 6 meias pretas e 6 meias brancas. Qual é o número mínimo de meias a se retirar (no escuro) para garantir que:

a) As meias retiradas contenham um par da mesma cor?
b) As meias retiradas contenham um par de cor branca?

3) Quando se escrevem os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,…1998, qual é o dígito que ocupa o lugar 1998?

Segundo Nível

1) Determine com quantos zeros consecutivos termina a representação decimal do número $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 1998$.

2) Suponha que desejamos saber de qual janela de um prédio de 36 andares é seguro jogarmos ovos para baixo, de modo que os ovos não se quebrem ao atingirem o chão. Para tal, admitimos que:

- Um ovo que sobrevive a uma queda pode ser usado novamente.
- Um ovo quebrado deve ser descartado.
- O efeito da queda é o mesmo para todos os ovos.
- Se um ovo se quebra quando jogado de uma certa janela então ele quebrará se jogado de uma altura superior.
- Se um ovo sobrevive a uma queda então ele sobreviverá a uma queda menor.

- Não se sabe se da janela do primeiro andar os ovos quebram, e também não se sabe se da janela do último andar os ovos quebram.

Se temos apenas 1 ovo e queremos ter certeza de obter um resultado correto, o experimento deve ser guiado apenas por um único caminho: jogue o ovo pela janela do primeiro andar; se não se quebrar, jogue o ovo pela janela do segundo andar. Continue até que o ovo se quebre. Na pior das hipóteses, este método necessitará de 36 lançamentos para ser concluído. Suponha que 2 ovos estão disponíveis. Qual é o menor número de lançamentos de ovos necessários para garantir todos os casos?

3) Considere cinco pontos quaisquer $P_1, P_2, \ldots, P_5$ no interior de um quadrado de lado 1. Mostre que pelo menos uma das distâncias d_{ij} entre P_i e P_j é menor que $\sqrt{2}/2$.

Terceiro Nível

1) Determine quantos números naturais menores que 1998 têm um número ímpar de divisores positivos.

2) Mostre que, dados 5 pontos do plano em posição geral (isto é três pontos quaisquer nunca estão em linha reta), há 4 que formam um quadrilátero convexo.

3) Dois discos A e B são divididos em $2n$ setores iguais. No disco A, n setores são pintados de azul e n de vermelho. No disco B, os setores são pintados de azul ou vermelho de forma completamente arbitrária. Mostre que A e B podem ser superpostos de modo que pelo menos n setores tenham cores coincidentes.

Soluções do Primeiro Nível

1)

É claro que $d = \underbrace{333...333}_{100\ \text{três}} = 3 \cdot \left(\underbrace{111...111}_{100\ \text{uns}}\right) = 3n$. Portanto, o número procurado $N = \underbrace{111...111}_{k\ \text{uns}}$ deve ser divisível por n e por 3 (n não é divisível por 3 porque a soma dos seus algarismos é igual a 100 que não é divisível por 3). Se k é um número da forma $k = 100q + r$ onde $0 \le r < 100$ então obviamente $N = \underbrace{111...111}_{100q\ \text{uns}}\underbrace{000...00}_{r\ \text{zeros}} + \underbrace{111...11}_{r\ \text{uns}} = M + R$. Como M é divisível por n então, N é divisível por n se, e somente se, $R = 0$ ou seja, se $r = 0$ e conseqüentemente se, e somente se, k for divisível por 100. Se $k = 100q$ então a soma dos algarismos de N é igual a $100q$ e esta soma será divisível por 3 (e consequentemente também o número N) se, e somente se, q for divisivel por 3. Portanto, o menor número $N = \underbrace{111...111}_{k\ \text{uns}}$ divisível por d consiste em 300 uns.

2)

a) 3 meias (necessariamente teremos 2 meias brancas ou 2 meias pretas; se tirarmos apenas duas pode ser que uma seja branca e a outra preta).

b) 8 meias (se tirassemos apenas 7 meias poderiam ser 6 pretas e apenas uma branca).

3)

Quando se escrevem os números do 1 ao 99, usam-se 9 + 2 (99 – 9) = 189 dígitos. Ficam por preencher 1809 (1998 – 189) lugares. Para cada uma das centenas que seguem usam-se 300 dígitos. Como 1809 = 300 × 6 + 9, ao terminar de escrever os 1998 dígitos se escrevem todos os números desde o número 1 até completar 7 centenas (do número 1 até 699) e 9 dígitos mais: 700, 701 e 702. Portanto o dígito que ocupa o lugar 1998 é o número 2.

Soluções do Segundo Nível

1)

A resposta é 496. Se a decomposição de $1 \times 2 \times \ldots \times 1998$ em fatores primos é $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \ldots$, temos necessariamente $c < a$, pois para todo r natural há mais múltiplos de 2^r que de 5^r entre 1 e 1998. Assim, o número de zeros do final de $1 \times 2 \times \ldots \times 1998$ é igual a c. Para determinar c, observamos que entre 1 e 1998 há 399 múltiplos de 5 (pois $399 \times 5 < 1998 < 400 \times 5$), 79 múltiplos de 25, 15 múltiplos de 125, 3 múltiplos de 625 mas nenhum múltiplo de 3125, e portanto temos $c = 399 + 79 + 15 + 3 = 496$. (De fato, ao contar os múltiplos de 5, que são 399, já contamos os múltiplos de 25, mas estes devem ser contados pelo menos em dobro para calcular o exponente de 5, por isso somamos 79, mas é preciso contar os múltiplos de 125 pelo menos 3 vezes e só foram contados 2 vezes, por isso somamos 15. E assim por diante.)

2)

8 lançamentos. Jogamos o primeiro ovo do oitavo andar. Se quebrar, basta testar os 7 primeiros com o segundo ovo. Se não quebrar, o jogamos do 15°., depois do 21°., depois do 26°., depois do 30°., depois do 33°., depois do 35°. e finalmente do 36°.. Se ele quebrar por exemplo quando jogado do 26°. andar, basta testar o segundo ovo nos andares 22, 23, 24 e 25, para o que gastamos $4 + 4 = 8$ lançamentos. A escolha dos andares se devem a $8 + 7 = 15$, $8 + 7 + 6 = 21$, $8 + 7 + 6 + 5 = 26$, $8 + 7 + 6 + 5 + 4 = 30$, $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$. O resultado não pode ser melhorado, pois se o primeiro ovo quebra no n-ésimo lançamento, devemos testar com o ovo restante todos os andares entre os usados nos $(n - 1)$-ésimo e n-ésimo lançamentos, no pior caso.

Tente generalizar este problema fazendo variar o número de ovos disponíveis e o número de andares do prédio.

3)

Dividimos o quadrado em 4 quadrados de lado 1/2. Necessariamente dois desses pontos, digamos P_i e P_j, estarão num mesmo quadradinho, e sua distância d_{ij} será menor que a diagonal do quadradinho (que é a maior distância possível entre dois de seus pontos), ou seja $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Soluções do Terceiro Nível

1)

Se $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ é a fatoração em primos de n, os divisores positivos de n são todos os números da forma $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ... p_k^{\beta_k}$ com $0 \le \beta_1 \le \alpha_1$, $0 \le \beta_2 \le \alpha_2$, …, $0 \le \beta_k \le \alpha_k$, $\beta_i \in \mathbb{N}$, $\forall i$. Assim , o número de divisores positivos de n é $(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)\ldots(1 + \alpha_k)$. Para que este número seja ímpar é necessário e suficiente que todos os α_i sejam pares, ou seja, que n seja quadrado perfeito. Como $44^2 = 1936 < 1998 < 2025 = 45^2$, há 44 quadrados perfeitos entre 1 e 1998, portanto há 44 naturais menores que 1998 com um número ímpar de divisores positivos.

2)

Se o menor polígono convexo que contém os 5 pontos tiver mais de 3 lados o problema é trivial. Caso contrário, dois dentre os 5 pontos (digamos D e E), estão dentro do triângulo cujos vértices são os outros 3. Ao prolongar a reta que une esses dois pontos cortamos dois dos lados do triângulo, digamos AB e AC. Nesse caso, é fácil ver que o quadrilátero $BDEC$ é convexo.

3)

Sejam S_1, S_2, …, S_{2n} os setores do disco B. Tentamos colocar o disco A sobre o disco B nas $2n$ posições possíveis (com os setores coincidindo). Para cada i com $1 \leq i \leq 2n$, em exatamente n das posições do disco A o setor S_i terá cor coincidente com o setor do disco A que está sobre ele. Assim, o número médio de setores com cores coincidentes nos dois discos para as $2n$ posições do disco A é $2n \cdot n/2n = n$, e necessariamente há posições do disco A para as quais há pelo menos n setores com cores coincidentes.

Você sabia... que há tantos números racionais quanto números naturais, mas há estritamente mais números reais que racionais (isto é, existe uma bijeção $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ mas não existe nenhuma bijeção $g: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$) **?** E que é impossível decidir se existe algum conjunto com estritamente mais elementos que os naturais mas estritamente menos elementos que os reais **??**

XIX OLIMPIADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas Júnior Segunda Fase e Soluções

A Olimpíada Brasileira Júnior correspondia aproximadamente aos atuais níveis 1 e 2 da OBM. Estamos publicando a prova da segunda fase júnior do ano passado com soluções, a qual acreditamos ser bom material de treinamento tanto para a segunda fase da OBM quanto para a terceira nos níveis 1 e 2. No próximo número da EUREKA! publicaremos a segunda fase da Olimpíada Brasileira sênior do ano passado.

PROBLEMA 1

No edifício mais alto de *Terra Brasilis* moram Eduardo e Augusto. O número do andar do apartamento de Eduardo coincide com o número do apartamento de Augusto. A soma dos números dos apartamentos dos dois é 2164. Calcule o número do apartamento de Eduardo sabendo que há 12 apartamentos por andar. (Por exemplo, no primeiro andar estão os apartamentos de 1 a 12, no segundo, de 13 a 24, e assim por diante.)

PROBLEMA 2

A professora de Matemática propôs o seguinte problema para seus alunos:

"Marquem 6 pontos sobre uma circunferência. Eu quero que vocês pintem o maior número de cordas determinadas por estes pontos, de modo que não existam quatro dos pontos sobre a circunferência determinando um quadrilátero com todos os lados e diagonais coloridos."

a) Edmilson encontrou uma solução correta colorindo 12 cordas. Exiba uma maneira de como fazer isto.

b) Gustavo afirmou ter encontrado uma solução na qual pintara 13 cordas. Mostre que a solução de Gustavo não está correta.

PROBLEMA 3

Sejam $ABCD$ um quadrado, M o ponto médio de AD e E um ponto sobre o lado AB. P é a interseção de EC e MB. Mostre que a reta DP divide o segmento EB em dois segmentos de mesma medida.

PROBLEMA 4

Mostre que existem infinitos inteiros positivos n satisfazendo simultaneamente as seguintes condições:

i. n é ímpar;
ii. n possui exatamente 1200 divisores positivos;
iii. existem exatamente 1997 triângulos retângulos, dois a dois não congruentes, de lados inteiros e n como medida de um dos catetos.

PROBLEMA 5

Seja $n \geq 1$ um inteiro. Temos n lâmpadas alinhadas e numeradas, da esquerda para a direita, de 1 a n. Cada lâmpada pode estar acesa ou apagada. A cada segundo, determina-se a lâmpada apagada de maior número e inverte-se o estado desta (de acesa para apagada ou de apagada para acesa) e das lâmpadas posteriores (as lâmpadas de maior número).

a) Mostre que em algum momento todas as lâmpadas estarão acesas (e o processo se encerrará).

b) Suponha que inicialmente todas as lâmpadas estejam apagadas. Determine depois de quantos segundos todas as lâmpadas estarão acesas.

c) Suponha agora $n = 11$ e que no início somente as lâmpadas de números 6, 7 e 10 estejam acesas. Mostre que após exatamente 1997 segundos todas as lâmpadas estarão acesas.

SOLUÇÕES

1)

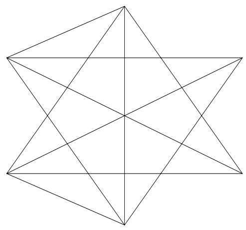
Seja a o andar do apartamento de Eduardo. Então o número de seu apartamento é $12\ (a-1)+b$, com $1 \le b \le 12$. Daí,

$a + 12\ (a-1) + b = 2164$,
$b = 2176 - 13a$
$1 \le 2176 - 13a \le 12$
$a = 167,\ b = 5$

Portanto, o número do apartamento de Eduardo é:
$12\ (a-1) + b = 12 \times 166 + 5 = 1997$.

2)

a) Uma maneira é mostrada abaixo:

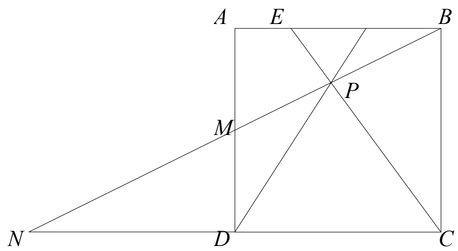


b) Suponha que a solução de Gustavo esteja correta. Sejam *A, B, C, D, E, F* os pontos. Então, como os 6 pontos determinam 15 cordas, somente dois segmentos não foram coloridos. Estes dois segmentos incidem em 3 ou 4 vértices.

i.) Se A é vértice comum de dois segmentos não coloridos, *AB* e *AF,* então caso existem 6 quadriláteros totalmente coloridos: *ACDE, BCDE, BCDF, BCEF, BDEF* e *CDEF.*

ii.) Se os segmentos *AB* e *EF* não foram coloridos então existem 4 quadriláteros coloridos: *CDAE, CDAF, CDBE, CDBF.*

3)



Prolongue BM até encontrar o prolongamento do lado CD no ponto N. Claramente, $\Delta AMB \equiv \Delta DMN$, donde segue que $AB = DN$. Portanto, D é o ponto médio de CN. O resultado segue observando que os triângulos CPN e EPB são semelhantes e, como PD é mediana do triângulo CPN, conclui-se que o prolongamento de DP encontra EB em seu ponto médio.

4)

Seja n um número natural ímpar. Vamos calcular o número de triângulos retângulos de lados inteiros nos quais n é medida de um dos catetos. Para isso, devemos ter

$$n^2 + x^2 = y^2,$$
$$n^2 = (y - x)(y + x),$$

com x e y inteiros positivos, $x < y$. Observe que $(y - x) < (y + x)$. Se fizermos $(y - x) = d$, com d um divisor de n^2, d será menor que n e
$(y + x) = n^2/d$ será maior que n. Para qualquer d satisfazendo estas condições, podemos encontrar uma solução:

$$\begin{cases} y - x = d \\ y + x = \dfrac{n^2}{d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n^2}{d} - d\right) \\ \\ y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n^2}{d} + d\right) \end{cases}$$

Estas soluções são inteiras e positivas, pois n é ímpar (logo d também), e $d < n$. Portanto, o número de triângulos retângulos é o número de divisores de n^2 menor que n. Mas para cada divisor de n^2 menor que n, corresponde um divisor maior que n. Lembrando que n é também um divisor, concluímos que o número procurado é 1/2 ($d(n^2) - 1$), onde $d(n)$ é o número de divisores positivos de n. Portanto, é necessário e suficiente que n^2 seja um número ímpar com $d(n^2) = 2 \times 1997 + 1 = 3995$ divisores.

Uma das várias possibilidades para n^2 ter 3995 divisores é ser da forma p^4q^{798}, com p e q primos distintos. Neste caso, $n = p^2q^{399}$, possui

$d(n) = (2 + 1) \times (399 + 1) = 1200$ divisores.

5)

Vamos representar por 1 uma lâmpada acesa, e por 0 uma lâmpada apagada e interpretar o número obtido na base 2.

Veja que se, em algum passo, o último dígito for 0, ele será o único dígito alterado no próximo passo. Isto significa que o número aumentará 1 unidade.

Caso contrário, o número terminará com um bloco de 1's antecipado por um 0:…011…1. No próximo passo, o número será …100…0. Mas observe que (…011…1) + 1 = …100…0. Portanto, em qualquer caso, o número k é sucedido pelo número $k + 1$.

a) Dada qualquer disposição inicial das lâmpadas, ou seja, qualquer número binário de no máximo n dígitos, em algum momento todos os dígitos serão iguais a 1, pois este é o maior número de n dígitos na base 2.

b) Existem 2^n números de no máximo n dígitos na base 2. Começando com 0, devemos chegar a 2^{n-1}, passando por todos os naturais intermediários. São necessários, então, 2^{n-1} segundos.

c) Observe que a configuração inicial representa o número $2^5 + 2^4 + 2 = 50$. Para $n = 11$, todas as lâmpadas estarão acesas depois de (211–1) – 50 = 1997 segundos.

Você sabia... Que um polígono regular com um número ímpar de lados só pode ser construído exatamente com régua e compasso se o número de lados for um produto de primos distintos da forma $2^{2^k}+1$ (esses primos são chamados primos de Fermat) ? E que só são conhecidos 5 primos de Fermat: 3, 5, 17, 257 e 65537, apesar de Fermat ter conjecturado que todo número da forma $2^{2^k}+1$ é primo (isso já é falso para $k = 5$: $2^{32} + 1$ é divisível por 641.) **??**

IV OLIMPÍADA DE MAIO

Resultados

Primeiro nível

Fabio Dias Moreira	**Ouro**	Coord. Est.	Rio de Janeiro-RJ
Davi M. Alexandrino Nogueira	**Prata**	Militar	Fortaleza-CE
Lyussei Abe	**Prata**	Etapa	São Paulo-SP
Cibele Norie Sakai Uyhara	**Prata**	Integrado	Itatiba-SP
Pedro Davoli Ometto	**Bronze**	Koelle	Rio Claro-SP
Kelly Correa de Paula	**Bronze**	M.Schledorn	Jundiaí-SP
Marcelo Kenji Honda	**Bronze**	Pioneiro	São Paulo-SP
Rafael Martins Gomes Nascimento	**Bronze**	S. Dumont	Fortaleza-CE
Priscila Carrara	**Menção**	Cass. Ricardo	S. J. Campos-SP
Thiago Pimentel Nykiel	**Menção**	Militar	Juiz de Fora-MG
Rodrigo Evangelista Delgado	**Menção**	Militar	Juiz de Fora-MG
Luiz Eduardo de Godoi	**Menção**	Cass. Ricardo	S. J. Campos-SP

Segundo nível

Hugo Pinto Iwata	**Ouro**	SETA	S.J.Rio Preto-SP
Ulisses Medeiros de Albuquerque	**Prata**	Militar	Fortaleza-CE
Afonso de Paula P. Rocha	**Prata**	S. Dumont	Fortaleza-CE
Artur D. Nelmi	**Bronze**	Bandeirantes	São Paulo-SP
Luiz Fernando Mendes Correa	**Bronze**	Militar	Juiz de Fora-MG
Andre de Almeira Bosso	**Bronze**	Progresso	Araraquara-SP
Fabricio Siqueira Benevides	**Bronze**	7 de setembro	Fortaleza-CE
Luiz Brizeno Firmeza Neto	**Menção**	Evolutivo	Fortaleza-CE
Daniel Nobuo Uno	**Menção**	Etapa	São Paulo-SP
Juliana Regina C. Zucare	**Menção**	Bandeirantes	São Paulo-SP

Os alunos Fabio Dias Moreira (Rio de Janeiro, RJ) e Hugo Pinto Iwata (São José do Rio Preto, SP) receberam medalha de ouro na Olimpíada e com isso, ganharam uma viagem de uma semana para a Argentina onde se reunirão com os ouros dos outros países para diversas atividades turísticas e culturais. Esta viagem será realizada em outubro, em data que ainda será marcada.

A seguir, publicamos a prova da IV Olimpíada de maio, com as respostas dos problemas.

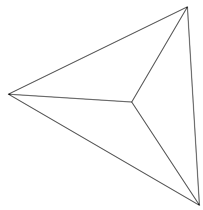
IV OLIMPÍADA DE MAIO

Primeiro nível

Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não se pode usar máquina de calcular.
Não se pode consultar livros nem notas.

PROBLEMA 1

Com seis varetas se construiu uma peça como a da figura. As três varetas exteriores são iguais entre si. As três varetas interiores são iguais entre si. Deseja-se pintar cada vareta de uma cor só de modo que, em cada ponto de união, as três varetas que chegam tenham cores diferentes.As varetas só podem ser pintadas de azul, branco, vermelho ou verde.
De quantas maneiras pode-se pintar a peça?



PROBLEMA 2

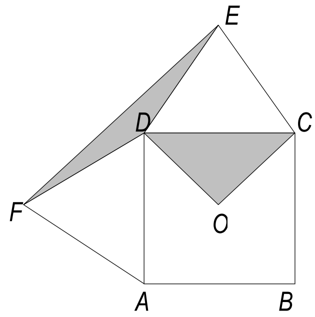
Têm-se 1998 peças retangulares de 2cm de altura e 3cm de comprimento e com elas se armam quadrados (sem superposições nem buracos). Qual é a maior quantidade de quadrados diferentes que se pode ter ao mesmo tempo?

PROBLEMA 3

Existem quatro botes numa margem de um rio; seus nomes são Oito, Quatro, Dois e Um, porque essas são as quantidades de horas que cada um deles demora para cruzar o rio. Pode-se atar um bote a outro, porém não mais de um, e então o tempo que demoram em cruzar é igual ao do mais lento dos botes. Um só marinheiro deve levar todos os botes até à outra margem do rio. Qual é o menor tempo necessário para completar o translado?

PROBLEMA 4

ABCD é um quadrado de centro *O*. Sobre os lados *DC* e *AD* foram construidos os triângulos equiláteros *DAF* e *DCE*. Decida se a área do triângulo *EDF* é maior do que, menor do que ou igual à área do triângulo *DOC*.



PROBLEMA 5

Escolha um número de quatro dígitos (nenhum deles zero) e começando com ele construa uma lista de 21 números distintos, de quatro dígitos cada um, que satisfaça a seguinte regra: depois de escrever cada novo número da lista devem-se calcular todas as médias entre dois dígitos desse número, descartando-se as médias que não dão um número inteiro, e com os que restam se forma um número de quatro dígitos que ocupará o lugar seguinte na lista. Por exemplo, se na lista se escreveu o número 2946, o seguinte pode ser 3333 ou 3434 ou 5345 ou qualquer outro número armado com os dígitos 3, 4 ou 5.

Segundo nível

PROBLEMA 1

Inês escolheu quatro dígitos distintos do conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Formou com eles todos os possíveis números de quatro dígitos distintos e somou todos eses números de quatro dígitos. O resultado é 193314. Encontre os quatro dígitos que Inês escolheu.

PROBLEMA 2

ABC é um triângulo equilátero. N é um ponto do lado AC tal que $\overline{AC} = 7.\overline{AN}$, M é um ponto do lado AB tal que MN é paralelo a BC e P é um ponto do lado BC tal que MP é paralelo a AC. Encontre a fração $\dfrac{área(MNP)}{área(ABC)}$.

PROBLEMA 3

Dado um tabuleiro quadriculado de 4 × 4, com cada casa pintada de uma cor distinta, deseja-se cortá-lo em dois pedaços de igual área mediante um só corte, que siga os lados das casas do tabuleiro. De quantas maneiras se pode fazer isto?

Obs. Os pedaços em que se divide o tabuleiro devem ser peças inteiras; não devem ser desconectados pelo corte.

PROBLEMA 4

O chão do pátio tem desenhado um octógono regular.
Emiliano escreve nos vértices deste os números de 1 a 8 em qualquer ordem.
Deixa uma pedra no ponto 1.
Caminha em direção ao ponto 2 e, havendo percorrido 1/2 do caminho, se detém e deixa a segunda pedra.
Daí caminha em direção ao ponto 3 e, havendo percorrido 1/3 do caminho, se detém e deixa a terceira pedra.
Daí caminha em direção ao ponto 4 e, havendo percorrido 1/4 do caminho, se detém e deixa a quarta pedra.
Deste modo segue até que, depois de deixar a sétima pedra, caminha em direção ao ponto 8, e havendo percorrido 1/8 do caminho, deixa a oitava pedra.

A quantidade de pedras que ficarem no centro do octógono depende da ordem em que ele escreveu os números nos vértices. Qual é a maior quantidade de pedras que podem ficar no centro?

PROBLEMA 5

O planeta X31 tem só dois tipos de notas, mas o sistema não é tão mau já que só há quinze preços inteiros para os quais o pagamento não pode ser feito de forma exata (nesses casos deve-se pagar a mais e receber o troco). Se 18 é um dos preços para os quais não se pode fazer pagamento exato, encontre o valor de cada tipo de nota.

RESPOSTAS

IV OLIMPÍADA DE MAIO Primeiro nível 1998

PROBLEMA 1: 16 formas.
PROBLEMA 2 : 9
PROBLEMA 3: 15h
PROBLEMA 4 : As áreas são iguais.
PROBLEMA 5 : Há muitas soluções.

IV OLIMPÍADA DE MAIO Segundo nível 1998

PROBLEMA 1 : 5, 7, 8, e 9
PROBLEMA 2 : 6/49
PROBLEMA 3: 70 maneiras.
PROBLEMA 4 : 4 pedras.
PROBLEMA 5: 4 e 11

Você sabia... Que a todo momento há dois pontos antípodas na terra com a mesma temperatura e a mesma pressão (admitindo que temperatura e pressão dependem continuamente do ponto)??

9ª. OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL

A 9ª. Olimpíada de Matemática do Cone Sul foi realizada em Salvador, BA, no período de 13 a 21 de junho de 1998. Esta Olimpíada foi realizada pela segunda vez no país (a primeira foi em 1993, em Petrópolis, RJ). Dela participaram alunos de até 15 anos dos seguintes países: Argentina, Brasil, Bolívia, Chile, Paraguai, Peru e Uruguai. A organização da Olimpíada esteve a cargo da Professora Luzinalva Amorim, da Universidade Federal da Bahia.

A equipe brasileira foi selecionada através de provas realizadas em março e maio deste ano e foi liderada pelos professores Paulo Cezar Pinto Carvalho, do IMPA, e Florêncio Ferreira Guimarães, da UFES.

A competição constou de duas provas, realizadas em dois dias, cada uma com três problemas, valendo 10 pontos cada. Veja a seguir os resultados obtidos pela equipe brasileira e as provas da 9ª. Olimpíada de Matemática do Cone Sul.

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA 1	**Mila Lopes Viana**	**Bronze**
BRA 2	**Pedro Paulo Gouveia**	**Prata**
BRA 3	**Fabricio Siqueira Benevides**	**Prata**
BRA 4	**Jônathas Diógenes Castelo Branco**	**Bronze**

9ª. OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL

Problemas e soluções

Primeiro dia.
Tempo: 4 horas 30 min.

PROBLEMA 1

São dados 98 cartões. Em cada um deles está escrito um dos números 1, 2, 3, …, 98 (não existem números repetidos). Pode-se ordenar os 98 cartões de tal modo que ao considerar dois cartões consecutivos a diferença entre o número maior e o número menor escritos neles seja sempre maior que 48. Indicar como e de quantas formas é possível efetuar a ordenação.

PROBLEMA 2

Sejam H o ortocentro (interseção das alturas) do triângulo acutângulo ABC e M o ponto médio do lado BC. Seja X o ponto em que a reta HM intersecta o arco BC (que não contém A) da circunsferência circunscrita a ABC. Seja Y o ponto de interseção da reta BH com a circunsferência, distinto de B. Demonstre que $XY = BC$.

PROBLEMA 3

Prove que, pelo menos para 30% dos naturais n entre 1 e 1.000.000, o primeiro dígito de 2^n é 1.

Segundo dia.
Tempo: 4 horas 30 minutos.

PROBLEMA 4

Determine todas as funções f tais que

$$f(x^2) - f(y^2) + 2x + 1 = f(x+y) \cdot f(x-y)$$

quaisquer que sejam os números reais x, y.

PROBLEMA 5

Em *Terra Brasilis* existem n casas onde vivem n duendes, cada um em uma casa. Existem estradas de mão única de tal modo que:

- cada estrada liga duas casas;
- em cada casa começa exatamente uma estrada;
- em cada casa termina exatamente uma estrada.

Todos os dias, a partir do dia 1, cada duende sai da casa onde está e chega à casa vizinha. Uma lenda de *Terra Brasilis* diz que, quando todos os duendes regressarem à posição original, o mundo acabará.

(a) Demonstre que o mundo acabará.
(b) Se $n = 98$, demonstre que é possível que os duendes construam e orientem as estradas de modo que o mundo não se acabe antes de 300.000 anos.

PROBLEMA 6

O Prefeito de uma cidade deseja estabelecer um sistema de transportes com pelo menos uma linha de ônibus, no qual:

(i) cada linha passe exatamente por três paradas;
(ii) cada duas linhas distintas tenham exatamente uma parada em comum;
(iii) para cada duas paradas de ônibus distintas exista exatamente uma linha que passe por ambas.

Determine o número de paradas de ônibus da cidade.

SOLUÇÕES

1)

Vamos provar uma versão um pouco mais geral do problema:

Seja k um número natural. Encontrar todas as permutações $a_1, a_2, \ldots a_{2k}$ dos números 1, 2, …, $2k$ que verificam $|a_i - a_{i+1}| \geq k$ para todo i = 1, 2, …, $2k-1$.

Solução

Em primeiro lugar observamos que, se dois números entre 1, 2, …, $2k$ diferem de pelo menos k, então o maior dos números está entre $k+1$, $k+2$, … $2k$ e o menor, entre 1, 2, …, k . Chamemos simplesmente os números destes dois conjuntos de "grandes" e "pequenos", respectivamente. Suponhamos que $a_1, a_2, \ldots a_{2k}$ é uma permutação com a propriedade em questão. Pelo que dissemos acima, seus termos com índice ímpar (par) devem ser todos grandes ou todos pequenos. Sejam, por exemplo, $a_1, a_3, \ldots a_{2k-1}$ pequenos e $a_2, a_4, \ldots a_{2k}$ grandes. Consideremos a soma

$$S = |a_1 - a_2| + |a_2 + a_3| + \ldots + |a_{2k-2} - a_{2k-1}| + |a_{2k-1} - a_{2k}|$$

Como cada termo de índice par é maior do que seus vizinhos,

$$\begin{aligned} S &= (a_2 - a_1) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{2k} - 2 - a_{2k-1)} + (a_{2k} - a_{2k-1}) \\ &= 2(a_2 + a_4 + \ldots + a_{2k}) - 2(a_1 + a_3 + \ldots a_{2k-1}) - a_{2k} + a_1 \\ &= 2((k+1) + (k+2) + \ldots + 2k) - 2(1 + 2 + \ldots + k) - a_{2k} + a_1 \\ &= 2k^2 - (a_{2k} - a_1) \end{aligned}$$

Notemos que a condição $|a_i - a_{i+1}| \geq k$ determina a escolha de a_1 e a_{2k} . Os únicos vizinhos possíveis de k e $k+1$ são $2k$ e 1, respectivamente. Logo k e $k+1$ devem ser o primeiro e o último termos da permutação. E como escolhemos começar com a_1 pequeno, $a_1 = k$, $a_{2k} = k+1$.
Então $a_2 = 2k$, $a_{2k-1} = 1$.

Regressando à soma S, vemos que ela é igual a $2k^2 - ((k+1) - k) = 2k^2 - 1$. Por outro lado, cada dois somandos da forma $|a_{i-1} - a_i| + |a_i - a_{i+1}|$ contribui com pelo menos $k + (k+1) = 2k + 1$. Isto se deve ao fato de ser impossível que $|a_{i-1} - a_i| = |a_i - a_{i+1}| = k$, pois teríamos, neste caso, $a_{i-1} = a_{i+1}$. Assim, temos

$$S \geq \underbrace{(2k+1) + (2k+1) + \ldots + (2k+1)}_{k-1} + k = 2k^2 - 1$$

Então $|a_{i-1} - a_i| + |a_i - a_{i+1}| = 2k + 1$ para todo $i = 1, 3, \ldots 2k - 1$. Isto é, as diferenças consecutivas são $k, k+1, k, k+1, \ldots, k$. Começando com $a_1 = k$, $a_2 = 2k$ (que diferem em k), podemos determinar todos os a_i da seqüência:

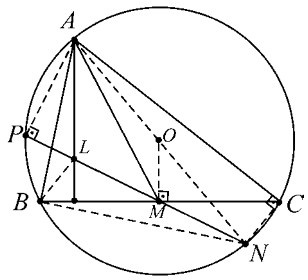
$$a_3 = 2k - (k+1) = k - 1$$
$$a_4 = (k-1) + k = 2k - 1$$
$$a_5 = (2k-1) - (k+1) = k - 2$$
$$\vdots$$

Portanto $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$ é

$k, 2k, k-1, 2k-1, k-2, \ldots, 2, k+2, 1, k+1$

Por simetria, existe exatamente uma solução além desta: a que obtemos tomando a solução acima na ordem inversa.

2)



Seja $\{L\} = PM \cap AH$. Mostraremos que L coincide com H. Inicialmente, observe que $\angle\ NPA = 90°$ (pois AM é diâmetro). Prolonguemos PM até encontrar a circunsferência circunscrita no ponto N, diametralmente oposto ao vértice A (pois $\angle\ NPA = 90°$.)
Logo o circuncentro O é o ponto médio de AN e, como $OM \mid\mid AL$, segue que M é o ponto médio de LN; como m é ponto médio de BC , segue que $LBNC$ é um paralelogramo, de modo que $BL \mid\mid NC$. Mas $\angle\ NCA = 90°$ (pois AN é diâmetro), ou seja, $NC \perp AC$. Daí segue que $BL \perp AC$ e, como $AL \perp BC$, concluimos que $L \equiv H$.

3)

Vamos provar que para cada inteiro positivo k existe uma potência de 2 com exatamente k dígitos (na base 10) e cujo primeiro dígito é 1. De fato, se considerarmos a menor potência de 2 maior que 10^{k+1}, devemos ter
$2^n < 10^{k+1} \le 2^{n+1}$,
ou $10^{k+1} \le 2^{n+1} < 2 \times 10^{k+1}$.

Portanto basta calcular quantos dígitos possui 2^{10^6} . Mas, de $10^3 < 2^{10}$, obtemos $10^{3\times10^5} < 2^{10^6}$, donde segue que 2^{10^6} tem mais de 300.000 algarismos e segue que no mínimo 300.000/1.000.000 = 30% de tais potências começam com o algarismo 1.

Observações:

1. Utilizamos somente que existe uma potência de 2 que começa com o dígito 1 e possui exatamente k dígitos. Como verifica-se imediatamente, existe *exatamente* uma potência de 2 com k dígitos que começa com 1.

2. 2^{10^6} possui exatamente 301.030 algarismos, pois se $10^t < 2^{10^6} < 10^{t+1}$, aplicando logaritmos, vem $t < 10^6 \log 2 < t + 1$, donde $t + 1 = 301.030$.

3. Utilizando as idéias de 1 e 2, é possível mostrar que a probabilidade de uma potência de 2 começar com o algarismo 1 é log 2. Mais precisamente, se $f(n)$ é o número de inteiros k $(1 \le k \le n)$ tais que 2^k que iniciam com o algarismo 1, então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} = \log 2 \approx 0{,}301029995664.$$

4)

Fazendo $x = y$ temos

$$f(2x) \cdot f(0) = 2x + 1$$

Logo, para $x = 0$, $(f(0))^2 = 1 \Leftrightarrow f(0) = \pm 1$

Assim, $f(2x) = \pm(2x + 1)$ e, portanto, $f(x) = x + 1$ ou $f(x) = -(x + 1)$. Substituindo as funções encontradas na equação funcional original, verificamos que apenas $f(x) = x + 1$ satisfaz as condições do problema.

5)

(a) Numere os duendes de 1 a n e seja $f(i)$ o vizinho do duende número i. A função f é claramente uma bijeção. Em algum momento cada duende retornará a sua casa pois a seqüência $f(i)$, $f(f(i))$, $f(f(f(i)))$,…assume um número finito de valores, donde existirão inteiros positivos $r < s$ tais que $f^s(i) = f^r(i)$, portanto $f^{s-r}(i) = i$ (pois f é bijetora). Seja $g(i)$ o menor inteiro positivo tal que o duende i retorna à sua casa depois de $g(i)$ dias. Depois de

$mmc(g(1), g(2),\ldots,g(n))$ dias, todos os duendes retornarão à posição original e o mundo acabará.

(b) Divida os 98 duendes em 8 ciclos de tamanhos 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 ($98 = 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23$). Os duendes retornarão à posição inicial depois de $3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 = 111546435 > 366 \times 300.000$.
Alternativamente, podemos dividir os duendes em ciclos de tamanhos 3, 8, 9, 5, 7, 11, 13, 19 e 23, e eles retornarão à posição original em $mmc(3, 8, 9, 5, 7, 11, 13, 19, 23) = 8 \times 9 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 19 \times 23 = 157.477.320$

6)

Um exemplo de tal sistema é aquele que tem uma só linha com exatamente 3 pontos. Para o que segue, suponhamos que haja pelo menos 4 pontos 1, 2, 3, 4 e que uma das linhas é $R_1 = 123$ (aqui, e no que segue, $R = abc$ significa que a linha R passa pelos pontos *a, b, c,* não importando a ordem. Assim, por exemplo, $R = bca$ é a mesma linha.)
Por (iii), devem existir linhas R_2, R_3 e R_4 que passam pelos pares de pontos $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$ e $\{3, 4\}$, respectivamente. Notemos que R_2, R_3 e R_4 devem ser distintas. De fato, se, digamos, os pares $\{2, 4\}$ e $\{3, 4\}$ estão na mesma linha R_2, então $R_2 = 234$, logo R_1 e R_2 têm duas paradas em comum e isto é impossível por (ii). Novamente por (ii), cada uma das linhas R_2, R_3 e R_4 tem exatamente um ponto em comum com $R_1 = 123$. Como não podem haver dois pontos entre 1, 2, 3, que estão em R_2, R_3 e R_4 (novamente por (ii)), devemos ter $R_2 = 14a$, $R_3 = 24b$, $R_4 = 34c$ para pontos distintos *a, b, c* que são por sua vez distintos de 1, 2, 3, 4. Para manter uma notação consistente, sejam $a = 5$, $b = 6$ e $c = 7$. Logo $R_2 = 145$, $R_3 = 246$ e $R_4 = 347$. Com isso, provamos que há pelo menos 7 pontos.
Agora, suponhamos que exista pelo menos um ponto a mais, digamos 8. Por (iii), existe uma linha S que passa por 1 e 8. Como S tem uma parada em comum com $R_3 = 246$, concluímos que $S = 128$, $S = 148$ ou $S = 168$. Nenhuma destas é possível, pois

1. as linhas 128 e 148 têm dois pontos em comum com $R_1 = 123$ e $R_2 = 145$, respectivamente.
2. 168 não tem ponto em comum com $R_4 = 347$.

Esta contradição é devida a termos suposto que existem mais de 7 pontos.
Completamos a construção do sistema de transportes com 7 pontos de ônibus. Devem haver linhas R_5, R_6, R_7 por {1, 6}, {2, 5}, {3, 5}, respectivamente (pois as linhas não estão entre as já existentes R_1, R_2, R_2, R_3 e R_4).
Pode-se verificar que a escolha $R_5 = 167$, $R_6 = 257$ e $R_7 = 356$ funciona.
As 7 linhas 123, 145, 246, 347, 167, 257, 356 formam um exemplo de tal sistema.
Concluímos, então, que a cidade pode ter exatamente 3 ou exatamente 7 pontos de ônibus.

Observação:

Este problema é equivalente a particionar as arestas de um grafo completo K_n em triângulos de modo que quaisquer dois triângulos tenham exatamente um vértice em comum.
Observando que, satisfeitas as condições do problema, cada vértice de um triângulo é comum a $(n - 3)/2$ outros triângulos, o total de triângulos em K_n é

$$1 + 3 \cdot \frac{n-3}{2} = \frac{1}{3}\frac{n(n-1)}{2},$$ o que só se verifica quando $n = 3$ ou $n = 7$.

Para concluir a resolução, basta obter as partições nestes casos.

39ª. OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

Resultados e problemas

No mês de tantas expectativas dos brasileiros, o Brasil consegue uma medalha de ouro na 39ª. Olimpíada Internacional de Matemática realizada com a presença de 76 países em Taiwan nos dias 10 a 21 de julho último.

O estudante Rui Lopes Viana Filho (SP) foi ganhador de uma medalha de ouro. Também foram premiados os estudantes Emanuel Carneiro (CE) medalha de bronze, Murali Vajapeyam (PB) menção honrosa e Mauricio Carrari (SP) menção honrosa. Trata-se de feito muito importante, visto que países como Alemanha, Inglaterra, Israel, Suécia, Australia e muitos outros não conquistaram medalhas de ouro.

Merece também elogios o fato da equipe brasileira ter sido uma das que tiveram melhor desempenho na questão 5 da prova, superando por exemplo, as equipes dos EUA e da Rússia. Veja a seguir as questões da 39ª.Olimpíada Internacional de Matemática.

Primeiro dia
Duração da Prova: 4 horas 30 min.

PROBLEMA 1

No quadrilátero convexo $ABCD$, as diagonais AC e BD são perpendiculares e os lados opostos AB e DC não são paralelos. Sabemos que o ponto P, onde se intersectam as mediatrizes de AB e DC, está no interior de $ABCD$. Prove que $ABCD$ é um quadrilátero inscritível se, e somente se, os triângulos ABP e CDP têm áreas iguais.

PROBLEMA 2

Numa competição, existem a concorrentes e b juízes, onde $b \geq 3$ é um inteiro ímpar. Cada juiz avalia cada um dos concorrentes, classificando-o como "aprovado" ou "reprovado". Suponha que k é um número tal que as classificações dadas por dois juízes quaisquer coincidem no máximo para k concorrentes. Prove que $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$.

PROBLEMA 3

Para qualquer inteiro positivo n, seja $d(n)$ o número de divisores positivos de n (incluindo 1 e n).

Determine todos os inteiros positivos k tais que $\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$ para algum n.

Segundo dia
Duração da Prova: 4 horas 30 min.

PROBLEMA 4

Determine todos os pares (a, b) de inteiros positivos tais que $ab^2 + b + 7$ divide $a^2b + a + b$.

PROBLEMA 5

Seja I o incentro do triângulo ABC. A circunferência inscrita no triângulo ABC é tangente aos lados BC, CA e AB nos pontos K, L e M, respectivamente. A reta que passa por B, paralela ao segmento MK, intersecta as retas LM e LK nos pontos R e S, respectivamente. Prove que o ângulo $\angle RIS$ é agudo.

PROBLEMA 6

Considere todas as funções f definidas no conjunto $\mathbb{N}$ dos inteiros positivos, com valores no mesmo conjunto, que satisfazem $f(t^2 f(s)) = s\ (f(t))^2$, para todos s e t em $\mathbb{N}$. Determine o menor valor possível de $f(1998)$

PARIDADE

Eduardo Wagner

♦ Nível Iniciante.

Todo número natural é par ou ímpar.

Elementar, não? A afirmação acima, que é uma das mais simples e óbvias da Matemática, é também uma ferramenta de grande utilidade na resolução de muitos problemas envolvendo números naturais. Vamos comentar neste artigo alguns deles, em graus diferentes de dificuldade, mas inicialmente precisamos recordar três importantes propriedades:

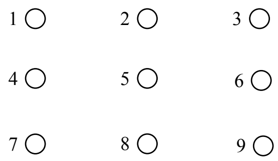
a) a soma de dois números pares é par.
b) a soma de dois números ímpares é par.
c) a soma de um número par com um número ímpar é ímpar.

Dizemos que dois números inteiros têm mesma *paridade*, quando são ambos pares ou ambos ímpares. Assim, podemos dizer que a soma de dois números inteiros é par se, e somente se, eles têm mesma paridade. Vamos aos problemas.

PROBLEMA 1
Em um quartel existem 100 soldados e, todas as noites, três deles são escolhidos para trabalhar de sentinela. É possível que após certo tempo um dos soldados tenha trabalhado com cada um dos outros exatamente uma vez?

RESPOSTA : Não.
Escolha um soldado. Em cada noite em que trabalha, ele está em companhia de dois outros. Como 99 é um número ímpar, não podemos formar pares de soldados sempre diferentes para trabalhar com o escolhido.

PROBLEMA 2
Um jogo consiste de 9 botões luminosos (de cor verde ou vermelha) dispostos da seguinte forma:



Apertando um botão do bordo do retângulo, trocam de cor ele e seus vizinhos (do lado ou em diagonal). Apertando o botão do centro, trocam de cor todos os seus 8 vizinhos porém ele não.

<u>Exemplos</u>:

Apertando 1, trocam de cor 1, 2, 4 e 5.
Apertando 2, trocam de cor 1, 2, 3, 4, 5 e 6.
Apertando 5, trocam de cor 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 e 9.

Inicialmente todos os botões estão verdes. É possível, apertando sucessivamente alguns botões, torná-los todos vermelhos?

RESPOSTA : Não é possível.
Observe que apertando um botão do vértice do retângulo, trocam de cor 4 botões. Apertando um botão do meio de um lado, trocam de cor 6 botões e apertando um botão do centro trocam de cor 8 botões. Assim, cada vez que apertamos um botão trocam de cor um número *par* de botões. Como existem 9 botões, não é possível que todos troquem de cor.

PROBLEMA 3
Escrevemos abaixo os números naturais de 1 a 10.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10.

Antes de cada um deles, coloque sinais "+" ou "–" de forma que a soma de todos seja zero.

SOLUÇÃO: Não é possível fazer isto.
Imaginando que fosse possível, deveríamos separar os números dados em dois grupos com a mesma soma. Então colocaríamos sinais negativos nos

números de um dos grupos e sinais positivos nos números do outro. Teríamos então uma soma igual a zero. Acontece que a soma dos números naturais de 1 a 10 é igual a 55. Como este número é ímpar, não podemos separar os números dados em dois grupos que tenham a mesma soma.

Como o leitor deve estar percebendo, os argumentos utilizados permitiram concluir que as respostas dos três problemas propostos foram iguais: "não é possível fazer tal coisa". Na maioria das vezes, um argumento de paridade serve exatamente para isto. Mostrar que um determinado fato não pode ocorrer e isto não é desanimador, muito pelo contrário. Serve para nos convencer que não adianta ficar gastando tempo demais fazendo tentativas inúteis. As experiências são valiosas no sentido de nos abrir os olhos para a possibilidade do problema não ter solução e, a partir daí, buscar um argumento que resolva definitivamente a questão.

É muito importante também explorar um problema, ou seja, imaginar pequenas modificações no enunciado e verificar o que ocorre com sua resposta. Por exemplo, o problema 3 não tem solução porque a soma dos naturais de 1 até 10 é 55 (ímpar). O que ocorreria se a soma fosse par? Este é um novo e atrativo problema. Vamos enunciá-lo:

PROBLEMA 3A:
Escrevemos abaixo os números naturais de 1 a 11.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

Antes de cada um deles, coloque sinais "+" ou "–" de forma que a soma de todos seja zero.

SOLUÇÃO:
A soma dos números naturais de 1 a 11 é 66. Como podemos separá-los em dois grupos de soma 33? Começando pelos maiores observe que 11 + 10 + 9 = 30. Logo, 11 + 10 + 9 + 3 = 33. O problema 3A tem como uma solução possível:

$$+1 + 2 - 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 - 9 - 10 - 11 = 0$$

Fica ao encargo do leitor mostrar que sempre que a soma dos naturais de 1 até n é par então podemos separá-los em dois grupos de igual soma. Você pode utilizar o caminho que utilizamos acima, ou buscar uma outra forma.

Para saber mais e intrigar seus colegas

Você pode propor aos seus amigos os problemas 3 ou 3A com uma lista grande de números naturais consecutivos. O problema terá ou não solução caso a soma desses números seja par ou ímpar, respectivamente. Entretanto, é possível encontrar o resultado desta soma rapidamente, sem precisar somar todas as parcelas. A soma de todos os naturais de 1 até n é igual a $\frac{(1+n)n}{2}$. Por exemplo, a soma de todos os naturais de 1 até 10 é $\frac{(1+10)10}{2}=\frac{11\cdot 10}{2}=55$. Procure demonstrar este fato e, se não conseguir, pergunte ao seu professor ou escreva para a EUREKA!

PROBLEMA 4

Mostre que se a, b e c são inteiros ímpares, a equação $ax^2+bx+c=0$ não tem raiz racional.

<u>Comentários</u>:

1) Um número é *raiz* de uma equação dada se quando for substituído no lugar do "x" a igualdade ficar correta. Por exemplo, $x=\frac{2}{3}$ é raiz (ou solução) da equação $3x-2=0$ porque $3\cdot\frac{2}{3}-2=0$. Ainda, $x=2$ é solução da equação $x^4-x^3+x-10=0$ porque $2^4-2^3+2-10=0$. Freqüentemente não sabemos como resolver uma equação mas, em geral, podemos verificar se um certo valor de x é ou não uma de suas raízes.

2) Um número é *racional* quando puder ser escrito como uma fração de numerador e denominador inteiros. Por exemplo, $\frac{2}{7}$ e $\frac{4}{1}$ são exemplos de números racionais.

3) Quando desejamos demonstrar que certo fato é impossível utilizamos freqüentemente o *método da redução ao absurdo*. Este método consiste em imaginar o contrário, ou seja, que tal fato seja possível. A partir daí procuramos chegar a uma contradição, a um absurdo. Conseguindo isso, teremos mostrado que nossa hipótese (a do contrário) é falsa e conseqüentemente, que a afirmação inicial é verdadeira.

Vamos ver tudo isso na solução do problema. Não se preocupe se você ainda não sabe resolver uma equação do segundo grau. Isto não será necessário. Tudo o que precisamos é verificar se um número racional pode ser uma raiz.

Solução do problema 4

Imaginemos que o número racional $\frac{p}{q}$ seja raiz da equação $ax^2+bx+c=0$ onde a, b e c são inteiros ímpares. Logo, fazendo a substituição, devemos ter,

$$a\left(\frac{p}{q}\right)^2+b\left(\frac{p}{q}\right)+c=0$$

$$a\frac{p^2}{q^2}+b\frac{p}{q}+c=0$$

$$ap^2+bpq+cq^2=0$$

Vamos acrescentar agora uma hipótese importante para facilitar nosso trabalho. Vamos supor que a nossa fração $\frac{p}{q}$ seja *irredutível*, ou seja, que ela já foi simplificada ao máximo. Por exemplo, no lugar de $\frac{4}{6}$ estaremos considerando $\frac{2}{3}$ o que é a mesma coisa. Consideramos então, para a solução do problema, que *p* e *q* não são ambos pares.

Observe agora a equação $ap^2 + bpq + cq^2 = 0$ nos seguintes casos:

a) *p* e *q* são ímpares: neste caso, ap^2 é ímpar, bpq é ímpar e cq^2 é ímpar. Como a soma de três números ímpares é ímpar, o resultado não pode ser zero.

b) *p* é par e *q* é ímpar: neste caso, ap^2 é par, bpq é par e cq^2 é ímpar. Como a soma de dois números pares e um ímpar é ímpar, o resultado não pode ser zero.

c) *p* é ímpar e *q* é par: vale o mesmo argumento do caso b).

Demonstramos então que nenhuma fração de numerador e denominador inteiros pode ser raiz da equação $ax^2 + bx + c = 0$ onde *a*, *b* e *c* são inteiros ímpares.

PROBLEMA 5

Um tabuleiro 6 × 6 está coberto com dominós 2 × 1. Mostre que existe uma reta que separa as peças do tabuleiro sem cortar nenhum dominó.

SOLUÇÃO:

Cada dominó é formado por dois quadrados e portanto, se o tabuleiro está inteiramente coberto, 18 dominós foram utilizados. Imagine agora uma reta (horizontal, por exemplo) que separe o tabuleiro em duas partes. Se ela não corta nenhum dominó, está resolvido o problema. Suponha então que ela corte ao meio um dominó. Neste caso, acima desta reta teremos *n* dominós inteiros mais meio dominó, ou seja, teremos acima desta reta $2n + 1$ quadrados, que é um número ímpar. Mas isto é impossível porque se o tabuleiro tem 6 unidades de largura, qualquer reta o dividirá em partes que contém números pares de quadrados acima e abaixo dela. Assim, se uma reta corta um dominó, deverá cortar um outro dominó. Para a divisão do tabuleiro, existem 10 retas possíveis e, se cada uma delas cortar dois dominós, deveríamos ter 20 dominós no tabuleiro. Como eles são apenas 18 então existe uma reta (pelo menos) que não corta nenhum dominó.

Problemas para pesquisa

PROBLEMA 6

Os números naturais de 1 até 1998 são escritos em um imenso quadro negro. Em seguida, um aluno apaga dois quaisquer colocando no lugar sua diferença (não negativa). Depois de muitas operações, um único número ficará escrito no quadro. É possível que esse número seja zero?

PROBLEMA 7

Em uma ilha plana existem 11 cidades numeradas de 1 a 11. Estradas retas ligam 1 a 2, 2 a 3, 3 a 4, ..., 10 a 11 e 11 a 1. É possível que uma reta corte todas as estradas?

OS PROBLEMAS DO VISITANTE MATEMÁTICO

The Mathematical Visitor foi um periódico que existiu nos Estados Unidos entre 1877 e 1896. Era uma revista destinada aos amantes da arte de resolver problemas de Matemática. Publicava problemas propostos pelo seu abnegado editor ou leitores e, em números subseqüentes, trazia as melhores soluções apresentadas. Procurava fortalecer entre os norteamericanos, na época em que sua nação lutava para se inserir no rol dos países mais desenvolvidos, uma tradição há muito existente na Europa: a prática das saudáveis competições matemáticas públicas, instituídas por revistas como a famosa Ladies Diary, da Inglaterra.

Os problemas do The Mathematical Visitor eram, em sua grande maioria, de nível elementar, embora alguns deles exigissem o uso de integrais em sua resolução. Quanto à criatividade e à elegância das questões propostas, a qualidade variava bastante. Num período em que faltavam calculadoras eletrônicas e sobrava lazer para as pessoas, eram muito freqüentes problemas cuja solução requeria muito mais paciência e tempo disponível de que engenhosidade e talento.

Um exemplo de problemas desse tipo é o seguinte, que foi proposto em 1887:

1) Considere a seqüência dos triângulos pitagóricos (triângulos retângulos de lados inteiros) nos quais os catetos são inteiros consecutivos. Ache a expressão geral para os lados n-ésimo triângulo e calcule explicitamente os lados do centésimo. (A resposta da segunda parte envolve números com 76 algarismos.)

Outros problemas computacionais são:

2) Calcular $4^{4^{4}}$.

3) Obter a raiz cúbica de 2 com 100 algarismos decimais!

Mas não se pense que The Mathematical Visitor só trazia perguntas sem graça. Alguns problemas bem elementares lá propostos ainda guardam interesse a são apresentados aqui como desafio aos nossos leitores.

4) Com apenas dois cortes retilíneos e recolagem, transforme um retângulo num quadrado de mesma área, supondo que a razão entre o maior e o menor lado do retângulo é menor do que ou igual a 4.

5) Comprei na feira um queijo que pesou 9 quilos. Desconfiei da pesagem e o vendedor propôs, como compensação, vender-me um queijo igual, desta vez pesado no outro prato da balança. O peso foi de 4 quilos. Ganhei ou perdi na transação? Qual é o verdadeiro peso do queijo?

6) Ache três números inteiros cuja soma é um cubo e a soma de dois quaisquer deles também é um cubo.

7) O doutor A mata 3 pacientes em cada 7 que trata; o doutor B mata 4 em cada 13 e o doutor C mata 5 em cada 19. Qual é a probabilidade de um doente sobreviver se for tratado por esses 3 médicos ao mesmo tempo?

8) Ache quatro inteiros que são quadrados e a soma de dois quaisquer deles ainda é um quadrado. (Observação: nem a redação da revista nem o autor do problema sabiam como resolvê-lo.)

Um dos problemas mais interessantes, propostos em 1881, foi o seguinte:

9) Um vaso de vinho está suspenso sobre outro, de igual capacidade (digamos 1 litro), cheio de água. Por um orifício no fundo de cada, o vinho escorre sobre o vaso de água e a mistura se esvai na mesma velocidade. Quando o vaso de vinho estiver vazio, qual é o volume de água no vaso inferior?

A coleção de problemas do The Mathematical Visitor foi re-editada em 1996 pela Math Pro Press, Westford, Mass., sob o título "Problems and Solutions from The Mathematical Visitor".

Nossa revista aguarda respostas de nossos leitores para os problemas acima propostos, especialmente os de números 4, 5 e 9.

DIVISIBILIDADE, CONGRUÊNCIAS E ARITMÉTICA MÓDULO *n*

Carlos Gustavo Moreira

♦ Nível Avançado

INTRODUÇÃO

Este artigo se propõe a ser uma referência sobre os temas citados no título, que aparecem naturalmente em diversos problemas de Matemática elementar, alguns dos quais serão explicitamente tratados aqui. O estilo é mais conciso do que a maioria dos outros artigos desta revista, o que pode tornar a leitura mais difícil, mas não desanime! Procure entender os enunciados das proposições e os problemas resolvidos e buscar sua propria solução para eles, além de pensar nos problemas propostos e enviar-nos suas soluções. Em caso de qualquer dúvida não deixe de escrever-nos.

Seção 1: Divisão euclidiana e o teorema fundamental da aritmética

Os resultados que seguem têm como base o seguinte fato sobre os inteiros: Dados $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$ existem $q, r \in \mathbb{Z}$ com $0 \le r < b$ e $a = bq + r$. Tais q e r estão unicamente determinados. De fato, $q = [a/b]$ e $r = a - bq$ (aqui [x] denota o único inteiro k tal que $k \le x < k + 1$). Como conseqüência temos a

Proposição 0 (Divisão Euclidiana): Dados $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$ existem $q, r \in \mathbb{Z}$ unicamente determinados tais que $0 \le r < |b|$ e $a = bq + r$ ❑

Definição: Dados dois inteiros a e b , com $a \ne 0$ dizemos que a divide b (denotamos $a \mid b$) se existe c inteiro tal que $b = ac$.

Proposição 1: Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ não ambos nulos existe $d \in \mathbb{N}^*$ tal que $d \mid a$, $d \mid b$ e, para todo $c \in \mathbb{N}^*$, $c \mid a$, $c \mid b \Rightarrow c \mid d$. Além disso existem $x, y \in \mathbb{Z}$ com $d = ax + by$. (Esse d é chamado o máximo divisor comum entre a e $b : d = mdc\ (a, b)$.)

Demonstração: Seja $A = \{k > 0 \mid \exists\, x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $k = ax + by\}$ e seja $d = ax_0 + by_0$ o menor elemento de A. Mostraremos que $d \mid a$. Como $d \in \mathbb{N}^*$, existem $q, r \in \mathbb{Z}$ com $a = dq + r$ e $0 \le r < d$. Queremos mostrar que $r = 0$. De fato, se $r > 0$, $r = a - dq = a\,(1 - qx_0) + b(-qy_0) \in A$, contradizendo o fato de d ser o menor elemento de A. Portanto, $r = 0$ e $a = dq \Rightarrow d \mid a$. Do mesmo modo prova-se que $d \mid b$. Suponha agora que $c \mid a$ e $c \mid b$. Então $c \mid ax_0 + by_0 = d$, como queríamos provar ❑

Lema: Se $mdc\,(q, n) = 1$ e $n \mid qk$ então $n \mid k$.

Prova do Lema: Como $mdc(q, n) = 1$, existem $x, y \in \mathbb{Z}$ com $qx + ny = 1$, logo $qkx + nky = k$, portanto $n \mid k$ (pois $\mid qkx$ e $n \mid nky$) ❑

Corolário: Sejam p um número primo e $a, b \in \mathbb{Z}$. Se $p \mid ab$ então $p \mid a$ ou $p \mid b$ ❑

Teorema fundamental da aritmética: Todo número natural $n \ge 2$ possui uma única fatoração (a menos da ordem dos fatores), como produto de primos.

Demonstração: $n = 2$ é primo. Vamos mostrar a existencia da fatoração por primos por indução: Se n é primo não há o que provar. Se n é composto, $n = ab$, $a, b \in \mathbb{N}$, $a < n$, $b < n$ e, por hipótese de indução, a e b se decompõem como produto de primos, portanto n se decompõe como produto de primos.

Vamos agora mostrar a unicidade, também por indução: Suponha que n admita duas fatorações $n = p_1p_2\ldots p_r$ e $n = q_1q_2\ldots q_s$ como produto de primos. O Corolário acima mostra que, como $p_1 \mid q_1q_2\ldots q_r$, p_1 deve dividir algum q_i e portanto $p_1 = q_i$ (pois são ambos números primos) e, como $n/p_1 = n/q_i < n$ admite uma única fatoração prima, por hipótese de indução, concluímos que a fatoração de n é única ❑

Proposição 2: O conjunto dos números primos é infinito.

Demonstração: Suponha que o conjunto dos números primos seja finito, digamos $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Nesse caso, o número $N = p_1p_2\ldots p_n + 1$ seria maior que todos os primos, mas não divisível por nenhum deles, pois $p_i \mid (p_1p_2\ldots p_n + 1) \Rightarrow p_i \mid 1$, absurdo. Teríamos então um natural $N > 2$ que não seria múltiplo de nenhum primo, contradizendo o teorema fundamental da aritmética ❑

Obs.: As idéias desta seção podem ser utilizadas em situações mais gerais, como no estudo de polinômios (por exemplo com coeficientes racionais), onde existe um algoritmo de divisão, a partir do qual pode-se provar de modo análogo resultados correspondentes aos aqui apresentados sobre máximo divisor comum, existência e unicidade de fatoração.

Seção 2: Congruências

Definição: Sejam $a, b, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$. Dizemos que a é congruente a b (módulo n) (denota-se $a \equiv b$ (módulo n)) se $n \mid (b - a)$

Obs: $a \equiv a$ (módulo n), $a \equiv b$ (módulo n) $\Leftrightarrow b \equiv a$ (módulo n), $a \equiv b$ (módulo n), $b \equiv c$ (módulo n) $\Rightarrow a \equiv c$ (módulo n), ou seja, congruência (módulo n) é uma relação de equivalência.

Proposição: Se $a \equiv b$ (módulo n) e $c \equiv d$ (módulo n) então $a + c \equiv b + d$ (módulo n) e $ac \equiv bd$ (módulo n).

Demonstração: $n \mid (b - a)$, $n \mid (d - c) \Rightarrow n \mid (b + d) - (a + c) \Rightarrow (a + c) \equiv (b + d)$ (módulo n), e $bd - ac = b(d - c) + ((b - a) \Rightarrow n \mid (bd - ac) \Rightarrow bd \equiv ac$ (módulo n) ❑

Definição: Dados $n, a \in \mathbb{Z}$ $n > 0$, definimos $\overline{a} = \overline{a}$ (módulo n) = $= \{k \in \mathbb{Z} \mid k \equiv a$ (módulo n)$\}$.

Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ definimos $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$ e $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{ab}$ (estas operações de soma e produto estão bem definidas pela proposição anterior).

Definimos ainda $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{a}$ (módulo n), $a \in \mathbb{Z}\} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots \overline{n-1}\}$. Cada $\overline{a}$ é chamada uma classe de congruência módulo n.

Definição: Sejam $n, a \in \mathbb{Z}$, $n > 0$. Dizemos que a é *invertível* módulo n se existe $b \in \mathbb{Z}$ com $ab \equiv 1$(módulo n) (ou seja, tal que $\overline{a} \cdot \overline{b} = 1$). Dizemos que $\overline{b}$ é o inverso de $\overline{a}$ em $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Definição: $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* = \{\overline{a} \mid a \in \mathbb{Z}$ e a é invertível (módulo n)$\}$. Obs. a é *invertível* (módulo n) $\Leftrightarrow$ $mdc\ (a, n) = 1$. De fato, $mdc\ (a, n) = 1 \Leftrightarrow \exists\, x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $ax + ny = 1 \Leftrightarrow \overline{a} \cdot \overline{x} = \overline{1}$ (módulo n).

Notação: Dado um conjunto finito X, escrevemos $\# X$ para significar o número de elementos de X.

Definição: A função φ de Euler, $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é definida por
$\varphi(n) = \# (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* = \# \{k \in \mathbb{Z} \mid 0 \le k < n \text{ e } mdc\ (k, n) = 1\}$.

Notemos que se p é um número primo e $k \in \mathbb{N}$ então $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k\ (1-1/p)$. De fato, $mdc\ (r, p^k) = 1$ se e só se p não divide r. Logo $\varphi(p^k) = \#\{r \in \mathbb{Z} \mid 0 \le r < p^k \text{ e } mdc\ (r, p^k) = 1\} = \# \{r \in \mathbb{Z} \mid 0 \le r < p^k\} -$
$\# \{r \in \mathbb{Z} \mid 0 \le r < p^k \text{ e } p \mid r\} = p^k - p^{k-1}$.

Definição: n números inteiros $a_1, a_2, \ldots a_n$ formam um sistema completo de resíduos (*s.c.r.*) módulo n se $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}\} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ isto é, se os a representam todas as classes de congruência módulo n (por exemplo, $0,1,2,\ldots n-1$ formam um *s.c.r.* (módulo n)).
$\varphi(n)$ números inteiros $b_1, b_2, \ldots b_{\varphi(n)}$ formam um sistema completo de invertíveis (*s.c.i.*) módulo n se $\{\overline{b_1}, \overline{b_2}, \ldots \overline{b_{\varphi(n)}}\} = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$, isto é, se os b_i representam todas as classes de congruências invertíveis módulo n.

Proposição: Sejam $q, r, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$, q invertível módulo n, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ um *s.c.r.* (módulo n) e $b_1, b_2, \ldots, b_{\varphi(n)}$ um *s.c.i.* (módulo n).
Então $qa_1 + r, qa_2 + r, \ldots, qa_n + r$ formam um *s.c.r.* (módulo n) e
$qb_1, qb_2, \ldots qb_{\varphi(n)}$ formam um *s.c.i.* (módulo n).

Demonstração: Vamos provar que se $a_1, \ldots a_n$ formam um *s.c.r.* (módulo n) então $qa_1 + r, \ldots qa_n + r$ formam um *s.c.r.* (módulo n). Basta provar que $qa_i + r \equiv qa_j + r$ (módulo n) $\Rightarrow i = j$, pois nesse caso teremos n classes de congruências distintas módulo n, que devem ser todas as classes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Seja $y \in \mathbb{Z}$ tal que $qy \equiv 1$ (módulo n).

Temos $qa_i = qa_i + r - r \equiv qa_j + r - r = qa_j$ (módulo n) $\Rightarrow qya_i \equiv qya_j$ (módulo n) $\Rightarrow a_i \equiv a_j$ *(módulo n)* $\Rightarrow i = j$.

Seja agora $b_1, b_2, \ldots b_{\varphi(n)}$ um *s.c.r.* (módulo n). Temos que qb_i é invertível módulo n. para todo $i, 1 \le i \le \varphi(n)$, pois se x_i é tal que $b_i x_i \equiv 1$ (módulo n). então $(qb_i)\,(x_i y) = (qy)\,(b_i x_i) \equiv 1$ (módulo n). Por outro lado, se $qb_i \equiv qb_j$ (módulo n) então $b_i \equiv yqb_i \equiv yqb_j \equiv b_j$ (módulo n) $\Rightarrow i = j$, e portanto $qb_1, qb_2, \ldots qb_{\varphi(n)}$ é um *s.c.i.* (módulo n) ❑

Teorema (Euler): Sejam $a, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$, tais que $mdc\,(a, n) = 1$. Então $a^{\varphi(n)} \equiv 1$ (módulo n).

Demonstração: Seja $b_1, b_2, \ldots b_{\varphi(n)}$ um *s.c.i.* (módulo n) Pela proposição anterior, $(ab_1), (ab_2), \ldots, (ab_{\varphi(n)})$ formam um *s.c.i.* (módulo n), e temos $\{\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_{\varphi(n)}\} = \{\overline{ab_1}, \overline{ab_2}, \ldots \overline{ab}_{\varphi(n)}\} = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \Rightarrow \overline{b}_1 \cdot \overline{b}_2 \ldots \overline{b}_{\varphi(n)} = \overline{ab_1} \cdot \overline{ab_2} \ldots \overline{ab}_{\varphi(n)} = \overline{a}^{\varphi(n)} \cdot \overline{b}_1\ \overline{b}_2 \ldots \overline{b}_{\varphi(n)} \Rightarrow \overline{b}_1 \cdot \overline{b}_2 \ldots \overline{b}_{\varphi(n)}\,(\overline{a}^{\varphi(n)} - \overline{1}) = 0 \Rightarrow \overline{a}^{\varphi(n)} = \overline{1}$ pois $b_1, b_2, \ldots b_{\varphi(n)}$ são invertíveis (módulo n) $\Rightarrow a^{\varphi(n)} \equiv 1$ (módulo n) ❑

Corolário: (Pequeno Teorema de Fermat): Se $a \in \mathbb{Z}$ e p é primo então $a^p \equiv a$ (módulo p).

Prova : Se $p \mid a$, então $a^p \equiv a \equiv 0$ (módulo p).

Se p não divide a, então $mdc\,(a, p) = 1 \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1$ (módulo p) $\Rightarrow a^p \equiv a$ (módulo p) ❑

Exercício resolvido: Exiba $n \in \mathbb{N}$ tal que 2^n tenha mais de duas mil casas decimais e tenha entre suas 2000 últimas casas decimais 1000 zeros consecutivos.

Solução: $2^{\varphi(5^{2000})} \equiv 1$ (módulo 5^{2000}), pelo teorema de Euler. Portanto, existe $b \in \mathbb{N}$ com $2^{\varphi(5^{2000})} = 5^{2000}\, b + 1$, e teremos $2^{2000+\varphi(5^{2000})} = 10^{2000}\, b + 2^{2000}$, e portanto os 2000 últimos dígitos de $2^{2000+\varphi(5^{2000})}$ coincidem com a representação decimal de 2^{2000}, que tem no máximo 667 dígitos, pois $2^3 < 10 \Rightarrow 2^{2000} < 2^{3.667} < 10^{667}$. Desta forma , $2^{2000+\varphi(5^{2000})}$ tem pelo menos $2000 - 667 = 1333$ zeros consecutivos dentre as 2000 últimas casas decimais, de modo que $n = 4\cdot 5^{1999} + 2000$ satisfaz as condições do enunciado (pois $\varphi(5^{2000}) = 4\cdot 5^{1999}$) ❑

Teorema Chinês dos restos: Se *mdc* $(m, n) = 1$ então
$f: \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,
$f(\,\overline{a}$ (módulo n)) = ($\overline{a}$ (módulo m), $\overline{a}$ (módulo n))
é uma bijeção.

Demonstração: f está bem definida, pois se $a = b$ (módulo mn) então $a \equiv b$ (módulo m) e $a \equiv b$ (módulo n). Como $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ têm mn elementos cada, é suficiente verificar que f é injetiva. E, de fato, se $a \equiv b$ (módulo m) e $a \equiv b$ *(módulo n)* então $m \mid (b - a)$ e $n \mid (b - a) \Rightarrow b - a = mk$, $n \mid mk \Rightarrow n \mid k$, pois *mdc* $(m, n) = 1 \Rightarrow mn \mid (b - a) \Rightarrow a \equiv b$ (módulo mn) ❑

***Corolário*:** Se $m_1, m_{2,\dots,}\, m_r \geq 1$ são inteiros, e *mdc* $(m_i, m_j) = 1$ para $i \neq j$ então $f: \mathbb{Z}/m_1\, m_2,\dots m_r\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m_2\mathbb{Z} \times\dots\times \mathbb{Z}/m_r\mathbb{Z}$,
$f(\,\overline{a}$ (módulo $m_1 \cdot m_2 \,.\, \dots.\, m_r$)) = ($\overline{a}$ (módulo m_1), … , $\overline{a}$ (módulo m_r))
é uma bijeção ❑

Notemos que este Corolário mostra que, dados inteiros $a_1, a_2, \dots a_r$, existe um inteiro n com $n = a_1$ (módulo m_1), $n \equiv a_2$ (módulo m_2), …, $n \equiv a_r$ (módulo m_r).

Proposição: Temos $f((\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^*) = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ para a função f definida acima.

Demonstração: Isto segue do fato de que a é primo com mn se e só se a é primo com m e a é primo com n ❑

Corolário: *mdc* $(m, n) = 1 \Rightarrow \varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$ ❑

Como conseqüência, se $n = p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ *onde* $p_1, p_2, \ldots p_k$ são primos distintos, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k \in \mathbb{N}^*$ então $\varphi(n) = n\,(1-1/p_1)\,(1-1/p_2)\ldots(1-1/p_k)$.

Em particular, se $n \geq 3$ então $\varphi(n)$ é par ❑

Vamos mostrar um problema cuja solução usa de modo não trivial o teorema chinês dos restos:

Problema*:* Prove que dado $n \in \mathbb{N}$ existe um conjunto de n elementos $A \subset \mathbb{N}$ tal que para todo $B \subset A$, $B \neq \emptyset$, $\sum_{x \in B} x$ é uma potência não trivial (isto é, um número da forma m^k, onde m, k são inteiros maiores ou iguais a 2), ou seja, $A = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ tal que $x_1, x_2, \ldots x_n, x_1 + x_2, x_1 + x_3, \ldots, x_{n-1} + x_n, \ldots, x_1 + x_2 + \ldots x_n$ são todos potências não triviais.

Solução*:* $A = \{4\}$ é solução para $n = 1$, $A = \{9,16\}$ é solução para $n = 2$. Vamos provar a existencia de um tal conjunto por indução em n. Suponha que $A=\{x_1, \ldots, x_n\}$ é um conjunto com n elementos e para todo $B \subset A$, $B \neq \emptyset$, $\sum_{x \in B} x = m_B^{k_B}$ Vamos mostrar que existe $c \in \mathbb{N}$ tal que o conjunto $\tilde{A} = \{cx_1, cx_2, \ldots, cx_n, c\}$ satisfaz o enunciado.

Seja $\ell = mmc\ \{k_B, B \subset A, B \neq \emptyset\}$ o mínimo múltiplo comum de todos os exponentes k_B.

Para cada $B \subset A$, $B \neq \emptyset$ associamos um número primo $p_B > \ell$, de forma que $B_1 \neq B_2 \Rightarrow p_{B_1} \neq p_{B_2}$, e associamos um natural r com $r_B \equiv 0$ (módulo p_x), $\forall X \neq B$, $\ell r_B + 1 \equiv 0$ (módulo p_B) (tal r_B existe pelo teorema chinês dos restos), e tomamos

$$c = \prod_{\substack{B \subset A \\ B \neq \emptyset}} (1 + m_B^{k_B})^{\ell r_B}$$

Como c é uma potência ℓ-ésima, c é uma potência k_B-ésima para todo $B \subset A$, $B \neq \emptyset$, portanto, para $B' \subset \{cx_1, cx_2, \ldots, cx_n\}$, $B' \neq \emptyset$, teremos $B' = \{cx \mid x \in B\}$ para algum $B \subset A$, $B \neq \emptyset$. Logo $\sum_{x \in B'} x$ será uma potência k_B-ésima.

Além disso,

$$\sum_{X \in B'U\{c\}} x = c(1+m_B^{K_B}) = \left[\prod_{\substack{X \subset A \\ X \neq \varnothing, B}} (1+m_X^{K_X})^{\ell r_X} \right] \cdot (1+m_B^{K_B})^{\ell r_B + 1},$$

que é uma potência p_B-ésima, pois r_X é múltiplo de p_B para $X \neq B$ e $\ell r_B + 1$ é múltiplo de p_B ❑

Seção 3: Ordens e raízes primitivas.

Dados $n \in \mathbb{N}^*$ e $a \in \mathbb{Z}$ com mcd $(a, n) = 1$, definimos **a ordem de *a* módulo *n***, $ord_n\, a := min\ \{t \in \mathbb{N}^* \mid a^t \equiv 1 (\text{módulo } n)\}$. Dado $\overline{a} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ definidos
$ord\ \overline{a} = ord_n\, a.$

Proposição: $\{t \in \mathbb{N}^* \mid a^t \equiv 1(\text{módulo } n)\} = \{k.ord_n\, a,\ k \in \mathbb{N}^*\}$.

Demonstração: Como $a^{ord_n a} \equiv 1$ (módulo n), para todo $k \in \mathbb{N}$ tem-se $a^{k.ord_n a} = (a^{ord_n a})^k \equiv 1^k = 1$ (módulo n). Por outro lado, se $t \in n,\ a^t \equiv 1$ (módulo n), existe $k \in \mathbb{N}$ com
$t = k \cdot ord_n a + r, 0 \leq r < ord_n a \Rightarrow a^t = a^{k.ord_n a} \cdot a^r \equiv 1.a^r \equiv a^r$ (módulo n) $\Rightarrow a^r \equiv 1$ (módulo n), portanto $r = 0$ (pois $0 < r < ord_n a$ contradiria a minimalidade de $ord_n a$), e $t = k.\ ord_n a$ ❑

Corolário: $ord_n a \mid \varphi(n)$ ❑

Definição: Se $ord_n a = \varphi(n)$, dizemos que a é **raiz primitiva módulo *n***.

Exemplos: 2 é raiz primitiva módulo 5, pois $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, que é a primeira potência de 2 congruente a 1 módulo 5 e $4 = \varphi(5)$.

- 1 é raiz primitiva módulo 2, pois $ord_2\ 1 = 1 = \varphi(2)$.
- 3 é raiz primitiva módulo 4, pois $ord_4\ 3 = 2 = \varphi(4)$.

Proposição 3.1: a é raiz primitiva módulo $n \Leftrightarrow \{\ \overline{a}^{\,t},\ t \in \mathbb{N}\} = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

Demonstração: Para todo $a \in \mathbb{Z}$ com $mdc\ (a, n) = 1$ temos $\{\ \bar{a}^{\,t}, t \in \mathbb{N}\} \subset (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. Se a é raiz primitiva módulo n então os números $1, a, a^2, \ldots a^{\varphi(n)-1}$ são distintos (módulo n) pois $a^i = a^j$ (módulo n), com $0 \le i < j < \varphi(n) \Rightarrow a^{j-i} \equiv 1$ (módulo n) com $0 < j - i < \varphi(n)$, absurdo $\Rightarrow \{a^t, t \in \mathbb{N}\} = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.
Por outro lado, $\#\{\ \bar{a}^{\,t}, t \in \mathbb{N}\} \le ord_n a$ (o argumento acima mostra que de fato vale a igualdade), e portanto
$\{\ \bar{a}^{\,t}, t \in \mathbb{N}\} = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \Rightarrow ord_n a = \varphi(n)$ ❑

Corolário 1: Se m divide n e a é a raiz primitiva módulo n então a é raiz primitiva módulo m ❑

Corolário 2: Se $k \ge 3$, então não existe nenhuma raiz primitiva módulo 2^k.

Prova: Pelo corolário anterior, basta provar que não existe raiz primitiva módulo 8, e isso segue do fato que se a é ímpar,
$a = 2r + 1, r \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^2 = 4r\,(r + 1) + 1 \equiv 1$ (módulo 8) ❑

Proposição 3.2: Sejam p um número primo, e $a \in \mathbb{Z}$ raiz primitiva módulo p. Então a ou $a + p$ é raiz primitiva módulo p^2.

Demonstração: Por hipótese, $ord_p a = ord_p(a + p) = \varphi(p) = p - 1$. Portanto $p - 1 \mid ord_{p^2} a$ (pois $a^t \equiv 1$ (módulo p^2) $\Rightarrow a^t \equiv 1$(módulo p)), e, como

$ord_{p^2} a \mid \varphi(p^2) = p(p - 1)$, devemos ter $ord_{p^2} a = p - 1$ ou $ord_{p^2} a = p\,(p - 1) = \varphi(p^2)$. Do mesmo modo, $ord_{p^2}(a + p) = p - 1$ ou $ord_{p^2}(a + p) = p(p - 1) = \varphi(p^2)$.
Basta provar, portanto, que $ord_{p^2} a \ne p - 1$ ou $ord_{p^2}(a + p) \ne p - 1$.
Suponha que $ord_{p^2} a = p - 1$. Portanto, $a^{p-1} \equiv 1$ (módulo p^2), e então $(a + p)^{p-1} = a^{p-1} + (p - 1)\,pa^{p-2} + C_{p-1}^2 a^{p-3}.\,p^2 + \ldots \equiv 1 + (p - 1)\,pa^{p-2}$ (módulo p^2), portanto $(a + p)^{p-1}$ não é congruente a 1(módulo p^2), pois p^2 não divide $(p - 1)\,pa^{p-2}$, donde $ord_{p^2}(a + p) \ne p - 1$ ❑

***Proposição 3.3**:* Se p é um número primo ímpar e a é raiz primitiva módulo p^2 então a é raiz primitiva módulo p^k para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração: temos $a^{p-1} \equiv 1$ (módulo p), mas a^{p-1} não é congruente a 1 (módulo p^2), portanto $a^{p-1} = 1 + b_1 p$, onde p não divide b_1. Vamos mostrar por indução que $a^{p^{k-1}(p-1)} = 1 + b_k p^k$, onde p não divide b_k, para todo $k \geq 1$: Temos $a^{p^k(p-1)} = (a^{p^{k-1}(p-1)})^p = (1 + b_k p^{k-1})^p =$

$= 1 + b_k p^{k+1} + C_p^2 b_k^2 p^{2k} + \ldots \equiv 1 + b_k p^{k+1}$ (módulo p^{k+2}). Logo

$a^{p^k(p-1)} = 1 + b_k p^{k+1}$, com $b_{k+1} \equiv b_k$ (módulo p). Segue-se que p não divide b_{k+1}.

Vamos agora mostrar por indução que a é raiz primitiva módulo p^k para todo $k \geq 2$. Suponha que a seja raiz primitiva módulo p^k. Então temos $p^{k-1}(p-1) = \varphi(p^k) = ord_{p^k} a \mid ord_{p^{k+1}} a \mid \varphi(p^{k+1}) = p^k(p-1)$. Portanto,

$ord_{p^{k+1}} a = p^{k-1}(p-1)$ ou $ord_{p^{k+1}} a = p^k(p-1) = \varphi(p^{k+1})$, mas o primeiro caso é impossível, pois $a^{p^{k-1}(p-1)} = 1 + b_k p^k$,que não é congruente a 1 módulo p^{k+1}, pois p não divide b_k. Portanto $ord_{p^{k+1}} a = \varphi(p^{k+1})$ e a é raiz primitiva módulo p^{k+1} ❑

Exemplo: 2 é raiz primitiva módulo 5^k, $\forall k \in \mathbb{N}$. De fato, 2 é raiz primitiva módulo 5, e, como $2^4 = 16 \neq 1$ (módulo 25), 2 é raiz primitiva módulo $25 = 5^2$ (como na proposição 3.2). Portanto, pela proposição 3.3, 2 é raiz primitiva módulo 5^k, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Exercício resolvido: Mostre que existe n natural tal que os mil últimos dígitos de 2^n pertencem a $\{1, 2\}$.

Solução: Observamos inicialmente que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe um número m_k de k algarismos, todos 1 ou 2, divisível por 2^k.

De fato, $m_1 = 2$ e $m_2 = 12$ satisfazem o enunciado.

Seja $m_k = 2^k \cdot r_k$, $r_k \in \mathbb{N}$. *Se* r_k é par, tome $m_{k+1} = 2 \cdot 10^k + m_k = 2^{k+1}(5^k + r_k/2)$, e se r_k é ímpar, tome $m_{k+1} = 10^k + m_k = 2^{k+1}(5^k + r_k)/2$.

Como $m_{1000} \equiv 2$ (módulo 10), 5 não divide $r_{1000} = m_{1000}/2^{1000}$. Como 2 é raiz primitiva módulo 5^{1000}, existe $k \in \mathbb{N}$ *com* $2^k \equiv r_{1000}$ (módulo 5^{1000}). Logo $2^k = b \cdot 5^{1000} + r_{1000}$, para algum $b \in \mathbb{N}$. Portanto, $2^{k+1000} = b \cdot 10^{1000} + 2^{1000} \cdot r_{1000} = b \cdot 10^{1000} + m_{1000}$, e as 1000 últimas casas de 2^{k+1000} são as 1000 casas de m_{1000}, que pertencem todas a $\{1, 2\}$ ❑

Observação: Se p é primo ímpar, $k \in \mathbb{N}$ e a é um inteiro ímpar tal que a é raiz primitiva módulo p^k então a é raiz primitiva módulo $2p^k$, pois $\varphi(p^k) = ord_{p^k} a \mid ord_{2p^k} a \mid \varphi(2p^k) = \varphi(p^k) \Rightarrow ord_{2p^k} a = \varphi(2p^k)$. Isso implica que se a é raiz primitiva módulo p^k então a ou $a + p^k$ é raiz primitiva módulo $2p^k$ (pois a e $a + p^k$ são raízes primitivas módulo p^k e um deles é ímpar.) ❑

Proposição 3.4: Se $n = ab$, com $a \geq 3$ e $b \geq 3$ inteiros tais que $mdc(a, b) = 1$, então não existe raiz primitiva módulo n.

Demonstração: Temos $\varphi(n) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ e, como $a \geq 3$ e $b \geq 3$, $\varphi(a)$ e $\varphi(b)$ são pares. Se $mdc\ (k, n) = 1$ então temos $k^{\varphi(n)/2} = (k^{\varphi(b)/2})^{\varphi(a)} \equiv 1$ (módulo a), e $k^{\varphi(n)/2} = (k^{\varphi(a)/2})^{\varphi(b)} \equiv 1$ (módulo b). Assim, $k^{\varphi(n)/2} = 1$(módulo n), e portanto

$ord_n k \mid \varphi(n)/2 < \varphi(n)$ ❑

Teorema: Existe alguma raiz primitiva módulo n se, e só se,
$n = 2$, $n = 4$, $n = p^k$ ou $n = 2p^k$ onde p é primo ímpar.

Prova: Pelos resultados anteriores, basta provar que se p é primo ímpar então existe raiz primitiva módulo p, ou seja, existe $\overline{a} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ com $\text{ord}_p\, a = p - 1$.
Para cada $\overline{a} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, tem-se $\text{ord}_p\, a \mid (p - 1)$. Seja d um divisor de $p - 1$.
Definimos $N(d) = \#\{\overline{a} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \mid \text{ord}_p\, a = d\}$.
Temos portanto $p - 1 = \sum_{d \mid p-1} N(d)$. O resultado seguirá dos dois lemas seguintes:

Lema 1: $N(d) \leq \varphi(d)$ para todo d divisor de $p - 1$.

Prova: Se $N(d) > 0$ então existe $\overline{a} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ com $ord_p\, a$. Se $ord_p\, a = d$, então $\overline{a}^d = \overline{1}$ e, para $0 \le k < d$, as classes de a^k são todas distintas módulo p, e $(\overline{a}^k)^d = \overline{1}$. Como a equação $x^d - \overline{1} = 0$ tem no máximo d raízes distintas em $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (pois $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ é um corpo), suas raízes são exatamente $\overline{a}^k$, $0 \le k < d$. Por outro lado, $ord_p\, a^k = d \Rightarrow mcd(k, d) = 1$, pois se $r > 1$ é tal que $r \mid k$ e $r \mid d$ então $(a^k)^{d/r} = (a^d)^{k/r} \equiv 1(\text{módulo } p)$, logo $\text{ord}_p(a^k) \le d/r < d$. Desta forma, $\{\overline{b} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \mid \text{ord}_p b = d\} \subset \{\overline{a}^k, 0 \le k < d \text{ e } mcd\,(k,d) = 1\}$, portanto $N(d) \le \varphi(d)$ ❑

Lema 2: $\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prova do Lema 2: Considere os n números racionais $1/n, 2/n, \ldots, n/n$. Ao simplificá-los, aparecem exatamente $\varphi(d)$ deles com denominador d, para cada divisor d de n. Portanto, $\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n$ ❑

Fim da prova do teorema:

Do Lema 2 segue que $\sum_{d \mid p-1} \varphi(d) = p - 1$ e, como $p - 1 = \sum_{d \mid p-1} N(d)$ e $N(d) \le \varphi(d)$ para todo d, devemos ter $N(d) = \varphi(d)$ para todo d. Em particular, $N(p-1) = \varphi(p-1) > 0 \Rightarrow$ existem raízes primitivas módulo p ❑

PROBLEMAS

1) Prove que existem infinitos números primos congruentes a 3 módulo 4.
2) Determine todos os n naturais tais que $(2^n - 1)/n$ é inteiro.
3) Determine todos os n naturais tais que $(2^n + 1)/n^2$ é inteiro.
4) Prove que se a e b são naturais e $(a^2 + b^2) / (ab + 1)$ é inteiro então $(a^2 + b^2) / (ab + 1)$ é quadrado perfeito.
5) Sejam $a, n \in \mathbb{N}^*$. Considere a sequência (x_n) definida por $x_1 = a$, $x_{k+1} = a^{x_k}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Mostre que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_{k+1} \equiv x_k$ (módulo n), para todo $k \ge N$.

Obs.: Os problemas 3 e 4 foram propostos na 31ª. e na 29ª. Olimpíada Internacional de Matemática (1990 e 1988) respectivamente.

SOLUÇÕES DE PROBLEMAS PROPOSTOS EUREKA! N°1

✐ *Publicamos aqui algumas das respostas enviadas por nossos leitores.*

1) Mostre que, dado um conjunto de n pessoas, existem duas que possuem o mesmo número de amigos entre as pessoas do conjunto.

SOLUÇÃO

Primeira Hipótese: há apenas uma única pessoa sem amigos; logo entre as $n - 1$ pessoas restantes, cada pessoa é amiga de no mínimo uma pessoa e no máximo $n - 2$ pessoas. Seja $f : P \to Q$ onde P = conjunto das pessoas restantes e Q = conjunto dos possíveis números de amigos de uma determinada pessoa em P, ou seja:

$P = \{ p_1, \ p_2, \ldots, p_{n-1}\}$

$Q = \{ 1, 2, 3, \ldots, n - 2\}$

Observe que há $n - 2$ valores no conjunto Q para $n - 1$ valores em P ; isto quer dizer que $\exists \ n_1, \ n_2 \in P$ tais que $f(n_1) = f(n_2)$.

Segunda Hipótese: Suponha que todas as n pessoas tenham amigos entre si, ou seja:

$P = \{ p_1, \ p_2, \ldots, p_n\}$ e $Q = \{ 1, 2, 3, \ldots, n - 1\}$

Observe que agora o conjunto Q possui $n - 1$ valores, pois cada pessoa de P possui no mínimo 1 amigo e no máximo $(n - 1)$ amigos entre as $(n - 1)$ pessoas restantes. Pelo mesmo motivo da primeira hipótese $\exists \ n_1, \ n_2 \in P$ tais que $f(n_1) = f(n_2)$.

Conclusão: há pelo menos duas pessoas com a mesma quantidade de amigos.

2) Em uma pista circular há postos de gasolina, e o total de gasolina que há nos postos é exatamente o suficiente para um carro dar uma volta. Prove que existe um posto de onde um carro com o tanque inicialmente vazio pode partir e conseguir dar uma volta completa na pista (parando para reabastecer nos postos).

3) O Professor Carlos Alberto da Silva Victor observou que o problema 3 estava com o enunciado errado (de fato, n^{1998} é um quadrado

perfeito e portanto deve ser congruente a 0 ou a 1 módulo 4, não podendo pois terminar por 11 na representação decimal.)
O enunciado correto é:
Prove que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que os 1000 **primeiros** dígitos de n^{1998} são iguais a 1.

4) Escreva 1998 como soma de (um número arbitrário de) parcelas de modo que o produto das parcelas seja o maior possível.

SOLUÇÃO
Observe inicialmente que, dado $n \in \mathbb{N}$,

(i) se n ($n > 4$) é par, temos $\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} > n$

(ii) se n ($n > 3$) é ímpar, temos $\left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right) > n$

Sejam $1998 = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots n_k$ e
$P = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots n_k$
Com as observações (i) e (ii) devemos ter $n_i \in \{1, 2, 3, 4\}$ e como $4 = 2 \cdot 2$ podemos substituir 4 por "2 + 2" e teremos $n_i \in \{1, 2, 3\}$; logo $P = 1^\alpha \cdot 2^\beta \cdot 3^\delta$. É evidente que $\alpha = 0$; pois se $\alpha = 1$, "1 + 2" pode ser substituído por um 3 e "1 + 3" pode ser substituído por "2 + 2". Também $\beta \le 2$, pois "2 + 2 + 2" pode ser substituído por "3 +3" ($3 \cdot 3 > 2 \cdot 2 \cdot 2$) e conseqüentemente $P = 2^\beta \cdot 3^\delta$ com ($\beta = 1$ ou 2). Como $1998 = 3 \cdot 666 + 0$, $P = 3^{666}$ e $S = \underbrace{3 + 3 + 3 + \ldots + 3}_{666 vezes}$

5) Sejam $a > 0$ e $P_1P_2P_3P_4P_5$ uma poligonal aberta contida em um dos semiplanos determinados pela reta $\overline{P_1P_5}$. Prove que existem pontos P_6 e P_7 no plano, com $\overline{P_5P_6} = a$, de modo que é possível ladrilhar o plano com infinitos ladrilhos congruentes ao heptágono $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$.

6) Mostre que toda seqüência com $n^2 + 1$ elementos possui uma subseqüência crescente com $n + 1$ elementos ou uma subseqüência decrescente com $n +1$ elementos.

7) Prove que $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{1998}}}} < 2$

SOLUÇÃO

Definamos a função $\varphi : \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{Z}$ tal que

$$\varphi(1) = 2$$
$$\varphi(n+1) = \varphi(n)^2 - n,\ n \geq 1$$

Temos que $1 < \varphi(1) = 2$
$2 < \varphi(2) = \varphi(1)^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3$

Mostraremos que agora por indução que $n < \varphi(n)$ para todo $n \geq 3$

- $\varphi(3) = \varphi(2)^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7$. Logo, $3 < \varphi(3)$
- (Hipótese de indução) suponhamos que $n < \varphi(n)$

como $0 < n < \varphi(n)$, segue que $n^2 < \varphi(n)^2$ isto é, $n^2 < \varphi(n+1) + n$. Dai, $n^2 - n < \varphi(n+1)$
Mas $n + 1 < n^2 - n$ se e somente se $0 < n^2 - 2n - 1$ se e somente se $0 < n^2 - 2n + 1 - 2$ se e somente se $0 < (n-1)^2 - 2$. Esta última desigualdade é verdadeira se $n \geq 3$
Portanto, se $n \geq 3$, $n+1 < n^2 - n < \varphi(n+1)$ e dai $n+1 < \varphi(n+1)$. Pelo princípio de indução, segue que $n < \varphi(n)$ para todo $n \geq 3$ como $\sqrt{n} \leq n$ para todo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ e daí, $\sqrt{n} \leq \varphi(n)$ para todo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$

Portanto,
$$\sqrt{1998} < \varphi(1998)$$
$$\sqrt{1998} < \varphi(1997)^2 - 1997$$
$$1997 + \sqrt{1998} < \varphi(1997)^2$$
$$\sqrt{1997+\sqrt{1998}} < \varphi(1997) \text{ pois } 0 < \sqrt{1997} < \varphi(1997).$$

Prosseguindo desta maneira, chegaremos a

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{1998}}}} < \varphi(1) = 2$$

8) Considere um torneio de xadrez envolvendo brasileiros e argentinos em que cada jogador joga contra todos os outros exatamente uma vez. Ao final do torneio, cada jogador obteve metade dos pontos que conquistou jogando contra brasileiros e metade jogando contra argentinos. Prove que o número total de jogadores do torneio é um quadrado perfeito (obs: cada vitória vale 1 ponto, empate 1/2 ponto e derrota 0 ponto).

SOLUÇÃO

Sejam k o número de brasileiros e n o número de argentinos no torneio. Cada jogador brasileiro jogou $k - 1$ partidas contra brasileiros. Observe que o número de vitórias, o número de empates e o número de derrotas (de cada jogador brasileiro contra jogadores brasileiros) somadas deve ser igual a $k - 1$.

(i) Seja s o número total de vitórias ocorridas *entre brasileiros* e E o número de empates, logo:
$2s + E = k\,(\,k - 1)$; pois o número de vitórias é igual ao número de derrotas.

(ii) Usando a mesma idéia do item (i) para os argentinos, temos:
$2s' + E' = n\,(\,n - 1)$; onde s' é o número total de vitorias *entre argentinos* e E' o número total de empates entre argentinos.

(iii) Sejam $P = s + \frac{E}{2}$ e $P' = s + \frac{E'}{2}$, os totais de pontos obtidos nos itens (i) e (ii) entre brasileiros e entre argentinos, respectivamente.

(iv) Suponha agora que os jogos entre brasileiros e argentinos; logo cada brasileiro joga n partidas com os argentinos e cada argentino jogou k partidas com os brasileiros.
Seja p o total de vitórias que os brasileiros obtiveram com os argentinos e q o total de empates que os brasileiros obtiveram com os argentinos, logo $2p + q = nk$.
Como o total de pontos de cada brasileiro, metade foi contra brasileiros e outra metade entre argentinos, temos $P = p + \frac{q}{2}$
Sejam p' o total de vitórias que os argentinos obtiveram contra os brasileiros e q' o total de empates que os argentinos obtiveram contra os brasileiros, logo:

$2p' + q' = n\,k$ e também $P' = p' + \dfrac{q'}{2}$.

De (i), (ii), (iii) e (iv) temos:

$$\begin{cases} P = s + \dfrac{E}{2} = p + \dfrac{q}{2} \Rightarrow 2s + E = 2p + q \\ P' = s' + \dfrac{E'}{2} = p' + \dfrac{q'}{2} \Rightarrow 2s' + E = 2p' + q' \end{cases} \qquad \text{(v)}$$

Somando (v) teremos:

$$\underbrace{2s + E}_{\downarrow} + \underbrace{2s' + E'}_{\downarrow} = \underbrace{2p + q}_{\downarrow} + \underbrace{2p' + q'}_{\downarrow}$$

$$k(k-1) \;+\; n(n-1) = \;\; nk \;\; + \;\; nk$$

$n + k = (n - k)^2$ ou seja o total de jogadores é um quadrado perfeito:

Nota: Para cada n, k com $n + k = (n - k)^2$ é possível construir torneios com k brasileiros e n argentinos satisfazendo as condições do enunciado. Note também que se $n + k = t^2$ então $n = \dfrac{t^2 + t}{2}$ e $k = \dfrac{t^2 - t}{2}$.

9) Prove que todo número racional positivo pode ser escrito como soma de um certo número de frações distintas de numerador 1.

SOLUÇÃO

(i) Seja inicialmente a fração $\dfrac{p}{q} < 1$, logo $\exists\ n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n} \le \dfrac{p}{q} < \dfrac{1}{n-1}$, observe que para $n \ge 2$, temos: $\dfrac{p}{q} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{np - q}{nq}$.

Nós podemos repetir o processo inicial para a fração $\dfrac{np - q}{nq}$ até encontrarmos a fração inicial como uma soma de frações com numeradores iguais a 1; observe também que $np - q < p$, ou seja o numerador da fração $\dfrac{np-q}{nq}$ é menor do que o numerador da fração original e já que os numeradores dessas frações não podem decrescer indefinidamente, este procedimento deverá terminar com um número finito de frações com numeradores iguais a 1. Resta então mostrar que essas frações são todas distintas; se não vejamos:

$$\frac{np-q}{nq} = \frac{p}{q} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} \le \frac{1}{n} \quad (n \ge 2);$$

então quando $\dfrac{np-q}{nq}$ é escrita como uma soma de frações de numeradores iguais a 1, todos os denominadores dessas frações são maiores do que n, mostrando portanto que essas frações são todas distintas.

(ii) Seja $\dfrac{p}{q} > 1$, então $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \le \frac{p}{q} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1}$$

logo: $\dfrac{p}{q} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{n} + \dfrac{\theta}{\varphi}$, com $\dfrac{\theta}{\varphi} < \dfrac{1}{n+1} < 1$,

usando o ítem (i) podemos expandir $\dfrac{\theta}{\varphi}$ como uma soma finita de frações unitárias cujos denominadores são maiores que "$n + 1$".

Soluções dos problemas 1, 4, 8 e 9 enviadas por Carlos Alberto da Silva Victor, Nilópolis, Rio de Janeiro-RJ. Solução do problema 7 enviada por Manuel João de Jesus Almeida, Rio de Janeiro-RJ. Agradecemos também a participação de Carlos Eduardo Cardoso Borges, Wayne L. Silva de Paula, Marco Rogério Vieira e Vicente Wilson Moura Gaeta. Continuamos esperando as soluções dos problema 2, 3, 5 e 6.

PROBLEMAS PROPOSTOS

✉ *Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e sugestões de novos problemas para os próximos números.*

10) Suponha que temos k moedas, todas iguais exceto por uma que tem peso ligeiramente diferente das anteriores (não se sabe se maior ou menor), e uma balança de dois pratos.

a) Mostre que se $k \le \frac{3^n - 3}{2}$ é possível determinar com n pesagens qual é a moeda diferente, e se ela é mais leve ou mais pesada que as outras.

b) Mostre que se $k = \frac{3^n - 1}{2}$ é possível determinar com n pesagens qual é a moeda diferente, mas nem sempre é possível dizer se ela é mais leve ou mais pesada que as outras.

c) Mostre que se $k > \frac{3^n - 1}{2}$ não é sempre possível determinar qual é a moeda diferente.

11) Determine todas as soluções de $x^y = y^x$ com x e y racionais positivos.

12) **a)** Prove que se $n \in \mathbb{N}$ e $2^n + 1$ é um número primo então n é uma potência de 2.
b) Prove que se a, $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$ e $a^n - 1$ é primo, então $a = 2$ e n é primo.

13) Dado $n \in \mathbb{N}$ determine determine o maior $k \in \mathbb{N}$ tal que existam conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ contidos em $\{1, 2, \ldots, n\}$ de forma que $A_i \not\subset A_j$ para todo $i \ne j$.

14) (Problema proposto por *Antonio Luiz Santos*): Determine o número de soluções de $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1998}$ com x e y inteiros positivos.

15) Considere uma seqüência de triângulos retângulos $A_nB_nC_n$ no plano cuja hipotenusa seja B_nC_n, com as seguintes condições:

i) $\overline{A_1B_1}=\overline{A_1C_1}=1$

ii) $B_{n+1}=B_n$ e $A_{n+1}=C_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

iii) $A_{n+1}C_{n+1}$ é congruente à altura de A_n em relação a B_nC_n.

Mostre que qualquer ponto do plano pertence a infinitos triângulos $A_nB_nC_n$.

Você sabia…

Que há 6 poliedros regulares no espaço euclidiano de 4 dimensões mas apenas 3 em 5 ou mais dimensões **??**

Em dimensão n há o simplexo, com $n+1$ "faces" (que são simplexos) de dimensão $n-1$, o hipercubo, com $2n$ "faces" (que são hipercubos) de dimensão $n-1$ e o hiperoctaedro, dual do hipercubo, com 2^n "faces" (que são simplexos) de dimensão $n-1$. Em dimensão 4, além desses há o C24, que tem 24 "faces" octaédricas, o C120, que tem 120 "faces"dodecaédricas e o C600, que tem 600 "faces" tetraédricas.

Lembre-se que em 3 dimensões há 5 poliedros regulares: o tetraedro (caso particular do simplexo), o cubo (caso particular do hipercubo), o octaedro (caso particular do hiperoctaedro), o dodecaedro, que tem 12 faces pentagonais, e o icosaedro, que tem 20 faces triangulares.

AGENDA OLÍMPICA

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Primeira Fase – Sábado, 6 de junho
Segunda Fase – Sábado, 12 de setembro
Terceira Fase – Sábado, 24 de outubro (níveis 1, 2 e 3)
Domingo, 25 de outubro (nível 3).

♦

OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA

13 a 20 de setembro de 1998
República Dominicana.

Você sabia... Que é possível pentear um toro (superfície em forma de pneu) cabeludo mas não uma esfera cabeluda sem deixar rodamoinhos??

COORDENADORES REGIONAIS

Alberto Hassen Raad	*(UFJF)*	*Juiz de Fora-MG*
Antônio C. Rodrigues Monteiro	*(UFPE)*	*Recife-PE*
Amarísio da Silva Araújo	*(UFV)*	*Viçosa-MG*
Angela Camargo	*(Centro de Educação de Adultos CEA)*	*Blumenau-SC*
Antônio C. do Patrocínio	*(IMECC/UNICAMP)*	*Campinas-SP*
Ariosto de Oliveira Lima	*(UFPI)*	*Parnaíba-PI*
Benedito T. Vasconcelos Freire	*(UFRGDN)*	*Natal-RN*
Carlos A. Bandeira Braga	*(UFPB)*	*João Pessoa-PB*
Claudio Arconcher	*(Col. Leonardo da Vinci)*	*Jundiaí-SP*
Egnilson Miranda de Moura	*(Col. Agrícola do Bom Jesus)*	*Bom Jesus-PI*
Élio Mega	*(Col. ETAPA)*	*São Paulo-SP*
Florêncio F. Guimarães F.	*(UFES)*	*Vitória-ES*
Francisco Dutenhefner	*(UFMG)*	*BH-MG*
Gisele de A. Prateado G.	*(UFGO)*	*Goiânia-GO*
Ivanilde H. Fernandes Saad	*(U. Católica Dom Bosco)*	*Campo Grande-MS*
João B. de Melo Neto	*(UFPI)*	*Teresina-PI*
João F. Melo Libonati	*(Grupo Educ. IDEAL)*	*Belém-PA*
José Carlos Pinto Leivas	*(URG)*	*Rio Grande-RS*
José Luis Rosas Pinho	*(UFSC)*	*Florianópolis-SC*
José Paulo Carneiro	*(USU)*	*Rio de Janeiro-RJ*
José Vieira Alves	*(UFPB)*	*Campina Grande-PB*
Leonardo Matteo D'orio	*(Parque de Material Aeronáutico de Belém)*	*Belém-PA*
Licio Hernandes Bezerra	*(UFSC)*	*Florianópolis-SC*
Luzinalva M. de Amorim	*(UFBA)*	*L. de Freitas-BA*
Marco Polo	*(Colégio Singular)*	*Santo André-SP*
Marcondes Cavalcante França	*(UF Ceará)*	*Fortaleza-CE*
Mario Jorge Dias Carneiro	*(UFMG)*	*BH-MG*
Ma-To-Fú	*(UEM)*	*Maringá-PR*
Pablo Rodrigo Ganassim	*(L. Albert Einstein)*	*Rio das Pedras-SP*
Paulo H. Cruz Neiva de L. Jr.	*(Esc. Tec.Everardo Passos)*	*Piracicaba-SP*
Reinaldo Gen Ichiro Arakaki	*(INPE)*	*S.J.Campos-SP*
Ricardo Amorim	*(Centro Educ. Logos)*	*Nova Iguaçu-RJ*
Sergio Claudio Ramos	*(IM-UFRGS)*	*Porto Alegre-RS*
Tadeu Ferreira Gomes	*(U. do Estado da Bahia)*	*Juazeiro-BA*
Wagner Pereira Lopes	*(Esc. Tec. Fed. de Goiás)*	*Jataí-GO*