CONTEÚDO

AOS LEITORES

Neste número apresentamos os problemas e soluções da XXV Olimpíada Brasileira de Matemática, realizada durante o ano passado. A seguir o discurso do Prof. Jacob Palis Jr. na premiação da XXV Olimpíada Brasileira de Matemática, realizada na VII Semana Olímpica, na cidade de Belo Horizonte - MG em janeiro de 2004.

Os editores.

Antes de apresentar breves, e certamente apaixonadas palavras sobre as Olimpíadas Brasileiras de Matemática, quero registrar a minha admiração por um dos seus grandes e talvez o maior de seus precursores: o professor Shigeo Watanabe. Embora físico é devido a ele uma pioneira e ampla atividade de Olimpíadas de Matemática no Estado de São Paulo, com o apoio da Academia de Ciências de São Paulo e da Secretaria Estadual de Educação de São Paulo.

Seu exemplo, mais do que qualquer outro, inspirou a todos nós.

Também congratulo-me com todos os alunos premiados, seus professores e familiares.

A Olimpíada Brasileira de Matemática – OBM existe desde 1979. Segundo o próprio relatório de atividades 1997 – 2003 do Programa Nacional de Olimpíadas de Matemática, que gentilmente foi preparado a meu pedido por Nelly Carvajal e Sonia de Souza Silva de Melo, a OBM até então, era relativamente limitada devido à escassez de recursos e sua influência na melhoria do ensino resultava consideravelmente menor que o almejado. Já desenvolvia, no entanto, um extraordinário trabalho na busca de jovens talentos para a Matemática ou ciências afins. Basta citar a impressionante lista, certamente incompleta, de excelentes matemáticos que daí resultaram: Edson de Faria (USP), Nicolau Saldanha (PUC-Rio), Pedro Paulo Schimer (USP), Eduardo Esteves (IMPA), Ralph Costa Teixeira (FGV-Rio), Carlos Moreira, (Gugu) (IMPA), Eduardo Laber (PUC-Rio), Daniel Tausk (USP), Artur Avila (CNRS, França).

A OBM caracterizou-se sempre pela extrema dedicação de seus dirigentes, aliada à competência, bom gosto e fé inquebrantável quanto aos seus benefícios, não só para a comunidade matemática, mas para a sociedade em geral.

Infelizmente, ao lado do idealismo dos olímpicos, nem sempre foi possível participar da Olimpíada Internacional de Matemática, com sua equipe completa, por falta de recursos. Houve ocasiões em que alguns de nós, matemáticos já estabelecidos, cotizamos a passagem de um ou mais brasileiros, de excepcional qualificação, para possibilitar a prticipação do Brasil na Olimpíada Internacional.

Em 1997, sonhei, já há anos totalmente convencido da importância das Olimpíadas, ser possível modificar radicalmente a situação. Conversei bastante com Gugu, Nicolau, Elon Lima, Eduardo Wagner, Augusto Morgado, Paulo Cézar Pinto Carvalho, dentre outros. Daí, com minha convicção e paixão em níveis elevados, parti para o convencimento da Diretoria do CNPq, sob a Presidência de José Galizia Tundisi. A receptividade quanto à importância de um novo Programa Nacional de Olimpíadas de Matemática foi excepcionalmente entusiástica. Nasceu aí uma nova etapa da OBM, agora sim ampla e permanente de tão importante atividade.

Os recursos multiplicaram-se consideravelmente, indo de muito pouco a cerca de R$200.000 nesta transição e a R$400.000 agora. Com o entusiasmo renovado e até ampliado de seus dirigentes, ouso dizer que o Programa Nacional de Olimpíadas de Matemática tornou-se eternamente robusto. Não é mais possível pensar senão em crescer, fortalecer-se técnica e administrativamente e contribuir decisivamente para o formação de uma ampla e sólida competência nacional em matemática, passando por uma almejada inclusão científica.

A OBM hoje é uma atividade da Sociedade Brasileira de Matemática, compartilhada com o Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA e, a partir de 2001, com o Instituto do Milênio Avanço Global e Integrado da Matemática Brasileira, (IM-AGIMB).

Nesta nova etapa, a participação do Brasil em Olimpíadas Internacionais cresceu exponencialmente incluindo além da Olimpíada Internacional, a Ibero-americana, a Olimpíada de Maio, e a do Cone Sul, além de Olimpíadas Regionais. Foi criada em 1998 a Eureka!, excelente publicação dedicada principalmente aos alunos e professores da escola secundária e editada três vezes ao ano. Multiplicou-se o incentivo à realização de Olimpíadas Regionais e ao fortalecimento das coordenações regionais. O treinamento de alunos e professores em diversos níveis passou a ser atividade permanente. A melhoria do ensino de matemática nas escolas tornou-se um objetivo exequível e contínuo. Criou-se um Banco de Questões e Biblioteca o um site interativo, assim como uma secretaria permanente no IMPA. Estabeleceu-se a Semana Olímpica, como atividade anual, ocasião em que há um intenso treinamento dos alunos premiados com medalhas de Ouro, Prata, Bronze e Menções Honrosas.

Após cerca de sete anos, deixo a Presidência da Comissão de Olimpíadas da SBM, muito feliz pelas conquistas que vocês obtiveram e com a certeza absoluta de que muito mais será alcançado, de forma permanente. Lugares como Ribeirão Preto, Uberaba e Uberlândia e tantos outros de Norte a Sul e de Leste a Oeste do país devem fazer parte do mapa da OBM. Sonhem muito e partam para sua realização.

Estarei sempre com vocês

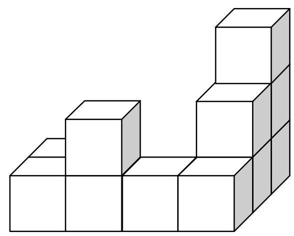
Jacob Palis Júnior

XXV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e Soluções da Primeira Fase

PROBLEMAS – NÍVEL 1

1. Onze cubinhos, todos de mesma aresta, foram colados conforme a figura a seguir.



O menor número de cubinhos, iguais aos já utilizados, que devem ser agregados ao sólido formado pelos onze cubinhos para obtermos um cubo maciço é igual a:

A) 48 **B)** 49 **C)** 52 **D)** 53 **E)** 56

2. Na tabela a seguir vemos o consumo mensal de água de uma família durante os 5 primeiros meses de 2003.

Meses	***Consumo (m^3)***
Janeiro	12,5
Fevereiro	13,8
Março	13,7
Abril	11,4
Maio	12,1

O consumo mensal médio dessa família durante os 5 meses foi:

A) 11,3 m^3 **B)** 11,7 m^3 **C)** 12,7 m^3 **D)** 63,5 m^3 **E)** 317,5 m^3

3. Você possui muitos palitos com 6 cm e 7 cm de comprimento. Para fazer uma fila de palitos com comprimento total de 2 metros, o número mínimo de palitos que você precisa utilizar é:

A) 29 **B)** 30 **C)** 31 **D)** 32 **E)** 33

4. Em um quadrado mágico, a soma dos números de cada linha, coluna ou diagonal é sempre a mesma. No quadrado mágico a seguir, o valor de **x** é:

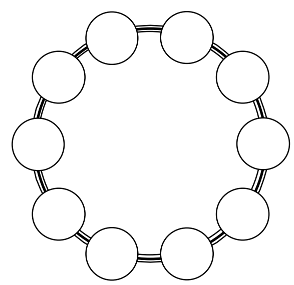
1	14	**x**
26		13

A) 20 **B)** 22 **C)** 23 **D)** 25 **E)** 27

5. Considere um número inteiro x e faça com ele as seguintes operações sucessivas: multiplique por 2, some 1, multiplique por 3 e subtraia 5. Se o resultado for 220, o valor de x é:

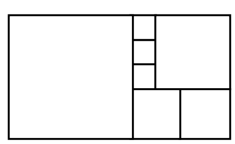
A) um número primo.
B) um número par.
C) um número entre 40 e 50.
D) um número múltiplo de 3.
E) um número cuja soma dos algarismos é 9.

6. Escreva os números de 0 a 9 nos círculos ao lado, de forma que eles cresçam no sentido anti-horário. Em seguida, subtraia 1 dos números ímpares e some 1 aos números pares. Escolhendo três círculos consecutivos, qual é a maior soma que se pode obter?



A) 19 **B)** 21 **C)** 23
D) 24 **E)** 25

7. O retângulo da figura a seguir está dividido em 7 quadrados. Se a área do menor quadrado é igual a 1, a área do retângulo é igual a:



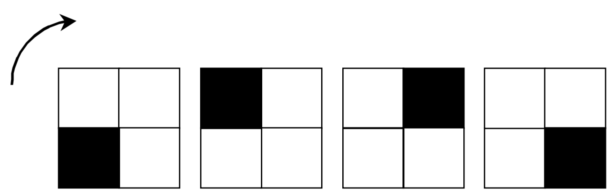
A) 42 **B)** 44 **C)** 45 **D)** 48 **E)** 49

8. Considere a seqüência oscilante: 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, …
O 2003º termo desta seqüência é:
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

9. João disse para Maria: "Se eu lhe der um quarto do que tenho, você ficará com metade do que vai me sobrar". Maria acrescentou: "E eu lhe daria 5 reais, se lhe desse a metade do que tenho". Juntos, os dois possuem:
A) 80 reais **B)** 90 reais **C)** 100 reais **D)** 120 reais **E)**130 reais

10. Uma escola precisa comprar mesas e cadeiras novas para seu refeitório, cada mesa com 4 cadeiras, que serão distribuídas nos 3 setores do refeitório. Em cada setor do refeitório cabem 8 fileiras de mesas e, em cada fileira, cabem 14 mesas. Quantas mesas e cadeiras deverão ser compradas?
A) 112 mesas e 448 cadeiras
B) 112 mesas e 1344 cadeiras
C) 336 mesas e 448 cadeiras
D) 336 mesas e 896 cadeiras
E) 336 mesas e 1344 cadeiras

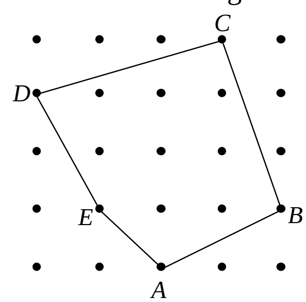
11. As 4 colorações a seguir são consideradas iguais por coincidirem por rotação.



De quantos modos diferentes é possível colorir as casas de um tabuleiro 2×2 de branco ou preto de modo que não existam dois tabuleiros que coincidam por rotação?
A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

12. Numa festa típica, cada prato de arroz foi servido para duas pessoas, cada prato de maionese para três pessoas, cada prato de carne servia quatro pessoas e cada prato de doces dava exatamente para cinco pessoas. Foram utilizados 77 pratos e todas as pessoas se serviram de todos os pratos oferecidos. Quantas pessoas havia na festa?
A) 20 **B)** 30 **C)** 45 **D)** 60 **E)** 75

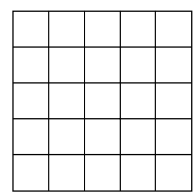
13. Na organização retangular de pontos da figura abaixo, a distância entre pontos vizinhos em uma mesma linha ou coluna é igual a 1 cm.



A área do pentágono *ABCDE* é, em cm^2, é igual a:

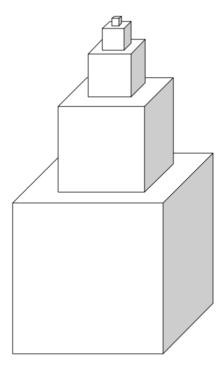
A) 9 **B)** $\frac{19}{2}$ **C)** 10 **D)** $\frac{21}{2}$ **E)** 11

14. Um quadrado de área 1 foi cortado em cinco filas de 5 quadradinhos cada. Todos os quadradinhos são congruentes.
Marcam-se os quadradinhos de uma linha qualquer, de uma diagonal qualquer e de uma coluna qualquer, e, em seguida, retiram-se os quadrados assinalados. A área coberta pelos quadradinhos restantes vale, no mínimo,



A) $\frac{2}{5}$ **B)** $\frac{11}{25}$ **C)** $\frac{12}{25}$
D) $\frac{13}{25}$ **E)** $\frac{3}{5}$

15. Um troféu formado por cinco recipientes cúbicos foi construído da seguinte maneira: sob o cubo de lado 10 cm foi soldado o cubo de lado 20 cm, sob este foi soldado o cubo de lado 30 cm, e assim por diante. Toda a superfície externa desse troféu deverá ser coberta com um certo tipo de revestimento.
Quantos metros quadrados desse revestimento serão necessários?



A) 1,5 **B)** 2,5 **C)** 2,7
D) 2,75 **E)** 3

16. Num certo aeroporto, Nelly caminhava calmamente à razão de um metro por segundo; ao tomar uma esteira rolante de 210 metros, Nelly continuou andando no mesmo passo e notou ter levado um minuto para chegar ao fim da esteira. Se Gugu ficar parado nesta esteira, quanto tempo levará para ser transportado?

A) 1min20s **B)** 1min24s **C)** 1min30s **D)** 1min40s **E)** 2min

17. Uma certa máquina tem um visor, onde aparece um número inteiro x, e duas teclas A e B. Quando se aperta a tecla A o número do visor é substituído por $2x + 1$. Quando se aperta a tecla B o número do visor é substituído por $3x – 1$.

Se no visor está o número 5, apertando alguma seqüência das teclas A e B, o maior número de dois algarismos que se pode obter é:

A) 85 **B)** 87 **C)** 92 **D)** 95 **E)** 96

18. A seqüência "22" descreve a si mesma, pois ela é formada por exatamente dois 2. Analogamente, a seqüência "31 12 33 15" descreve a si mesma, pois é formada por exatamente três 1, um 2, três 3 e um 5. Qual das seguintes seqüências *não* descreve a si mesma?

A) 21 32 23 16 **B)** 31 12 33 18 **C)** 31 22 33 17 19
D) 21 32 33 24 15 **E)** 41 32 23 24 15 16 18

19. Camila e Lara estão disputando o seguinte jogo num tabuleiro 4×4: Camila marca algumas casas do tabuleiro e informa à Lara o número de casas marcadas na vizinhança de cada casa do tabuleiro. Neste jogo, duas casas distintas são consideradas vizinhas se possuem um lado ou um canto (vértice) em comum.

Lara deve descobrir quais casas foram marcadas por Camila. Após marcar algumas casas, Camila passou para Lara o seguinte tabuleiro:

1	**2**	**1**	**1**
0	**2**	**1**	**2**
2	**3**	**3**	**1**
1	**0**	**2**	**1**

O número de casas marcadas foi:

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

20. Imagine uma pilha com cem milhões de folhas de papel sulfite, cada uma com 0,1 milímetro de espessura. Assinale a alternativa mais próxima da altura da pilha.
A) a sua altura.
B) o comprimento do maior animal do mundo, a baleia azul, que é cerca de 29 metros.
C) a altura do edifício mais alto do mundo, o *Petronas Tower*, que tem 88 andares.
D) a altura do pico mais alto do mundo, o *Monte Everest*, que é 8848 metros.
E) a distância do planeta Terra à Lua, que é muito maior que todas as alternativas anteriores.

PROBLEMAS – NÍVEL 2

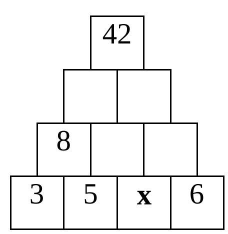
1. Veja o problema No. 7 do Nível 1.
2. Veja o problema No. 3 do Nível 1.

3. A maior raiz da equação $(x - 37)^2 - 169 = 0$ é:
A) 39 **B)** 43 **C)** 47 **D)** 50 **E)** 53

4. Veja o problema No. 17 do Nível 1.
5. Veja o problema No. 4 do Nível 1.

6. Seja $n = 9867$. Se você calculasse $n^3 - n^2$ você encontraria um número cujo algarismo das unidades é:
A) 0 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

7. Na figura, o número 8 foi obtido somando-se os dois números diretamente abaixo de sua casinha. Os outros números nas três linhas superiores são obtidos da mesma forma. Qual é o valor de **x**?



A) 7 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 6

8. Veja o problema No. 5 do Nível 1.

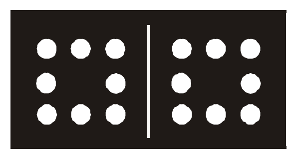
9. Os números *a*, *b*, e *c* são naturais consecutivos em ordem crescente. Então, o valor de $c^2 - ab$ é igual a:
A) 0 **B)** 1 **C)** $2a + b$ **D)** $2a + c$ **E)** $2b + c$

10. Veja o problema No. 8 do Nível 1.

11. Considere as seguintes definições:
• A *média aritmética* de dois números reais positivos é a metade da sua soma.
• A *média harmônica* de dois números reais positivos é o inverso da média aritmética dos inversos desses números.
A diferença entre a média aritmética e a média harmônica dos números 4 e 6 é:
A) 0,1 **B)** 0,2 **C)** 0,3 **D)** 0,4 **E)** 0,5

12. Veja o problema No. 18 do Nível 1.

13. O dominó mais conhecido tem como maior peça o duplo 6. Neste dominó são empregadas 28 peças diferentes. Quantas peças tem o dominó cuja maior peça é o duplo 8?



A) 34 **B)** 36 **C)** 42 **D)** 55 **E)** 45

14. Os quadrados dos números naturais maiores do que 2, subtraídos de seus sucessores, formam a seqüência 5, 11, 19, ... O primeiro elemento dessa seqüência que não é um número primo é o:
A) quarto **B)** décimo **C)** sexto **D)** nono **E)** sétimo

15. Você está em um país estrangeiro, a LUCIÂNIA, e não conhece o idioma, o LUCIANÊS, mas sabe que as palavras “BAK” e “KAB” significam *sim* e *não*, porém não sabe qual é qual. Você encontra uma pessoa que entende português e pergunta: "KAB significa *sim*?" A pessoa responde “KAB”. Pode-se deduzir que:
A) KAB significa *sim*.
B) KAB significa *não*.
C) A pessoa que respondeu mentiu.
D) A pessoa que respondeu disse a verdade.
E) Não é possível determinar sem um dicionário LUCIANÊS-PORTUGUÊS.

16. Veja o problema No. 13 do Nível 1.
17. Veja o problema No. 11 do Nível 1.

18. O valor da soma $\frac{2^{2003}\cdot 9^{1001}}{4^{1001}\cdot 3^{2003}}+\frac{2^{2002}\cdot 9^{1001}}{4^{1001}\cdot 3^{2003}}$ é:

A) $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{2}{3}$ **C)** 1 **D)** $\frac{4}{3}$ **E)** 2

19. Considere os números $X = 2^{700}$, $Y = 11^{200}$ e $Z = 5^{300}$. Assinale a alternativa correta:

A) X< Z< Y **B)** Y<X<Z **C)** Y<Z<X **D)** Z<X<Y **E)** Z<Y<X

20. Beatriz, Isabele e Nicole estão disputando um jogo fazendo lançamentos sucessivos com uma moeda. Beatriz ganha se, em dois lançamentos consecutivos, o primeiro resultar cara e o segundo coroa. Isabele ganha se forem obtidas duas coroas em dois lançamentos consecutivos, e Nicole ganha se forem obtidas duas caras em dois lançamentos consecutivos. Elas fazem os lançamentos até que uma das jogadoras seja vencedora. Qual(is) jogadora(s) possui(em) menos chances de ganhar o jogo?

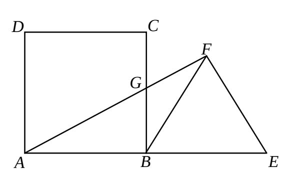
A) Beatriz **B)** Isabele **C)** Nicole **D)** Beatriz e Nicole
E) As três têm a mesma chance.

21. Veja o problema No. 19 do Nível 1.

22. Divida os números 2, 3, 5, 7, 11, 13 e 17 em dois grupos *x* e *y* com produtos *A* e *B*, respectivamente, de modo que *A* – *B* = 1.
A soma dos algarismos de *A* é:

A) 10 **B)** 11 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 15

23. A figura a seguir mostra um quadrado *ABCD* e um triângulo eqüilátero *BEF*, ambos com lado de medida 1cm . Os pontos *A*, *B* e *E* são colineares, assim como os pontos *A*, *G* e *F*.



A área do triângulo *BFG* é, em cm^2:

A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **D)** $\frac{\sqrt{3}}{12}$ **E)** $\frac{3}{10}$

24. Carlinhos pensa num número ímpar positivo menor do que 100. Pedrinho se dispõe a descobrir que número é esse fazendo a seguinte pergunta, quantas vezes forem necessárias: "O número que você pensou é maior, menor ou igual a x ? ". Note que x é um número que Pedrinho escolhe.
Quantas perguntas desse tipo Pedrinho poderá ter que fazer até descobrir o número pensado por Carlinhos?
A) 5 **B)** 7 **C)** 15 **D)** 25 **E)** 45

25. No triângulo *ABC*, $AB = 20$, $AC = 21$ e $BC = 29$. Os pontos D e E sobre o lado BC são tais que $BD = 8$ e $EC = 9$. A medida do ângulo $D\hat{A}E$, em graus, é igual a:
A) 30 **B)** 40 **C)** 45 **D)** 60 **E)** 75

PROBLEMAS – NÍVEL 3

1. O número 19*AB*, onde A e B são dígitos, é um quadrado perfeito. O valor de $\sqrt{AB}$ da raiz quadrada do número cuja representação decimal é *AB* é:
A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

2. Veja o problema No. 8 do Nível 1.
3. Veja o problema No. 19 do Nível 1.

4. Cinco amigos, Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo, Dernaldo e Ernaldo, devem formar uma fila com outras 30 pessoas. De quantas maneiras podemos formar esta fila de modo que Arnaldo fique na frente de seus 4 amigos?
(Obs.: Os amigos não precisam ficar em posições consecutivas.)

A) 35! **B)** $\frac{35!}{5!}$ **C)** $\frac{35!}{5}$ **D)** $\binom{35}{5}5!$ **E)** $e^{\pi\sqrt{163}}$

5. A Revolução Francesa, em 1789, trouxe muitas mudanças na humanidade. Em 1791, após a Revolução Francesa, a Academia Francesa de Ciências propôs um novo sistema de medidas. Esse sistema era baseado numa medida "natural" de comprimento, chamada *metro*, que foi definida como um décimo de milionésimo da distância do Pólo Norte ao Equador, medida em torno da circunferência do meridiano que passa por Paris. Tal sistema foi efetivamente adotado em 1795. A definição atual do metro é diferente mas o valor é aproximadamente o mesmo.

Considerando os fatos acima, qual é a ordem de grandeza do volume do planeta Terra, em metros cúbicos?

Obs.: Nesta questão você pode querer utilizar a fórmula do volume V da esfera, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, onde R é o raio da esfera.

A) 10^{16} **B)** 10^{21} **C)** 10^{26} **D)** 10^{31} **E)** 10^{36}

6. Na seqüência de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, … cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos anteriores.

Quanto vale a soma infinita

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{16}+\frac{5}{32}+\frac{8}{64}+\frac{13}{128}+\frac{21}{256}+\frac{34}{512}+\frac{55}{1024}+\cdots,$$

onde o n-ésimo termo é o n-ésimo termo da seqüência de Fibonacci dividido por 2^n?

A) 3/2 **B)** 2 **C)** 5/2 **D)** 3 **E)** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

7. O gráfico de $y = x^2 - 5x + 9$ é rodado 180° em torno da origem. Qual é a equação da nova curva obtida?

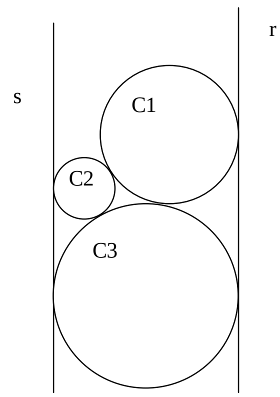
A) $y = x^2 + 5x + 9$ **B)** $y = x^2 - 5x - 9$ **C)** $y = -x^2 + 5x - 9$
D) $y = -x^2 - 5x + 9$ **E)** $y = -x^2 - 5x - 9$

8. Um clube de tênis tem n jogadores canhotos e $2n$ jogadores destros e, ao todo, há menos do que 20 jogadores. No último campeonato interno, no qual cada jogador enfrentou cada um dos outros jogadores do clube exatamente uma vez, a razão entre o número de jogos vencidos por jogadores canhotos e o número de jogos vencidos por jogadores destros foi 3 : 4.

Qual é o valor de n?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6
E) São necessárias mais informações.

9. A figura abaixo mostra duas retas paralelas r e s. A reta r é tangente às circunferências $C1$ e $C3$, a reta s é tangente às circunferências $C2$ e $C3$ e as circunferências tocam-se como também mostra a figura.



As circunferências $C1$ e $C2$ têm raios a e b, respectivamente.
Qual é o raio da circunferência $C3$?

A) $2\sqrt{a^2+b^2}$ **B)** $a + b$ **C)** $2\sqrt{ab}$ **D)** $\frac{4ab}{a+b}$

E) $2b - a$

10. Veja o problema No. 18 do Nível 1.

11. A função f é definida para todos os pares ordenados $(x; y)$ de inteiros positivos e tem as seguintes propriedades:
$f(x; x) = x$, $f(x; y) = f(y; x)$, $(x + y)f(x; y) = (2x + y)f(x; x + y)$.
Qual é o valor de $f(21; 12)$?

A) $\frac{7}{4}$ **B)** $\frac{4}{7}$ **C)** $\frac{11}{6}$ **D)** $\frac{6}{11}$ **E)** $\frac{1}{2003}$

12. Veja o problema No. 14 do Nível 2.
13. Veja o problema No. 15 do Nível 2.
14. Veja o problema No. 20 do Nível 2.
15. Veja o problema No. 22 do Nível 2.
16. Veja o problema No. 23 do Nível 2.
17. Veja o problema No. 12 do Nível 1.
18. Veja o problema No. 24 do Nível 2.

19. Dois amigos, Augusto e Eduardo, atravessavam uma ponte onde passava uma linha férrea.
Quando tinham percorrido dois quintos da ponte, ouviram o barulho de um trem que se aproximava por trás deles. Apavorados, começaram a correr, cada um para o seu lado. Tiveram sorte: Augusto, que tinha voltado, conseguiu sair da ponte no exato instante em que o trem nela ia entrar. Por sua vez, Eduardo, que continuou para a frente, conseguiu sair da ponte no instante em que o trem também ia fazê-lo. Refeitos do susto, quando se encontraram, comentaram que isto só foi possível porque correram a 15 km/h e o trem estava a x km/h. O valor de x é:
A) 30 **B)** 45 **C)** 60 **D)** 75 **E)** 90

20. Seja N o menor inteiro positivo que pode ser escrito como a soma de 9, 10 e 11 inteiros positivos consecutivos. A soma dos algarismos de N é igual a:
A) 9 **B)** 18 **C)** 22 **D)** 27 **E)** 30

21. O maior inteiro que não supera $\dfrac{3^{2003}+2^{2003}}{3^{2001}+2^{2001}}$ é igual a:
A) 4 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

22. Seja $T = (a, b, c)$ tal que existe um triângulo ABC cujas medidas dos lados sejam $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$ satisfazendo $c \geq b \geq a > 0$ e $a + b > c$. Definimos $T^2 = (a^2, b^2, c^2)$ e $\sqrt{T} = (\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c})$ como sendo, respectivamente, o quadrado e a raiz quadrada do "triângulo" T. Considere então as afirmativas:
1) O quadrado de um triângulo equilátero é equilátero.
2) O quadrado de um triângulo retângulo não é um triângulo.
3) T^2 é um triângulo se, e somente se, T é acutângulo.
4) $\sqrt{T}$ sempre é um triângulo para todo T.
5) Todos os ângulos de $\sqrt{T}$ são agudos.
O número de afirmativas verdadeiras é:
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

23. Em um quadro negro escreve-se o número 1. As únicas alterações permitidas são substituí-lo pelo seu dobro ou pelo seu quadrado. Qual é o maior número que pode ser obtido após efetuarmos 2003 alterações?
A) 2^{2003} **B)** 4^{2002} **C)** $2^{(2^{4006})}$ **D)** $2^{\left(2^{2003}\right)}$ **E)** $2^{\left(2^{2002}\right)}$

24. Se $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função tal que, para todo $x\in\mathbb{R},\ f(x)(f(x)-x)=0$, então

A) f é a função nula.
B) f é a função identidade, ou seja, $f(x) = x$ para todo x real
C) f é a função nula ou a função identidade
D) Há 4 possíveis funções f
E) Há infinitas funções f

25. Veja o problema No. 25 do Nível 2.

GABARITO

NÍVEL 1 (5ª. e 6ª. séries)

1) D	6) C	11) C	16) B
2) C	7) C	12) D	17) D
3) A	8) C	13) B	18) D
4) E	9) B	14) C	19) B
5) A	10) E	15) C	20) D

NÍVEL 2 (7ª. e 8ª. séries)

1) C	6) C	11) B	16) B	21) B
2) A	7) E	12) D	17) C	22) C
3) D	8) A	13) E	18) C	23) D
4) D	9) E	14) C	19) C	24) A
5) E	10) C	15) D	20) B	25) C

NÍVEL 3 (Ensino Médio)

1) B	6) B	11) D	16) D	21) D
2) C	7) E	12) C	17) D	22) E
3) B	8) C	13) D	18) A	23) E
4) C	9) C	14) B	19) D	24) E
5) B	10) D	15) C	20) B	25) C

XXV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

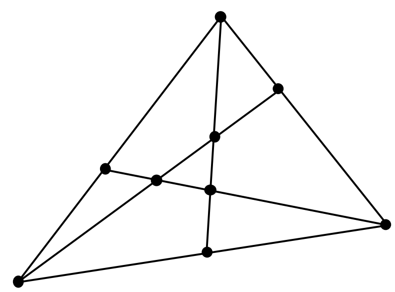
Problemas e Soluções da Segunda Fase

PROBLEMAS – NÍVEL 1 PARTE A
(Cada problema vale 3 pontos)

01. Quantas vezes aparece o algarismo 9 no resultado da operação $10^{100} - 2003$?

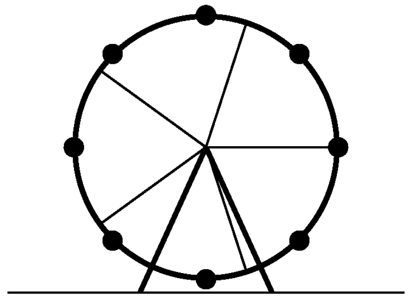
02. Quantos números inteiros maiores do que 2003^2 e menores do que 2004^2 são múltiplos de 100?

03. Quantos triângulos existem cujos lados estão sobre alguns dos segmentos traçados na figura ao lado?



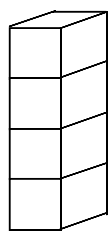
04. Um estudante, com muito tempo livre e muita curiosidade, resolveu fazer o seguinte: a cada minuto, ao mudar o horário em seu relógio digital, marcava em seu caderno um *X* para cada algarismo 7 que aparecia no visor. Assim, se seu relógio mostrava 02:07 ele marcava *X* e quando seu relógio mostrou 07:17 ele marcou *XX*. Começou a fazer isso quando seu relógio mostrava 01:00 e parou quase doze horas depois, quando o relógio mostrava 12:59.
Calcule a metade da quantidade de *X* que ele marcou em seu caderno.

05. A grande atração do OBM Parque é uma roda gigante (a figura mostra uma roda gigante similar, porém com um número menor de cabines). As cabines são numeradas com 1, 2, 3,…, no sentido horário. Quando a cabine 25 está na posição mais baixa da roda-gigante, a de número 8 está na posição mais alta. Quantas cabines tem a roda-gigante?



06. Anos bissextos são múltiplos de 4, exceto aqueles que são múltiplos de 100 mas não de 400. Quantos anos bissextos houve desde a Proclamação da República, em 1889, até hoje?

07. Em um dado comum a soma dos pontos sobre faces opostas é sempre 7. Beatriz construiu uma torre com 4 dados comuns iguais, colando as faces como mostrado na figura. Qual é o menor número de pontos que Beatriz pode obter somando todos os pontos das dezoito faces da superfície da torre?



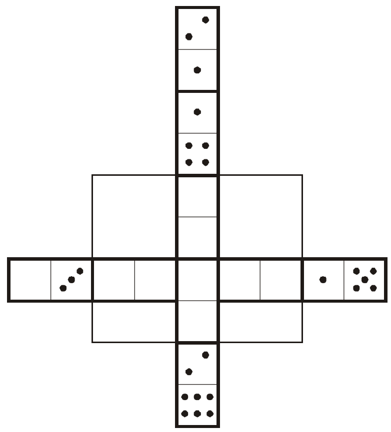
08. Na multiplicação a seguir *a*, *b*, *c* e *d* são algarismos.

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times \quad a3 \\ \hline 3bcd \end{array}$$

Calcule $b + c + d$.

09. A média de cinco inteiros positivos diferentes é 11. Determine o maior valor possível para o maior dos cinco inteiros.

10. Nove peças diferentes de dominó estão sobre uma mesa, parcialmente cobertos por um pedaço de papel. Os dominós se tocam de modo que 1 ponto é vizinho a 1 ponto, 2 pontos são vizinhos a 2 pontos, etc. Qual o total de pontos escondidos pelo papel?



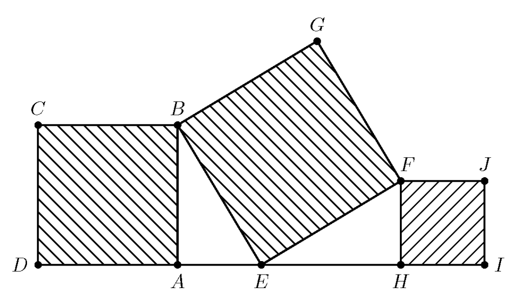
PROBLEMAS – NÍVEL 1 PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1

Quais números inteiros positivos menores que 120 podem ser escritos como soma de duas ou mais potências distintas de base 3 e exponente positivo? Por exemplo, $12 = 3^2 + 3^1$ é um número deste tipo mas $18 = 3^2 + 3^2$ não é.

PROBLEMA 2

No desenho ao lado, o quadrado *ABCD* tem área de 64 cm^2 e o quadrado *FHIJ* tem área de 36 cm^2. Os vértices *A*, *D*, *E*, *H* e *I* dos três quadrados pertencem a uma mesma reta. Calcule a área do quadrado *BEFG*.



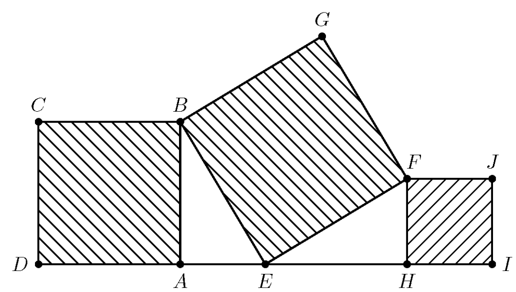
PROBLEMA 3

Considere o produto de todos os divisores positivos de um número inteiro positivo, diferentes desse número. Dizemos que o número é *poderoso* se o produto desses divisores for igual ao quadrado do número. Por exemplo, o número 12 é poderoso, pois seus divisores positivos menores do que ele são 1, 2, 3, 4 e 6 e $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 = 144 = 12^2$. Apresente todos os números poderosos menores do que 100.

PROBLEMAS – NÍVEL 2

PROBLEMA 1

No desenho ao lado, o quadrado *ABCD* tem área de 30 cm^2 e o quadrado *FHIJ* tem área de 20 cm^2. Os vértices *A*, *D*, *E*, *H* e *I* dos três quadrados pertencem a uma mesma reta. Calcule a área do quadrado *BEFG*.



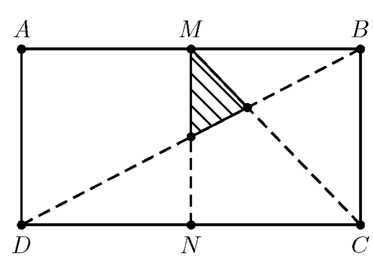
PROBLEMA 2

Dados os números inteiros de 1 a 26, escolha 13 dentre eles de forma que:

1) O número 4 está entre os números escolhidos.
2) Nenhum número escolhido é divisor de outro número escolhido.

PROBLEMA 3

Uma folha retangular *ABCD* de área 1000 cm^2 foi dobrada ao meio e em seguida desdobrada (segmento *MN*); foi dobrada e desdobrada novamente (segmento *MC*) e finalmente, dobrada e desdobrada segundo a diagonal *BD*. Calcule a área do pedaço de papel limitado pelos três vincos (região escura no desenho).



PROBLEMA 4
Veja o problema No. 3 do Nível 1 – Parte B.

PROBLEMA 5
Seja $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, uma função tal que $f(x)f(y) - f(xy) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$, quaisquer que sejam os reais não nulos x e y.
(a) Calcule $f(1)$
(b) Encontre uma fórmula para $f(x)$

PROBLEMA 6
Dizemos que um número N de quatro algarismos é biquadrado quando é igual à soma dos quadrados de dois números: um é formado pelos dois primeiros algarismos de N, na ordem em que aparecem em N e o outro, pelos dois últimos algarismos de N, também na ordem em que aparecem em N.
Por exemplo, 1233 é biquadrado pois $1233 = 12^2 + 33^2$. Encontre um outro número biquadrado.

Observação: Lembre-se de que um número de quatro algarismos não pode começar com zero.

PROBLEMAS – NÍVEL 3

PROBLEMA 1
No triângulo ABC, M é o ponto médio do lado AC, D é um ponto sobre o lado BC tal que AD é bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$ e P é o ponto de interseção de AD e BM. Sabendo que a área de ABC é 100, $AB = 10$ e $AC = 30$, calcule a área do triângulo APB.

PROBLEMA 2
Veja o problema No. 6 do Nível 2

PROBLEMA 3
Entre 15 números reais distintos, o menor deles igual a 1, não há três que podem ser lados de um triângulo. Quais valores o maior dos 15 números pode assumir?

PROBLEMA 4
O triângulo ABC é retângulo em A. Dentre os pontos P pertencentes ao perímetro do triângulo, encontre aquele que minimiza a soma $AP + BP + CP$.

PROBLEMA 5

Um quadrado de lado 3 é dividido em 9 quadrados de lado unitário, formando um quadriculado. Cada quadrado unitário é pintado de azul ou vermelho. Cada cor tem probabilidade $\frac{1}{2}$ de ser escolhida e a cor de cada quadrado é escolhida independentemente das demais. Qual a probabilidade de obtermos, após colorirmos todos os quadrados unitários, um quadrado de lado 2 pintado inteiramente de uma mesma cor?

PROBLEMA 6

Calcule a soma

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1}=\frac{2^1}{3^1+1}+\frac{2^2}{3^2+1}+\frac{2^3}{3^4+1}+\frac{2^4}{3^8+1}+\cdots+\frac{2^{n+1}}{3^{2^n}+1}$$

Soluções Nível 1 – Segunda Fase – Parte A

Problema	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
Resposta	98	40	17	66	34	27	58	15	45	22

Soluções Nível 1 – Segunda Fase – Parte B

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

Temos $3^1=3,\ 3^2=9,\ 3^3=27,\ 3^4=81$ mas $3^5=243$ (não serve). Assim, os números obtidos de acordo com as condições do problema são:

3 + 9 =**12**, 3 + 27 = **30**, 3 + 81 = **84**, 9 + 27 = **36**, 9 + 81 = **90**, 27 + 81 = **108**,
3 + 9 + 27 = **39**, 3 + 9 + 81 = **93**, 3 + 27 + 81 = **111**, 9 + 27 + 81 = **117**.
Note que o número 3 + 9 + 27 + 81 = 120 não serve.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:

Os triângulos *ABE* e *EHF* são retângulos em *A* e *H*, respectivamente; a medida do ângulo $B\hat{E}F$ é de 90°; se a medida do ângulo $H\hat{E}F$ é *x*, então a medida dos ângulos $E\hat{F}H$ e $A\hat{E}B$ é 90° – *x* e, conseqüentemente, a medida do ângulo $A\hat{B}E$ é *x*; como *BE* = *EF* (são lados do mesmo quadrado), então os triângulos mencionados são congruentes (pelo caso ALA de congruência de triângulos). Utilizando o teorema de Pitágoras, podemos escrever $BE^2 = AB^2 + AE^2$, o que mostra que a área do quadrado *BEFG* é a soma das áreas dos quadrados *ABCD* e *FHIJ*, ou seja, 64 + 36 = 100 cm^2.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

Os divisores positivos de um número inteiro N são $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_k$, tais que $1 = d_1 \le d_2 \le d_3 \le \ldots \le d_k = N$ e podemos observar que $1 \cdot N = d_2 \cdot d_{k-1} = d_3 \cdot d_{k-2}$ etc. Por exemplo, os divisores positivos de 12 são 1, 2, 3, 4, 6 e 12, de forma que 1×12 = 2×6 = 3×4. Note que ao excluir os divisores 1 e 12, restam 2, 3, 4 e 6, cujo produto é 2×3×4×6 = (2×6)×(3×4) = 12×12 = 12^2.

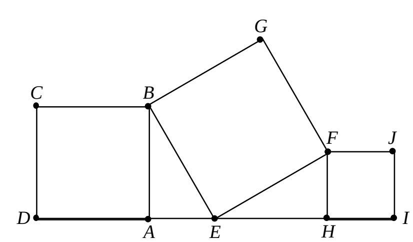
Assim, concluímos que o produto dos divisores positivos de um inteiro, excluindo 1 e o próprio número, é igual ao quadrado do número se, e somente se, o número tem 6 divisores. Portanto, o número é da forma p^5 ou $p^2 \cdot q$, onde p e q são números primos positivos, distintos. Se o número é positivo menor do que 100, temos as 16 seguintes possibilidades:

$2^5 = 32$	$3^2 \cdot 2 = 18$	$5^2 \cdot 2 = 50$	$7^2 \cdot 2 = 98$
$2^2 \cdot 3 = 12$	$3^2 \cdot 5 = 45$	$5^2 \cdot 3 = 75$	
$2^2 \cdot 5 = 20$	$3^2 \cdot 7 = 63$		
$2^2 \cdot 7 = 28$	$3^2 \cdot 11 = 99$		
$2^2 \cdot 11 = 44$			
$2^2 \cdot 13 = 52$			
$2^2 \cdot 17 = 68$			
$2^2 \cdot 19 = 76$			
$2^2 \cdot 23 = 92$			

Soluções Nível 2 – Segunda Fase

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

Os triângulos ABE e EHF são retângulos em A e H, respectivamente; a medida do ângulo $B\hat{E}F$ é de 90°; se a medida do ângulo $H\hat{E}F$ é x, então a medida dos ângulos $E\hat{F}H$ e $A\hat{E}B$ é $90° - x$ e, conseqüentemente, a medida do ângulo $A\hat{B}E$ é x; como $BE = EF$ (são lados do mesmo quadrado), então os triângulos mencionados são congruentes (pelo caso ALA de congruência de triângulos).



Utilizando o teorema de Pitágoras, podemos escrever $BE^2 = AB^2 + AE^2$, o que mostra que a área do quadrado *BEFG* é a soma das áreas dos quadrados *ABCD* e *FHIJ*, ou seja, 30 + 20 = 50cm^2.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:

Todo número inteiro positivo n pode ser escrito na forma $2^a \cdot b,\ a \ge 0,\ b > 0$ e b ímpar (chamamos b de parte ímpar de n). Considere dois números com a mesma parte ímpar: $n_1 = 2^{a_1} \cdot b$ e $n_2 = 2^{a_2} \cdot b$. Supondo, sem perda da generalidade, que se $a_1 < a_2$, então teremos que n_1 é divisor de n_2.

Assim, como de 1 a 26 temos 13 partes ímpares possíveis, a saber: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23 e 25, cada um dos números deve ter uma parte ímpar diferente. Mais ainda, considerando que 1 divide todos os números inteiros, o número com parte ímpar 1 é o que deve ter maior a.

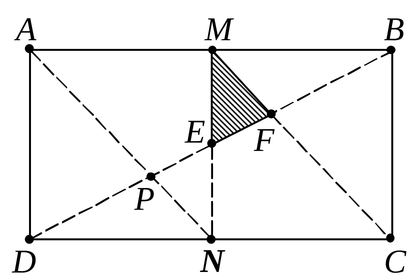
Porém $4 = 2^2 \cdot 1$ e está entre os números escolhidos, logo para os demais números escolhidos devemos ter a = 0 ou a = 1. E podemos determinar todas as escolhas possíveis:

- 3 é divisor de 9; 15 e 21. Logo $2 \cdot 3 = 6, 9, 15$ e 21 devem estar na nossa escolha.
- 5 é divisor de 15 e 25. Logo $2 \cdot 5 = 10$ e 25 devem estar na nossa escolha.
- 7 é divisor de 21. Logo $2 \cdot 7 = 14$ deve estar na nossa escolha.
- Com parte ímpar 11 podemos escolher 11 ou 22 e com parte ímpar 13, 13 ou 26. As demais escolhas são 17, 19 e 23.

Portanto as escolhas possíveis são (ordenadas segundo a parte ímpar):
4; 6; 10; 14; 9; 11 ou 22; 13 ou 26; 15; 17; 19; 21; 23; 25.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

Vamos usar a notação [X] para denotar a área do polígono X.



Sejam E e F os pontos de interseção como mostrados na figura. Sejam $AB = 2a$ e $BC = 2b$. Então $AM = MB = DN = NC = a$ e $ME = EN = b$. Trace AN e seja P o ponto de interseção dos segmentos *AN* e *BD*. Os segmentos *AN* e *MC* são paralelos (pois *AM* = *NC* e *AM* || *NC*).

Como *M* é ponto médio de *AB* e *MF* || *AP*, temos que *F* é o ponto médio do segmento *PB*. Analogamente *P* é o ponto médio do segmento *DF*. Segue então que *DP* = *PF* = *FB*.

Por simetria verificamos que *PE* = *EF* e então *EF/FB* = 1/2. Portanto, podemos escrever:

$\frac{[MEF]}{[MBF]} = 1/2.$

Mas, por outro lado, $[MBE] = \frac{1}{4}[ABD] = 125$, donde $[MEF] = \frac{1}{3}125 = \frac{125}{3}\text{cm}^2$ e $[MBF] = \frac{2}{3}125 = \frac{250}{3}\text{cm}^2$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:

Veja a solução do problema No. 3 do Nível 1 – Parte B.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5:

(a) Fazendo $x = y = 1$, obtemos $[f(1)]^2 - f(1) = 2$, donde, resolvendo a equação, obtemos

f(1) = 2 ou *f*(1) = – 1. Este último valor não serve, pois o contra-domínio da função é o conjunto dos números reais estritamente positivos. Portanto, *f*(1) = 2.

Fazendo $y = 1$ na identidade do problema obtemos $f(x)f(1) - f(x) = x + \frac{1}{x}$. Substituindo o valor de *f*(1), obtemos a fórmula para *f*(*x*): $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6:

Vamos separar o número de quatro dígitos em duas partes: os dois primeiros dígitos, da esquerda para a direita, formam o número *x* e os dois restantes formam o número *y*.

Então a propriedade significa que $100x + y = x^2 + y^2$. Esta igualdade pode ser considerada uma equação do segundo grau em *x*: $x^2 - 100x + y^2 - y = 0.$ (3)

Resolvendo encontramos $x = 50 \pm \sqrt{2500 - (y^2 - y)}.$ (4)

Com o exemplo do enunciado, y = 33 resulta em x = 12 com o sinal (–) na expressão:

$$x = 50 - \sqrt{1444} = 50 - 38 = 12.$$

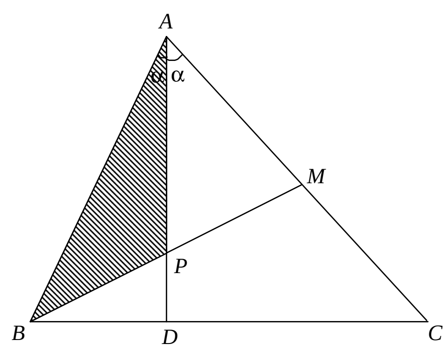
Naturalmente outra solução aparece quando colocamos o sinal (+) na mesma expressão:

$$x_1 = 50 + \sqrt{1444} = 50 + 38 = 88.$$

Então outro número com a mesma propriedade é $8833 = 88^2 + 33^2$.

Soluções Nível 3 – Segunda Fase

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:



As alturas que passam por B dos triângulos ABC e ABM são iguais a distância d de B à reta AC, logo

$$\frac{\text{área } ABM}{\text{área } ABC} = \frac{\frac{AM \cdot d}{2}}{\frac{AC \cdot d}{2}} = \frac{AM}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{área } ABM = \frac{1}{2} \text{área } ABC = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50.$$

Analogamente, $\dfrac{\text{área } ABP}{\text{área } ABM} = \dfrac{BP}{BM}$. Pelo Teorema das Bissetrizes,

$$\frac{BP}{PM} = \frac{AB}{AM} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \Rightarrow PM = \frac{3}{2} BP$$

Logo

$$\frac{\text{área } ABP}{\text{área } ABM} = \frac{BP}{BM} = \frac{BP}{BP + PM} = \frac{BP}{BP + \frac{3}{2}BP} = \frac{BP}{\frac{5}{2}BP} = \frac{2}{5} \Rightarrow \text{área } ABP = \frac{2}{5} \text{área } ABM = \frac{2}{5} \cdot 50 = 20.$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:
Veja a solução do problema No. 6 do Nível 2.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:
Sejam a, b, c reais positivos tais que $a \le b \le c$. Esses números são medidas dos lados de um triângulo se, e somente se, $c < a + b$. Ou seja, não são se, e somente se, $c \ge a + b$.
Assim, sendo $1 = x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \ldots < x_{15}$ os números dados, devemos ter:

$$\left|\begin{array}{l} x_3 \ge x_2 + x_1 \\ x_4 \ge x_3 + x_2 \\ \qquad \vdots \\ x_{15} \ge x_{14} + x_{13} \end{array}\right.$$

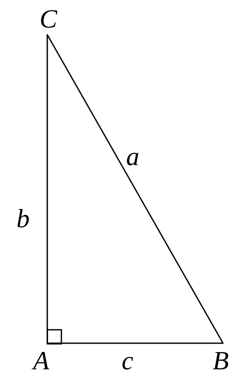
De fato, esse sistema de desigualdades equivale a não haver três que podem ser lado de um triângulo. Observe que se, $i < j < k$, $x_k < x_j + x_i$, então $x_k < x_{k-1} + x_{k-2}$.
Considere a seqüência de Fibonacci ($F_0 = 0, F_1 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n \ge 0$),
$x_3 \ge x_2 + x_1$;
$x_4 \ge x_3 + x_2 \ge x_2 + x_1 + x_2 = 2x_2 + x_1$;
$x_5 \ge x_4 + x_3 \ge 2x_2 + x_1 + x_2 + x_1 = 3x_2 + 2x_1$;
$x_6 \ge x_5 + x_4 \ge 3x_2 + 2x_1 + 2x_2 + x_1 = 5x_2 + 3x_1$;
parece que $x_n \ge F_{n-1}x_2 + F_{n-2}x_1$ e, com efeito,

$$x_{k+2} \ge x_{k+1} + x_k \ge F_k \cdot x_2 + F_{k-1} \cdot x_1 + F_{k-1} \cdot x_2 + F_{k-2} \cdot x_1 = F_{k+1} \cdot x_2 + F_k \cdot x_1$$

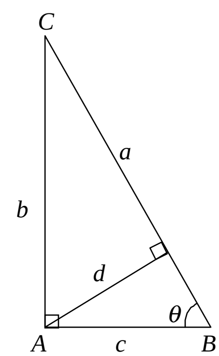
Portanto, sendo $x_2 = 1 + \xi, \xi > 0$,
$x_{15} \ge F_{14} \cdot x_2 + F_{13} \cdot x_1 = 377 \cdot (1 + \xi) + 233 \cdot 1 = 610 + 377\xi$.

Como podemos tornar ξ tão pequeno quanto queiramos, o maior dos 15 números pode assumir qualquer valor real maior do que 610.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:



Sejam a, b, c as medidas dos segmentos BC, AC e AB, respectivamente.
Consideraremos separadamente os casos em que P está em AC, em AB e em BC.
Se P está em AC, então $AP + CP = b$. Então, minimizar $AP + BP + CP$ reduz-se a minimizar BP. Isso ocorre quando P coincide com A, pois a menor distância entre um ponto e uma reta é determinada pelo pé da perpendicular traçada a partir desse ponto.
Nesse caso o valor mínimo de $AP + BP + CP$ é $b + c$.
O caso em que P está em AB é inteiramente análogo.
Suponha, agora, que P está em BC. Etão $BP + CP = a$, ou seja, minimizar $AP + BP + CP$ reduz-se a minimizar AP.



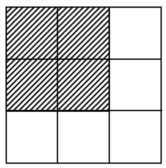
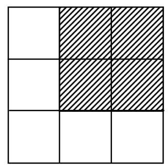
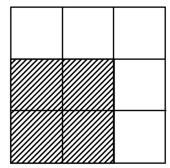
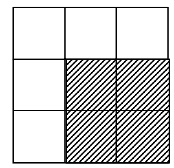
Isso ocorre quando AP é perpendicular a BC.
Essa medida está representada por d no diagrama ao lado.
Nesse caso, o mínimo de $AP + BP + CP$ é $a + d$.
Assim, para completar a resolução da questão, basta comparar
$a + d$ e $b + c$.
Temos, então, várias maneiras de concluir a resolução.
Uma maneira:
Observe que $\dfrac{b\cdot c}{2}=\dfrac{a\cdot d}{2}\Leftrightarrow bc=ad$ e $a^2=b^2+c^2$.
Logo
$$(a+d)^2=a^2+2ad+d^2=b^2+c^2+2bc+d^2=(b+c)^2+d^2$$

e, como $d^2>0, (a+d)^2>(b+c)^2\Leftrightarrow a+d>b+c$.
Outra maneira: $d=c\cdot \text{sen}\theta$; $b=a\cdot\text{sen}\theta$.

Logo $(a+d)-(b+c)=a+c\cdot\text{sen}\theta-a\cdot\text{sen}\theta-c=(a-c)(1-\text{sen}\theta)>0$, isto é, $a + d > b + c$.
Resposta: O ponto que minimiza $AP + BP + CP$ é $P = A$ (nesse caso $AP + BP + CP = b + c$).

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5:

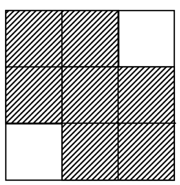
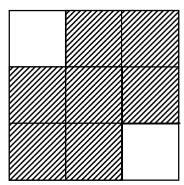
O quadrado de lado 2 pode ser

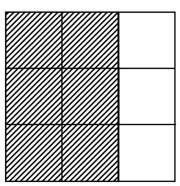
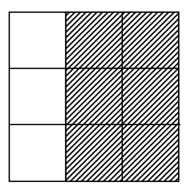

ou

ou

ou


A probabilidade de cada um desses quadrados de lado 2 ser inteiramente de uma mesma cor é

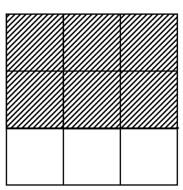
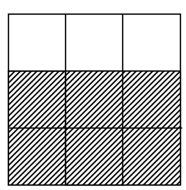
$2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4$. Observe que todos os quatro quadrados unitários devem ser da mesma cor azul ou vermelho. Os demais quadradinhos podem ser de qualquer cor.

Algumas configurações são consideradas pelo menos 2 vezes:

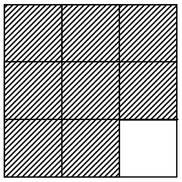
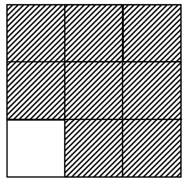

ou

Probabilidade $2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7$


ou

ou

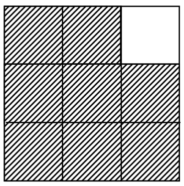
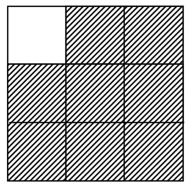
Probabilidade $2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6$


ou


Algumas configurações são consideradas pelo menos 3 vezes:


ou

ou

Probabilidade $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8$


ou


E as configurações com todos azuis ou todos vermelhos são contadas 4 vezes (probabilidade: $\left(\frac{1}{2}\right)^9$).

Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, a probabilidade pedida é:

$$4 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 - 4 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 + 4 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{95}{256}.$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6:

Analisando casos pequenos:

$$\frac{2^1}{3^1+1} = \frac{2}{4} = 1 - \frac{2}{4} = 1 - \frac{2^1}{3^1+1}$$

$$\frac{2^1}{3^1+1} + \frac{2^2}{3^2+1} = \frac{36}{40} = 1 - \frac{4}{40} = 1 - \frac{2^2}{(3^1+1)\cdot(3^2+1)}$$

$$\frac{2^1}{3^1+1} + \frac{2^2}{3^2+1} + \frac{2^3}{3^4+1} = \frac{3272}{3280} = 1 - \frac{8}{3280} = 1 - \frac{2^3}{(3^1+1)\cdot(3^2+1)\cdot(3^4+1)}$$

(Observe que não compensaria simplificar as frações. Isso é comum quando queremos descobrir um padrão.)

Parece então, que podemos conjecturar que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1} = 1 - \frac{2^{n+1}}{(3^1+1)\cdot(3^2+1)(3^4+1)\ldots(3^{2^n}+1)}$$

Simplificando um pouco essa expressão antes de tentar demonstrá-la.

$$(3^1+1)(3^2+1)(3^4+1)\ldots(3^{2^n}+1)=\frac{(3^1-1)(3^1+1)(3^2+1)(3^4+1)\ldots(3^{2^n}+1)}{3^1-1}=$$

$$\frac{(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)\ldots(3^{2^n}+1)}{2}=\frac{(3^4-1)(3^4+1)\ldots(3^{2^n}+1)}{2}=\ldots=\frac{3^{2^{n+1}}-1}{2}.$$

Ou seja, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k+1}}{3^{2k}+1}=1-\frac{2^{n+1}}{\frac{3^{2^{n+1}}-1}{2}}=1-\frac{2^{n+2}}{3^{2^{n+1}}-1}$

Podemos agora demonstrar nossa conjuectura pelo uso direto do Princípio da Indução Finita ou considerando que, se descobrirmos $f(k)$ tal que

$$\frac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1}=f(k+1)-f(k),$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1}=\sum_{k=0}^{n}[f(k+1)-f(k)]=$$

$$f(1)-f(0)+f(2)-f(1)+\ldots+f(n+1)-f(n)=f(n+1)-f(0)$$

(f é a "integral discreta" de $\dfrac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1}$.)

Levando em conta novamente nossa conjectura, podemos inferir que

$f(k)=-\dfrac{2^{k+1}}{3^{2^k}-1}$ e, de fato,

$$f(k+1)-f(k)=-\frac{2^{k+2}}{3^{2^{k+1}}-1}+\frac{2^{k+1}}{3^{2^k}-1}=\frac{-2^{k+2}+2^{k+1}(3^{2^k}+1)}{(3^{2^k}+1)(3^{2^k}-1)}=\frac{2^{k+1}(3^{2^k}+1-2)}{(3^{2^k}+1)(3^{2^k}-1)}=\frac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1}$$

Portanto

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1}=f(n+1)-f(0)=\frac{-2^{n+2}}{3^{2^{n+1}}-1}-\left(\frac{-2^1}{3^{2^0}-1}\right)\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1}=1-\frac{2^{n+2}}{3^{2^{n+1}}-1}.$$

XXV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Problemas e Soluções da Terceira Fase

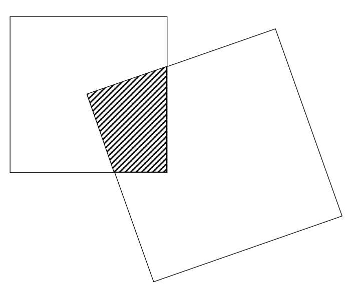
PROBLEMAS – NÍVEL 1

PROBLEMA 1:
Quantos inteiros positivos menores que 1000 têm a soma de seus algarismos igual a 7?

PROBLEMA 2:
Considere as seqüências de inteiros positivos tais que cada termo mais a soma dos seus algarismos é igual ao termo seguinte. Por exemplo: 6, 12, 15, 21, 24, 30, 33, 39 é uma seqüência nessas condições.
Escreva a maior seqüência cujo último termo é 103 e que satisfaz tais condições.
Observação: maior seqüência é aquela com o maior número de termos.

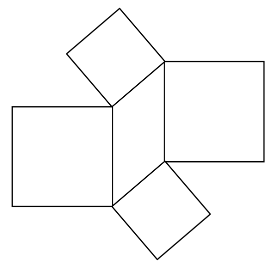
PROBLEMA 3:
Os números 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64,… são potências de 2.
Deseja-se dividir um quadrado de lado 2003 em outros quadrados cujos lados são potências de 2. Mostre uma maneira de se fazer a divisão e obter 6364 quadrados cujos lados são potências de 2.

PROBLEMA 4:
a) Dois quadrados estão posicionados de modo que o centro do primeiro é vértice do segundo, como mostra a figura abaixo.



Se o lado do primeiro quadrado mede 12cm, quanto mede a área comum aos dois quadrados?

b) Na figura a seguir, o paralelogramo tem lados de medida 12cm e 4cm e área 40cm^2. Sejam *P*, *Q*, *R* e *S* os centros dos quadrados construídos externamente sobre os quatro lados desse paralelogramo. Sabendo que o quadrilátero *PQRS* é um quadrado, calcule a sua área.



PROBLEMA 5:
Queremos construir o perímetro de um retângulo utilizando 2003 varetas cujas medidas são inteiros positivos. Para isso às vezes teremos de quebrar algumas delas, mas todas as varetas e pedaços de varetas devem ser utilizados na construção do retângulo.

a) Mostre que com uma única quebra nem sempre é possível construir o retângulo.
b) Mostre que com duas quebras sempre é possível construir o retângulo.

PROBLEMAS – NÍVEL 2

PROBLEMA 1:
Num tabuleiro 2×2, como o mostrado a seguir, escreveremos números inteiros de 1 a 9 obedecendo à seguinte regra: $A > B$, $C > D$, $A > C$ e $B > D$.

A	***B***
C	***D***

a) Quantos tabuleiros diferentes existem tais que $B = C$?
b) Quantos tabuleiros diferentes existem no total?

PROBLEMA 2:
Determine o menor número primo positivo que divide $x^2 + 5x + 23$ para algum inteiro x.

PROBLEMA 3:
O triângulo ABC está inscrito na circunferência S e $AB < AC$. A reta que contém A e é perpendicular a BC encontra S em P ($P \neq A$). O ponto X situa-se sobre o segmento AC e a reta BX intersecta S em Q ($Q \neq B$).
Mostre que $BX = CX$ se, e somente se, PQ é um diâmetro de S.

PROBLEMA 4:
Mostre que $x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x - 4y + 2 > 0$, quaisquer que sejam os reais x e y.

PROBLEMA 5:
São dados: uma circunferência K e um ponto A interior, fixo, distinto do centro. Determine os pontos B, C e D sobre a circunferência de forma que a área do quadrilátero $ABCD$ seja a maior possível.

PROBLEMA 6:
Há N cidades na Tumbólia. Cada duas cidades desse país são ligadas por uma rodovia ou uma ferrovia, não existindo nenhum par de cidades ligadas por ambos os meios.
Um turista deseja viajar por toda a Tumbólia, visitando cada cidade exatamente uma vez, e retornar a cidade onde ele começou sua jornada.
Prove que é possível escolher a ordem na qual as cidades serão visitadas de modo que o turista mude o meio de transporte no máximo uma vez.

PROBLEMAS – NÍVEL 3

PROBLEMA 1: Veja o problema 2 do Nível 2.

PROBLEMA 2:
Seja S um conjunto de n elementos. Determine o menor inteiro positivo k com a seguinte propriedade: dados quaisquer k subconjuntos distintos $A_1, A_2, ..., A_k$ de S, existe uma escolha adequada dos sinais + e – de modo que $S = A_1^{\pm} \cup A_2^{\pm} \cup ... \cup A_k^{\pm}$, onde $A_i^+ = A_i$ e $A_i^- = S - A_i$ é o complementar de A_i em relação a S.

PROBLEMA 3:
Seja $ABCD$ um losango. Sejam E, F, G e H pontos sobre os lados AB, BC, CD e DA, respectivamente, e tais que as retas EF e GH são tangentes à circunferência inscrita no losango.
Prove que as retas EH e FG são paralelas.

PROBLEMA 4: Veja o problema 5 do Nível 2.

PROBLEMA 5:
Suponha que $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ satisfaz:

i) $x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$

ii) $f\left(\dfrac{2xy}{x+y}\right)\geq \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$, para todo $x, y\in(0,+\infty)$.

Prove que existe $x_0\in(0,+\infty)$ tal que $f(x_0)<0$.

PROBLEMA 6:
Um grafo cujo conjunto de vértices V tem n elementos é *bacana* se existir um conjunto $D\subset\mathbb{N}$ e uma função injetiva $f:V\to\left[1, n^2/4\right]\cap\mathbb{N}$ tal que os vértices p e q são ligados por uma aresta se e somente se $\left|f(p)-f(q)\right|\in D$.
Mostre que existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n\geq n_0$ existem grafos com n vértices que não são bacanas.

Observação: Um grafo com conjunto de vértices V é um par (V, E) onde E é um conjunto de subconjuntos de V, todos com exatamente dois elementos.
Um conjunto {p, q} é chamado de *aresta* se pertencer a E e neste caso dizemos que esta aresta liga os vértices p e q.

SOLUÇÕES – NÍVEL 1

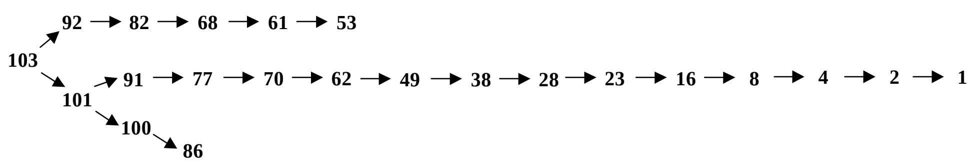
PROBLEMA 1: SOLUÇÃO DE VINÍCIUS H. CAMPOS SENRA (BELO HORIZONTE - MG):
700 é o último número possível até 1000 tal que a soma de seus algarismos seja igual a 7: números menores que 700 têm soma dos algarismos maior que 7.
O primeiro número é 7 mesmo.
De 1 a 100, existem 8 números que a soma de seus algarismos é igual a 7: 07, 16, 25,…, 61, 70.
A medida que vai aumentando a ordem das centenas, diminui um número que é possível fazer isto, ou seja:
De 101 a 200, existem 7 números: 106, 115,…, 160.
De 201 a 300, existem 6;
De 301 a 400, 5;
De 401 a 500, 4;
De 501 a 600, 3.

Apenas de 601 a 700 que não ocorre isso, pois fica incluído o 700 também, sendo portanto 3 números. (601, 610 e 700).

Resposta: Somando todos esses resultados 36 números até 1000 têm a soma de seus algarismos igual a 7.

PROBLEMA 2: SOLUÇÃO DE VITOR MORI (SÃO PAULO – SP)

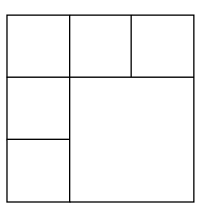
Para a seqüência terminar em 103, devemos começar pelo fim.
Utilizando o diagrama da árvore, teremos:



Logo a maior seqüência é:
1, 2, 4, 8, 16, 23, 28, 38, 49, 62, 70, 77, 91, 101, 103.

PROBLEMA 3: SOLUÇÃO DO EDITOR

Tomamos um quadrado de lado 1, dobramos o seu lado e colocamos 5 quadrados de lado 1 à esquerda e em cima para completar um quadrado de lado 3:

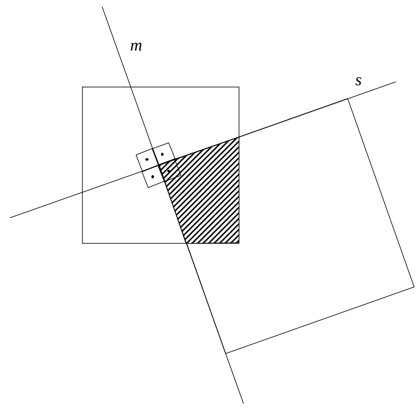


Dobramos de novo a figura e colocamos 13 quadrados de lado 1 para completar um quadrado de lado 7. Dobramos a figura e colocamos 29 quadrados de lado 1 para completar um quadrado de lado 15. Dobramos a figura e colocamos 61 quadrados de lado 1 para completar um quadrado de lado 31. Quadruplicamos a figura e colocamos 249 quadrados de lado 1 para completar um quadrado de lado 125.

Octuplicamos a figura e colocamos 2001 quadrados de lado 1 para completar um quadrado de lado 1001. Finalmente, dobramos a figura e colocamos mais 4005 quadrados de lado 1 para completar um quadrado de lado 2003. Gastamos assim, no total, 4005 + 2001 + 249 + 61 + 29 + 13 + 5 + 1 = 6364 quadrados cujos lados são potências de 2 para cobrir o quadrado de lado 2003.

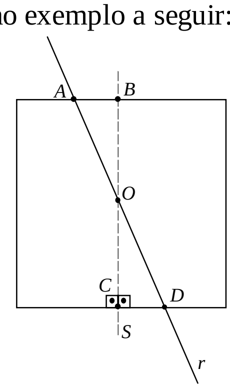
PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DE HENRIQUE PONDÉ DE OLIVEIRA PINTO (SALVADOR - BA)

a) Se prolongarmos os lados do segundo quadrado temos:



As retas m e s dividem o primeiro quadrado em quatro partes iguais, e então a parte escura representa $\frac{1}{4}$ do primeiro quadrado (assim como as outras três partes). Como a área do primeiro quadrado é 12. 12 = 144 então a área escura é $\frac{1}{4}\cdot 144 = 36\text{cm}^2$.

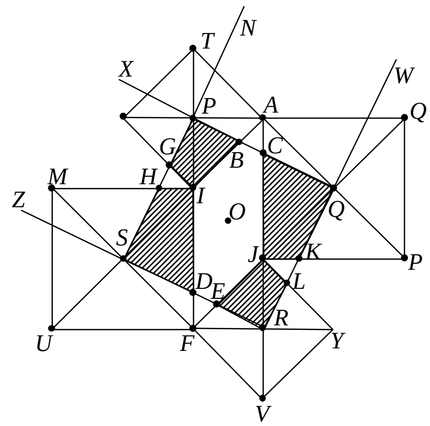
Observação: Toda reta que passa pelo centro de um quadrado divide ele em duas partes iguais. Como a reta r no exemplo a seguir:



Pois se a reta S divide o quadrado em duas partes iguais, basta o triângulo ABO e o triângulo CDO serem iguais.

Como os ângulos $O\hat{C}D$ e $O\hat{B}A$ são iguais, e $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são iguais, $O\hat{A}B$ e $O\hat{D}C$ também são iguais. Como $\overline{OC} = \overline{OB}$ então os triângulos ABO e CDO, por possuírem 3 ângulos iguais $(C\hat{O}D = A\hat{O}B, O\hat{C}D = O\hat{B}A$ e $O\hat{D}C = O\hat{A}B)$ e o lado igual $(\overline{OC} = \overline{OB})$ são triângulos iguais.

b) As áreas rabiscadas são conhecidas (cada uma tem $\frac{1}{4}$ da área do quadrado na qual está, diferente de *PQRS*)



O triângulo *ABC* é igual ao *DEF* e o triângulo *GHI* é igual ao *JKL*. Se $B\hat{A}C = x$ e $G\hat{I}H = 360° - 90° - 90° - (180° - x)$ então $G\hat{I}H = 180 - (180 - x)$ que é igual a x então $G\hat{I}H = B\hat{A}C$. Podemos dizer que $\overline{AC} = \overline{HI}$ pois $\overline{AC} = 12cm - \overline{CJ}$, $\overline{HI} = 12cm -$ $\overline{HM}$ e $\overline{CJ} = \overline{MH}$ (as retas *W*, *N* e *Z* dividem os dois grandes quadrados de forma idêntica e em partes iguais). $\overline{CJ} = \overline{DI}$ e $\overline{DI} = \overline{HM}$ pois as retas dividem o quadrado em 4 partes idênticas, logo $\overline{CJ} = \overline{MH}$. Pelo mesmo raciocínio podemos deduzir que $\overline{AB} = \overline{IG}$. Sabendo que $G\hat{I}H = B\hat{A}C$ e que $\overline{AB} = \overline{IG}$ e $\overline{AC} = \overline{HI}$ então deduzimos que o triângulo *ABC* = *GHI*. Como o triângulo *ABC* é igual ao *DEF*, *GHI* é igual ao *JKL* e o *ABC* é igual ao *GHI*, logo os triângulos *ABC*, *DEF*, *GHI* e *JKL* são iguais. A área do quadrado *PQRS* é igual a área riscada mais a área de *BCJEDI* mais a área de *GHI* mais a área de *JKL*. Como a área de *GHI* mais a área de *JKL* é igual a área de *ABC* mais *DEF* então a área total do quadrado é igual a: a área rabiscada mais a área de *BCJEDI* mais a área de *ABC* mais a área de *DEF*. Isso tudo é igual a:

$$\frac{1}{4} \cdot 4cm^2 + \frac{1}{4} \cdot 12cm^2 + \frac{1}{4} \cdot 4cm^2 + \frac{1}{4} \cdot 12cm^2 + 40cm^2 =$$
$$= 4cm^2 + 36cm^2 + 4cm^2 + 36cm^2 + 40cm^2 = 120cm^2.$$

PROBLEMA 5: SOLUÇÃO DA BANCA

a) Considere uma seqüência na qual cada termo é maior que a soma dos termos anteriores, como por exemplo $1, 3, 3^2, 3^3, \ldots, 3^{2003}$. Obrigatoriamente temos que quebrar a vareta de comprimento 3^{2003} e colocar os pedaços em dois lados opostos, pois 3^{2003} é maior que o dobro da soma de todas as restantes. Agora, a maior das varetas usadas nos dois lados restantes, 3^n, é maior que a soma das varetas 1, 3, 3^2, 3^3,... , 3^{n+1}, o que torna impossível a construção do retângulo.

b) Quebrando inicialmente uma vareta qualquer ao meio, construímos dois lados opostos. Em seguida, dividimos as varetas restantes em dois conjuntos A e B. Se as somas dos comprimentos das varetas dos dois conjuntos forem iguais, não é necessário fazer mais quebras. Caso contrário, passamos quantas varetas forem necessárias de um para o outro até que a desigualdade das somas se inverta; agora basta mais uma única quebra na última vareta que mudou de lado para que as somas se igualem.

SOLUÇÕES – NÍVEL 2

PROBLEMA 1: SOLUÇÃO DE FELIPE GONÇALVES ASSIS (CAMPINA GRANDE - PB)

a) Temos que $A > B$ e $B > D$, logo $A > D$.

Também sabemos que $A > C$ e $C > D$, então podemos afirmar com certeza que "D" é o menor número, pois $B > D$; $C > D$; $A > D$ e "A" é o maior número pois $A > B$; $A > C$; $A > D$.

Se "B" for igual a "C", teremos três números dispostos de tal forma que o menor deles será "D", o maior será igual "A" e o outro será tanto "B" como "C". De quantas formas então eu posso escolher 3 inteiros diferentes entre 1 e 9?

Vamos pensar da seguinte maneira: para escolher o primeiro número eu tenho 9 possibilidades: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9, já para cada escolha eu tenho outros 8 números para escolher, os de 1 a 9 exceto o primeiro escolhido. Finalmente, para cada possibilidade eu tenho outros 7 inteiros para escolher, os 9 à exceção dos já escolhidos, assim, eu tirei $9 \times 8 \times 7$ possibilidades, ou seja: 504.

Todavia, a ordem dos números não importa, isto é, o menor deve ser "D", o maior "A" e o do meio "B" e "C", e escolhendo da forma supracitada os mesmos números são escolhidos 6 vezes (3!). Observe: "x"; "y" e "z" só podem ser usados juntos uma vez mas nas 504 possibilidades aparecem 6 vezes: $x - y - z$; $x - z - y$;
$y - x - z$; $y - z - x$; $z - x - y$; $z - y - x$

Logo, devemos dividir 504 por 6, assim $\dfrac{504}{6} = 84$

Finalmente concluímos que existem **84** = $\frac{9!}{(9-3)!\cdot 3!}$ tabuleiros diferentes nos quais $A > B; C > D; A > C; B > D; B = C$.

a) Como não podemos definir relação entre B e C, vamos analisar três casos:
1. $B > C \rightarrow A > B > C > D$
2. $B < C \rightarrow A > C > B > D$
3. $B = C \rightarrow A > B = C > D$

Para o caso 1, temos que escolher 4 números distintos de 1 a 9 e pô-los em ordem já descrita A é o maior, o segundo maior é B e D é o menor), seguindo o raciocínio do quesito "a" temos $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ possibilidades de escolha sendo que os mesmos 4 números se repetem em 24 escolhas ou 4!.

Nós só utilizamos a; b; c; d uma vez, mas eles ocorrem 24 vezes, apenas alterando a ordem, logo as possibilidades se reduzem:

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{24} = \frac{3024}{24} = 126 = \frac{9!}{(9-4)!\cdot 4!}$$

O caso 2 terá tantas possibilidades quanto o caso 1, apenas trocando B por C e o caso 3 já foi estudado no quesito "a". Assim, o total de tabuleiros é:
126 + 126 + 84 = 336.

PROBLEMA 2: SOLUÇÃO DE GUILHERME R. NOGUEIRA DE SOUZA (SÃO PAULO – SP)

- Vamos analizar $x^2 + 5x + 23$ módulo 2.

Temos: $x^2 + x + 1 \equiv 0$ para ser divisível por 2.
Se $x \equiv 1 \rightarrow 1 + 1 + 1 \equiv 1$; se $x \equiv 0 \rightarrow 0 + 0 + 1 \equiv 1$
Logo 2 não é o menor primo, que vamos chamar de p.

- Vamos analisar $x^2 + 5x + 23$ módulo 3.

Temos: $x^2 + 2x + 2 \equiv 0$ para ser divisível por 3.
Se $x \equiv 0 \rightarrow 0 + 0 + 2 \equiv 2$; se $x \equiv 1 \rightarrow 1 + 2 + 2 \equiv 2$; se $x \equiv 2 \rightarrow 1 + 1 + 2 \equiv 1$.
Logo p não é 3.

- Vamos analisar $x^2 + 5x + 23$ módulo 5.

Temos: $x^2 + 3 \equiv 0$ para ser divisível por 5.
se $x \equiv 1 \rightarrow 1 + 3 \equiv 4$; se $x \equiv 2 \rightarrow 4 + 3 \equiv 7$; se $x \equiv 3 \rightarrow 4 + 3 \equiv 2$;
se $x \equiv 4 \rightarrow 1 + 3 \equiv 4$; se $x \equiv 0 \rightarrow 0 + 3 \equiv 3$.
Logo p não é 5.

- Vamos analisar $x^2 + 5x + 23$ módulo 7.

Temos: $x^2 - 2x + 2 \equiv 0$ para ser divisível por 7.

se $x \equiv 1 \to 1-2+2 \equiv 1$; se $x \equiv 2 \to 4-4+2 \equiv 2$;
se $x \equiv 0 \to 0-0+2 \equiv 2$; se $x \equiv 3 \to 2-6+2 \equiv 5$; se $x \equiv 4 \to 2-1+2 \equiv 3$;
se $x \equiv 5 \to 4-3+2 \equiv 3$; se $x \equiv 6 \to 1-5+2 \equiv 5$.
Logo p não é 7.

- Vamos analisar $x^2+5x+23$ módulo 11.

Temos: $x^2+5x+1 \equiv 0$ para ser divisível por 11.
se $x \equiv 1 \to 1+5+1 \equiv 7$; se $x \equiv 3 \to 9+4+1 \equiv 3$;
se $x \equiv 5 \to 3+3+1 \equiv 7$; se $x \equiv 2 \to 4+10+1 \equiv 4$; se $x \equiv 4 \to 5+9+1 \equiv 4$;
se $x \equiv 6 \to 3+8+1 \equiv 11$; se $x \equiv 7 \to 5+2+1 \equiv 8$; se $x \equiv 9 \to 4+1+1 \equiv 6$;
se $x \equiv 0 \to 0+0+1 \equiv 1$; se $x \equiv 8 \to 9+7+1 \equiv 6$; se $x \equiv 10 \to 1+6+1 \equiv 8$.
Logo p não é 11.

- Vamos analisar $x^2+5x+23$ módulo 13.

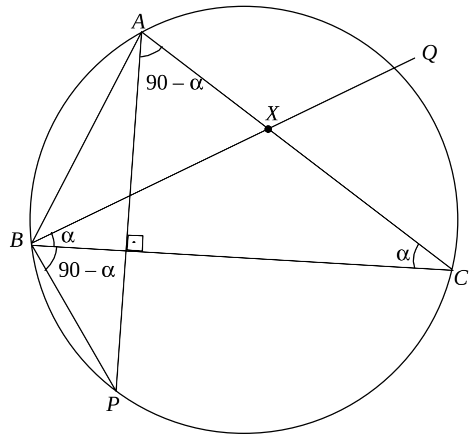
Temos: $x^2+5x-3 \equiv 0$ para ser divisível por 13.
se $x \equiv 1 \to 1+5-3 \equiv 3$; se $x \equiv 5 \to 12+12-3 \equiv 8$;
se $x \equiv 9 \to 3+6-3 \equiv 6$; se $x \equiv 2 \to 4+10-3 \equiv 11$; se $x \equiv 6 \to 10+4-3 \equiv 11$;
se $x \equiv 10 \to 9+11-3 \equiv 4$; se $x \equiv 3 \to 9+2-3 \equiv 8$; se $x \equiv 7 \to 10+9-3 \equiv 3$;
se $x \equiv 11 \to 4+3-3 \equiv 4$; se $x \equiv 4 \to 3+7-3 \equiv 7$; se $x \equiv 8 \to 12+1-3 \equiv 10$;
se $x \equiv 12 \to 1+8-3 \equiv 6$, se $x \equiv 0 \to 0+0-3 \equiv 10$
Logo p não é 13.
Chegamos até agora que p não é 2,3,5,7,11,13.
Então, p é no mínimo 17, e 17 divide $x^2+5x+23$ quando
$x \equiv -2 : (-2)^2+5(-2)+23 = 17.$
Logo o menor primo que divide $x^2+5x+23$ para algum x inteiro é 17.

PROBLEMA 3: SOLUÇÃO DE ANDRÉ LINHARES RODRIGUES (FORTALEZA – CE)

Vamos dividir o problema em duas partes:

a) $BX = CX \Rightarrow PQ$ é um diâmetro de S.

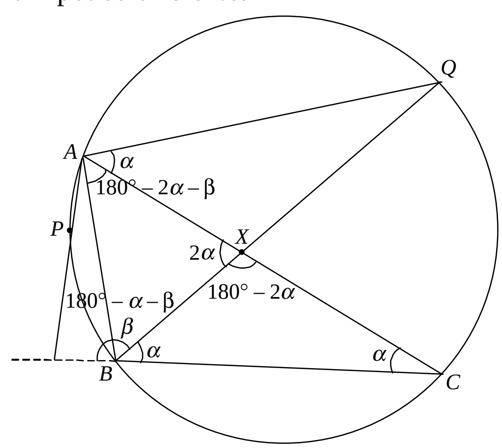
Seja $A\hat{C}B = \alpha.$ Assim, temos que $Q\hat{B}C = \alpha$ (já que $BX = CX$) e
$P\hat{A}C = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha.$
Observe que os ângulos $P\hat{A}C$ e $P\hat{B}C$ estão "olhando" para o mesmo arco. Assim, vemos que $P\hat{B}C = P\hat{A}C = 90-\alpha \Rightarrow P\hat{B}Q = 90-\alpha+\alpha = 90° \Rightarrow PQ$ é diâmetro.



b) PQ é um diâmetro de $S \Rightarrow BX = CX$.

Se $A\widehat{C}B = \alpha,\ P\widehat{A}C = P\widehat{B}C = 90° - \alpha.$ Mas PQ é diâmetro, donde $P\widehat{B}Q = 90° \Rightarrow 90° - \alpha + Q\widehat{B}C = 90° \Rightarrow Q\widehat{B}C = \alpha \Rightarrow \Delta BXC$ é isósceles $\Rightarrow BX = XC.$

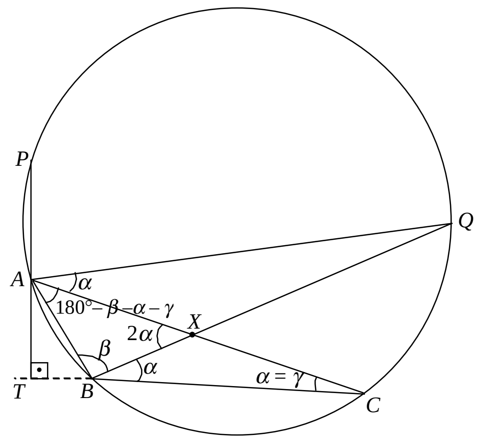
A figura poderia ser um pouco diferente:



a) Chamando $A\widehat{B}Q$ de β e $C\widehat{B}Q = A\widehat{C}B = \alpha$, teríamos $P\widehat{A}B = -90° + \alpha + \beta,\ B\widehat{A}C = 180° - 2\alpha - \beta$ e $C\widehat{A}Q = \alpha,$ e o ângulo $P\widehat{A}Q$ seria $-90° + \alpha + \beta + 180° - 2\alpha - \beta + \alpha = 90°$.

b) Chamando $Q\widehat{B}C$ de α, temos que $C\widehat{A}Q = \alpha.$ Mas PQ é diâmetro $\Rightarrow P\widehat{A}C + \alpha = 90° \Rightarrow P\widehat{A}C + \alpha = 90° \Rightarrow P\widehat{A}C = 90 - \alpha \Rightarrow A\widehat{C}B = 180° - 90° - (90° - \alpha) =$

$= \alpha \Rightarrow \Delta BCX$ é isósceles $\Rightarrow BX = CX$.
A figura pode ainda ficar da seguinte forma:



a) Seja $X\hat{B}C = \alpha$ e $X\hat{B}A = \beta$. Seja T a interseção entre as retas BC e AP. Temos que $T\hat{A}B = \alpha + \beta - 90°$, $B\hat{A}C = 180° - \beta - 2\alpha$ e $C\hat{A}Q = C\hat{B}Q = \alpha$. Então, $P\hat{A}Q = 180° - \alpha - (180° - \beta - 2\alpha) - (\alpha + \beta - 90°) = 90° \Rightarrow PQ$ é diâmetro de S.

b) Seja $Q\hat{B}C = \alpha$, $A\hat{B}Q = \beta$ e $A\hat{C}B = \gamma$. Então teremos que $B\hat{A}C = 180° - \beta - \alpha - \gamma$, $Q\hat{A}C = \alpha$ e $B\hat{A}T = \alpha + \beta - 90°$. Como PQ é diâmetro, $P\hat{A}Q = 90° \Rightarrow Q\hat{A}T = 180° - 90° = 90° \Rightarrow \alpha + \beta - 90° + 180° - \beta - \alpha - \gamma + \alpha = 90°$
$\Rightarrow \gamma = \alpha \Rightarrow \Delta BXC$ é isósceles $\Rightarrow BX = CX$.

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DE MARICY MIKI HISAMOTO (SÃO PAULO – SP)

$$\underbrace{x^2 + 4y^2 - 4xy}_{x^2 - 2\cdot x\cdot 2y + (2y)^2} + 2x - 4y + 2 > 0,$$

$$(x-2y)^2 + (2x-4y) + 1 + 1 = (x-2y)^2 + 2(x-2y) + 2 = [(x-2y)+1]^2 + 1$$

Como qualquer real elevado ao quadrado resulta em um número positivo, $[(x-2y)+1]^2$ é positivo para quaisquer x e y reais. Assim, $[(x-2y)+1]^2 + 1$ também será positivo, logo $x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x - 4y + 2$ é maior que 0.

PROBLEMA 5: VEJA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4 DO NÍVEL 3

PROBLEMA 6: SOLUÇÃO DE EDUARDO FISCHER (LAJEADO – RS)

Vamos meter uma indução:

Se N = 1, 2, 3 é verdadeiro: qualquer caminho serve.

Se $N > 3$, separamos o ponto P_N e consideramos (usando a hipótese de indução) um caminho fechado passando pelas outras cidades, digamos $P_1P_2...P_{N-1}P_1$, mudando o meio de transporte no máximo uma vez. Temos duas possibilidades:

a) O caminho usa só um meio de transporte. Nesse caso, o caminho fechado $P_1P_2...P_NP_1$ ou o $P_NP_1...P_{N-1}$ muda de meio de transporte no máximo uma vez.

b) O caminho muda de meio de transporte exatamente uma vez, digamos de P_{N-1} para P_1 (quando muda de rodovia para ferrovia, sem perda de generalidade). Temos então os seguintes caminhos fechados, em cada caso abaixo:

b.1) $P_{N-1}P_N$ e P_NP_1 são ferrovias: $P_1P_2...P_{N-1}P_NP_1$

b.2) $P_{N-1}P_N$ e P_NP_1 são rodovias: $P_{N-1}P_NP_1P_2...P_{N-1}$

b.3) $P_{N-1}P_N$ é rodovia e P_NP_1 é ferrovia: $P_1P_2...P_{N-1}P_NP_1$

b.4) $P_{N-1}P_N$ é ferrovia e P_NP_1 é rodovia: $P_NP_1P_2...P_{N-1}P_N$

Pelo princípio indutivo concluímos que para qualquer número possível de cidades em Tumbólia, nosso turista poderá visitá-las mudando o meio de transporte no máximo uma vez.

SOLUÇÕES – NÍVEL 3

PROBLEMA 1: VEJA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2 DO NÍVEL 2.

PROBLEMA 2:
ADAPTADA DA SOLUÇÃO DE MURILO VASCONCELOS DE ANDRADE (MACEIÓ - AL)

Vamos mostrar que $k_n = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$, ou seja, se $2^k \le n < 2^{k+1}$ então $k_n = k+1$, por indução em k. Primeiro vamos ver que $k_n \le k+1$. De fato, $k_1 = 1$ e, dado n. Sejam dados conjuntos $A_1, A_2, ..., A_{k+1} \subset S$. Como $\#A_{k+1}^+ \ge \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ ou $\#A_{k+1}^- \ge \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, pois $A_{k+1}^- \cup A_{k+1}^+ = S$, segue que $\#\left(S \setminus A_{k+1}^+\right) \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor < 2^k$ ou $\#\left(S \setminus A_{k+1}^-\right) \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor < 2^k$.

Supondo sem perda de generalidade que $\#\left(S \setminus A_{k+1}^+\right) < 2^k$, por hipótese de indução, trocando A_j por $\widetilde{A}_j := A_j \cap \left(S \setminus A_{k+1}^+\right)$, para $1 \le j \le k$, temos

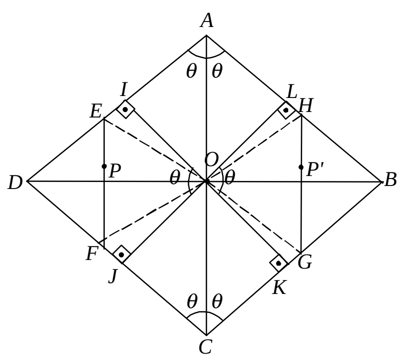
$S \setminus A_{k+1} = \widetilde{A}_1^{\pm} \cup \widetilde{A}_2^{\pm} \cup ... \cup \widetilde{A}_k^{\pm}$, para alguma escolha dos sinais + e – , donde $S = A_1^{\pm} \cup A_2^{\pm} \cup ... \cup A_2^{\pm} \cup A_{k+1}^{+}$, para a mesma escolha dos k primeiros sinais.

Por outro lado, se $n \geq 2^k$ e, para $1 \leq i \leq k$,

$A_i = \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} \sigma_j \cdot 2^j \middle| \sigma_j \in \{0,1\}, \forall j < k \text{ e } \sigma_{i-1} = 1 \right\} \subset \{0,1,...,n-1\}$ é o conjunto dos naturais menores que 2^k cujo (i – 1)-ésimo algarismo binário é igual a 1, $A_1^{\mp} \cap A_2^{\mp} \cap ... \cap A_k^{\mp}$ é não vazio para qualquer escolha dos sinais, donde $A_1^{\pm} \cup A_2^{\pm} \cup ... \cup A_k^{\pm} \neq S = \{0,1,...,n-1\}$, para qualquer escolha dos sinais. Isso mostra que $k_n > k$, e portanto $k_n > k$.

PROBLEMA 3: SOLUÇÃO DE RAFAEL MARINI SILVA (VILA VELHA – ES)

Não é difícil ver que o centro O da circunferência inscrita ao losango $ABCD$ é encontro das diagonais. Se $B\hat{A}D = 2\theta = B\hat{C}D$, vamos mostrar que $\frac{AH}{CF} = \frac{AE}{CG}$, ou ainda, $AH \cdot CG = CF \cdot AE = K \in \mathbb{R}$ constante; o que implica o resultado, pois os triângulos AEH e CGF são semelhantes, e logo EH é paralelo a FG.



Sendo I, J, K, L, P, P' os pontos de encontro da circunferência inscrita com AD, DC, CB, AB, EF e GH respectivamente temos:

$I\hat{O}E = E\hat{O}P = \frac{I\hat{O}P}{2}$ (pois EI e EP são tangentes comuns à circunferência)

$J\hat{O}F = F\hat{O}P = \frac{J\hat{O}P}{2}$

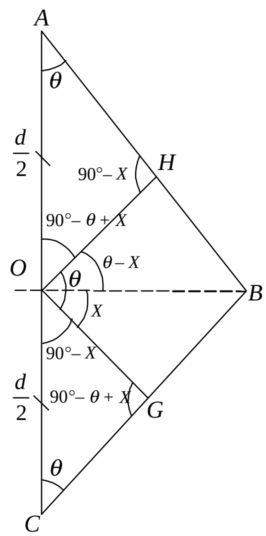
$I\hat{O}J = J\hat{O}P + I\hat{O}P = 2(P\hat{O}E + F\hat{O}P) =$

$2(E\hat{O}F) = 180° - I\hat{D}F = D\hat{A}B = 2\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow E\hat{O}F = \theta,$

analogamente temos: $H\hat{O}G = \theta.$

Destacando o triângulo ABC temos:



Fazendo $B\widehat{O}G = X$, temos:

$A\widehat{H}O = 90° - X$

$A\widehat{O}H = 90° - \theta + X$

$O\widehat{G}C = 90° - \theta + X = A\widehat{O}H$

$C\widehat{O}G = 90° - X = A\widehat{H}O$

$O\widehat{C}G = O\widehat{A}H$

Logo $\Delta AOH \sim \Delta CGO$ e

$$\frac{AH}{CO} = \frac{AO}{CG} \Rightarrow AH \cdot CG = AO \cdot CO = (AO)^2 = \frac{d^2}{4}.$$

Analogamente, temos

$AE \cdot CF = \frac{d^2}{4}$, constante pois $d = \frac{AC}{2}$ é constante.

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DE FÁBIO DIAS MOREIRA (RIO DE JANEIRO - RJ)

Seja Γ a circunferência do problema. Suponha que $B, C, D \in \Gamma$ são os pontos que maximizam a área de $ABCD$ (obviamente, $ABCD$ é convexo). Então C é ponto médio de $\overset{\frown}{BD}$: caso não fosse, considere *M*, ponto médio de $\overset{\frown}{BD}$. Então $S(ABMD) = S(ABD) + S(BMD) > S(ABD) + S(BCD) = S(ABCD)$, pois, como *M* é médio de $\overset{\frown}{BD}$, $d(M, \overleftrightarrow{BD}) > d(C, \overleftrightarrow{BD})$. Como ΔBMD e ΔBCD têm a mesma base, $S(BMD) > S(BCD)$. Considere agora $\{A'\} = (\Gamma \cap \overleftrightarrow{AC}) \setminus \{C\}$. Pelo mesmo argumento, *B* e *D* são pontos médios dos seus respectivos arcos $\overset{\frown}{A'C}$.

Em particular, isso implica que $\overleftrightarrow{BD}$ é a mediatriz de $\overleftrightarrow{A'C} \Rightarrow O \in \overleftrightarrow{BD}$ (em particular, *O* é ponto médio de $\overline{BD}$). Além disso, como *C* é médio de $\overset{\frown}{BD}$, e *O* é médio de $\overline{BD}$, $\overline{CO} \perp \overline{BD}$. Mas $\overleftrightarrow{A'C} \perp \overline{BD}$, pois $\overleftrightarrow{BD}$ é mediatriz de $\overline{A'C}$. Em particular, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$. Mas $\overline{OC} \perp \overline{BD} \Rightarrow O, A, C$ são colineares.

Construção: Trace a semi-reta $\overrightarrow{AO}$: ela intersecta Γ em *C* (pois o polígono deve ser convexo com *A*, *O*, *C* colineares, logo esta é a única possível posição de *C*). Como $\overline{BD}$ é ortogonal a $\overline{AC}$ em *O*, a perpendicular a $\overline{AC}$ por *O* determina *B* e *D* - estes *B* e *D* são os que maximizam a área do quadrilátero #*ABCD*.

PROBLEMA 5: SOLUÇÃO DE ALEX CORRÊA ABREU (NITERÓI - RJ)

Em (iii) troque x por $\frac{1}{x}$ e y por $\frac{1}{y} \Rightarrow f\left(\frac{2}{x+y}\right) \geq \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{y}\right)}{2}$ defina agora $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow$

i) $x<y \Rightarrow g(x)>g(y)$

ii) $g\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{g(x)+g(y)}{2}$

Fazendo $z=\frac{x+y}{2} \Rightarrow g(z) \geq \frac{g(2z-y)+g(y)}{2}$

Fazendo agora $y=1 \Rightarrow 2g(z) \geq g(2z-1)+g(1) \Rightarrow g(2z-1) \leq 2g(z)-g(1)$ $\left(\forall z > 1/2\right)$ mas $2z>2z-1 \Rightarrow g(2z-1) \geq g(2z) \Rightarrow g(2z) \leq 2g(z)-g(1)$. Vamos agora provar por indução que $g(2^n z) \leq 2^n g(z)-(2^n-1)g(1)=2^n(g(z)-g(1))+g(1)$:

se $g(2^k z) \leq 2^k g(z)-(2^k-1)g(1) \Rightarrow g(2^{k+1}z) \leq 2g(2^k z)-g(1) \leq$

$2^{k+1}g(z)-(2^{k+1}-2)g(1)-g(1)=2^{k+1}g(z)-(2^{k+1}-1)g(1)$.

Se tomarmos $z>1, g(z)-g(1)<0 \Rightarrow \exists\, n$ tal que $2^n(g(z)-g(1))+g(1)<0 \Rightarrow$

$\exists x$ tal que $g(x)<0 \Rightarrow \exists y=\frac{1}{x}$ tal que $f(y)<0$.

PROBLEMA 6: Solução adaptada das soluções de Davi Máximo Alexandrino Nogueira e Rafael Daigo Hirama

A idéia é contar o número de pares (f; D), sendo f e D função e conjunto correspondentes a um grafo bacana e comparar com o número de grafos com n vértices.

Cada par (f; D) gera no máximo um grafo: de fato, dada f, ligamos os vértices p e q se, e somente se, $|f(p)-f(q)| \in D$. Caso ocorra alguma contradição entre os pares de vértices, o par não gera um grafo. Assim, basta provar que a quantidade de grafos de n vértices é maior que a quantidade de pares (f; D), pois isso demonstraria a existência de um grafo que não é gerado por nenhum par e, portanto, não bacana.

No que se segue, $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro menor que ou igual a x. Há $\dfrac{\left(\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor\right)!}{\left(\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - n\right)!} \le \left(\dfrac{n^2}{4}\right)^n$ funções injetoras de V, com n elementos, para $[1, n^2/4] \cap$ N e, como podemos tomar $D \subset [1, n^2/4] \cap \mathbb{N}$, (senão, trocamos D por sua interseção com $\left[1, n^2/4\right]$) temos no máximo $2^{\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor} \le 2^{\frac{n^2}{4}}$ conjuntos D. Logo o número de pares $(f; D)$ é menor que ou igual a $\left(\dfrac{n^2}{4}\right)^n \cdot 2^{\frac{n^2}{4}}$.

Além disso, há $2^{\binom{n}{2}} = 2^{\frac{n^2-n}{2}}$ grafos com n vértices dados. Assim, basta mostrar que para todo n suficientemente grande,

$$2^{\frac{n^2-n}{2}} > \left(\frac{n^2}{4}\right)^n \cdot 2^{\frac{n^2}{4}} \Leftrightarrow 2^{\frac{n^2}{4}-\frac{n}{2}} > 2^{2n\log_2 \frac{n}{2}} \Leftrightarrow \frac{n-2}{8} > \log_2 \frac{n}{2} \Leftrightarrow 2^{\frac{n-2}{8}} > \frac{n}{2},$$

o que é verdade para $n > 58$ (sendo $n > 58$, $2^{\frac{n-2}{8}} = (1+1)^{\frac{n-2}{8}} > 1 + \dfrac{n-2}{8} + \dfrac{\frac{n-2}{8} \cdot \left(\frac{n-2}{8} - 1\right)}{2} > \dfrac{n}{2}$). Na verdade, poderíamos simplesmente notar que uma função exponencial cresce muito mais que qualquer função polinomial, que por sua vez, cresce muito mais que qualquer função logarítmica.

De fato, quando n fica muito grande quase nenhum grafo é bacana. Isto quer dizer que, embora existam grafos bacanas com um número qualquer de vértices (como, por exemplo, o grafo completo e o grafo vazio), a probabilidade de um grafo ser bacana fica muito próxima de zero quando n é muito grande.

XXV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Problemas e Soluções da Primeira Fase – Nível Universitário

PROBLEMA 1

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^3$ o poliedro convexo cujos vértices são todos os pontos $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ com $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Calcule o volume de X.

PROBLEMA 2

O tenista Berrando Gemigemi tem 30 dias para preparar-se para um torneio. Se ele treina 3 dias seguidos ele tem fadiga muscular. Ele, então, decide que, durante esses 30 dias, irá treinar 20 dias, sem nunca treinar 3 dias seguidos, e descansar nos outros 10 dias. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher os 10 dias de descanso?

PROBLEMA 3

Sejam A e B matrizes reais $n \times n$ inversíveis. Mostre que se vale a condição $(AB)^k = A^k B^k$ para três valores inteiros consecutivos de k então $AB = BA$.

PROBLEMA 4

Sabemos que $\sum_{k>0} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$. Defina

$$f(n) = \sum_{0<k\leq n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$

Prove que existe um número real $a > 0$ tal que existe o limite:

$$\lim_{n\to\infty} \left(f(n) - \frac{\pi^2}{6} + \frac{a}{n} \right) \cdot n^2.$$

Calcule a e este limite.

PROBLEMA 5

Sejam a e n inteiros, $n > 1$, $mdc(a, n) = 1$.

Prove que o polinômio $(1/n)\left((X+a)^n - X^n - a\right)$ tem todos os coeficientes inteiros se e somente se n é primo.

PROBLEMA 6

Defina $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n^2 - 2$.

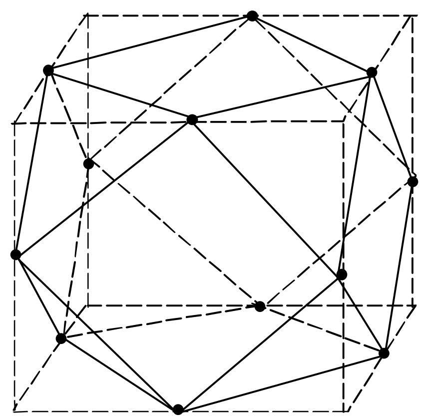
Prove que $\lim_{n\to\infty} \frac{\log\log a_n}{n} = \log 2$ e calcule $\lim_{n\to\infty} (\log\log a_n - n\log 2)$.

(Observação: os logaritmos estão todos na base *e*).

SOLUÇÕES – NÍVEL UNIVERSITÁRIO

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

Os vértices de X são os doze pontos $(\pm1,\pm1,0),(\pm1,0,\pm1),(0,\pm1,\pm1)$, que são os pontos médios das arestas do cubo $(\pm1,\pm1,\pm1)$, donde X é obtido a partir do cubo tirando fora uma pirâmide (ou tetraedro) em cada vértice.



O volume do cubo é $2^3 = 8$.

Cada pirâmide tem base de área 1/2 e altura 1 logo tem volume igual a 1/6.

Assim o volume do sólido é igual a $8 - \frac{8}{6} = \frac{20}{3}$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:

Podemos dividir os 30 dias em 10 blocos de três dias.

É claro que ele deverá descansar em exatamente um dia por bloco.

Se alguma vez ele descansa no dia central de um bloco depois disso ele não poderá descansar no último dia de um bloco; analogamente, se alguma vez ele descansa no primeiro dia de um bloco ele deverá descansar no primeiro dia de todos os blocos que vierem depois. Assim, ele deve descansar no último dia nos primeiros

x blocos, depois descansar no dia central durante y blocos e finalmente descansar no primeiro dia nos últimos z blocos, onde $x + y + z = 10$,
$x, y, z \geq 0$, $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

O número de soluções é $\binom{12}{2} = 66.$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

Suponha que $(AB)^k = A^k B^k$, $(AB)^{k+1} = A^{k+1}B^{k+1}$ e $(AB)^{k+2} = A^{k+2}B^{k+2}$. Temos então $A^{k+1}B^{k+1} = (AB)^{k+1} = (AB)(AB)^k = AB\, A^k B^k$, e logo (multiplicando à esquerda por A^{-1} e à direita por B^{-k}) obtemos $A^k B = BA^k$.

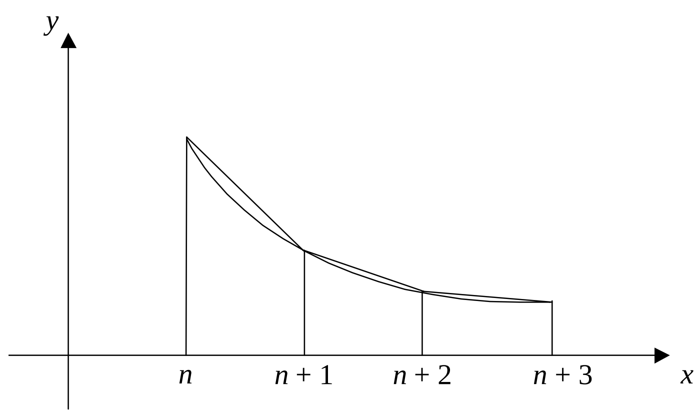
Analogamente, usando a segunda e a terceira igualdades, obtemos $A^{k+1}B = BA^{k+1}$

Assim temos $BA^{k+1} = A^{k+1}B = A \cdot A^k B = A \cdot BA^k$, donde, multiplicando à direita por A^{-k}, obtemos $BA = AB$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:

Temos $\dfrac{\pi^2}{6} - f(n) = \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{(n+2)^2} + \dfrac{1}{(n+3)^2} + \ldots$

Podemos obter uma boa estimativa para esta soma estimando a área sob o gráfico de $y = \dfrac{1}{x^2}$, $x \geq n$, pela regra dos trapézios:



A área exata é $\int_n^\infty \frac{1}{t^2}dt = \frac{1}{n}$.

A área obtida pela aproximação, que é ligeiramente maior, é

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}\right)+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+3)^2}+\ldots=\frac{1}{2n^2}+\frac{\pi^2}{6}-f(n)$$

Donde $\left(f(n)-\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{n}\right)n^2<\frac{1}{2}$

Assim a = 1 e, se acreditarmos que esta aproximação é boa, teremos que o limite é igual a 1/2.

Para demonstrarmos que o erro é realmente pequeno, devemos estimar a diferença entre as áreas:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\right)-\int_n^{n+1}\frac{1}{t^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\right)-\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{2n^2(n+1)^2}<\frac{1}{2n^4}$$

Assim

$$0<\frac{\pi^2}{6}-f(n)-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^4}+\frac{1}{(n+1)^4}+\ldots\right)$$

$$<\frac{1}{2}\int_{n-1}^\infty\frac{1}{t^4}dt=\frac{1}{6}\frac{1}{(n-1)^3}$$

e com isso

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\cdot\frac{n^2}{(n-1)^3}<\left(f(n)-\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{n}\right)n^2<\frac{1}{2},$$

o que confirma que o limite é igual a 1/2.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5:

Temos $(X+a)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}X^k$. Assim

$$(X+a)^n-X^n-a=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}X^k+(a^n-a).$$

Se n é primo e $1\le k\le n-1, \binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$ é múltiplo de n, pois o numerador é múltiplo de n mas o denominador não, e, pelo pequeno Teorema de

Fermat, $a^n - a$ é múltiplo de *n*. Assim, nesse caso, o polinômio $\left(\frac{1}{n}\right)\left((X+a)^n - X^n - a\right)$ tem todos os coeficientes inteiros.

Se n é composto, seja q um fator primo de n. Temos então que $\binom{n}{q} = \frac{n(n-1)...(n-q+1)}{q!}$ não é múltiplo de *n*. De fato, se q^k é a maior potência de q que divide *n*, a maior potência de q que divide $\binom{n}{q}$ é q^{k-1}, pois o único fator múltiplo de *q* no numerador é *n* e o único fator múltiplo de *q* em *q*! = *q*(*q* – 1)… . 2 . 1 é *q*. Assim, nesse caso, o coeficiente de X^q em $\left(\frac{1}{n}\right)\left((X+a)^n - X^n - a\right)$ não é inteiro.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6:

A recursão é satisfeita por $a_n = \alpha^{2^n} + \alpha^{-2^n}$ para qualquer número real α, de fato, por indução $a_{n+1} = a_n^2 - 2 = \left(\alpha^{2^n} + \alpha^{-2^n}\right)^2 - 2 \ = \alpha^{2^{n+1}} + 2 + \alpha^{-2^{n+1}} - 2 = \alpha^{2^{n+1}} + \alpha^{-2^{n+1}}$.

Para a seqüência do problema, basta resolver $\alpha^2 + \alpha^{-2} = 3$ que tem raiz $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Assim $a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2^n}$. Assim,

$a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2^n} + \varepsilon(n)$, onde $\lim\limits_{n\to\infty} |\varepsilon(n)| = 0$ donde $\log a_n = 2^n \cdot \log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \varepsilon_1(n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} |\varepsilon_1(n)| = 0$ e $\log\log a_n = n\log 2 + \log\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \varepsilon_2(n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} |\varepsilon_2(n)| = 0$

Assim $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log\log a_n}{n} = \log 2$ e $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\log\log a_n - n\log 2\right) = \log\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

XXV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e Soluções da Segunda Fase – Nível Universitário

PROBLEMA 1:

São dados uma parábola e um ponto *A* fora dela. Para cada ponto *P* da parábola, seja *t* a tangente à parábola por *P* e *r* a reta paralela ao eixo da parábola por *P*. A reta perpendicular a *t* por *A* corta *r* em *Q*. Prove que, ao variar *P*, o ponto *Q* percorre uma hipérbole equilátera.

PROBLEMA 2:

a) Sejam p e $q \in \mathbb{C}[x]$ polinômios primos entre si com coeficientes complexos. Suponha que existam 4 vetores $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, dois a dois linearmente independentes (sobre $\mathbb{C}$), tais que $ap + bq$ é o quadrado de um polinômio em $\mathbb{C}[x]$. Prove que p e q são constantes.

b) Prove que não existem polinômios não constantes *r, s, t, u* $\in \mathbb{C}[x]$ tais que $f = \frac{r}{s}$, $g = \frac{t}{u}$ e $f^2 = g(g-1)(g-a)$, onde $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, $a \neq 1$.

PROBLEMA 3:

Seja $p > 2$ um número primo.

Seja X_p o conjunto de todas as matrizes quadradas *A* com coeficientes em $\mathbb{Z}/(p)$ e de ordem 4 para as quais $A^2 = I$: $X_p = \left\{ A \in \left(\mathbb{Z}/(p)\right)^{4\times 4} \,\middle|\, A^2 = I \right\}$

Calcule o número de elementos de X_p.

Observação: $\mathbb{Z}/(p) = \{0, 1, 2, ..., p-1\}$ é o corpo finito com *p* elementos. A soma e o produto são definidos módulo *p*; assim, por exemplo, em $\mathbb{Z}/(7)$, 4 + 5 = 2 e 4 · 5 = 6.

PROBLEMA 4:

Temos um dado de 6 faces, não necessariamente honesto. Jogamos o dado três vezes e obtemos resultados *a*, *b* e *c*. Prove que $P(a = c \mid a = b) \geq P(a = c \mid a \neq b)$ e que vale a igualdade se e somente se o dado é honesto.

Observação: $P(a = c \mid a = b)$ é a probabilidade condicional

$$P(a = c \mid a = b) = \frac{P(a = b = c)}{P(a = b)}.$$

Um dado é honesto se a probabilidade de cada face é $\frac{1}{6}$.

PROBLEMA 5:

Uma função $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ de classe C^{∞} é *bacana* se existem um inteiro positivo n e polinômios $P_j\in\mathbb{R}[t],\ 0\le j\le n,$ com P_n não identicamente nulo tais que $\sum_{j=0}^{n} P_j(t)\,f^{(j)}(t)=0,$ para todo $t\in(-1,1).$ Prove que se *f* e *g* são bacanas então $f+g$ e $f\cdot g$ também são bacanas.

Observação: Definimos $f^{(0)}=f$ e, para cada inteiro $m\ge 0,$ $f^{(m+1)}=(f^{(m)})'.$

PROBLEMA 6:

Seja $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ uma matriz tal que $a_{ij}\in\{0,1\},$ para quaisquer i,j e $\left|\{(i,j)\mid a_{ij}=1\}\right|\ge\frac{99}{100}\cdot n^2.$ Prove que $tr(A^k)\ge\left(\frac{n}{2}\right)^k,$ para todo $k\ge 2.$

Observação: Se $B=(b_{ij})_{1\le i,j\le n}$ é uma matriz quadrada então $tr(B)=\sum_{i=1}^{n} b_{ii}$ denota o traço de *B*.

SOLUÇÕES - NÍVEL UNIVERSITÁRIO

PROBLEMA 1: SOLUÇÃO DE LEONARDO AUGUSTO ZÃO (NILÓPOLIS – RJ)

Dada a parábola γ, fixamos os eixos coordenados de forma que tenhamos a equação da parábola dada por $\gamma: y=ax^2$. Supomos que $A=(m,n)$ e $P=(x_p,y_p)$.

Como $p\in\gamma\Rightarrow y_p=ax_p^2\Rightarrow P=(x_p,ax_p^2).$

Pelo enunciado, a reta *t* tem coeficiente angular $2ax_p$, e a reta perpendicular a *t* tem coeficiente angular $\frac{-1}{2ax_p}$.

Assim, a reta perpendicular a *t* que passa por *A* é dada pela equação:

$$(*)\ t_1=(y-n)=\frac{-1}{2ax_p}(x-m).$$

A reta r é dada por $r: x = x_p$

Assim: $Q = t_1 \cap r = (x_p, \frac{-1}{2ax_p}(x_p - m) + n) = (x_p, \frac{m}{2ax_p} - \frac{1}{2a} + n)$

Em Q, variando x_p, teremos: $y = \frac{m}{2ax} - \frac{1}{2a} + n.$ Se $\frac{m}{2a} = q$ e $n - \frac{1}{2a} = k,$ então:

$y = \frac{q}{x} + k \Rightarrow (y - k) = \frac{q}{x} \Rightarrow (y - k) \cdot x = q$.

Assim, se deslocarmos o eixo y para y – k, teremos a hipérbole equilátera: $yx = q,$ onde $q = \frac{m}{2a}.$

PROBLEMA 2: SOLUÇÃO DE MÁRCIO AFONSO ASSAD COHEN (RIO DE JANEIRO – RJ)

a) Escrevendo $a_i \cdot p + b_i \cdot q = v_i^2$, $i = 1,2,3,4$, temos que toda raiz a de v_i é dupla de $a_i p + b_i q$,:

$\begin{cases} a_i p(a) + b_i q(a) = 0 \\ a_i p'(a) + b_i q'(a) = 0 \end{cases}$. Portanto o sistema $\begin{cases} xp(a) + yq(a) = 0 \\ xp'(a) + yq'(a) = 0 \end{cases}$,

é indeterminado (já que $(a_i, b_i) \neq (0,0)$), isto é, $p(a)q'(a) - q(a)p'(a) = 0$ e as soluções podem ser parametrizadas de modo que $(a_i, b_i) = t \cdot (q(a), -p(a))$.

Como os (a_i, b_i) são 2 a 2 LI, os v_i's são 2 a 2 co-primos (porque se a fosse raiz de v_i e de v_j, então (a_i, b_i) e (a_j, b_j) seriam ambos múltiplos de $(q(a), -p(a))$).

Além disso, toda raiz de v_i é também raiz de $h = pq' - qp'$. Mais geralmente, se a tem multiplicidade k como raiz de v_i então a é raiz de h com multiplicidade

$2k - 1 \geq k$. (pois, para cada n, a n-ésima derivada de n é uma soma de termos do tipo $p^{(j)}q^{(n-j)} - p^{(n-j)}q^{(j)}$, que se anulam em a se $n \leq 2k - 1$).

Vou mostrar agora que h é identicamente nulo, de modo que a derivada de p/q é zero.

Seja m = grau (p), n = grau (q):

1º caso: $m > n$:

Cada v_i tem grau $m/2$, exceto possivelmente um que pode ter grau $n/2$ (se existir algum a_i nulo) e portanto os v_i's contribuem com pelo menos $3m/2 + n/2$ raízes de h.

Por outro lado, $grau(h) = grau(pq' - qp') \le m + n - 1 < m + n < \frac{3m+n}{2}$, onde a última igualdade decorre de $m > n$. Logo, $h \equiv 0$.

2º caso: $m = n$:
Aqui pode ocorrer de algum polinômio $a_i p + b_i q$ ter grau menor que n (como os pares são 2 a 2 LI, isso ocorre no máximo uma vez).
Mas se $a_i p(x) + b_i q(x) = T_l(x)$, onde T_l é de grau $l < n$, então $a_i \neq 0$ e

$$h = pq' - p'q = \frac{1}{a_i}\left[(-b_i q + T_l)q' - (-b_i q' + T'_l)q\right] = \frac{1}{a_i}(T_l q' - T'_l q)$$

tem grau $\le l + n - 1$.
Por outro lado, os polinômios $a_i p + b_i q$ estão contribuindo com $\frac{l}{2} + 3\frac{n}{2}$ raízes de h. Como $grau(h) \le l + n - 1 < l + n \le \frac{l+3n}{2}$ (já que $l \le n$), h é identicamente nulo.
Portanto, $\left(\frac{p}{q}\right)' = \frac{h}{q^2} \equiv 0 \to \frac{p(x)}{q(x)} = cte$. Como p e q são primos entre si, ambos são constantes.

b) Substituindo $f = r/s$ e $g = t/u$, veja que mdc(t, u) = 1 implica que os polinômios t, u, $t - u$, $t - au$ são 2 a 2 primos entre si (se dois deles tivessem uma raiz comum α, é fácil ver que α seria raiz de t e de u).
Substituindo em $f^2 = g(g-1)(g-a)$ temos: $r^2u^3 = s^2t(t-u)(t-au)$. Como os polinômios t, $t - u$, $t - au$ são primos com u, eles devem ser divisores de r^2. Como eles são 2 a 2 primos entre si, cada um deve ser um quadrado perfeito (pois todas as raízes de r^2 e s^2 tem multiplicidade par e s é primo com r).
Analogamente, como u^3 é primo com t, $t - u$ e $t - au$, ele deve ser divisor de s^2. Logo, u só tem raízes de multiplicidade par (se a fosse raiz com multiplicidade ímpar de u, também o seria de u^3 e portanto de s^2) e portanto é quadrado de um polinômio complexo.
Ou seja, escrevemos u, t, $t - u$ e $t - au$ como quadrados de polinômios, o que contradiz a letra (a), pois os vetores (1, 0), (0, 1), (–1, 1), (– a, 1) são 2 a 2 LI ($a \neq 0$ e $a \neq 1$).

PROBLEMA 3: SOLUÇÃO DE EDUARDO CASAGRANDE STABEL (PORTO ALEGRE – RS)

Seja p um primo fixado ($p > 2$) e $V = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^4$ um espaço vetorial.

Proposição 1: Se A é uma matriz 4×4 com coeficientes em $\mathbb{Z}_p$ e $A^2 = I$ é uma involução então $V = E \oplus F$ onde $E = \{u \in V : Au = u\}$ e $F = \{u \in V : Au = -u\}$

Demonstração: Suponha que A é involução. É claro que os espaços E e F do enunciado só possuem o vetor nulo em comum, pois se $Au = u$ e $Au = -u$ então $u = -u$ e
$u = (0, 0, 0, 0)$. Mostremos que $E + F = V$. Seja $v \in V$ qualquer. Então $v = e + f$ onde $e = \dfrac{(Av+v)}{2}$ e $f = \dfrac{(-Av+v)}{2}$. Temos $Ae = \dfrac{1}{2}\left(A^2v + Av\right) = \dfrac{1}{2}\left(v + Av\right) = e$ e $Af = \dfrac{1}{2}\left(-A^2v + Av\right) = \dfrac{1}{2}\left(-v + Av\right) = -\dfrac{1}{2}\left(-Av + v\right) = -f$, logo $e \in E$ e $f \in F$.

Suponha que $V = E \oplus F$. Definiremos uma aplicação $L : \mathbb{Z}_p^4 \to \mathbb{Z}_p^4$ tal que $L(v) = e - f$ onde $v = e + f$ é a decomposição única com $e \in E$ e $f \in F$.

Afirmo que L é linear. Se $v_1 = e_1 + f_1$ e $o_2 = e_2 + f_2$ então $L(o_1 + o_2) = L(e_1 + e_2 + f_1 + f_2) = (e_1 + e_2) - (f_1 + f_2) = (e_1 - f_1) + (e_2 - f_2) = L(v_1) + L(v_2)$.
Caso $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ e $v \in V$ então $L(\alpha v) = L(\alpha e + \alpha f) = \alpha e - \alpha f = \alpha L(v)$. Mais ainda, L é uma involução. De fato, se $v = e + f \in V$ então $L^2(v) = L(Lv) = L(e - f) = e - (-f) = e + f = v$. Logo existe uma matriz A tal que $L(v) = Av$ para todo v sendo A involução.

Deste modo, para cada matriz existe uma aplicação e vice-versa. Portanto o número de matrizes A é igual ao número de decomposições $V = E \oplus F$.

Proposição 2: Se E é subespaço de $V = \mathbb{Z}_p^4$ e $\dim E = k$ então $\# E = p^k$.

Demonstração: Dois subespaços de mesma dimensão são isomorfos, basta contar um subespaço específico de dimensão k. Se $e_i = (0,...,1,...,0)$ é o vetor canônico e E = gerado $(e_1,...,e_k)$ é fácil ver que $\# E = p^k$.

Proposição 3: Seja M um espaço vetorial sobre $\mathbb{Z}_p$ cuja dimensão é $\dim M = m$.
Caso $1 \le n \le m$, existem $(p^m - 1)(p^{m-1} - 1)...(p^{m-n+1} - 1)/(p^n - 1)(p^{n-1} - 1)...(p - 1)$ subespaços de M de dimensão n.

Demonstração: Faremos escolhas de n retas (subespaços de M de dimensão um) ordenadas $(r_1, r_2, ..., r_n)$ tal que cada r_{i+1} não esteja contida no subespaço gerado por $\{r_1, r_2, ..., r_i\}$. Para a primeira reta existem $(p^n - 1)\big/(p-1)$ escolhas possíveis, pois duas retas quaisquer tem p elementos e só o vetor zero em comum. Ou seja, retirando-se o zero (dá $p^n - 1$ elementos), repartimos este conjunto em $(p^n - 1)\big/(p-1)$ cada um dos quais com os elementos de uma reta, sem o vetor nulo. Com um argumento similar, chegamos a $(p^n - p)\big/(p-1)$ possibilidades para a segunda reta, $(p^n - p^2)\big/(p-1)$ para a terceira e assim por diante. São $\dfrac{(p^m-1)(p^m-p)(p^m-p^2)...(p^m-p^{n-1})}{(p-1)^n}$ possibilidades.

Cada escolha $(r_1, r_2, ..., r_n)$ gera um subespaço N = gerado $\{r_1, ..., r_n\}$ de M de dimensão *n*. Dado um $N \subset M$ subespaço de dimensão *n*, por um argumento similar, é gerado por $\dfrac{(p^n-1)(p^n-p)(p^n-p^2)...(p^n-p^{n-1})}{(p-1)^n}$ escolhas $(r_1, r_2, ..., r_n)$ em N tal que r_{i+1} não está contido no espaço gerado $\{r_1, r_2, ..., r_i\}$. Logo existem

$$\frac{(p^m-1)(p^m-p)...(p^m-p^{n-1})}{(p-1)^n}\bigg/\frac{(p^n-1)(p^n-p)...(p^n-p^{n-1})}{(p-1)^n}=\frac{(p^m-1)(p^{m-1}-1)...(p^{m-n+1}-1)}{(p^n-1)(p^{n-1}-1)...(p-1)}$$

subespaços $N \subset M$ de dimensão *n*.

A estratégia será contar o número de decomposições do espaço V em somas diretas $V = E \oplus F$.

Caso $(\dim E = 0$ e $\dim F = 4)$ ou $(\dim E = 4$ e $\dim F = 0)$. Contam-se as seguintes possibilidades:

$E = \{0\}$ e $F = V$ ou $E = V$ e $F = \{0\}$.

Assim, nesse caso, o número de possibilidades é 2 (o leitor pode verificar que essas decomposições correspondem a $A = I$ e $A = -I$) (1)

Caso $(\dim E = 1$ e $\dim F = 3)$ ou $(\dim E = 3$ e $\dim F = 1)$: Façamos só o caso $\dim E = 3$ e $\dim F = 1$, o outro é análogo. Pela proposição 3, existem

$$\frac{(p^4-1)(p^3-1)(p^2-1)}{(p^3-1)(p^2-1)(p-1)} = \frac{(p^4-1)}{p-1} = 1 + p + p^2 + p^3$$

escolhas para o espaço *E*. Em *V* – *E*, restam $(p^4 - p^3)$ elementos e $\dfrac{(p^4-p^3)}{(p-1)}$ retas, portanto são ao todo $(p^4-1)(p^4-p^3)\big/(p-1)^2$ escolhas para *E* e *F*. Contando também o caso $\dim E = 1$ e $\dim F = 3$, temos:

$$2\frac{(p^4-1)(p^4-p^3)}{(p-1)^2}=2(1+p+p^2+p^3)p^3=2p^6+2p^5+2p^4+2p^3 \qquad (2)$$

Caso $(\dim E=2=\dim F)$. Novamente pela proposição 3, existem $\frac{(p^4-1)(p^3-1)}{(p^2-1)(p-1)}$ escolhas para E. Escolhido E, fazemos um procedimento análogo ao da demonstração da proposição 3, escolhendo duas retas (r_1,r_2) fora de E tal que r_2 não está no subespaço gerado por r_1 e E, para contar as possibilidades de F. Resultam $\frac{(p^4-p^2)(p^4-p^3)}{(p-1)^2}$ escolhas para (r_1,r_2) de onde resultam para E e F:

$$\frac{(p^4-1)(p^3-1)}{(p^2-1)(p-1)}\cdot\frac{(p^4-p^2)(p^4-p^3)}{(p-1)^2}\bigg/\frac{(p^2-1)(p^2-p)}{(p-1)^2}=\frac{(p^4-1)(p^3-1)}{(p^2-1)(p-1)}\cdot\frac{p^2(p^2-1)p^3(p-1)}{(p^2-1)p(p-1)}$$

$$=\frac{p^4(p^2-1)(p^2+1)(p-1)(p^2+p+1)}{(p^2-1)(p-1)}=p^4(p^4+p^3+2p^2+p+1)=p^8+p^7+2p^6+p^5+p^4 \quad (3)$$

Por fim, somando (1) + (2) + (3):

$$2+(2p^6+2p^5+2p^4+2p^3)+(p^8+p^7+2p^6+p^5+p^4)=p^8+p^7+4p^6+3p^5+3p^4+2p^3+2.$$

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DE YURI GOMES LIMA (FORTALEZA – CE)

Sejam x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6 as probabilidades. Temos então que:

$$P(a=b)=x_1\cdot x_1+x_2\cdot x_2+\ldots+x_6\cdot x_6=\sum_{i=1}^{6}x_i^2$$

$$P(a\neq b)=1-P(a=b)=1-\sum_{i=1}^{6}x_i^2$$

$$P(a=b=c)=x_1\cdot x_1\cdot x_1+\ldots+x_6\cdot x_6\cdot x_6=\sum x_i^3$$

$$P(a=c\ \text{ e }\ a\neq b)=P(a=c)-P(a=b=c)=P(a=b)-P(a=b=c)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(a=c\ \text{ e }\ a\neq b)=\sum x_i^2-\sum x_i^3$$

Logo queremos mostrar que:

$$P(a=c\mid a=b)\geq P(a=c\mid a\neq b)\Leftrightarrow\frac{P(a=b=c)}{P(a=b)}\geq\frac{P(a=c\ \text{ e }\ a\neq b)}{P(a\neq b)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(a=b=c)\cdot P(a\neq b)\geq P(a=c\ \text{ e }\ a\neq b)\cdot P(a=b)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sum x_i^3\right)\left(1-\sum x_i^2\right)\geq\left(\sum x_i^2-\sum x_i^3\right)\left(\sum x_i^2\right)\Leftrightarrow\sum x_i^3\geq\left(\sum x_i^2\right)^2.$$

Vamos mostrar então que se $x_1,\ldots,x_n$ são reais não-negativos tais que $\sum x_i = 1$, então

$$\sum x_i^3 \geq \left(\sum x_i^2\right)^2. \qquad (*)$$

De fato, temos

$$\sum x_i^3 = \left(\sum x_i^3\right)\cdot\left(\sum x_i\right) = \left(x_1^3+\ldots+x_n^3\right)\left(x_1+\ldots+x_n\right) = \sum x_i^4 + \sum_{i\neq j} x_i^3\cdot x_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow \sum x_i^4 + \sum x_i^3 x_j \geq \sum x_i^4 + 2\sum_{i<j}(x_i x_j)^2 \Leftrightarrow \sum_{i\neq j} x_i^3 x_j \geq 2\sum_{i<j}(x_i x_j)^2$$

mas observe que por $MA \geq MG$ temos

$$x_i^3 x_j + x_i x_j^3 \geq 2\sqrt{x_i^3 x_j x_i x_j^3} = 2(x_i x_j)^2 \Rightarrow \sum_{i\neq j} x_i^3 x_j = \sum_{i<j}(x_i^3 x_j + x_i x_j^3) \geq \sum_{i<j} 2(x_i x_j)^2 = 2\sum (x_i x_j)^2,$$

como queríamos.

Para haver igualdade, devemos ter $x_i^3 x_j = x_i x_j^3, \forall i \neq j,$ ou seja, $x_i^2 = x_j^2 \Rightarrow x_i = x_j,\ \forall i, j,$ pois eles são positivos. Mas isso equivale a dizermos que $P(a=c \mid a=b) = P(a=c \mid a\neq b) \Leftrightarrow$ o dado é honesto!

PROBLEMA 5:
SOLUÇÃO ADAPTADA DE CARLOS STEIN NAVES DE BRITO (S.J. DOS CAMPOS – SP)

Suponha que $\sum_{j=0}^{n} P_j(t)\cdot f^{(j)}(t) = 0$ e $\sum_{j=0}^{m} Q_j(t) g^{(j)}(t) = 0,$ para todo $t \in (-1,1).$

Então $f^{(n)}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} r_j(t) f^{(j)}(t),$ e $g^{(m)}(t) = \sum_{j=0}^{m-1} s_j(t) g^{(j)}(t),$ onde

$r_j(t) = -P_j(t)/P_n(t)$ e $S_j(t) = -Q_j(t)/Q_m(t)$ são funções racionais.

Como $(a(t)b(t))' = a'(t)b(t) + a(t)b'(t)$ e $(a(t)+b(t))' = a'(t)+b'(t),$ segue, por indução, que, para todo $k \in \mathbb{N}$, $(f(t)+g(t))^{(k)}$ pode ser escrito como combinação linear dos $f^{(j)}(t), 0 \leq j \leq n-1$ e $g^{(j)}(t),\ 0 \leq j \leq m-1,$ com coeficientes funções racionais de t gerado pelos $f^{(j)}(t), 0 \leq j \leq n-1$ e pelos $g^{(j)}(t),\ 0 \leq j \leq m-1.$ Assim, deve haver uma combinação linear nula $\sum_{j=0}^{m+n} h_j(t)\cdot(f+g)^{(j)}(t)$ das $m+n+1 > m+n$ funções $(f+g)^{(j)}(t), 0 \leq j \leq m+n$, com coeficientes $h_j(t) \in \mathbb{R}(t).$ Multiplicando pelo m.d.c. dos denominadores dos $h_j(t),$ concluimos que $f + g$ é bacana.

Provamos que $f \cdot g$ é bacana de modo análogo, observando que, para todo $k \in \mathbb{N}$, $(f \cdot g)^{(k)}$ pertence ao espaço vetorial de dimensão $\le m \cdot n$ sobre $\mathbb{R}(t)$ gerado pelas funções $f^{(i)}(t) \cdot g^{(j)}(t), 0 \le i \le n-1, 0 \le j \le m-1,$ donde existe uma combinação linear nula $\sum_{j=0}^{m \cdot n} l_j(t)(f \cdot g)^{(f)}(t),$ com $l_j(t) \in \mathbb{R}(t), \forall j \le mn.$

PROBLEMA 6: SOLUÇÃO DA BANCA

Existe $X \subset \{1, 2, ..., n\}$ com $|x| \ge \dfrac{9n}{10}$ tal que, para todo $i \in x$, $\left|\{j \le n \mid a_{ij} = 1\}\right| \ge \dfrac{9n}{10}.$

De fato, se há mais de $\dfrac{n}{10}$ linhas na matriz, cada uma delas com pelo menos $\dfrac{n}{10}$ entradas nulas, o número de entradas nulas da matriz será maior que $\dfrac{n^2}{100}$, absurdo.

Analogamente, existe $y \subset \{1, 2, ..., n\}$ com $|y| \ge \dfrac{9n}{10}$ tal que, para todo $j \in y, \left|\{i \le n \mid a_{ij} = 1>\right| \ge \dfrac{9n}{10}.$

Seja $Z = X \cap Y$. Temos $|Z| \ge \dfrac{9n}{10} + \dfrac{9n}{10} - n = \dfrac{4n}{5}.$

Se $i, j \in Z, (A^2)ij \ge \dfrac{9n}{10} + \dfrac{9n}{10} - n = \dfrac{4n}{5}.$ Vamos mostrar, por indução, que, se $i, j \in Z$, $\left(A^k\right)ij \ge \dfrac{4}{5} \cdot \left(\dfrac{3}{5}\right)^{k-2} \cdot n^{k-1},$ para todo $k \ge 2.$ De fato,

$$\left(A^{k+1}\right)_{ij} = \sum_{r=1}^{n} (A^k)_{ir} \cdot a_{rj} \ge \sum_{r \in Z} \left(A^k\right)_{ir} \cdot a_{rj} \ge \left(\frac{4n}{5} - \frac{n}{10}\right) \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{k-2} \cdot n^{k-1} > \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} \cdot n^k,$$

pois, de fato, $\left|\left\{r \in Z \mid a_{rj} = 1\right\}\right| \ge |Z| - \dfrac{n}{10} \ge \dfrac{4n}{5} - \dfrac{n}{10}.$

Assim, para todo $k \ge 2, tr(A^k) \ge \sum_{i \in Z} (A^k)_{ii} \ge \dfrac{4n}{5} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \left(\dfrac{3}{5}\right)^{k-2} \cdot n^{k-1} > \left(\dfrac{3}{5}\right)^k \cdot n^k > \left(\dfrac{n}{2}\right)^k.$

XXV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Resultado – Nível 1 (5ª. e 6ª. Séries)

NOME	CIDADE – ESTADO	PRÊMIO
Henrique Pondé de Oliveira Pinto	Salvador - BA	Ouro
Guilherme Philippe Figueiredo	Fortaleza - CE	Ouro
Rodrigo Clemente de Brito Pereira	João Pessoa - PB	Ouro
Henrique Hiroshi Motoyama Watanabe	São Paulo - SP	Ouro
Rafael Tupinambá Dutra	Belo Horizonte - MG	Ouro
Rafael Rabelo de Carvalho	Brasília - DF	Prata
Carolina Yumi Yida	São Paulo - SP	Prata
Alice Duarte Scarpa	Goiânia - GO	Prata
Bruna da Silveira Afonso	Salvador - BA	Prata
Daniella Alves Rebouças	Vila Velha - ES	Prata
Fábio Mallaco Moreira	SJ dos Campos - SP	Prata
Carlos Renato de Andrade Figueiredo	Recife - PE	Prata
Rodrigo Bartels	Porto Alegre - RS	Prata
Luiz Gustavo Antunes Magalhães	Muriaé - MG	Prata
Vitor Mori	São Paulo - SP	Prata
Illan Feiman Halpern	Itatiaia - RJ	Bronze
Vinicius Coêlho Machado	Fortaleza - CE	Bronze
Pollyanna Stéfani Borges Freitas	Fortaleza - CE	Bronze
Danilo Takeshi Abe Jaune	São Paulo - SP	Bronze
Gabriel Moreira Francisco	Santo André - SP	Bronze
Nicolas Mansur Beleski	Curitiba - PR	Bronze
Anna Clara Leite Pestana	Recife - PE	Bronze
Rafael Pacheco Gomes	Fortaleza - CE	Bronze
Luís Otávio Valente Barcellos	Sta. Rita do Passa Quatro - SP	Bronze
Hannah Drummond Davico de Barros	Rio de Janeiro - RJ	Bronze
James Jun Hong	São Paulo - SP	Bronze
Thiago da Silva Pinheiro	São Paulo - SP	Bronze
Bernardo Duque Guimarães Saraiva	Rio de Janeiro - RJ	Bronze
Guilherme Rodrigues Carvalho de Souza	Rio de Janeiro - RJ	Bronze
Tiago Paula e Silva de Holanda Cavalcanti	Recife - PE	Menção Honrosa
Mateus Sampaio de Mendonça	Belo Horizonte - MG	Menção Honrosa
Eduardo Barthel Monteiro	SJ dos Campos - SP	Menção Honrosa
Thales de Oliveira Gonçalves	Vitória - ES	Menção Honrosa
Lucas Matsumoto Tominaga	Diadema - SP	Menção Honrosa
Nathana Alcântara Lima	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Lucas Cordeiro Gonçalves de Carvalho	Salvador - BA	Menção Honrosa
Bruna Melo Coelho Loureiro	Lauro de Freitas - BA	Menção Honrosa
Rafael Issamu Isuyama	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Bruna de Oliveira Neuenschwander	Belo Horizonte - MG	Menção Honrosa
Gabriel Somavilla Nunes	Videira - SC	Menção Honrosa
Vinícius Henrique Campos Senra	Belo Horizonte - MG	Menção Honrosa
Mariana Silva de Oliveira	Salvador - BA	Menção Honrosa
Hannah Menezes Lira	Salvador - BA	Menção Honrosa
Alessandro Wagner Palmeira	Guarulhos - SP	Menção Honrosa
Gustavo Henrique dos Santos Figueiredo	Santo André - SP	Menção Honrosa
André Bain	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Luara Prado Louvison	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Kamila Satomi Haida	Lucas do Rio Verde - MT	Menção Honrosa
Dan Zylberglejd	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Lucas Souza Carmo Carvalho	Belo Horizonte - MG	Menção Honrosa
Igor Dantas Rocha	Campina Grande - PB	Menção Honrosa
Felipe Ferreira Torres	Fortaleza - CE	Menção Honrosa

Resultado – Nível 2 (7ª. e 8ª. Séries)

NOME	CIDADE – ESTADO	PRÊMIO
Eduardo Fischer	Encantado - RS	Ouro
Guilherme Rodrigues Nogueira de Souza	São Paulo - SP	Ouro
Edson Augusto Bezerra Lopes	Fortaleza - CE	Ouro
Enzo Haruo Hiraoka Moriyama	São Paulo - SP	Ouro
André Linhares Rodrigues	Fortaleza - CE	Ouro
Leandro Farias Maia	Fortaleza - CE	Prata
Lucio Eiji Assaoka Hossaka	Curitiba - PR	Prata
José Marcos Andrade Ferraro	São Paulo - SP	Prata
Gustavo Sampaio Sousa	Fortaleza - CE	Prata
Maricy Miki Hisamoto	São Paulo - SP	Prata
Rafael Bandeira Lages	Teresina - PI	Prata
Paulo André Carvalho de Melo	Rio de Janeiro - RJ	Prata
Leonardo Esmeraldo de Aquino	Fortaleza - CE	Prata
Felipe Gonçalves Assis	Campina Grande - PB	Prata
Fernando Nascimento Coelho	Fortaleza - CE	Prata
Régis Prado Barbosa	Fortaleza - CE	Bronze
Cesar Ryudi Kawakami	São Paulo - SP	Bronze
Marlon Vieira de Lima Júnior	Fortaleza - CE	Bronze
Sérgio Ricardo Furtado Sampaio Filho	Fortaleza - CE	Bronze
Felipe Ferreira Villar Coelho	Serra - ES	Bronze
Iuri Lima Ribeiro	Fortaleza - CE	Bronze
Iris Chyun Mian Tseng	São Paulo - SP	Bronze
Filipe Alves Tomé	Fortaleza - CE	Bronze
Danilo Eiki Yokoyama	São Paulo - SP	Bronze
João José Ribeiro e Silva	Salvador - BA	Bronze
Caio Carvalho Torres	Teresina - PI	Bronze
Rafael Morioka Oda	São Paulo - SP	Bronze
Adriano Jorge Braun Vieira Neto	Fortaleza - CE	Bronze
Renato Rebouças de Medeiros	Fortaleza - CE	Bronze
Dante Mattos de Salles Soares	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Rafael da Silva Holanda	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Theodoro Ribeiro Gonçalves Neto	Teresina - PI	Menção Honrosa
Gabriel Caser Brito	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Regina Reis da Costa Alves	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Raphael Rodrigues Mata	Salvador - BA	Menção Honrosa
Felipe Diz Diz	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Louise Rodrigues Martins Dandas	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Daniel de Almeida	Piracicaba - SP	Menção Honrosa
Renato Pinto Oliveira	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Pedro Paulo Albuquerque Goes	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Leonardo Simões Freire	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Roberto Câmara Gentil Porto	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Pedro Paulo Gondim Cardoso	Salvador - BA	Menção Honrosa
David Mosiah Terceiro Batista	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Vinícius Marques Regitano	Piracicaba - SP	Menção Honrosa
Guilherme Hiroshigue Motomura Hashimoto	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Kaique Knothe de Andrade	Rio Claro - SP	Menção Honrosa
Ramon Moreira Nunes	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Martin Alexander Barrios Gundelach	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Plicia Maciel Carvalho	Redenção - PA	Menção Honrosa
Tiago Pellegrini Travassos Vieira	São Paulo - SP	Menção Honrosa

Resultado – Nível 3 (Ensino Médio)

NOME	CIDADE – ESTADO	PRÊMIO
Fábio Dias Moreira	Rio de Janeiro - RJ	Ouro
Davi Máximo Alexandrino Nogueira	Fortaleza - CE	Ouro
Rafael Daigo Hirama	Campinas - SP	Ouro
Henry Wei Cheng Hsu	São Paulo - SP	Ouro
Alex Corrêa Abreu	Niterói - RJ	Ouro
Felipe Rodrigues Nogueira de Souza	São Paulo - SP	Prata
Thiago Costa Leite Santos	São Paulo - SP	Prata
Rafael Marini Silva	Vila Velha - ES	Prata
Larissa Cavalcante Queiroz de Lima	Fortaleza - CE	Prata
Rodrigo Aguiar Pinheiro	Fortaleza - CE	Prata
Telmo Luis Correa Junior	Santo André - SP	Prata
Samuel Barbosa Feitosa	Fortaleza - CE	Prata
Alex Cardoso Lopes	São Paulo - SP	Prata
Israel Franklim Dourado Carrah	Fortaleza - CE	Prata
Gabriel Tavares Bujokas	São Paulo - SP	Bronze
Renato Francisco Lopes Mello	Jaboatão dos Guararapes - PE	Bronze
Murilo Vasconcelos Andrade	Maceió - AL	Bronze
Francisco Bruno de Lima Holanda	Fortaleza - CE	Bronze
Davi Valle Ferreira	Belo Horizonte - MG	Bronze
Raphael Constant da Costa	Rio de Janeiro - RJ	Bronze
Ricardo Mizoguchi Gorgoll	São Paulo - SP	Bronze
Raul Celistrino Teixeira	Adamantina - SP	Bronze
Elton Gomes Coriolano	Fortaleza - CE	Bronze
Thomás Yoiti Sasaki Hoshina	Rio de Janeiro - RJ	Bronze
Rodrigo Kendy Yamashita	Osasco - SP	Bronze
Eduardo de Moraes Rodrigues Poço	São Paulo - SP	Bronze
Carlos Augusto David Ribeiro	Fortaleza - CE	Bronze
Germanna de Oliveira Queiroz	Fortaleza - CE	Bronze
Helder Oliveira de Castro	Mogi das Cruzes - SP	Bronze
Diogo dos Santos Suyama	Belo Horizonte - MG	Bronze
Guilherme Rodrigues Salerno	Goiânia - GO	Menção Honrosa
Larissa Rodrigues Ribeiro	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Domingos Afono de Moura Junior	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Lucas de Aragão Bittencourt	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Eduardo Martins Spina	Jundiaí - SP	Menção Honrosa
Hugo Francisco Lisboa Santos	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Rafael Assato Ando	Campinas - SP	Menção Honrosa
Andre Belem Ferreira da Silva	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Renato Mendes Coutinho	Americana - SP	Menção Honrosa
Ayran Ayres Barbosa Loriato	Vitória - ES	Menção Honrosa
Vitor Gabriel Kleine	Mogi das Cruzes - SP	Menção Honrosa
Victor de Andrade Lazarte	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Daniel Ponciano dos Santos Barbosa	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Rodrigo Viana Soares	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Thiago Costas Casal Monteiro Silva	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Eduardo Vieira de Oliveira Aguiar	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Glauco Rocha Machado	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Juliana Gomes Varela	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Luty Rodrigues Ribeiro	Fortaleza - CE	Menção Honrosa

Resultado – Nível Universitário

NOME	CIDADE - ESTADO	PRÊMIO
Humberto Silva Naves	São José dos Campos - SP	Ouro
Márcio Afonso Assad Cohen	Rio de Janeiro - RJ	Ouro
Yuri Gomes Lima	Fortaleza - CE	Ouro
Carlos Stein Naves de Brito	Goiânia - GO	Ouro
Daniel Massaki Yamamoto	São Paulo - SP	Ouro
Rodrigo Villard Milet	Rio de Janeiro - RJ	Ouro
Eduardo Casagrande Stabel	Porto Alegre - RS	Prata
Rafael Tajra Fonteles	Teresina - PI	Prata
Diêgo Veloso Uchôa	Teresina - PI	Prata
Fabrício Siqueira Benevides	Fortaleza - CE	Prata
Thiago da Silva Sobral	Fortaleza - CE	Prata
Rodrigo Roque Dias	São Paulo - SP	Prata
Leonardo Augusto Zão	Nilópolis - RJ	Prata
Einstein do Nascimento Júnior	Fortaleza - CE	Prata
Eduardo Famini Silva	Salvador - BA	Bronze
Bernardo Freitas Paulo da Costa	Rio de Janeiro - RJ	Bronze
Daniel Nobuo Uno	São Paulo - SP	Bronze
Lucas de Melo Pontes e Silva	Fortaleza - CE	Bronze
Antonio Carlos Maldonado S. Alonso Munhoz	Rio de Janeiro - RJ	Bronze
Thiago Barros Rodrigues Costa	Fortaleza - CE	Bronze
João Alfredo Castellani Fajardo Freire	Salvador - BA	Bronze
Daniel Pinheiro Sobreira	Fortaleza - CE	Bronze
Eduardo Paiva Costa	Teresina - PI	Bronze
Giuliano Boava	Florianópolis - SC	Bronze
Rodrigo Angelo Muniz	Cariacica - ES	Bronze
Tertuliano Franco Santos Franco	Salvador - BA	Bronze
Diego Sadao Saito	Tupã - SP	Bronze
Márcio Rodrigo da Rocha Pinheiro	Ananindeua - PA	Bronze
Ítalo Gervásio Cavalcante	Teresina – PI	Menção Honrosa
Estillac Lins Maciel Borges Filho	Belém - PA	Menção Honrosa
Daniele Véras de Andrade	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Eduardo Bertoldi	SJ dos Campos - SP	Menção Honrosa
Domingos Dellamonica Júnior	São Paulo - SP	Menção Honrosa
André Luis Hirschfeld Danila	São Paulo - SP	Menção Honrosa
Jorge Peixoto de Morais Neto	Goiânia - GO	Menção Honrosa
Bruno Germano Borics	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa
Rodrigo José Gondim Neves	Jaboatão dos Guararapes - PE	Menção Honrosa
Gustavo Gomes Araújo	Ribeirão Preto - SP	Menção Honrosa
Eduardo Monteiro Nicodemos	Rio de Janeiro - RJ	Menção Honrosa

AGENDA OLÍMPICA

XXVI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

NÍVEIS 1, 2 e 3
Primeira Fase – Sábado, 5 de junho de 2004
Segunda Fase – Sábado, 11 de setembro de 2004
Terceira Fase – Sábado, 16 de outubro de 2004 (níveis 1, 2 e 3)
Domingo, 17 de outubro de 2004 (níveis 2 e 3 - segundo dia de prova).

NÍVEL UNIVERSITÁRIO
Primeira Fase – Sábado, 11 de setembro de 2004
Segunda Fase – Sábado, 16 e Domingo, 17 de outubro de 2004

♦

X OLIMPÍADA DE MAIO
8 de maio de 2004

♦

XV OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL
14 a 22 de maio de 2004
Assunção, Paraguai

♦

XLV OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA
06 a 18 de julho de 2004
Atenas, Grécia

♦

X OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
23 a 29 de julho de 2004
Skopje, Macedônia

♦

XIX OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA
17 a 26 de setembro de 2004
Castellón, Espanha

♦

VI OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
6 de novembro de 2004

♦ ♦ ♦

COORDENADORES REGIONAIS

Alberto Hassen Raad	(UFJF)	Juiz de Fora – MG
Amarísio da Silva Araújo	(UFV)	Viçosa – MG
Ana Paula Bernardi da Silva	(Universidade Católica de Brasília)	Brasília – DF
Benedito Tadeu Vasconcelos Freire	(UFRN)	Natal – RN
Carlos Frederico Borges Palmeira	(PUC-Rio)	Rio de Janeiro – RJ
Claus Haetinger	(UNIVATES)	Lajeado – RS
Cleonor Crescêncio das Neves	(UTAM)	Manaus – AM
Élio Mega	(Colégio Etapa)	São Paulo – SP
Florêncio Ferreira Guimarães Filho	(UFES)	Vitória – ES
Gil Cunha Gomes Filho	(Colégio ACAE)	Volta Redonda – RJ
Ronaldo Alves Garcia	(UFGO)	Goiânia – GO
Reginaldo de Lima Pereira	(Escola Técnica Federal de Roraima)	Boa Vista – RR
Ivanilde Fernandes Saad	(UC. Dom Bosco)	Campo Grande– MS
Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia	(UFPB)	João Pessoa – PB
Janice T. Reichert	(UNOCHAPECÓ)	Chapecó – SC
João Benício de Melo Neto	(UFPI)	Teresina – PI
João Francisco Melo Libonati	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
José Carlos dos Santos Rodrigues	(Unespar)	Campo Mourão – PR
José Cloves Saraiva	(UFMA)	São Luis – MA
José Gaspar Ruas Filho	(ICMC-USP)	São Carlos – SP
José Luiz Rosas Pinho	(UFSC)	Florianópolis – SC
José Vieira Alves	(UFPB)	Campina Grande – PB
Licio Hernandes Bezerra	(UFSC)	Florianópolis – SC
Luzinalva Miranda de Amorim	(UFBA)	Salvador – BA
Mário Rocha Retamoso	(UFRG)	Rio Grande – RS
Marcelo Rufino de Oliveira	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Marcelo Mendes	(Colégio Farias Brito, Pré-vestibular)	Fortaleza – CE
Pablo Rodrigo Ganassim	(Liceu Terras do Engenho)	Piracicaba – SP
Ramón Mendoza	(UFPE)	Recife – PE
Raúl Cintra de Negreiros Ribeiro	(Colégio Anglo)	Atibaia – SP
Reinaldo Gen Ichiro Arakaki	(INPE)	SJ dos Campos – SP
Ricardo Amorim	(Centro Educacional Logos)	Nova Iguaçu – RJ
Sérgio Cláudio Ramos	(IM-UFRGS)	Porto Alegre – RS
Tadeu Ferreira Gomes	(UEBA)	Juazeiro – BA
Tomás Menéndez Rodrigues	(U. Federal de Rondônia)	Porto Velho – RO
Valdenberg Araújo da Silva	(U. Federal de Sergipe)	São Cristovão – SE
Valdeni Soliani Franco	(U. Estadual de Maringá)	Maringá – PR
Vânia Cristina Silva Rodrigues	(U. Metodista de SP)	S.B. do Campo – SP
Wagner Pereira Lopes	(CEFET – GO)	Jataí – GO