

CONTEÚDO

AOS LEITORES	2
XIV OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL Enunciados e Soluções	3
XLIV OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA Enunciados e Soluções	13
X OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA PARA ESTUDANTES UNIVERSITÁRIOS Enunciados e Soluções	23
XVIII OLIMPÍADA IBERO-AMERICANA DE MATEMÁTICA Enunciados e Soluções	34
ARTIGOS	
A DESIGUALDADE DE ERDŐS - MORDELL Anderson Torres	42
COMO É QUE FAZ?	53
SOLUÇÕES DE PROBLEMAS PROPOSTOS	54
PROBLEMAS PROPOSTOS	58
COORDENADORES REGIONAIS	62

AOS LEITORES

Chegamos à última edição de 2003 publicando soluções de diversas olimpíadas internacionais: a Olimpíada de Matemática do Cone Sul, a Olimpíada Internacional de Matemática, a Olimpíada Ibero-americana e a Olimpíada Internacional de Matemática para Estudantes Universitários, da qual participamos pela primeira vez. Publicamos também um artigo sobre a desigualdade de Erdős Mordell, que ajuda a resolver um dos problemas mais difíceis que já caíram na IMO.

Estamos propondo sete problemas bacanas na seção de problemas propostos, que se somam aos 6 problemas da última edição dos quais ainda não recebemos solução. Haverá portanto bastante diversão para o começo de 2004...

Em 2004 a Olimpíada Internacional de Matemática será realizada na Grécia, assim como as Olimpíadas. Vamos torcer para o Brasil trazer belas medalhas nos dois casos...

Abraços e feliz ano novo a todos,

Os editores

XIV OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL

Enunciados e Soluções

PROBLEMA 1

Em um torneio de futebol entre quatro equipes, A , B , C e D , cada equipe joga com cada uma das outras exatamente uma vez.

a) Decidir se é possível que, ao finalizar o torneio, as quantidades de gols marcados e sofridos pelas equipes sejam:

	A	B	C	D
Gols marcados	1	3	6	7
Gols sofridos	4	4	4	5

Se a resposta é afirmativa, dê um exemplo com os resultados das seis partidas; em caso contrário, justifique.

b) Decidir se é possível que, ao finalizar o torneio, as quantidades de gols marcados e sofridos pelas equipes sejam:

	A	B	C	D
Gols marcados	1	3	6	13
Gols sofridos	4	4	4	11

Se a resposta é afirmativa, dê um exemplo com os resultados das seis partidas; em caso contrário, justifique.

SOLUÇÃO DE FÁBIO DIAS MOREIRA (RIO DE JANEIRO – RJ)

a) A configuração apresentada é possível. Por exemplo,

$A \times B$	1×1
$A \times C$	0×0
$A \times D$	0×3
$B \times C$	0×3
$B \times D$	2×0
$C \times D$	3×4

- b) Como D não joga contra si mesmo, todos os gols que marca são contra A , B e C . Logo todo gol marcado por D aumenta em um a contagem de gols marcados por D e aumenta em um a soma do número de gols sofridos por A , B e C .

Mas como D marcou treze gols, A , B e C deveriam ter sofrido pelo menos treze gols no total, mas sofreram apenas 12, **absurdo!** Logo a situação apresentada é impossível.

PROBLEMA 2

Considere a seqüência $\{a_n\}$ definida da seguinte maneira:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 3$$

$$a_{n+2} = 2a_{n+1}a_n + 1, \text{ para todo inteiro } n \geq 1.$$

Provar que a máxima potência de 2 que divide $a_{4006} - a_{4005}$ é 2^{2003} .

SOLUÇÃO DE RODRIGO AGUIAR PINHEIRO (FORTALEZA – CE)

Seja $A_n = a_n - a_{n-1}$; $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$

Indução: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, temos 2^n sendo a maior potência de 2 que divide A_{2n} e $2^{n+1} | A_{2n+1}$

Base de Indução: $n = 1$: $a_3 = 2a_2 \cdot a_1 + 1 = 2 \cdot 3 \cdot 1 + 1 = 7 \Rightarrow A_{2,1} = a_2 - a_1 = 2$ e $A_{2,1+1} = a_3 - a_2 = 4$

Temos que $2^1 | A_{2,1}$ mas 2^2 não divide $A_{2,1}$ e $2^{1+1} | A_{2,1+1}$. OK!!

$$n = 2: a_4 = 2 \cdot a_3 \cdot a_2 + 1 = 2 \cdot 7 \cdot 3 + 1 = 43$$

$$a_5 = 2 \cdot a_4 \cdot a_3 + 1 = 2 \cdot 43 \cdot 7 + 1 = 603$$

$$A_4 = 43 - 7 = 36 \text{ e } A_5 = 603 - 43 = 560$$

$36 = 2^2 \cdot 9$, logo $2^2 | A_{2,2}$, mas 2^3 não divide $A_{2,2}$

$$560 = 2^4 \cdot 7 \cdot 5, \text{ logo } 2^{2+1} | A_{2,2+1}.$$

Passo Indutivo: Supondo que para todos os naturais menores ou iguais a k , valha a sentença da indução, provaremos que vale para $k + 1$.

$$\begin{aligned} A_{2k+2} &= a_{2k+2} - a_{2k+1} = (2 \cdot a_{2k+1} \cdot a_{2k} + 1) - (2 \cdot a_{2k} \cdot a_{2k-1} + 1) \\ &= 2a_{2k}(a_{2k+1} - a_{2k-1}) \\ &= 2a_{2k}(a_{2k+1} - a_{2k} + a_{2k} - a_{2k-1}) \\ \Leftrightarrow A_{2k+2} &= 2a_{2k}(A_{2k+1} + A_{2k}) \end{aligned}$$

Seja $A_{2k} = 2^k \cdot x_{2k}$, x_{2k} ímpar (hipótese de indução) e $A_{2k+1} = 2^{k+1} \cdot x_{2k+1}$.

Temos: $A_{2k+2} = 2 \cdot a_{2k} (2^{2k} \cdot x_{2k+1} + 2^k x_{2k}) = 2^{k+1} \underbrace{a_{2k}}_{\text{ímpar}} \underbrace{(2 \cdot x_{2k+1} + x_{2k})}_{\text{ímpar}}$

Portanto $2^{k+1} \mid A_{2k+2}$, mas 2^{k+2} não divide A_{2k+2}

$$A_{2k+3} = 2a_{2k+1}(A_{2k+2} + A_{2k+1}) = 2 \cdot a_{2k+1}(2^{k+1} \cdot x_{2k+2} + 2^{k+1} \cdot x_{2k+1})$$

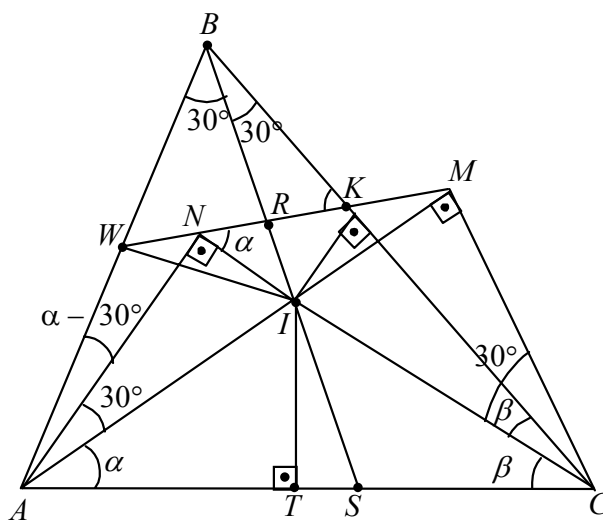
$$= 2^{k+2} a_{2k+1}(x_{2k+2} + x_{2k+1}), \text{ portanto } 2^{k+1+1} \mid A_{2(k+1)+1}$$

Para $k = 2003$, temos que $2^{2003} \mid A_{4006} = a_{4006} - a_{4005}$, mas 2^{2004} não divide A_{4006} .

PROBLEMA 3

Seja ABC um triângulo acutângulo tal que o ângulo B mede 60° . A circunferência de diâmetro AC intersecta as bissetrizes internas de A e C nos pontos M e N respectivamente ($M \neq A$, $N \neq C$). A bissetriz interna do ângulo B intersecta MN e AC nos pontos R e S , respectivamente. Demonstrar que $\overline{BR} \leq \overline{RS}$.

SOLUÇÃO DE THIAGO COSTA LEITE SANTOS (SÃO PAULO – SP)



Digamos que $\angle BAC = 2\alpha \geq \angle BCA = 2\beta$,

Sem perda de generalidade $2\alpha + 2\beta = 120^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 60^\circ$.

N está dentro do triângulo, pois como \overline{AC} é diâmetro
 $\Rightarrow \angle ANC = \angle AMC = 90^\circ \Rightarrow \angle NAC = 90^\circ - \beta \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle NAM = 90 - \beta - \alpha = 30^\circ$ e $\angle NAB = \alpha - 30^\circ$.

De modo análogo M está fora do triângulo.

Assim, $\angle MCA = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle MCB = 90^\circ - \alpha - 2\beta = 30^\circ - \beta$

Como $\angle KMI = \angle NCA$, pois $ANMC$ é inscrito, $\angle KMI = \beta = \angle KCI \Rightarrow IKMC$ é inscrito $\Rightarrow \angle IKC = \angle IMC = 90^\circ$. Como $\angle KMI = \beta$ e

$\angle KCM = 30^\circ - \beta$, $\angle CKM = 60^\circ = \angle NKB$ e $\angle KWB = 60^\circ$. Como I é o incentro,

$$\overline{IK} = \overline{IT} = r \Rightarrow \text{sen}30^\circ = \frac{\overline{KI}}{\overline{BI}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overline{BI} = 2\overline{KI} = 2r$$

(r é o inraio). O triângulo KWB é equilátero, pois provamos que $\angle BWK = \angle BKW = \angle WBK = 60^\circ$. Como BR é bissetriz de $\angle WBK$, $\overline{BR} \perp \overline{WK}$.

No triângulo RKI :

$$\text{sen}30^\circ = \frac{\overline{RI}}{\overline{KI}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overline{RI} = \frac{\overline{KI}}{2} = \frac{r}{2}$$

$$\Rightarrow \overline{BR} = \overline{BI} - \overline{RI} = 2r - \frac{r}{2} = \frac{3r}{2}$$

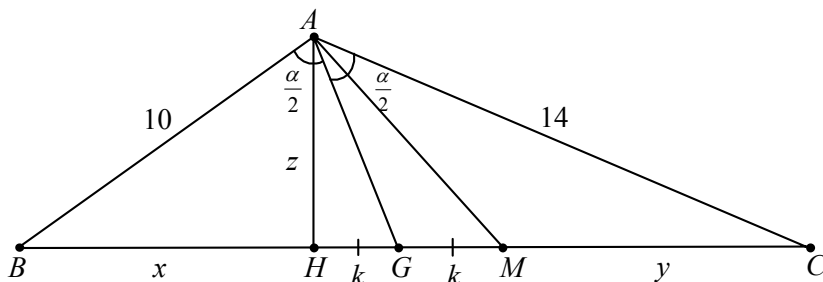
$$\Rightarrow \overline{SI} \geq \overline{IT} = r, \text{ pois } \angle ITS = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \overline{RS} = \overline{RI} + \overline{SI} = \frac{r}{2} + \overline{SI} \geq \frac{r}{2} + r = \frac{3r}{2} = \overline{BR} \Rightarrow \overline{RS} \geq \overline{BR}.$$

PROBLEMA 4

No triângulo acutângulo ABC , os pontos H , G e M encontram-se sobre o lado BC , de modo que AH , AG e AM são altura, bissetriz e mediana do triângulo, respectivamente. Sabe-se que $HG = GM$, $AB = 10$ e $AC = 14$. Determinar a área do triângulo ABC .

SOLUÇÃO DE RODRIGO AGUIAR PINHEIRO (FORTALEZA – CE)



Seja $BH = x$, $HG = GM = k$, $MG = y$ e $AH = z$.

Como AM é mediana, $BM = MC \Rightarrow BH + HG + GM = MC$

$$\Leftrightarrow x + 2k = y \quad (\text{I})$$

Apliquemos o teorema da bissetriz interna, considerando a bissetriz AG :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BG}{GC} \Leftrightarrow \frac{10}{14} = \frac{x+k}{y+k} \Leftrightarrow 5(y+k) = 7(x+k)$$

$$\Leftrightarrow 5y = 7x + 2k \quad (\text{II})$$

$$\text{(I) em (II): } 5y = 6x + x + 2k = 6x + y \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x \quad (\text{III})$$

$$\text{(III) em (I): } x + 2k = y = \frac{3}{2}x \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 2k \Leftrightarrow x = 4k$$

$$\text{(III): } y = \frac{3}{2}x = \frac{3}{2}(4k) \Leftrightarrow y = 6k.$$

Apliquemos o teorema de Pitágoras no $\triangle AHC$:

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 \Leftrightarrow z^2 + (8k)^2 = 14^2$$

Teorema de Pitágoras no $\triangle AHB$:

$$AB^2 = AH^2 + HB^2 \Leftrightarrow z^2 + (4k)^2 = 10^2$$

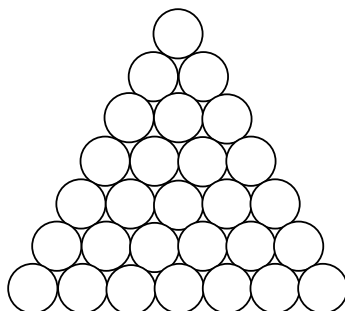
$$\text{Temos: } \begin{cases} z^2 + 64k^2 = 196 \\ z^2 + 16k^2 = 100 \end{cases} \Rightarrow z^2 + 64k^2 - (z^2 + 16k^2) = 196 - 100$$

$$\Leftrightarrow 48k^2 = 96 \Leftrightarrow k^2 = 2 \Leftrightarrow k = \sqrt{2}$$

$$z^2 + 16k^2 = 100 \Leftrightarrow z^2 + 16 \cdot 2 = 100 \Leftrightarrow z^2 = 68 \Leftrightarrow z = \sqrt{68}; \text{ Área} = \frac{\sqrt{68} \cdot 12 \cdot \sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{34}.$$

PROBLEMA 5

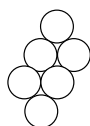
Seja $n = 3k + 1$, onde k é um inteiro, $k \geq 1$. Constrói-se um arranjo triangular de lado n formado por círculos de mesmo raio como o mostrado na figura para $n = 7$.



Determinar, para cada k , o maior número de círculos que podem ser coloridos de vermelho de tal modo que não existam dois círculos vermelhos tangentes entre si.

ADAPTAÇÃO DA SOLUÇÃO DE THIAGO COSTA LEITE SANTOS (SÃO PAULO – SP)

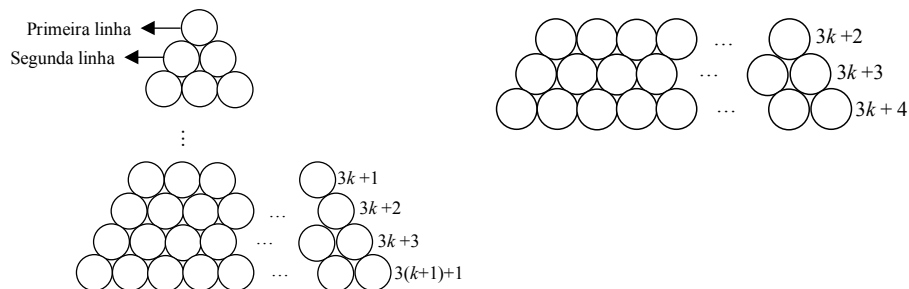
Obviamente $n = 6k_0 + 1$ ou $n = 6k_0 + 4$, quando $k = 2k_0$ ou $k = 2k_0 + 1$, respectivamente. Observe que se tivermos seis círculos do seguinte formato:



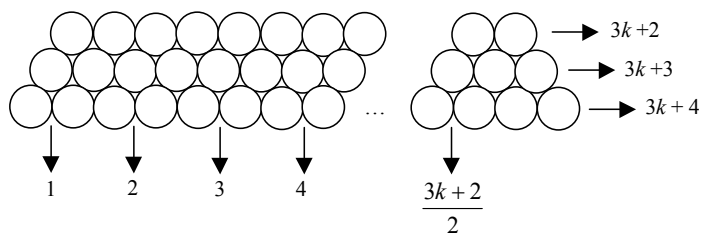
nós só podemos pintar no máximo 2 bolas; caso pintemos 3, haverá duas bolas pintadas tangentes, o que é absurdo!



Primeiro caso: $k = 2k_0 \Rightarrow n = 6k_0 + 1 \Rightarrow$

Denote por a_k o maior número de círculos que podemos pintar. No triângulo $n \times n$ pegue as 3 últimas linhas:



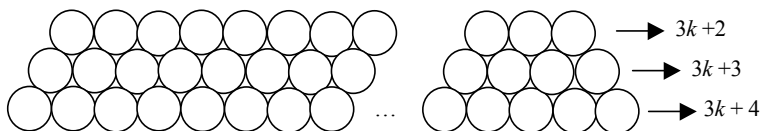
Dividimos aqueles círculos em peças de 6 círculos e uma peça de 3 círculos da seguinte forma:




Como cada peça  tem no máximo 2 círculos pintados e nós temos $\frac{3k+2}{2}$ peças (note que $\frac{3k+2}{2} \in \mathbb{Z}$ pois $k \equiv 0 \pmod{2}$) e na peça  podemos pintar um círculo $\Rightarrow a_{k+1} \leq a_k + 3(k+1)$ nesse caso.

Segundo caso: $k = 2k_0 + 1 \Rightarrow n = 6k_0 + 4$

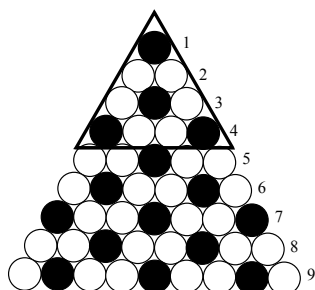
As três últimas linhas são assim:



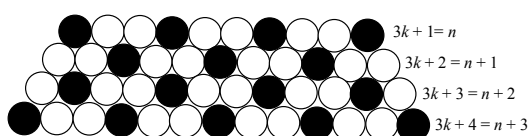
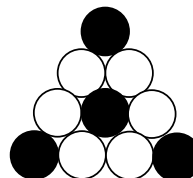
$a_{k+1} \leq a_k + 2\left(\frac{3k+1}{2}\right) + r$ onde r é o número de círculos pintados da peça .

Temos que $r \leq 3$. (*)

Se $r = 2$ temos de novo $a_{k+1} \leq a_k + 3(k+1)$ e um jeito de montarmos é o seguinte:



Pegue a peça destacada e coloque assim:



A partir daí fazemos por indução:

Nos dois casos (k par ou k ímpar), as três últimas linhas podem ser pintadas assim: Suponha pintado até a linha n e pinte as linhas $n + 1, n + 2, n + 3$ da seguinte forma.

Na linha $n + i = 3k + 1 + i, 1 \leq i \leq 3$ faça o seguinte: enumere de 1 a $n + i$.

Se $i = 1$: na linha $n + 1$, se o círculo tiver um número da forma $3k$, pinte-o de vermelho.

Se $i = 2$: na linha $n + 2$, se o círculo tiver um número da forma $3k + 2$, pinte-o.

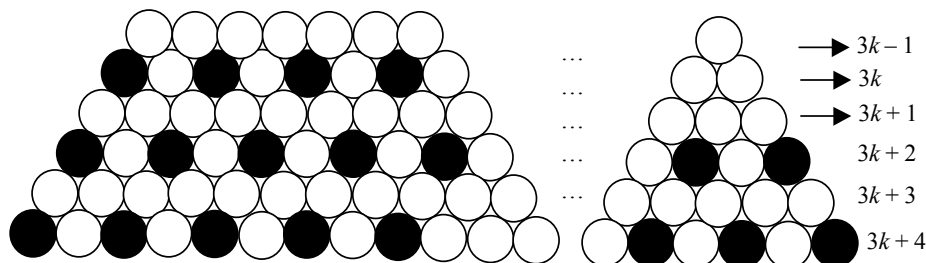
Se $i = 3$: na linha $n + 3$, se o círculo tiver um número da forma $3k + 1$, pinte-o.

Assim, teremos $a_{k+1} \geq a_k + 3(k + 1), a_1 = 4 \Rightarrow a_k \geq 1 + \frac{3k(k + 1)}{2}, \forall k \geq 1$.

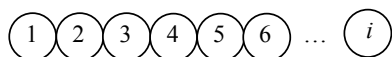
Vamos ver o que acontece se em (*) tivermos $r = 3$ e $2 \cdot \left(\frac{3k + 1}{2}\right) + r$ círculos pintados nas 3 últimas linhas.

A peça será pintada assim

As 3 últimas linhas serão pintadas assim:



Na linha i coloque os números assim:



Na linha $3k + 2$ e $3k + 4$ os números ímpares serão pintados e na linha $3k + 3$

ninguém. Como cada peça da forma só tem no máximo 2 círculos pintados, nas linhas $3k + 2$ e $3k + 4$ todos os números ímpares serão pintados, porque se não $a_{k+1} \leq a_k + 3(k + 1)$. Assim, nas 3 linhas anteriores ($3k - 1$, $3k$ e $3k + 1$) temos no máximo $2k$ círculos pintados (pois na linha $3k + 1$ não podemos ter nenhum), donde $a_{k+1} \leq a_{k-1} + 2k + 3k + 4 \leq a_{k-1} + 3k + 3(k + 1)$ e, de qualquer jeito, temos

$$a_k \leq 1 + \sum_{j=1}^k 3j = 1 + \frac{3k(k+1)}{2}, \text{ por indução. A resposta, portanto, é}$$

$$a_k = 1 + \frac{3k(k+1)}{2}.$$

PROBLEMA 6

Demonstrar que existe uma seqüência de inteiros positivos $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ que satisfaz as duas condições seguintes:

- i) contém exatamente uma vez cada um dos inteiros positivos,
- ii) para cada $n = 1, 2, \dots$, a soma parcial $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ é divisível por n^n .

SOLUÇÃO DE FÁBIO DIAS MOREIRA (RIO DE JANEIRO – RJ)

Definiremos indutivamente uma tal seqüência. Seja $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, e suponha a seqüência definida até x_{2n} . Seja k o menor inteiro positivo que ainda não apareceu entre x_1, \dots, x_{2n} . Pelo Teorema Chinês dos Restos, existem infinitos \tilde{x}_{2n+1} tais que

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{2n+1} &\equiv -x_1 - x_2 \dots - x_{2n} \pmod{(2n+1)^{2n+1}}, \text{ e} \\ \tilde{x}_{2n+1} &\equiv -x_1 - x_2 \dots - x_{2n} - k \pmod{(2n+2)^{2n+2}}\end{aligned}$$

já que $\text{mdc}(2n+1, 2n+2) = 1 \Rightarrow \text{mdc}((2n+1)^{2n+1}, (2n+2)^{2n+2}) = 1$. Em particular, existe um tal $\tilde{x}_{2n+1} \notin \{x_1, x_2, \dots, x_{2n}, k\}$, já que este último conjunto é finito. Tomamos $x_{2n+1} = \tilde{x}_{2n+1}$ e $x_{2n+2} = k$. Note que $(2n+1)^{2n+1} \mid x_1 + \dots + x_{2n+1}$ e $(2n+2)^{2n+2} \mid x_1 + \dots + x_{2n+2}$, logo a extensão da seqüência respeita (ii). Como, para $1 \leq i \leq 2n$, $x_{2n+1} \neq x_i$, $x_{2n+1} \neq k$ por construção e $x_{2n+2} \neq x_i$ pela definição de k , a extensão respeita que cada inteiro aparece no máximo uma vez. Mas depois de x extensões, todos os números $1, 2, \dots, x$ já apareceram, pois são os x menores inteiros positivos. Logo todo inteiro positivo x aparece até o $(2x+2)$ -ésimo termo, logo todo inteiro aparece pelo menos uma vez. Logo $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ respeita (i), e portanto $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ satisfaz as condições do enunciado.

XLIV OLIMPIÁDA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

07 a 19 de julho, Tóquio - Japão

PROBLEMA 1

Seja A um subconjunto do conjunto $S = \{1, 2, \dots, 1000000\}$ com exatamente 101 elementos. Demonstre que existem números t_1, t_2, \dots, t_{100} em S tais que os conjuntos

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\}, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, 100,$$

são disjuntos dois a dois.

SOLUÇÃO DE FÁBIO DIAS MOREIRA (RIO DE JANEIRO – RJ)

Seja $\Delta A = \{x - y \mid x, y \in A, x > y\}$. Certamente $\Delta A \subset S$, $|\Delta A| \leq \binom{101}{2} = 5050$, já que

há $\binom{101}{2}$ pares de inteiros $(x, y) \in A^2$ tais que $x > y$. Afirmamos que se

$T = \{t_1, \dots, t_{100}\}$ é tal que $t_j - t_i \notin \Delta A, \forall i, j \in \{1, \dots, 100\}$, então t_1, \dots, t_{100} satisfazem o enunciado. De fato, se houver $x, y \in A, x > y$, tais que $x + t_i = y + t_j$, então $x - y = t_j - t_i$. Mas o lado esquerdo da igualdade está em ΔA_j , o direito não, absurdo!

Então construímos T da seguinte forma:

- i) $1 \in T$
- ii) Para cada elemento t_i adicionado, proibimos todos os inteiros da forma $t_i + x, x \in \Delta A$.
- iii) Escolhemos o menor inteiro que não foi proibido, nem escolhido anteriormente.
- iv) Repetimos ii) e iii) 99 vezes.

Se existissem $t_i, t_j, t_j > t_i$ em T , tais que $t_j - t_i \in \Delta A$, então, como $t_j > t_i$, $t_j = t_i + \delta, \delta \in \mathbb{Z}_+^*$, logo $\delta \in \Delta A$, absurdo, pois t_j teria sido proibido, pois é da forma $t_i + x, x \in \Delta A$.

Logo basta verificar que $T \subset S$. Mas como $\min T = 1$, basta verificar $\max T \leq 10^6$. Mas se $T = \{1 = t_1 < t_2 < \dots < t_{100}\}$, então $t_2 \leq 5052$, pois há no máximo 5050 inteiros proibidos entre ele e t_1 , além de 1 já escolhido. Da mesma

maneira, $t_3 \leq 10103, \dots, t_{100} \leq 99 \times 5050 + 100 = 500050 < 10^6$, concluindo a demonstração.

PROBLEMA 2

Determine todos os pares de inteiros positivos (a, b) tais que

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

é um inteiro positivo.

SOLUÇÃO DE ALEX CORRÊA ABREU (NITERÓI – RJ)

Primeiro caso: $b = 1$

$\Rightarrow \frac{a^2}{2a}$ é inteiro $\Leftrightarrow a$ é par \Rightarrow temos as soluções $(2k, 1)$ $k \in \mathbb{N}^*$.

Segundo caso: $b > 1$

como queremos inteiro positivo $\Rightarrow 2ab^2 - b^3 + 1 > 0 \Rightarrow b^2(2a - b) + 1 > 0$ e como $b > 1$, devemos ter $b \leq 2a$

agora:

2') se $2a \geq b \geq a$, $b^2(2a - b) + 1 \leq a^2 \Rightarrow a^2(2a - b) + 1 \leq a^2 \Rightarrow 1 \leq a^2(b - 2a + 1) \Rightarrow b = 2a$. Temos então as soluções $(a, 2a)$ $a \in \mathbb{N}^*$.

2'') se $b < a$ e (a, b) é uma solução, suponha que

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1} = k \Rightarrow a^2 - 2kb^2a + (b^3 - 1)k = 0 \text{ então a equação } x^2 - 2kb^2x + (b^3 - 1)k = 0$$

tem uma solução a e a outra é $2kb^2 - a$, que é positiva pois o produto das soluções é $(b^3 - 1)k > 0$.

Então vamos mostrar que

$$b \geq 2kb^2 - a \Leftrightarrow b \geq \frac{2a^2b^2}{2ab^2 - b^3 + 1} - a \Leftrightarrow b \geq \frac{ab^3 - a}{2ab^2 - b^3 + 1} \Leftrightarrow 2ab^3 - b^4 + b \geq ab^3 - a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ab^3 + b - b^4 + a \geq 0 \Leftrightarrow b^3(a - b) + a + b \geq 0 \text{ o que é verdade, pois } a > b. \text{ Assim, pelo}$$

$$\text{caso 2'), } b = 2(2kb^2 - a) = \frac{4a^2b^2}{2ab^2 - b^3 + 1} - 2a = \frac{2ab^3 - 2a}{2ab^2 - b^3 + 1} \Rightarrow 2ab^3 - b^4 + b = 2ab^3 - 2a$$

$$\Leftrightarrow 2a = b^4 - b \Leftrightarrow a = \frac{b^4 - b}{2}, \text{ com } b \text{ par, pois } k = \frac{b^2}{4}. \text{ Temos então as soluções}$$

$$\left(\frac{b^4 - b}{2}, b \right), b > 1 \text{ par.}$$

PROBLEMA 3

Considere um hexágono convexo tal que para cada quaisquer dois lados opostos verifica-se a seguinte propriedade: a distância entre os seus pontos médios é igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ vezes a soma dos seus comprimentos. Demonstre que todos os ângulos do hexágono são iguais.

(Um hexágono convexo $ABCDEF$ tem três pares de lados opostos: AB e DE , BC e EF , CD e FA).

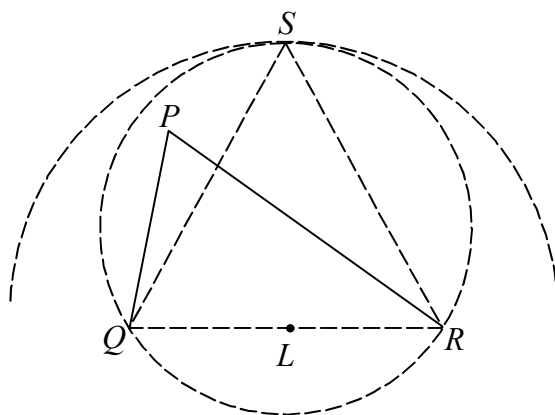
SOLUÇÃO OFICIAL

Primeira Solução:

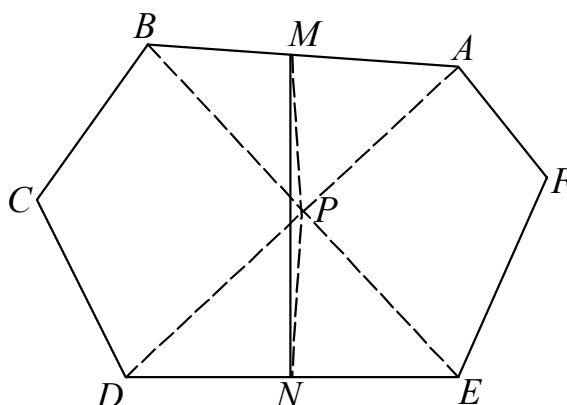
Lema: Considere o triângulo PQR com $\angle QPR \geq 60^\circ$. Seja L o ponto médio de QR .

Logo $PL \leq \frac{\sqrt{3}}{2} QR$, com igualdade se e somente se o triângulo PQR é equilátero.

Prova:



Seja S um ponto tal que o triângulo QRS é equilátero, e os pontos P e S encontram-se no mesmo semiplano limitado pela linha QR . Logo o ponto P pertence ao circuncírculo do triângulo QRS , que se encontra dentro do círculo de centro L e raio $\frac{\sqrt{3}}{2} QR$. Isto completa a prova do lema.



As diagonais principais do hexágono convexo formam um triângulo embora o triângulo possa ser degenerado. Assim podemos escolher duas das três diagonais que formam um ângulo maior ou igual a 60° . Sem perda de generalidade, podemos assumir que as diagonais AD e BE do hexágono dado $ABCDEF$ satisfazem $\angle APB \geq 60^\circ$, onde P é a interseção dessas diagonais. Logo, usando o lema, temos:

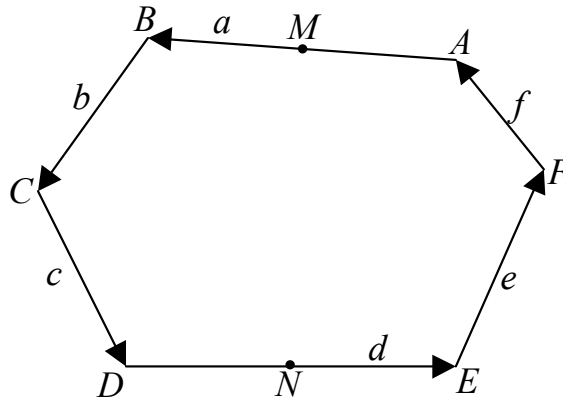
$$MN = \frac{\sqrt{3}}{2}(AB + DE) \geq PM + PN \geq MN,$$

onde M e N são pontos médios de AB e DE , respectivamente. Assim pelo lema, os triângulos ABP e DEP são equiláteros.

Consequentemente a diagonal CF forma um ângulo maior ou igual a 60° com uma das diagonais AD e BE . Sem perda de generalidade, assumimos que $\angle AQF \geq 60^\circ$, onde Q é a interseção de AD e CF . Da mesma maneira acima, deduzimos que os triângulos AQF e CQD são equiláteros. Isto implica que $\angle BRC = 60^\circ$, onde R é a interseção de BE e CF . Usando o mesmo argumento acima pela terceira vez, obtemos que os triângulos BCR e EFR são equiláteros. Isto completa a solução.

Segunda Solução:

Seja $ABCDEF$ o hexágono dado e seja $a = \overrightarrow{AB}$, $b = \overrightarrow{BC}$, ..., $f = \overrightarrow{FA}$.



Sejam M e N os pontos médios dos lados AB e DE , respectivamente. Temos

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}a + b + c + \frac{1}{2}d \text{ e } \overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}a - f - e - \frac{1}{2}d.$$

Assim temos

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(b + c - e - f). \quad (1)$$

Da propriedade dada temos

$$|\overrightarrow{MN}| = \frac{\sqrt{3}}{2}(|a| + |d|) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}|a - d|. \quad (2)$$

$x = a - d$, $y = c - f$, $z = e - b$. desde (1) e (2) obtemos:

$$|y - z| \geq \sqrt{3}|x|. \quad (3)$$

Similarmente vemos que

$$|z - x| \geq \sqrt{3}|y|, \quad (4)$$

$$|x - y| \geq \sqrt{3}|z|. \quad (5)$$

Note que

$$(3) \Leftrightarrow |y|^2 - 2y \cdot z + |z|^2 \geq 3|x|^2,$$

$$(4) \Leftrightarrow |z|^2 - 2z \cdot x + |x|^2 \geq 3|y|^2,$$

$$(5) \Leftrightarrow |x|^2 - 2x \cdot y + |y|^2 \geq 3|z|^2.$$

Adicionando as últimas três inequações, obtemos

$$-|x|^2 - |y|^2 - |z|^2 - 2y \cdot z - 2z \cdot x - 2x \cdot y \geq 0,$$

ou $-|x+y+z|^2 \geq 0$. Assim $x+y+z=0$ e valem as igualdades em todas as inequações acima.

Daí, concluímos que:

$$\begin{aligned}x+y+z &= 0, \\|y-z| &= \sqrt{3}|x|, \quad a // d // x, \\|z-x| &= \sqrt{3}|y|, \quad c // f // y, \\|x-y| &= \sqrt{3}|z|, \quad e // b // z.\end{aligned}$$

Supondo que PQR é o triângulo tal que $\overline{PQ} = x$, $\overline{QR} = y$, $\overline{RP} = z$. Podemos assumir $\angle QRP \geq 60^\circ$, sem perda de generalidade. Seja L o ponto médio de QR , logo $PL = |z-x|/2 = \sqrt{3}|y|/2 = \sqrt{3}QR/2$.

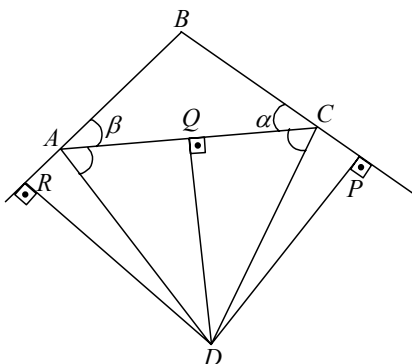
Segue do lema na solução 1 que o triângulo PQR é equilátero. Assim temos $\angle ABC = \angle BCD = \dots = \angle FAB = 120^\circ$.

Nota: Obtemos a caracterização completa dos hexágonos satisfazendo a propriedade dada. São obtidos a partir do triângulo equilátero cortando seus cantos na mesma altura.

PROBLEMA 4

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo cujos vértices estão sobre uma circunferência. Sejam P , Q e R os pés das perpendiculares às retas BC , CA e AB , respectivamente, passando por D . Demonstre que $PQ = QR$ se e só se as bissetrizes dos ângulos $\angle ABC$ e $\angle ADC$ se intersectam sobre a reta AC .

SOLUÇÃO DE ALEX CORRÊA ABREU (NITERÓI – RJ)



Seja $CAB = \beta$ e $BCA = \alpha$.

Primeiro temos que as bissetrizes se intersectam sobre $AC \Leftrightarrow$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{AD}{CD}. \text{ Mas } \frac{PQ}{\sin \widehat{QCP}} = DC \text{ pois } DQCP \text{ é inscritível}$$

de diâmetro $DC \Rightarrow PQ = DC \cdot \sin \alpha$ e, analogamente,

$$QR = AD \cdot \sin \beta \Rightarrow PQ = QR \Leftrightarrow DC \cdot \sin \alpha = AD \cdot \sin \beta \Leftrightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

como queríamos.

Observe que a nossa demonstração independe do fato de $ABCD$ ser um quadrilátero inscritível. De fato, o quadrilátero mostrado no desenho não o é: A está no segmento BR e C está no segmento BP . Todos os argumentos utilizados continuam válidos se modificarmos as posições de A ou C .

PROBLEMA 5

Sejam n um inteiro positivo e x_1, x_2, \dots, x_n números reais tais que $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$.

(a) Demonstre que

$$\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j| \right)^2 \leq \frac{2(n^2 - 1)}{3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)^2.$$

(b) Demonstre que a igualdade é válida se e só se x_1, x_2, \dots, x_n formam uma progressão aritmética.

SOLUÇÃO

Vamos provar (a) por indução em n . Para $n = 1$ os dois lados valem 0 e, para $n = 2$, valem $4(x_2 - x_1)^2$. Façamos o passo da indução: Temos

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1}. \text{ Assim, sendo } A_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j| \text{ e}$$

$$B_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)^2, \text{ temos } A_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} |x_i - x_j| = 2 \sum_{j=1}^n (x_{n+1} - x_j) + A_n$$

e $B_{n+1} = 2 \sum_{j=1}^n (x_{n+1} - x_j)^2 + B_n$. Queremos então provar que

$$\begin{aligned} A_{n+1}^2 &= \left(2n \cdot x_{n+1} - 2 \sum_{j=1}^n x_j + A_n \right)^2 \leq \frac{2((n+1)^2 - 1)}{3} \cdot B_{n+1} = \\ &= \frac{2n(n+2)}{3} \left(2nx_{n+1}^2 - 4x_{n+1} \sum_{j=1}^n x_j + 2 \sum_{j=1}^n x_j^2 + B_n \right), \text{ ou equivalentemente, que} \\ \frac{4n^2(n-1)}{3} x_{n+1}^2 - 4n \left(\frac{2(n-1)}{3} \sum_{j=1}^n x_j + A_n \right) x_{n+1} + \frac{2n(n+2)}{3} \left(B_n + 2 \sum_{j=1}^n x_j^2 \right) - \left(A_n - 2 \sum_{j=1}^n x_j \right)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Olhando o lado esquerdo como uma função quadrática de x_{n+1} , concluímos que

$$\text{ela atinge o seu mínimo para } x_{n+1} = \frac{2(n-1) \sum_{j=1}^n x_j + 3A_n}{2n(n-1)}, \text{ quando temos}$$

$$\begin{aligned} A_{n+1}^2 &= \left(2nx_{n+1} - 2 \sum_{j=1}^n x_j + A_n \right)^2 = \left(\frac{2(n-1) \sum_{j=1}^n x_j + 3A_n}{n-1} - 2 \sum_{j=1}^n x_j + A_n \right)^2 = \\ \left(\frac{n+2}{n-1} \cdot A_n \right)^2, \text{ enquanto } B_{n+1} &= 2nx_{n+1}^2 - 4x_{n+1} \sum_{j=1}^n x_j + 2 \sum_{j=1}^n x_j^2 + B_n = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2x_{n+1} \left(nx_{n+1} - 2 \sum_{j=1}^n x_j \right) + 2 \sum_{j=1}^n x_j^2 + B_n = \\
 &= \frac{2(n-1) \sum_{j=1}^n x_j + 3A_n}{n(n-1)} \cdot \frac{3A_n - 2(n-1) \sum_{j=1}^n x_j}{2(n-1)} + 2 \sum_{j=1}^n x_j^2 + B_n = \\
 &= \frac{-2 \left(\sum_{j=1}^n x_j \right)^2}{n} + \frac{9A_n^2}{2n(n-1)^2} + 2 \sum_{j=1}^n x_j^2 + B_n = B_n + \frac{1}{n} \left(2 \left(n \sum_{j=1}^n x_j^2 - \left(\sum_{j=1}^n x_j \right)^2 \right) \right) + \frac{9A_n^2}{2n(n-1)^2},
 \end{aligned}$$

mas $B_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_j - x_i)^2 = 2 \left(n \sum_{j=1}^n x_j^2 - \left(\sum_{j=1}^n x_j \right)^2 \right)$, donde $A_{n+1}^2 \leq \frac{2n(n+2)}{3} B_{n+1}$ é

$$\text{equivalente a } \frac{(n+2)^2}{(n-1)^2} A_n^2 \leq \frac{2n(n+2)}{3} \left(\left(\frac{n+1}{n} \right) B_n + \frac{9A_n^2}{2n(n-1)^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow 3(n+2)A_n^2 \leq 2(n+1)(n-1)^2 B_n + 9A_n^2$$

$$\Leftrightarrow 3(n-1)A_n^2 \leq 2(n+1)(n-1)^2 B_n \Leftrightarrow A_n^2 \leq \frac{2(n^2-1)}{3} B_n, \text{ que é a hipótese de}$$

indução. Assim, o valor mínimo de nossa função quadrática é maior ou igual a 0, o que implica o resultado.

Para provar b), note que, se valem as igualdades nas desigualdades acima,

devemos ter em particular $A_n^2 = \frac{2(n^2-1)}{3} B_n$ donde, por hipótese de indução,

$x_j = x_1 + (j-1)r$ para um certo $r \geq 0$, $\forall j \leq n$; além disso, devemos ter

$$x_{n+1} = \frac{2(n-1) \sum_{j=1}^n x_j + 3A_n}{2n(n-1)} = \frac{2(n-1) \sum_{j=1}^n x_j + 6 \sum_{i < j \leq n} (j-i)r}{2n(n-1)} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_1 + (j-1)r) + \frac{3}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)kr =$$

$$x_1 + \frac{(n-1)}{2} r + \frac{3}{n(n-1)} \left(\frac{n(n-1)(n+1)r}{6} \right) = x_1 + nr, \text{ donde } (x_i)_{1 \leq i \leq n+1} \text{ é uma}$$

progressão aritmética, como queríamos provar.

PROBLEMA 6

Seja p um número primo. Demonstre que existe um número primo q tal que, para todo inteiro n , o número $n^p - p$ não é divisível por q .

SOLUÇÃO DE SAMUEL BARBOSA FEITOSA (FORTALEZA - CE)

É evidente que $p \neq q$ pois se $p = q$ basta tomarmos n múltiplo de q para termos um absurdo.

Se encontrarmos um primo q tal que $p \mid q-1$ e $p^{\frac{q-1}{p}} \not\equiv 1 \pmod{q}$ (1)

o problema terá acabado pois se $n^p \equiv p \pmod{q}$, como $p \neq q$ então $\text{mdc}(n, q) = 1$, donde $n^{p \cdot \frac{q-1}{p}} \equiv p^{\frac{q-1}{p}} \pmod{q}$ mas pelo pequeno teorema de Fermat temos $n^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$. Isso produz um absurdo por (1), logo devemos ter $n^p \not\equiv p \pmod{q}$.

Para encontrarmos o nosso tal primo q que satisfaz (1) consideremos o número $X = p^{p-1} + p^{p-2} + \dots + p + 1$. É claro que $X \mid p^p - 1$ (2).

Seja q um divisor primo de X e $k = \text{ord}_q p$. De (2) temos que $k \mid p \Rightarrow k = 1$ ou $k = p$. Se $k = 1$ temos $p \equiv 1 \pmod{q} \Rightarrow p^j \equiv 1 \pmod{q}$; daí $X \equiv 1 + 1 + \dots + 1 = p \pmod{q}$ mas $q \mid X$ e $q \neq p$, absurdo, logo $k = p$, mas $p^{q-1} \equiv 1 \pmod{q} \Rightarrow p = k \mid q-1 \Rightarrow q = py + 1$ para algum y inteiro. Existe algum fator primo q de X tal que y não seja divisível por p , pois se para todo fator primo q de X tivermos $q \equiv 1 \pmod{p^2}$, teríamos $X \equiv 1 \pmod{p^2}$, mas $X \equiv p + 1 \not\equiv 1 \pmod{p^2}$ logo existe um primo q divisor de X tal que $p \mid q-1$ e $q \not\equiv 1 \pmod{p^2}$. Mostremos que tal primo q satisfaz (1). Como $k = \text{ord}_q p = p$ e

$q \not\equiv 1 \pmod{p^2} \Rightarrow k = p$ não divide $\frac{q-1}{p} \Rightarrow p^{\frac{q-1}{p}} \not\equiv 1 \pmod{q}$, donde o primo q satisfaz (1).

X OLIMPIÁDA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA PARA ESTUDANTES UNIVERSITÁRIOS

25 a 31 de Julho, Cluj - Napoca, Romênia

PROBLEMA 1

a) Seja $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ uma seqüência de números reais tais que $a_1 = 1$ e

$$a_{n+1} > \frac{3}{2}a_n, \forall n.$$

Prove que a seqüência $\frac{a_n}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}$ tem um limite finito ou tende a infinito.

b) Prove que para todo $\alpha > 1$ existe uma seqüência $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ com as

mesmas propriedades, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}} = \alpha$.

SOLUÇÃO

(a) Considere a seqüência $b_n = \frac{a_n}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}$.

Temos $b_n > 0, \forall n$ e $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1}}{\left(\frac{3a_n}{2}\right)} > 1$, logo (b_n) é uma seqüência crescente.

Mas toda seqüência monótona limitada é convergente. Logo, há duas opções possíveis: ou (b_n) é ilimitada e, como é crescente, tende a infinito ou então, se ela for limitada, ela tem um limite finito (pois é crescente).

(b) Tome $q = 1 - \frac{1}{\alpha}$ e considere a seqüência $b_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$.

$\alpha > 1 \Rightarrow 0 < q < 1$ e portanto (b_n) é uma seqüência convergente, com

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{1-q} = \alpha.$$

Portanto, a seqüência $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} b_n$ satisfaz as condições do enunciado.

Observação: A solução da letra (b) é bem mais natural do que parece. A letra (a) induz você a pensar apenas na seqüência (b_n) . E na tentativa de encontrar uma seqüência com determinadas condições, nada mais natural do que tentar uma seqüência fácil como uma PG (e aí descobrir o valor de q necessário).

PROBLEMA 2

Sejam a_1, a_2, \dots, a_{51} elementos não nulos de um corpo. Simultaneamente trocamos cada elemento pela soma dos outros 50. Desta forma a nova seqüência b_1, b_2, \dots, b_{51} é uma permutação da anterior. Quais são os possíveis valores da característica do corpo?

SOLUÇÃO

Seja p a característica do corpo.

$$S = \sum_{k=1}^{51} b_k = \sum_{k=1}^{51} (S - a_k) = 51S - \sum_{k=1}^{51} a_k = 51S - S, \text{ logo } 49S = 0.$$

Se $S \neq 0$, temos que $49 = 0$, logo $p \mid 49$ e como p é primo, $p = 7$. Um exemplo de corpo que satisfaz essa propriedade é $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$, com $a_k = 1$, para $k = 1, 2, \dots, 51$.

Se $S = 0$, cada a_k é igual a $-b_k = -a_j$, para algum j , donde a permutação σ tal que $a_k = -a_{\sigma(k)}$ possui um ponto fixo, pois os números $1, 2, \dots, 51$ estão divididos em pares (pela ação da σ) e 51 é ímpar. Portanto existe um n tal que $a_n = -a_{\sigma(n)} = -a_n$, logo $2a_n = 0$ e como $a_n \neq 0$, temos que $2 = 0$ e o corpo possui característica 2. Um exemplo de corpo que satisfaz essa propriedade é $GF(2^2)$, isto é, o corpo cujos elementos são polinômios, tomados módulo $x^2 + x + 1$, com coeficientes em $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Basta tomar $(a_1, a_2, \dots, a_{51}) = (1, x, 1+x, 1, x, 1+x, \dots, 1, x, 1+x)$.

PROBLEMA 3

Seja A uma matriz quadrada $n \times n$ tal que $3A^3 = A^2 + A + I$. Prove que $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge a uma matriz idempotente B (i.e., a uma matriz B tal que $B^2 = B$).

SOLUÇÃO

Seja $m(x)$ o polinômio minimal de A . Como $3A^3 - A^2 - A - I = 0$, $m(x)$ deve ser divisor de $3x^3 - x^2 - x - 1 = (x-1)(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$, com $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{3}$.

Isso implica que $m(x)$ tem raízes distintas, e portanto A é diagonalizável, isto é, existe uma matriz P inversível tal que $A = P^{-1} \cdot \text{Diag}(1, \dots, 1, \lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2) \cdot P$, onde $\text{Diag}(a, b, c, \dots)$ representa a matriz diagonal de entradas a, b, c, \dots

Segue que $A^k = P^{-1} \cdot \text{Diag}(1, \dots, 1, \lambda_1^k, \dots, \lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_2^k) \cdot P$.

Como $|\lambda_{1,2}| < 1$, segue que $B = \lim_{k \rightarrow \infty} A^k = P^{-1} \cdot \text{Diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) \cdot P$, que é claramente idempotente.

SOLUÇÃO ALTERNATIVA

Seja $A_k = A^k$. Então $3A_{k+3} = A_{k+2} + A_{k+1} + A_k$. Resolvendo a recorrência (veja o artigo "Equações de recorrência", na Eureka! 9), obtemos $A_k = C_0 + C_1 \cdot \lambda_1^k + C_2 \cdot \lambda_2^k$ para todo k , sendo C_0, C_1, C_2 matrizes quadradas de ordem n . Como $|\lambda_{1,2}| \leq 1$, $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = C_0$.

Como $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = \lim_{k \rightarrow \infty} A^{2k} \Leftrightarrow C_0^2 = C_0$, C_0 é idempotente.

PROBLEMA 4

Determine o conjunto de todos os pares (a, b) de inteiros positivos para os quais o conjunto dos inteiros positivos pode ser decomposto em dois conjuntos A e B tais que $a \cdot A = b \cdot B$.

SOLUÇÃO

Note que o par (a, b) funciona se e somente se o par de coprimos $\left(\frac{a}{\text{mdc}(a,b)}, \frac{b}{\text{mdc}(a,b)}\right)$ funciona. Vamos então analisar os casos com $\text{mdc}(a, b) = 1$.

Suponha $1 \in A$ (o outro caso é análogo). Então, $a \cdot A = b \cdot B \Rightarrow a \in b \cdot B$, e portanto a é múltiplo de b (pois os elementos de B são todos inteiros), e $\text{mdc}(a, b) = 1$ implica $b = 1$.

Reciprocamente, dado qualquer par da forma $(a, 1)$, com $a > 1$, é possível construir conjuntos A e B satisfazendo o enunciado. De fato, dado $n \in \mathbb{N}$, seja k_n a maior potência de a que divide n . Tomando $A = \{n | k_n \text{ é par}\}$, $B = \{n | k_n \text{ é ímpar}\}$ temos $A \cup B = \mathbb{N}$, $A \cap B = \emptyset$, $a \cdot A = 1 \cdot B$.

Portanto, os pares possíveis são os pares (a, b) com $a \neq b$ tais que a é múltiplo de b ou b é múltiplo de a .

PROBLEMA 5

Sejam $g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $f_n : (0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ a seqüência de funções definida por $f_0(x) = g(x)$ e $f_{n+1}(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f_n(t) dt$, $\forall x \in (0,1], n \geq 0$.

Determine $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ para todo $x \in (0,1]$.

SOLUÇÃO

Veja inicialmente que se g é polinômio, o problema é fácil, pois se $g(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k$, temos claramente que $f_n(x) = \sum_{k=0}^N \frac{a_k}{(k+1)^n} x^k$, portanto todos os coeficientes, com exceção do independente, tendem a zero quando $n \rightarrow +\infty$, e $\lim f_n(x) = a_0 = g(0)$. A idéia é tentar mostrar que isso também vale no caso de g não ser polinômio.

Para isso, vamos usar o teorema da aproximação de Stone-Weierstrass: Dado $\varepsilon > 0$, existe um polinômio P tal que $|P(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$, para todo x em $[0,1]$ (pois g é contínua e $[0,1]$ é compacto). Agora olhe para a seqüência \tilde{P}_n tal que $\tilde{P}_{n+1}(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \tilde{P}_n(t) dt$ e $\tilde{P}_0 = P$.

Como P é polinômio, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{P}_n(x) = P(0)$, donde para n grande, $|\tilde{P}_n(x) - P(0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Além disso, temos que se $|\tilde{P}_n(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$, então:

$$\left| \tilde{P}_{n+1}(x) - f_{n+1}(x) \right| = \frac{1}{x} \left| \int_0^x [\tilde{P}_n(t) - f_n(t)] dt \right| \leq \frac{1}{x} \int_0^x |\tilde{P}_n(t) - f_n(t)| dt < \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\varepsilon}{3} dt = \frac{\varepsilon}{3}$$

Segue por indução que $|\tilde{P}_n(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$, para todo n natural e todo x em $(0,1]$

já que $|\tilde{P}_0(x) - f_0(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Agora fica fácil:

$$|f_n(x) - g(0)| \leq |f_n(x) - \tilde{P}_n(x)| + |\tilde{P}_n(x) - P(0)| + |P(0) - g(0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

para n grande, o que prova que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = g(0)$.

SOLUÇÃO ALTERNATIVA

Vamos provar que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = g(0), \forall x \in (0,1]$. Para isso, vamos mostrar que,

para todo $x \in (0,1]$ e $\varepsilon > 0$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - g(0)| \leq \varepsilon$.

Como g é contínua, existe $\delta > 0$ tal que $|x| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(0)| < \varepsilon$. Se $0 < x < \delta$, para todo $n \geq 1$,

$$|f_n(x) - g(0)| = \left| \frac{1}{x} \int_0^x (f_{n-1}(t) - g(0)) dt \right| \leq \frac{1}{x} \int_0^x |f_{n-1}(t) - g(0)| dt \quad \text{donde,}$$

por indução, $|f_n(x) - g(0)| < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$. Se $x \geq \delta$, temos

$$|f_{n+1}(x) - g(0)| = \left| \frac{1}{x} \int_0^x (f_n(t) - g(0)) dt \right| \leq \frac{1}{x} \int_0^x |f_n(t) - g(0)| dt =$$

$$= \frac{1}{x} \left(\int_0^\delta |f_n(t) - g(0)| dt + \int_\delta^x |f_n(t) - g(0)| dt \right), \text{ donde, se}$$

$M_n = \max \{|f_n(x) - g(0)|, x \in (0,1]\}$, temos

$$M_{n+1} \leq \max \left\{ \varepsilon, \max_{\delta < x \leq 1} \frac{1}{x} (\delta \varepsilon + (x - \delta) M_n) \right\} = \max \{ \varepsilon, \delta \varepsilon + (1 - \delta) M_n \}. \text{ Assim, se}$$

$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} M_n$ (que existe, pois $M_n \leq \max \{ \varepsilon, M_0 \}, \forall n \in \mathbb{N}$), temos

$L \leq \max \{ \varepsilon, \delta \varepsilon + (1 - \delta) L \}$, donde $L \leq \varepsilon$ ou $L \leq \delta \varepsilon + (1 - \delta) L \Rightarrow \delta L \leq \delta \varepsilon \Rightarrow L \leq \varepsilon$, o que encerra a prova.

PROBLEMA 6

Seja $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ um polinômio com coeficientes reais. Prove que se as raízes de f estão no semi-plano esquerdo $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < 0\}$ então $a_k a_{k+3} < a_{k+1} a_{k+2}$ para todo $k = 0, 1, \dots, n-3$.

SOLUÇÃO

Podemos supor sem perda de generalidade que $a_n = 1$.

Nesse caso, $f(z)$ pode ser fatorado como produto de monômios da forma $z + a$ ou $z + a + bi$ com $a > 0$ (no segundo caso, se $b \neq 0$, deve aparecer também o fator $z + a - bi$).

Como $(z + a + bi)(z + a - bi) = z^2 + 2az + a^2 + b^2$ e

$(z + a) + (z + \tilde{a}) = z^2 + (a + \tilde{a})z + a\tilde{a}$, temos que $f(z)$ pode ser obtido a partir de um polinômio de grau 0 ou 1 com todos os coeficientes positivos por meio de sucessivas multiplicações por polinômios da forma $z^2 + Az + B$, com $A, B > 0$. Em particular, todos os seus coeficientes são positivos.

Vamos agora proceder por indução: para $n = 0$ ou $n = 1$ o resultado vale por vacuidade. Seja agora $f(z)$ um polinômio de grau $n + 2$, da forma

$f(z) = (a_n z^n + \dots + a_0)(z^2 + Az + B)$, com $a_n = 1$ e

$\tilde{f}(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ satisfazendo a hipótese de indução. Convencionando

$a_k = 0$ se $k < 0$ ou $k > n$, e escrevendo $f(z) = \tilde{a}_{n+2} z^{n+2} + \dots + \tilde{a}_0$, temos,

para $0 \leq k \leq n+2$, $\tilde{a}_k = a_{k-2} + Aa_{k-1} + Ba_k$. Queremos então provar que

$(a_{k+1} + Aa_{k+2} + Ba_{k+3})(a_{k-2} + Aa_{k-1} + Ba_k) < (a_k + Aa_{k+1} + Ba_{k+2})(a_{k-1} + Aa_k + Ba_{k+1})$,

mas $(a_k + Aa_{k+1} + Ba_{k+2})(a_{k-1} + Aa_k + Ba_{k+1}) - (a_{k+1} + Aa_{k+2} + Ba_{k+3})(a_{k-2} + Aa_{k-1} + Ba_k)$

$$= (a_k a_{k-1} - a_{k+1} a_{k-2}) + B^2 (a_{k+2} a_{k+1} - a_{k+3} a_k) + A^2 (a_{k+1} a_k - a_{k+2} a_{k-1}) +$$

$$+ B(a_{k+2} a_{k-1} - a_{k+3} a_{k-2}) + A(a_k^2 - a_{k+2} a_{k-2}) + AB(a_{k+1}^2 - a_{k+3} a_{k-1}).$$

Temos, por hipótese de indução, $a_k a_{k-1} \geq a_{k+1} a_{k-2}$, $a_{k+2} a_{k+1} \geq a_{k+3} a_k$, $a_{k+1} a_k \geq a_{k+2} a_{k-1}$

e, além disso, $a_{k+3} a_k \leq a_{k+2} a_{k+1}$ e $a_{k+1} a_{k-2} \leq a_{k-1} a_k$, donde

$a_k a_{k+1} a_{k+3} a_{k-2} \leq a_k a_{k+1} a_{k+2} a_{k-1}$, e logo $a_{k+3} a_{k-2} \leq a_{k+2} a_{k-1}$ (de fato temos $a_k a_{k+1} > 0$,

a menos que $k = n$, quando $a_{k+3} a_{k-2} = a_{k+2} a_{k-1} = 0$); $a_{k+2} a_{k-1} \leq a_{k+1} a_k$ e

$a_{k+1}a_{k-2} \leq a_k a_{k-1}$, donde $a_{k-1}a_{k+1}a_{k+2}a_{k-2} \leq a_{k-1}a_{k+1}a_k^2$, e logo $a_{k+2}a_{k-2} \leq a_k^2$, e analogamente $a_{k+3}a_{k-1} \leq a_{k+1}^2$, sendo que pelo menos uma dessas duas últimas desigualdades é estrita, o que conclui a prova.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 1

Sejam A e B matrizes reais $n \times n$ tais que $AB + A + B = 0$. Prove que $AB = BA$.

SOLUÇÃO

$$AB + A + B = 0 \Rightarrow AB + A + B + I = I \Rightarrow A(B + I) + (B + I) = I \Rightarrow (A + I)(B + I) = I$$

Logo, $A + I$ e $B + I$ são inversas uma da outra, donde

$$(A + I)(B + I) = (B + I)(A + I) = I.$$

Expandindo a última desigualdade vem $BA + B + A + I = I$ e subtraindo esta da igualdade dada no enunciado obtém-se $AB = BA$.

PROBLEMA 2

Calcule o seguinte limite: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{\operatorname{sen}^m t}{t^n} dt$ (m, n naturais dados).

SOLUÇÃO

Como a função $\frac{\operatorname{sen} t}{t}$ é decrescente em $(0, \pi)$, e tende a 1 quando t tende a 0^+ ,

temos que, para $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $x < t < 2x$: $\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} < \frac{\operatorname{sen} t}{t} < 1$ e portanto:

$$\left(\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}\right)^m \cdot \int_x^{2x} \frac{t^m}{t^n} dt < \int_x^{2x} \frac{\operatorname{sen}^m t}{t^n} dt < \int_x^{2x} \frac{t^m}{t^n} dt.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}\right)^m = 1$, a desigualdade acima mostra que o limite procurado é igual a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} t^{m-n} dt = \begin{cases} \frac{t^{m-n+1}}{m-n+1} \Big|_x^{2x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0, & \text{se } m-n+1 > 0 \\ \frac{t^{m-n+1}}{m-n+1} \Big|_x^{2x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty, & \text{se } m-n+1 < 0 \\ \ln t \Big|_x^{2x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ln 2, & \text{se } m-n+1 = 0 \end{cases}$$

PROBLEMA 3

Seja A um subconjunto fechado de \mathbb{R}^n e seja B o conjunto de todos os pontos b de \mathbb{R}^n tais que existe exatamente um ponto a_0 em A tal que $|a_0 - b| = \inf_{a \in A} |a - b|$. Prove que B é denso em \mathbb{R}^n .

SOLUÇÃO

Vamos mostrar que dado $\varepsilon > 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$, existe $y \in B(x, \varepsilon) \cap B$.

Se $x \in A$, então basta tomar $y = x$.

Caso contrário, seja $\delta = \inf_{a \in A} |a - x|$. Como A é fechado, existe um ponto $a \in A$ que realiza essa distância (basta observar por exemplo que $\overline{B(x, 2\delta)} \cap A$ é compacto).

Se esse ponto a não for único, considere um ponto $y = x + t(a - x)$, $t \in (0, 1)$ do segmento (x, a) .

Seja a' um outro ponto de A . Se a' estiver no prolongamento desse segmento de reta, então claramente $|a' - y| > |a - y|$.

Caso contrário, temos a desigualdade triangular estrita $|a' - x| < |a' - y| + |y - x|$ e portanto:

$$|a' - y| > |a' - x| - |x - y| \geq |a - x| - |x - y| = |a - y|,$$

onde a 2ª desigualdade usa que a é um ponto de A tal que $|a - x|$ é mínimo e a igualdade final usa o fato que y está no segmento de reta (x, a) .

Ou seja, todo ponto y escolhido dessa forma está em B . Escolhendo t suficientemente pequeno ($t = \frac{\varepsilon}{2 \cdot |a - x|}$ por exemplo) obtemos um ponto $y \in B(x, \varepsilon) \cap B$ como desejado.

PROBLEMA 4

Encontre todos os inteiros positivos n para os quais existe uma família F de subconjuntos de três elementos de $S = \{1, 2, \dots, n\}$ que satisfaz as seguintes condições:

- (i) para quaisquer elementos distintos $a, b \in S$ existe exatamente um $A \in F$ tal que $a, b \in A$.
- (ii) Se a, b, c, x, y, z são tais que $\{a, b, x\}, \{a, c, y\}, \{b, c, z\} \in F$ então $\{x, y, z\} \in F$.

SOLUÇÃO

Vamos mostrar que uma tal família F existe se e somente se $n = 2^k - 1$ para algum inteiro positivo k .

De fato, se $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, onde está definida a adição $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1 \pmod{2}, x_2 + y_2 \pmod{2}, \dots, x_n + y_n \pmod{2})$, podemos definir $S = G \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$ e $F = \{\{u, v, u + v\}, u, v \in S, u \neq v\}$.

A propriedade (i) segue com $A = \{a, b, a + b\}$ e a propriedade ii) segue de $x = a + b, y = a + c \Rightarrow x + y = a + a + b + c = b + c = z$.

Sejam agora S e F como no enunciado. Consideramos um conjunto $G = S \cup \{0\}$, onde 0 é um elemento de G que não pertence a S (um "zero artificial") e uma operação $+$ definida em G por

$$a + b = \begin{cases} x & \text{se } a, b \in S, a \neq b \text{ e } \{a, b, x\} \in F \\ 0 & \text{se } a = b \\ a & \text{se } b = 0 \\ b & \text{se } a = 0 \end{cases}$$

Não é difícil ver que com essa operação G é um grupo abeliano ($a + b = b + a$ para quaisquer a, b em G , $(a + b) + c = a + (b + c)$, para quaisquer $a, b, c \in G$ e para todo $a \in G$ existe b em G com $a + b = 0$). Segue que G é isomorfo a $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$ para algum inteiro positivo k^* , donde $n = \#S = \#G - 1 = 2^k - 1$, o que conclui a solução.

* De fato, se $a \in G, a \neq 0, H = \{0, a\}$ é um subgrupo de G isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, e, se definimos em G a relação de equivalência $x \sim y \Leftrightarrow y - x \in H$, obtemos um quociente, G/H , o conjunto das classes de equivalência $\bar{x} = \{y \in G \mid y \sim x\}$, que é um grupo com a operação $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$, o qual têm as mesmas propriedades que G . Além disso, G é naturalmente isomorfo a $(G/H) \times H$, e, por indução em $\#G$, G/H é isomorfo a $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$ para algum $r \in \mathbb{N}$, donde G é isomorfo a $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{r+1}$.

Obs.: O conjunto S é um espaço projetivo finito (a generalização k -dimensional do plano projetivo) sobre o corpo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (ou seja, de ordem 2), cuja família das retas é F . De fato, a propriedade (i) é equivalente a "por dois pontos passa uma única reta" e a propriedade (ii) é equivalente ao axioma de Veblen-Young: "dado um triângulo ABC , se uma reta r corta dois lados, então corta o terceiro lado também" (no caso, os pontos do triângulo são a, b, c e a reta é $r = \{x, y, z\}$). As propriedades (i) e (ii) são, então, equivalentes aos axiomas que definem um espaço projetivo; veja o artigo "Aplicações de planos projetivos finitos em Teoria dos Números e Combinatória", de Carlos Shine, na Eureka! 15.

PROBLEMA 5

- a) Mostre que para toda função $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ existe uma função $g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) \leq g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbb{Q}$.
- b) Encontre uma função $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ para a qual não existe $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) \leq g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

SOLUÇÃO

a) \mathbb{Q} é enumerável, digamos $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, r_3, \dots\}$.

Assim, podemos definir $g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(r_n) = \max\{|f(r_i, r_j)|, 1 \leq i, j \leq n\}$.

Assim, $f(r_i, r_j) \leq |f(r_i, r_j)| \leq g(r_{\max(i,j)}) \leq g(r_i) + g(r_j), \forall i, j$.

b) Podemos definir $f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ \frac{1}{|x - y|}, & \text{se } x \neq y. \end{cases}$

Se existisse $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) \leq g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$, se definirmos,

para cada inteiro positivo n , $X_n = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \leq n/2\}$, teremos $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = \mathbb{R}$,

donde, como \mathbb{R} é não-enumerável, algum dos X_n deve ser não enumerável, e portanto tem pontos de acumulação, isto é, existe uma seqüência de termos distintos $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ com $y_k \in X_n$ para todo k tal que (y_k) converge a um certo

$\tilde{x} \in \mathbb{R}$. Em particular, $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{k+1} - y_k = \tilde{x} - \tilde{x} = 0$, e logo $f(y_k, y_{k+1}) = \frac{1}{|y_{k+1} - y_k|}$

tende a $+\infty$, mas devemos ter $f(y_k, y_{k+1}) \leq g(y_k) + g(y_{k+1}) \leq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$ para todo

$k \in \mathbb{N}$, pois $\{y_k, y_{k+1}\} \subset X_n$, donde $(f(y_k, y_{k+1}))_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada, absurdo.

PROBLEMA 6

Seja $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ a seqüência definida por $a_0 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{n-k+2}$.

Calcule $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}$ (se existir).

SOLUÇÃO

Os a_n são positivos e, por indução, tem-se $a_n \leq 1, \forall n$ (de fato, supondo válido até n tem-se

$$a_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{n-k+2} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n 1 = 1).$$

Considere então a função geratriz $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (ele é convergente para $0 < x <$

1 pela observação acima). Derivando e usando a expressão dada obtemos:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a_{n+1} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{n-k+2} \right) x^n$$

Trocando a ordem do somatório obtém-se:

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_k x^n}{n-k+2} \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) \cdot \left(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{x^{n-k}}{n-k+2} \right) = f(x) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m+2}$$

Portanto,

$$\ln(f(x)) - \ln(f(0)) = \int_0^x \frac{f'}{f} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{m+1}}{(m+1)(m+2)} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{x^{m+1}}{(m+1)} - \frac{x^{m+1}}{(m+2)} \right)$$

Como $f(0) = 1$:

$$\ln(f(x)) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{x} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{m+2}}{m+2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{x} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{m+1}}{m+1} = \left(\ln \frac{1}{1-x} \right) - \frac{1}{x} \left(\ln \frac{1}{1-x} - x \right)$$

Colocando $x = \frac{1}{2}$ obtemos

$$\ln f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2 - 2 \ln 2 + 1 = 1 - \ln 2, \text{ de modo que } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = f\left(\frac{1}{2}\right) = e \cdot e^{-\ln 2} = \frac{e}{2}.$$

Estas soluções da International Mathematical Competition - 2003 foram redigidas por Márcio Assad Cohen, Rodrigo Villard Milet e Carlos Gustavo Moreira do Rio de Janeiro – RJ.

XVIII OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA

13 a 20 de setembro, Mar del Plata - Argentina

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

- a) Têm-se duas sucessões, cada uma de 2003 inteiros consecutivos, e um tabuleiro de 2 linhas e 2003 colunas

Decida se é sempre possível distribuir os números da primeira sucessão na primeira linha e os da segunda sucessão na segunda linha, de modo que os resultados obtidos ao somar os dois números de cada coluna formem uma nova sucessão de 2003 números consecutivos.

- b) E se trocássemos 2003 por 2004?
Tanto em *a)* como em *b)*, se a resposta for afirmativa, explique como distribuiria os números, e se for negativa, justifique o porquê.

SOLUÇÃO

Note que somar ou subtrair uma constante de uma sucessão de números consecutivos a transforma em uma sucessão de números consecutivos.

Note também que somar ou subtrair uma constante de uma linha do tabuleiro soma ou subtrai a mesma constante da sucessão formada pela soma das colunas, logo esta operação não altera a "consecutividade" das linhas do tabuleiro. Portanto, sem perda de generalidade, as sucessões escritas nas duas primeiras linhas do tabuleiro são $1, 2, \dots, n$ onde $n \in \{2003, 2004\}$

- a) Sim. Escreva na primeira linha $1, 2, \dots, 2003$ e na segunda linha $1002, 1003, \dots, 2003, 1, 2, \dots, 1000, 1001$, ou seja, o i -ésimo termo é $i + 1001$ se $i \leq 1002$. A seqüência final é $2i + 1001$ se $i \leq 1002$ e $2i - 1002$ se $i \geq 1003$, que é obviamente permutação de $1003, 1004, 1005, \dots, 3003, 3004, 3005$.
- b) Não. Uma seqüência de 2004 números inteiros consecutivos tem forma $k + 1, \dots, k + 2004, k \in \mathbb{Z}$. Sua soma vale

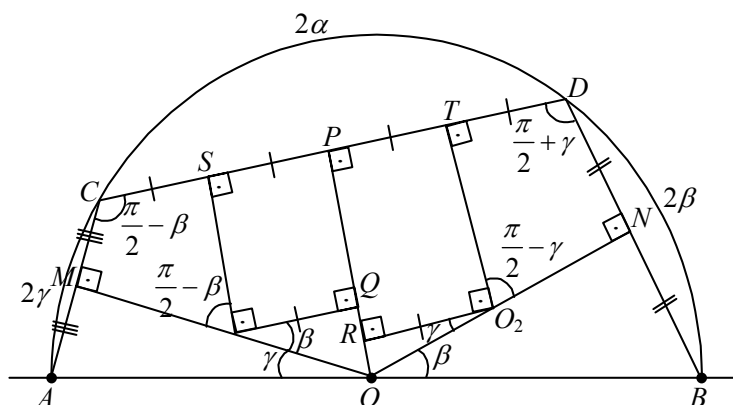
$$2004k + \frac{2004 \cdot 2005}{2} = 2004k + 2004 \cdot 1002 + 1002 \equiv 1002 \pmod{2004}.$$

A soma dos números da primeira e da segunda linhas vale 1002 (mod 2004). Como a terceira linha (formada pela soma das colunas) é formada pela soma das duas primeiras linhas, a soma dos números da terceira linha é $1002 + 1002 \equiv 0 \pmod{2004}$. Mas se a terceira linha fosse composta por uma sucessão de números consecutivos em alguma ordem, sua soma seria 1002 (mod 2004), absurdo! Logo a soma das colunas não pode formar uma sucessão de números consecutivos.

PROBLEMA 2

Sejam C e D dois pontos da semicircunferência de diâmetro AB tais que B e C estão em semiplanos distintos em relação à reta AD . Denotemos por M , N e P os pontos médios de AC , DB e CD , respectivamente. Sejam O_A e O_B os circuncentros dos triângulos ACP e BDP . Demonstre que as retas $O_A O_B$ e MN são paralelas.

SOLUÇÃO



Sejam $2\alpha, 2\beta$ e 2γ as medidas de $\widehat{CD}, \widehat{BD}$ e \widehat{AC} , respectivamente. Seja O o centro da semicircunferência $ACDB$. Sejam R e Q os pés das perpendiculares a \overline{OP} que passam por O_2 e O_1 , respectivamente.

Sejam ainda S e T pontos médios de CP e PD , respectivamente.

Note que $\widehat{SCM} = \beta + \frac{\pi}{2}$ pois é ângulo inscrito. Note ainda que $MO_A \perp AC$ e $SO_A \perp CP$, pois são mediatrizes de \overline{AC} e \overline{CP} . Logo $MCSO_A$ é inscritível e $\widehat{MO_A S} = \frac{\pi}{2} - \beta$.

Como $SO_A \perp O_A Q$ (pois $SO_A \perp CP \perp PO$, logo $PO \parallel SO_A$), $\widehat{QO_A O} = \beta$.

$$\text{Logo } \frac{O_A Q}{O_A O} = \frac{SP}{O_A O} = \frac{CD}{4O_A O} = \cos \beta \Leftrightarrow O_A O = \frac{CD}{4 \cos \beta}.$$

Analogamente, $O_B O = \frac{CD}{4 \cos \gamma}$. Olhando para o triângulo OMA , $\widehat{MOA} = \gamma$

(pois M é ponto médio da corda \overline{AC} , logo $\widehat{MOA} = \widehat{AC}/2$), logo

$$\frac{OM}{OA} = \frac{OM}{R} = \cos \gamma \Leftrightarrow OM = R \cos \gamma. \text{ Analogamente, } ON = R \cos \beta. \text{ Mas}$$

$$\frac{OM}{O_A O} = \frac{R \cos \gamma \cdot 4 \cos \beta}{CD} = \frac{R \cos \beta}{\frac{CD}{4 \cos \gamma}} = \frac{ON}{O_B O}. \text{ Logo existe uma homotetia de}$$

centro O que leva M em O_A e N em O_B . Como homotetias preservam paralelismo, $MN \parallel O_A O_B$.

PROBLEMA 3

Pablo copia o seguinte problema:

Considere todas as sucessões de 2004 números reais $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2003})$, tais que

$$\begin{aligned} x_0 &= 1, \\ 0 &\leq x_1 \leq 2x_0, \\ 0 &\leq x_2 \leq 2x_1, \\ &\vdots \\ 0 &\leq x_{2003} \leq 2x_{2002}. \end{aligned}$$

Entre todas estas sucessões, determine aquela para a qual a expressão seguinte assume o seu maior valor: $S = \dots$

Quando Pablo ia copiar a expressão S , apagaram o quadro. Só conseguia lembrar-se de que S era da forma

$$S = \pm x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_{2002} + x_{2003},$$

onde o último termo, x_{2003} , tinha coeficiente $+1$, e os anteriores tinham coeficiente $+1$ ou -1 . Demonstre que Pablo, apesar de não ter o enunciado completo, pode determinar com certeza a solução do problema.

SOLUÇÃO

Seja $c_i \in \{-1, 1\}$ o coeficiente associado ao termo x_i na expressão de S . Em particular, $c_{2003} = 1$. Dizemos que um termo x_i é positivo se $c_i = 1$, ou que é negativo se $c_i = -1$. Dizemos que x_i está maximizado se $x_i = 2x_{i-1}$.

Lema: Se x_{i+1}, \dots, x_j estão maximizados, então:

$$c_i x_i + c_{i+1} x_{i+1} + \dots + c_j x_j = x_i (c_i 2^0 + c_{i+1} 2^1 + \dots + c_j 2^{j-i})$$

Prova: É fácil ver que $x_k = 2^{k-i} x_i, i \leq k \leq j$. A prova segue trivialmente.

Corolário: A soma acima tem o mesmo sinal de c_j .

Prova: Como $x_i \geq 0$, basta analisar o sinal de $c_i 2^0 + \dots + c_j 2^{j-i}$. Suponha c_j

positivo (i.e. $= 1$). Então $\sum_{k=i}^j c_k 2^{k-i} \geq \sum_{k=i}^{j-1} -2^{k-i} + 2^{j-i} = -2^{j-i} + 1 + 2^{j-i} = 1$. O

caso $c_j = -1$ é análogo.

É óbvio que maximizar os termos positivos aumenta a soma (já que $x \leq y \Rightarrow [0, 2x] \subseteq [0, 2y]$, podemos aumentar um termo sem alterar nenhum dos seguintes). Logo, sem perda de generalidade, na seqüência que maximiza S todos os termos positivos são máximos.

Se houver algum termo negativo não maximizado, escolha o último deles, digamos x_i e maximize tanto ele quanto todos os termos que o seguem. Sejam a e b os valores antigo e novo de x_i e A e B os valores da soma $c_{i+1} x_{i+1} + \dots + c_{2003} x_{2003}$ antes e depois da mudança na seqüência.

Seja ainda $C = 2^0 c_i + 2^1 c_{i+1} + \dots + 2^{2003-i} c_{2003}$. Pelo lema, $A = aC$ e $B = bC$.

Logo $B - A = C(b - a) > 0$, pois, pelo corolário, $C > 0$, e como $b > a$, $b - a > 0$. Logo, na seqüência de S máximo, todos os termos são máximos ou poderíamos aumentar S maximizando algum termo.

Logo $x_1 = 2x_0 = 2$, $x_2 = 2x_1 = 2^2$, ..., $x_i = 2x_{i-1} = 2^i$, ..., $x_{2003} = 2^{2003}$, e portanto a seqüência que maximiza S é $(2^0, 2^1, \dots, 2^{2003})$.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Seja $M = \{1, 2, \dots, 49\}$ o conjunto dos primeiros 49 inteiros positivos. Determine o maior inteiro k tal que o conjunto M tenha um subconjunto de k elementos em que não haja 6 números consecutivos. Para esse valor máximo de k , encontre a quantidade de subconjuntos de m , de k elementos, que tenham a propriedade mencionada.

SOLUÇÃO

Definição: Um conjunto $A \subseteq M$ é feliz se não contém seis inteiros consecutivos.

Seja $N \subseteq M$ feliz, $|N| \geq 42$. Então se $P = M - N$, $|P| \leq 7$. Logo a interseção de P com algum dos conjuntos

$$\begin{array}{ccc} A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} & , & A_2 = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\} & , & A_3 = \{13, 14, 15, 16, 17, 18\} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_7 = \{37, 38, 39, 40, 41, 42\} & , & A_8 = \{43, 44, 45, 46, 47, 48, 49\} \end{array}$$

é vazia. Chame de i algum inteiro tal que $A_i \cap P = \emptyset$. Então $A_i \subset N$, absurdo, pois então N teria uma seqüência de seis inteiros consecutivos. Por outro lado, é óbvio que $N = M - \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}$ é feliz.

Assim, o maior k tal que existe $N \subseteq M$ feliz é 41 (como se $|N| \geq 42$ então N não é feliz, $|N| \leq 41$; e acabamos de exibir um exemplo para 41).

Seja $N \subseteq M$ feliz, $|N| = 41$, $P = M - N = \{n_1 < n_2 < \dots < n_8\}$.

Os oito elementos de P separam naturalmente N em nove conjuntos N_1, \dots, N_9 , $N_i \cap N_j = \emptyset$, $\bigcup N_i = N$, $N_i \leq 5$ e cada N_i composto apenas de números consecutivos. É fácil ver que o número de possíveis conjuntos N é o número de soluções de $|N_1| + |N_2| + \dots + |N_9| = 41$ (pois estamos escolhendo o

tamanho dos N_i 's) onde $|N_i| \leq 5$ e exigimos que os N_i estejam ordenados pelos seus menores elementos. Seja $a_i = |N_i|$.

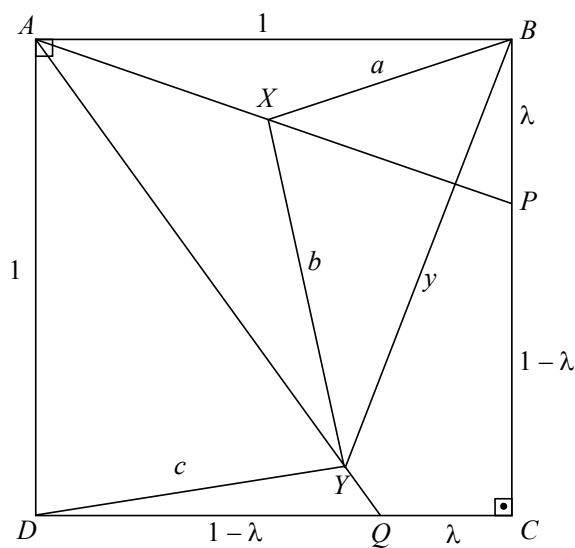
Seja $b_i = 5 - a_i \Leftrightarrow 5 - b_i = a_i$. Como $0 \leq a_i \leq 5, 0 \leq b_i \leq 5$. Substituindo na equação, $5 - b_1 + 5 - b_2 + \dots + 5 - b_9 = 41 \Leftrightarrow 45 - (b_1 + \dots + b_9) = 41 \Leftrightarrow b_1 + \dots + b_9 = 4$. Mas então a restrição $b_i \leq 5$ é redundante, logo o número de $N \subseteq M, |N| = 41, N$ feliz, é o número de soluções de $b_1 + \dots + b_9 = 4$ nos inteiros não negativos, que é

$$\binom{9+4-1}{4} = \binom{12}{4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{24} = 495.$$

PROBLEMA 5

No quadrado $ABCD$, sejam P e Q pontos pertencentes aos lados BC e CD respectivamente, distintos dos extremos, tais que $BP = CQ$. Consideram-se pontos X e Y , $X \neq Y$, pertencentes aos segmentos AP e AQ respectivamente. Demonstre que, quaisquer que sejam X e Y , existe um triângulo cujos lados têm os comprimentos dos segmentos BX, XY e DY .

SOLUÇÃO



Seja $AB = BC = CD = DA = 1, BP = CQ = \lambda, BX = a, XY = b, YD = c$.

Como $a + b \geq y = BY$, basta provar que $y > c$ para demonstrar que $a + b > c$. Mas a mediatriz de \overline{BD} é a reta \overline{AC} , que divide o plano em dois semiplanos $\beta \ni B$ e $\delta \ni D$. À exceção do ponto A , todo o segmento \overline{AQ} está contido em δ , logo $Y \in \delta \Leftrightarrow y > c$ (o caso $Y \equiv A$ é trivial). Logo $a + b > c$ e, analogamente, $c + b > a$. Basta provar que $a + c > b$

Seja

$$A = (0, 0); B = (1, 0); C = (1, 1); P = (1, \alpha); Q = (\beta, 1); X = (x, \alpha x);$$

$$D = (0, 1); y = (y\beta, y), \text{ onde } \alpha + \beta = 1 \text{ (para que } BP = CQ \text{)}.$$

$$\text{Então } a = \sqrt{(x-1)^2 + \alpha^2 x^2}, \quad c = \sqrt{\beta^2 y^2 + (y-1)^2},$$

$$b = \sqrt{(x-y\beta)^2 + (\alpha x - y)^2} = \sqrt{x^2 - 2xy\beta + y^2\beta^2 + \alpha^2 x^2 - 2\alpha xy + y^2} =$$

$$b = \sqrt{x^2\alpha^2 + y^2\beta^2 + x^2 + y^2 - 2xy(\alpha + \beta)} = \sqrt{x^2\alpha^2 + y^2\beta^2 + (x-y)^2}.$$

Mas $b < a + c \Leftrightarrow b^2 < a^2 + 2ac + c^2$ (já que a, b, c são positivos). Basta demonstrar que $a^2 + c^2 \geq b^2$, já que $2ac > 0$. Logo basta provar que $(x-1)^2 + \alpha^2 x^2 + (y-1)^2 + \beta^2 y^2 \geq x^2\alpha^2 + y^2\beta^2 + x^2 - 2xy + y^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 - x^2 + 2xy - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (1-x)(1-y) \geq 0$. Mas $x \in \overline{AP}$, logo $X \in [0, 1] \Leftrightarrow 1-x \in [0, 1]$. Analogamente, $1-y \in [0, 1]$ e o resultado segue trivialmente.

PROBLEMA 6

Definem-se as sucessões $(a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}$ por:

$$a_0 = 1, \quad b_0 = 4 \quad \text{e}$$

$$a_{n+1} = a_n^{2001} + b_n, \quad b_{n+1} = b_n^{2001} + a_n \quad \text{para } n \geq 0.$$

Demonstre que 2003 não divide nenhum dos termos destas sucessões.

SOLUÇÃO

Observe que 2003 é primo; logo, se

$$x \not\equiv 0 \pmod{2003}, \quad x^{2002} \equiv 1 \pmod{2003} \Leftrightarrow x^{2001} \equiv x^{-1} \pmod{2003}.$$

Suponha que exista n tal que $2003 \mid a_{n+1}b_{n+1}$ (note que $a_0b_0 = 4 \not\equiv 0 \pmod{2003}$); escolha o menor deles. Suponha que $2003 \mid a_{n+1}$ (o outro caso é análogo).

$$\text{Temos } 0 \equiv a_{n+1} \equiv a_n^{2001} + b_n \equiv a_n^{-1} + b_n \pmod{2003},$$

logo $a_n^{-1} \equiv -b_n \pmod{2003}$. Como nem a_n nem b_n são zero $\pmod{2003}$, podemos inverter os dois lados, obtendo

$$a_n \equiv -b_n^{-1} \Leftrightarrow b_n^{-1} \equiv -a_n \pmod{2003} \text{ (usamos o fato de que } (-1)^{-1} \equiv -1 \text{)}. \text{ Mas } b_{n+1} \equiv b_n^{-1} + a_n \equiv -a_n + a_n \equiv 0 \pmod{2003}, \text{ logo } 2003 \mid b_{n+1} \Leftrightarrow 2003 \mid a_{n+1}.$$

É fácil ver que, nesse caso, $a_n b_n \equiv a_n (-a_n^{-1}) \equiv -1 \pmod{2003}$. Seja $c = a_{n-1}$ e $d = b_{n-1}$ (para $n = 0$, temos $a_1 = 1^{2001} + 4 = 5 \not\equiv 0 \pmod{2003}$, logo podemos supor $n \geq 1$). Então $a_n \equiv c^{-1} + d$ e $b_n \equiv c + d^{-1} \pmod{2003}$, logo

$$a_n b_n \equiv c^{-1}c + c^{-1}d^{-1} + dc + dd^{-1} \equiv 2 + cd + (cd)^{-1} \pmod{2003}. \text{ (Como } n \text{ é o menor possível, } 2003 \text{ não divide } a_i b_i \text{ para todo } i \leq n, \text{ logo existe } (cd)^{-1} \text{). Seja } x = cd.$$

$-1 \equiv 2 + x + x^{-1} \Leftrightarrow x^2 + 3x + 1 \equiv 0 \pmod{2003}$. Esta equação tem uma raiz (que é cd), logo seu discriminante $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 5$ é resíduo quadrático $\pmod{2003}$: de fato,

$$(2x + 3)^2 = 4(x^2 + 3x + 1) + 5 \equiv 5 \pmod{2003}. \text{ Mas pela lei de Reciprocidade}$$

$$\text{Quadrática, } \left(\frac{5}{2003}\right) \left(\frac{2003}{5}\right) = (-1)^{\frac{2003-1}{2} \frac{5-1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{5}{2003}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}\right) = (-1)^{2002} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2003}\right) \cdot (-1) = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2003}\right) = -1, \text{ logo } 5 \text{ não é resíduo quadrático módulo } 2003, \text{ absurdo! Assim, não é possível que}$$

$$2003 \mid a_{n+1}b_{n+1}, \text{ logo } \{2003x \mid x \in \mathbb{Z}\} \cap (\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}} \cup \{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}) = \emptyset.$$

Estas soluções da Olimpíada Ibero-americana de Matemática - 2003 foram redigidas por Fábio Dias Moreira de Rio de Janeiro - RJ.

A DESIGUALDADE DE ERDÖS-MORDELL

Anderson Torres, São Paulo - SP

◆ Nível Avançado

Neste artigo demonstraremos (várias vezes) a desigualdade de Erdős-Mordell e mostraremos uma bela aplicação na resolução do problema 5 da IMO de 1996, realizada em Mumbai, Índia.

1- Uma história do teorema

“Considere um triângulo ABC e um ponto P do mesmo plano. Sejam P_A, P_B, P_C as projeções ortogonais de P nos lados BC, CA, AB respectivamente. Vale então a desigualdade:

$$2(P P_A + P P_B + P P_C) \leq AP + BP + CP$$

com igualdade se e somente se P for o circuncentro de um triângulo ABC equilátero”.

Este é o enunciado da famosa Desigualdade de Erdős-Mordell. Ela foi inicialmente conjecturada pelo matemático húngaro Paul Erdős e demonstrada no mesmo ano por Louis Mordell, na revista *American Mathematical Monthly* (problema n° 3740). Logo após surgiram várias soluções e alguns artigos sobre a desigualdade, cada uma usando variadas técnicas: trigonometria (Louis J. Mordell e P.F. Barrow), desigualdades angulares e semelhanças (Leon Bankoff), teorema de Ptolomeu (André Avez e Hojoo Lee), áreas de polígonos (V. Komornik).

Mostraremos algumas delas, acrescidas de um pequeno comentário:

Lema Importante: $AP \cdot BC \geq AB \cdot P P_B + AC \cdot P P_C$,

com igualdade se, e somente se, $P_B P_C \parallel BC$.

A esmagadora maioria das demonstrações difere apenas na demonstração desta pequena desigualdade. Veja que esta desigualdade equivale a estas desigualdades (as outras duas seguem por permutação cíclica das variáveis):

$$\begin{aligned} AP &\geq \frac{AB}{CB} \cdot PP_B + \frac{AC}{BC} \cdot PP_C \\ BP &\geq \frac{CB}{AC} \cdot PP_C + \frac{BA}{CA} \cdot PP_A \\ CP &\geq \frac{CA}{BA} \cdot PP_A + \frac{CB}{AB} \cdot PP_B \end{aligned}$$

Ao somá-las, obtemos:

$$AB + BP + CP \geq \left(\frac{CA}{BA} + \frac{BA}{CA}\right) \cdot PP_A + \left(\frac{CB}{AB} + \frac{AB}{CB}\right) \cdot PP_B + \left(\frac{AC}{BC} + \frac{BC}{AC}\right) \cdot PP_C$$

e lembrando que a soma de um real positivo com seu inverso não pode ser menor que 2, e esse valor só se iguala a dois se o número em questão for 1 (isto é consequência da desigualdade das médias), a desigualdade segue, com igualdade se e apenas se $AB = BC = CA$. Além disso, devemos ter $P_A P_B \parallel AB$, $P_A P_C \parallel AC$ e $P_B P_C \parallel BC$, o que implica facilmente que P é o circuncentro do triângulo ABC .

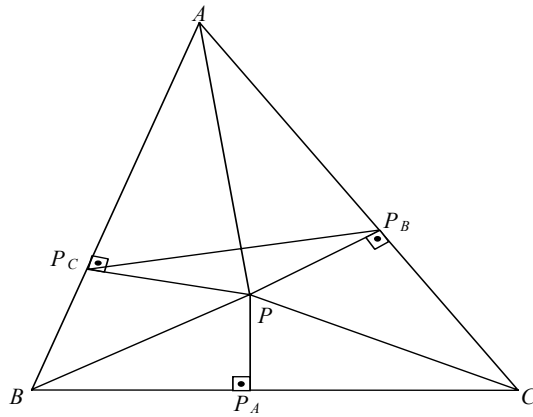
Vamos então demonstrar este lema!

Demonstração 1: (trigonometria)

O quadrilátero $AP_B P_C$ é cíclico, pois os ângulos retos são opostos e somam 180° . Assim, pela Sagrada Lei dos Senos Generalizada,

$$\begin{aligned} AP &= \frac{P_B P_C}{\text{sen} \angle P_B P_C} = \frac{P_B P_C}{\text{sen} \angle BAC} \Leftrightarrow \\ AP \cdot BC &= 2R \cdot P_B P_C \end{aligned}$$

em que R é o circunraio do triângulo ABC .



Pela Sagrada Lei dos Cossenos,

$$\begin{aligned} P_B P_C^2 &= PP_B^2 + PP_C^2 - 2 \cdot PP_B \cdot PP_C \cdot \cos(\angle P_B P P_C) \\ &= PP_B^2 + PP_C^2 - 2 \cdot PP_B \cdot PP_C \cdot \cos(\angle P_A P P_C + \angle P_A P P_B) \\ &= (PP_B \cdot \text{sen} \angle P_B P P_A + PP_C \cdot \text{sen} \angle P_C P P_A)^2 \\ &\quad + (PP_B \cdot \text{cos} \angle P_B P P_A - PP_C \cdot \text{cos} \angle P_C P P_A)^2 \end{aligned}$$

onde usamos o fato (*bastante* conhecido ☺): $\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$ para fatorar. Assim, jogando um dos parênteses fora, obtemos:

$$\begin{aligned} P_B P_C &\geq PP_B \cdot \text{sen} \angle P_B P P_A + PP_C \cdot \text{sen} \angle P_C P P_A \Leftrightarrow \\ P_B P_C &\geq PP_B \cdot \text{sen} \angle ACB + PP_C \cdot \text{sen} \angle ABC \Leftrightarrow \\ AP \cdot BC &= 2R \cdot P_B P_C \geq PP_B \cdot AB + PP_C \cdot AC \end{aligned}$$

A igualdade ocorre se, e somente se,

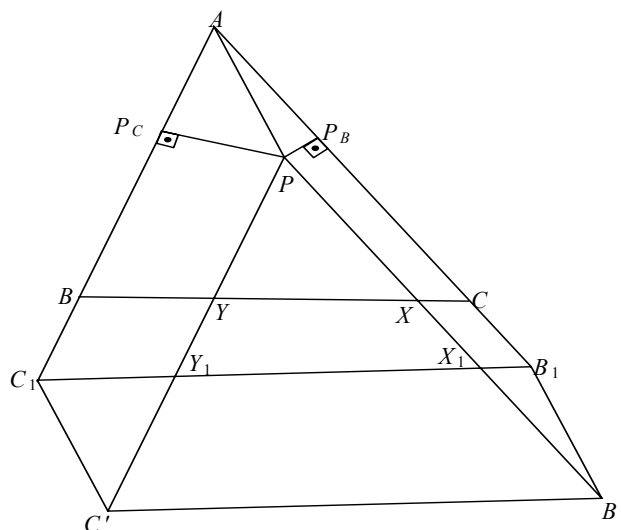
$$\begin{aligned} PP_B \cdot \text{cos} \angle P_B P P_A - PP_C \cdot \text{cos} \angle P_C P P_A &= 0 \Leftrightarrow \\ 2 \cdot \text{sen} \angle PAB \cdot \text{cos} \angle ABC &= 2 \cdot \text{sen} \angle PAC \cdot \text{cos} \angle ACB \Leftrightarrow \\ \text{sen}(\angle PAB + \angle ABC) + \text{sen}(\angle PAB - \angle ABC) &= \text{sen}(\angle PAC + \angle ACB) + \text{sen}(\angle PAC - \angle ACB); \\ \text{mas } \angle PAB + \angle ABC + \angle PAC + \angle ACB &= 180^\circ, \text{ donde} \\ \text{sen}(\angle PAB + \angle ABC) &= \text{sen}(\angle PAC + \angle ACB), \text{ e} \\ \text{logo } \text{sen}(\angle PAC - \angle ACB) &= \text{sen}(\angle PAB - \angle ABC) \\ \angle PAB - \angle ABC &= \angle PAC - \angle ACB \Leftrightarrow \\ \angle PAB - \angle PAC &= \angle ABC - \angle ACB \end{aligned}$$

e (fica como exercício mostrar que) isto equivale, de fato, a $P_B P_C \parallel BC$.

Demonstração 2: (áreas de paralelogramos)

Escolha dois pontos $B_1 \in \overline{AC}, C_1 \in \overline{AB}$ e construa os paralelogramos $APC'C_1$ e $APB'B_1$.

PB', PC' cortam BC em X, Y e B_1C_1 em X_1, Y_1 respectivamente, caso P seja interno ao triângulo (mas isto não afeta muito a demonstração). Veja que $B_1B'C'C_1$ é um paralelogramo.



Por congruências, $[AB_1C_1] = [PB'C']$, em que [algo] significa área de algo. Agora, veja:

$$\begin{aligned}
 [AB_1C_1] - [PX_1Y_1] + [C'C_1Y] + [B'B_1X_1] &= [APC'C_1] + [APB'B_1] \Leftrightarrow \\
 [PB'C'] - [PX_1Y_1] + [C'C_1Y_1] + [B'B_1X_1] &= [APC'C_1] + [APB'B_1] \\
 [C'Y_1X_1B'] + [C'C_1Y_1] + [B'B_1X_1] &= [APC'C_1] + [APB'B_1] \\
 [APC'C_1] + [APB'B_1] &= [B_1B'C'C_1]
 \end{aligned}$$

Com isto vemos que

$AC_1 \cdot PP_C + AB_1 \cdot PP_B \leq B_1C_1 \cdot C'C_1 = AP \cdot B_1C_1$, com igualdade se, e apenas se, $C'C_1 \perp B_1C_1$, ou $AP \perp B_1C_1$, ou seja, AP contém o circuncentro do triângulo

AB_1C_1 . Fazendo $AC_1 = AC, AB_1 = AB$, teremos por congruências (para variar...)
 $BC = C_1B_1$, e (por paralelismo mesmo!☺) $P_B P_C // BC$, e pronto! Fim!

Observação: Veja que é possível modificar esta demonstração apenas usando uma reflexão pela bissetriz do ângulo $\angle ABC$ para obter os pontos $AC_1 = AC, AB_1 = AB, B_1 \in \overrightarrow{AC}, C_1 \in \overrightarrow{AB}$. Esta observação será útil mais tarde.

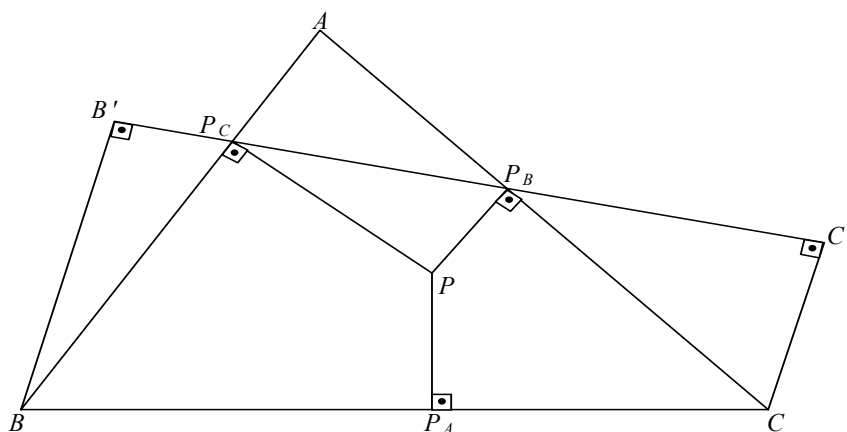
Demonstração 3: (teorema de Ptolomeu)

Sejam B', C' pontos da reta $P_B P_C$ tais que $BB' // CC' \perp P_B P_C$. Então é fácil ver que

$$BC \geq B'C' = B'P_C + P_C P_B + P_B C' \Leftrightarrow$$

$$AP \cdot BC \geq AP \cdot B'P_C + AP \cdot P_C P_B + AP \cdot C'P_B,$$

com igualdade se, e somente se, $P_B P_C // BC$.



Vamos calcular cada uma das parcelas em relação ao ponto P .

Veja que $\triangle APP_C \sim \triangle CP_B C'$ pois os ângulos correspondentes são iguais. De fato, temos os ângulos retos, e $\angle APP_C = \angle AP_B P_C = \angle CP_B C'$ (quadrilátero cíclico e ângulos opostos pelo vértice).

Assim, obtemos as relações:

$$\frac{C'P_B}{P_B C} = \frac{P_C P}{AP} \Leftrightarrow AP \cdot C'P_B = P_C P \cdot P_B C.$$

Analogamente,

$$\frac{B'P_C}{P_C B} = \frac{P_B P}{PA} \Leftrightarrow AP \cdot B'P_C = P_B P \cdot P_C B$$

Pelo Teorema de Ptolomeu-Euler,

$$P_B P_C \cdot AP = AP_B \cdot PP_C + AP_C \cdot PP_B$$

Adicionando as igualdades, obtemos:

$$\begin{aligned} AP \cdot BC &\geq AP \cdot (B'P_C + P_C P_B + P_B C') \\ &= P_C P \cdot P_B C + P_C P \cdot AP_B + P_B P \cdot AP_C + P_B P \cdot P_C B \\ &= PP_C \cdot AC + PP_B \cdot AB \end{aligned}$$

2- Problema 5, IMO 1996 (Mumbai, Índia)

“Seja $ABCDEF$ um hexágono convexo tal que AB é paralelo a DE , BC é paralelo a EF , e CD é paralelo a FA .

Sejam R_A, R_C, R_E os circunraios dos triângulos FAB, BCD, DEF respectivamente, e seja P o perímetro do hexágono.

Prove que: $R_A + R_C + R_E \geq P/2$.”

Este foi um dos problemas mais difíceis (e é considerado o mais difícil por muitos problemistas) já propostos na história da IMO. Para se ter uma idéia, apenas seis participantes (dois romenos e quatro armênios) fecharam este problema, enquanto os seis estudantes da equipe chinesa zeraram-no!

Mostraremos neste artigo duas soluções. A primeira é um esboço de como foi criado o problema, segundo a Banca Examinadora da IMO de 1996 (o problema foi proposto pela Armênia), segundo a referência [Nairi M. Sedrakian, *The History of a Creation of a 1996 IMO Problem*, Mathematics Competitions, n° 2 vol.9], e se assemelha muito com a solução oficial, presente na Eureka! N° 11. A segunda (com algumas modificações), totalmente sintética, considerada a mais bela das soluções, é de autoria de Ciprian Manolescu, da equipe da Romênia, o único Perfect Score (também conhecido como Ouro-42) da IMO 1996.

Solução 1: usaremos o seguinte lema (demonstre-o!):

“Considere um triângulo de circunraio R , lados a e b , e o ângulo γ entre eles.

Então, para quaisquer α, β tais que $\alpha < \pi, \beta > 0, \alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, é válida a

$$\text{desigualdade: } 2R \geq a \cdot \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \gamma} + b \cdot \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \gamma} \text{”}$$

(Sugestão: note que $\text{sen } \beta = \cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right)$, $\text{sen } \alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$, e considere uma

reta fazendo um ângulo $\alpha - \frac{\pi}{2}$ com o lado b ; calcule a medida da projeção

ortogonal do lado do triângulo oposto ao ângulo γ nessa reta).

Usando este lema, podemos estimar os raios. Para tal sejam

$$\alpha = \angle FAB, \beta = \angle BCD, \gamma = \angle DEF,$$

$$FA = a, AB = b, BC = c, CD = d, DE = e, EF = f.$$

Com isto,

$$2R_A \geq b \cdot \frac{\text{sen } \gamma}{\text{sen } \alpha} + a \cdot \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \alpha}; 2R_C \geq c \cdot \frac{\text{sen } \gamma}{\text{sen } \beta} + d \cdot \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta}; 2R_E \geq e \cdot \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \gamma} + f \cdot \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \gamma}$$

Vamos tentar obter outra estimativa para $2R_A$, desta vez em relação aos lados d e e .

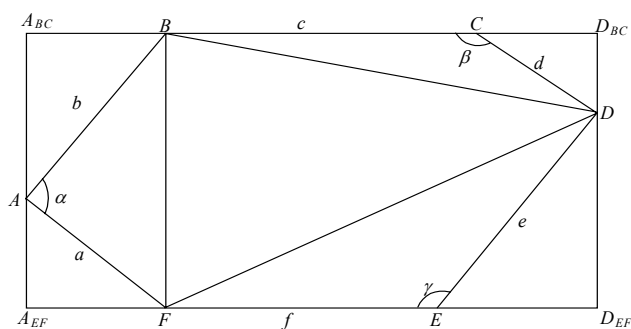
Pela Sagrada Lei dos Senos, $BF = 2R_A \cdot \text{sen } \alpha$. Podemos então escrever

$BF \geq b \cdot \text{sen } \gamma + a \cdot \text{sen } \beta$. Veja que BF não pode ser menor que a distância entre as

retas BC e EF . Olhando este fato, vamos projetar o ponto A nas retas BC , EF

obtendo os respectivos pontos A_{BC}, A_{EF} . Analogamente para o ponto D ,

obtemos o retângulo $A_{BC}A_{EF}D_{EF}D_{BC}$.



Com isto, podemos escrever:

$$\begin{aligned} BF &\geq b \cdot \operatorname{sen} \gamma + a \cdot \operatorname{sen} \beta \\ &= AA_{BC} + AA_{EF} = A_{BC}A_{EF} = D_{BC}D_{EF} = DD_{BC} + DD_{EF} \\ &= d \cdot \operatorname{sen} \beta + e \cdot \operatorname{sen} \gamma \end{aligned}$$

Concluimos as seguintes desigualdades:

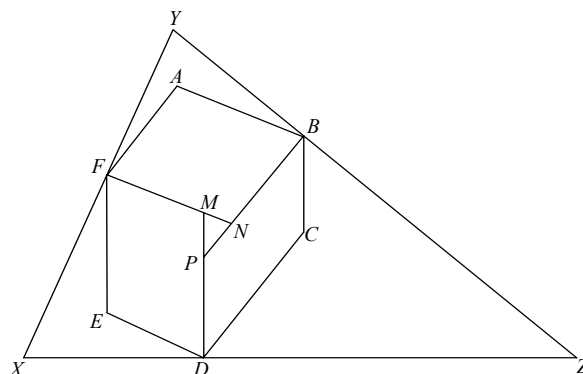
$$2R_A \geq d \cdot \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha} + e \cdot \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha}; 2R_C \geq a \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} + f \cdot \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \beta}; 2R_E \geq c \cdot \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \gamma} + b \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \gamma}$$

Somando tudo:

$$\begin{aligned} &4 \cdot (R_A + R_C + R_E) \\ &\geq (a + d) \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} + \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha} \right) \\ &\quad + (b + e) \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \gamma} + \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha} \right) \\ &\quad + (c + f) \left(\frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \gamma} + \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \beta} \right) \end{aligned}$$

E o problema segue, aplicando a Desigualdade das Médias aos parênteses e dividindo tudo por 4. E fim!

Solução 2: Este problema, por si só, já incita o uso de Erdős-Mordell ou de alguma generalização conveniente (muito provavelmente até às últimas conseqüências (☺)). Para tal, devemos de algum modo produzir a configuração deste teorema. Aproveitando o paralelismo, desenhe os paralelogramos $MDEF$, $NFAB$, $PBCD$. Com isto já temos algo dentro do hexágono (mesmo que não seja um ponto, como em Erdős-Mordell, mas já é alguma coisa... Às vezes é necessário um pouco de coragem para não desistir de algumas idéias, mesmo que pareçam não dar certo. Muitos problemas de IMO e vários problemas difíceis em geral são, na verdade, aplicações de fatos simples até às últimas conseqüências).



O problema agora é tentar achar um modo de identificar os raios. Lembrando que raios e diâmetros têm tudo a ver com perpendicularidade, desenhe o triângulo XYZ , com $\overline{XFY} \perp \overline{FN}$, $\overline{YBZ} \perp \overline{BP}$, $\overline{ZDX} \perp \overline{DM}$. Assim, o quadrilátero $FMDX$ é inscritível de diâmetro MX . Mas os triângulos FED e FMD são congruentes, logo $XM = 2 \cdot R_A$. Com isso o problema é demonstrar a seguinte desigualdade:

$$XM + YN + ZP \geq BN + BP + DP + DM + FM + FN.$$

Vamos dividir em dois casos:

- 1- $M = N = P$. E este caso é a própria Desigualdade de Erdős-Mordell.
- 2- O triângulo MNP existe (não é degenerado). A partir daqui vamos adaptar a demonstração de Erdős-Mordell.

Estimaremos XM primeiro. Sejam Y' e Z' as reflexões dos pontos Y e Z em relação à bissetriz de $\angle YXZ$. Sejam G e H as projeções de M , X em $Y'Z'$ respectivamente. Como $[XYZ] = [Y'XZ'] = [Z'MY'] + [XMZ'] + [Y'MX]$, temos:

$$YZ \cdot XH = YZ \cdot MG + ZX \cdot FM + XY \cdot DM.$$

Mas, usando a desigualdade triangular no triângulo XMG e a desigualdade cateto < hipotenusa no triângulo XHG (ou mesmo distância de X à reta $Y'Z'$), obtemos:

$$XM + MG \geq XG \geq XH \Rightarrow XM \geq XH - MG$$

Substituindo na igualdade recém-descoberta,

$$XM \geq \frac{XY}{YZ} \cdot DM + \frac{XZ}{YZ} \cdot FM$$

Analogamente,

$$XM \geq \frac{XY}{YZ} \cdot DM + \frac{XZ}{YZ} \cdot FM$$

$$YN \geq \frac{YX}{XZ} \cdot BN + \frac{YZ}{XZ} \cdot FN$$

$$ZP \geq \frac{ZX}{XY} \cdot BP + \frac{ZY}{XY} \cdot DP$$

Somando tudo:

$$\begin{aligned} & XM + YN + ZP \\ & \geq \frac{XY}{YZ} \cdot DM + \frac{XZ}{YZ} \cdot FM \\ & \quad + \frac{YZ}{XZ} \cdot FN + \frac{YX}{XZ} \cdot BN \\ & \quad + \frac{ZX}{XY} \cdot BP + \frac{ZY}{XY} \cdot DP \end{aligned}$$

Agora falta pouco...Basta arranjar um modo de sumir com as frações. Agora vamos usar a Desigualdade das Médias para concluir. Para tal, outra estimativa. Primeiramente, veja que os triângulos XYZ e MNP são semelhantes, o que nos permite definir $k = \frac{FM - FN}{XY} = \frac{BN - BP}{YZ} = \frac{DP - DM}{ZX}$. Com isto, podemos escrever:

$$\begin{aligned} & \frac{ZX}{XY} \cdot BP + \frac{YX}{XZ} \cdot BN \\ & = \left(\frac{XZ}{XY} + \frac{XY}{XZ} \right) \frac{BN + BP}{2} + \\ & \quad \left(\frac{XZ}{XY} - \frac{XY}{XZ} \right) \frac{BN - BP}{2} \\ & \geq (BP + BN) - k \cdot \left(\frac{XZ \cdot YZ}{XY} - \frac{XY \cdot YZ}{XZ} \right) \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}\frac{XZ}{XY} \cdot BP + \frac{XY}{XZ} \cdot BN &\geq (BP + BN) - k \cdot \left(\frac{XZ \cdot YZ}{XY} - \frac{XY \cdot YZ}{XZ} \right) \\ \frac{YX}{ZY} \cdot DM + \frac{ZY}{YX} \cdot DP &\geq (DM + DP) - k \cdot \left(\frac{XY \cdot XZ}{YZ} - \frac{XZ \cdot YZ}{XY} \right) \\ \frac{XZ}{YZ} \cdot FM + \frac{YZ}{XZ} \cdot FN &\geq (FM + FN) - k \cdot \left(\frac{YZ \cdot XY}{XZ} - \frac{XZ \cdot XY}{YZ} \right)\end{aligned}$$

Agora, basta somar estas desigualdades e acabamos o problema!!

REFERÊNCIAS :

[1]A demonstração de Hojoo Lee pode ser encontrada na famosa revista *Forum Geometricorum*, a qual você pode ler no site <http://forumgeom.fau.edu>. Neste artigo você encontra as referências de toda a história deste problema enquanto ele se passava na American Mathematical Monthly.

[2]Na lista de discussão de problemas da OBM (obm-1@mat.puc-rio.br; ver também www.obm.org.br/lista.htm) foi deixada, há algum tempo atrás, a demonstração de Ciprian Manolescu.

[3]Na Internet tem uns livros do Kiran Kedlaya. Vá ao site abaixo e faça o download: <http://www.unl.edu/amc/a-activities/a4-for-students/problemtext/>
Um deles trata sobre desigualdades, e outro sobre geometria euclidiana plana. Ainda tem uns dois livros com provas de algumas olimpíadas de matemática de várias partes do mundo.

[4]Após uma longa caça achei este artigo, que trata de uma generalização interessante: *A weighted Erdős-Mordell Inequality for Polygons*. Este livro pode ser encontrado no endereço: www.math.technion.ac.il/~shafir/pub_ps/m18.ps.gz

[5]Um site de divulgação científica: <http://mathworld.wolfram.com>

[6]Rafael Tajra Fonteles - Trigonometria e desigualdades em problemas de olimpíadas, Eureka! 11, p. 24-33.

[7]A segunda demonstração da desigualdade de Erdős-Mordell também foi objeto de uma questão da fase final da OPM-2001. Confira no livro da OPM-2001 ou no site <http://www.opm.mat.br/>

COMO É QUE FAZ?

PROBLEMA 3


PROPOSTO POR DAVI MÁXIMO ALEXANDRINO NOGUEIRA (FORTALEZA – CE)

É possível escolher 102 subconjuntos com 17 elementos cada do conjunto $\{1,2,3,\dots,102\}$ tais que a interseção de quaisquer 2 deles tem no máximo 3 elementos?

SOLUÇÃO

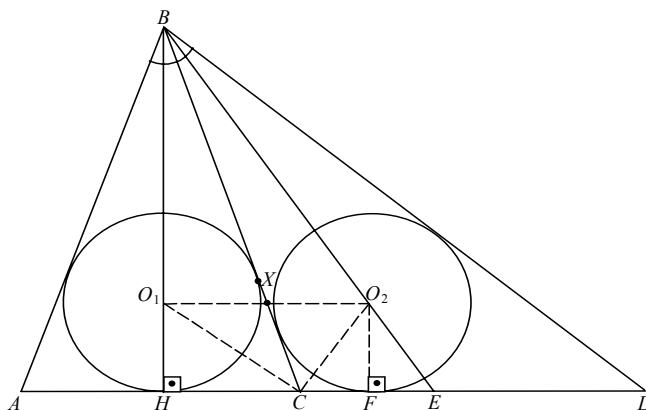
A ideia é olhar para o plano projetivo P sobre $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$, que é o quociente de $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ pela relação de equivalência $x \sim y \Leftrightarrow y = a \cdot x$, $\exists a \in \mathbb{Z}/17\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. P tem $17^2 + 17 + 1 = 307$ pontos e as retas em P têm 18 pontos cada (e duas delas sempre se intersectam num ponto). Vamos fazer uma espécie de quociente de P . Para isso, considere o isomorfismo linear T de $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^3$ dado por $T(x, y, z) = (y, z, x)$. Note que $T^3 = \text{Id}$. As retas em P são dadas por vetores não nulos w de $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^3$ (de fato por elementos de P): uma reta R_w é o conjunto dos v tais que $\langle v, w \rangle = 0$. Note que T tem um único ponto fixo em P : o elemento $v_0 = [1:1:1]$, correspondente ao vetor $(1,1,1)$. Jogamos v_0 fora e dividimos os outros 306 pontos de P em 102 classes de equivalência de 3 elementos (as orbitas de T): a classe de equivalência de u é $\{u, Tu, T(Tu)\}$. Temos 307 retas em P . Jogamos fora a R_{v_0} . O quociente de cada uma das outras retas tem 17 elementos. De fato, se R_w contém pontos da forma u e Tu , devemos ter $\langle u, w \rangle = 0$ e $\langle u, T^*w \rangle = \langle Tu, w \rangle = 0$. Como w não é v_0 então $T^*w = T^{-1}(w)$ não é múltiplo de w , donde há apenas um elemento de P satisfazendo essas duas igualdades, isto é, apenas dois pontos em R_w são identificados pela nossa equivalência, donde as retas (projetadas pelo quociente por essa relação de equivalência) têm agora 17 pontos cada. Para cada reta na projeção, existem exatamente 3 retas (em P) que se projetam sobre ela: R_w , R_{Tw} e $R_{T(Tw)}$. Dadas duas retas na projeção, elas se intersectam em (no máximo) 3 pontos: se elas são as projeções de R_w e R_v , suas interseções serão as projeções das interseções de R_w com R_v , de R_{Tw} com R_v e de $R_{T(Tw)}$ com R_v . Assim, na projeção (ou, se você preferir, no quociente), temos 102 pontos e 102 retas, cada uma com 17 elementos, sendo que duas delas se intersectam em (no máximo) 3 pontos.

SOLUÇÕES DE PROBLEMAS PROPOSTOS

 Publicamos aqui algumas das respostas enviadas por nossos leitores.

- 81) Num triângulo isósceles ABC com $AB = BC$, temos $AC = BH$, onde BH é a altura relativa ao lado AC . Traçamos uma reta BD que corta o prolongamento da reta AC em D de tal forma que os raios dos círculos inscritos nos triângulos ABC e CBD são iguais. Determine o ângulo \widehat{ABD} .

SOLUÇÃO DE FRANCISCO JARDEL ALMEIDA MOREIRA (FORTALEZA – CE)



Sejam, O_1 o incentro do $\triangle ABC$, O_2 o incentro do $\triangle CBD$, $X = \overline{BC} \cap \overline{O_1O_2}$, $E = \overline{BO_2} \cap \overline{AD}$ e finalmente, F o pé da perpendicular de O_2 até \overline{AD} .

Note que O_1O_2FH é um retângulo, pois $O_1\widehat{HF} = O_2\widehat{FH} = 90^\circ$ e $\overline{O_1H} = \overline{O_2F}$, daí $\overline{O_1O_2} \parallel \overline{AD}$.

Agora observe que:

$H\widehat{CO}_1 + B\widehat{CO}_1 + O_2\widehat{CB} + D\widehat{CO}_2 = 180^\circ$ ademais, $H\widehat{CO}_1 = B\widehat{CO}_1$ e $O_2\widehat{CB} = D\widehat{CO}_2$ portanto, $O_1\widehat{CO}_2 = 90^\circ$. Do fato de $O_1\widehat{CO}_2 = 90^\circ$ e $\overline{O_1O_2} \parallel \overline{AD}$, X é médio de $\overline{O_1O_2}$ (de fato, $X\widehat{O}_1C = H\widehat{CO}_1 = X\widehat{CO}_1$, donde $\overline{XC} = \overline{XO_1}$ e logo \overline{CX} é mediana do triângulo retângulo O_1CO_2)

é médio de \overline{HE} . Logo, $\overline{HB} = \overline{AC} \Rightarrow \overline{HE} = \overline{AC} = \overline{HB}$.

Como $B\widehat{H}E = 45^\circ$ e assim $A\widehat{B}D = 2 \cdot H\widehat{B}E = 90^\circ$.

82)

a) Demonstre a identidade

$$\cos(\alpha) \cdot \cos(2\alpha) \cdot \cos(4\alpha) \dots \cos(2^n \alpha) = \sum_{j=0}^n \cos(2^j \alpha) = \frac{\text{sen}(2^{n+1} \alpha)}{2^{n+1} \cdot \text{sen}(\alpha)}$$

b) Prove que $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}} \dots = \prod_{j=0}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2^{j+2}}\right) = \frac{2}{\pi}$.

SOLUÇÃO DE WALLACE ALVES MARTINS (RIO DE JANEIRO – RJ)

a) Demonstraremos a identidade utilizando o princípio da indução.

Para $n = 0$ temos $\cos \alpha$ e $\frac{\text{sen}(2^{0+1} \alpha)}{2^{0+1} \text{sen} \alpha} = \frac{\text{sen} 2\alpha}{2 \text{sen} \alpha} = \frac{2 \text{sen} \alpha \cos \alpha}{2 \text{sen} \alpha} = \cos \alpha$. Assim que a propriedade é válida para $n = k$, temos:

$$\prod_{j=0}^k \cos(2^j \alpha) = \frac{\text{sen}(2^{k+1} \alpha)}{2^{k+1} \text{sen} \alpha}$$

Multiplicando-se ambos os membros da identidade por $\cos(2^{k+1} \alpha)$ temos:

$$\prod_{j=0}^{k+1} \cos(2^j \alpha) = \frac{\text{sen}(2^{k+1} \alpha) \cos(2^{k+1} \alpha)}{2^{k+1} \text{sen} \alpha} = \frac{\text{sen}(2 \cdot 2^{k+1} \alpha)}{2^{k+1} \text{sen} \alpha} = \frac{\text{sen}(2^{(k+1)+1} \alpha)}{2^{(k+1)+1} \text{sen} \alpha}$$

Portanto a propriedade também é válida para $n = k + 1$. Logo, pelo princípio da indução segue-se que a identidade é válida $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$.

b) Demonstraremos primeiramente a identidade entre o primeiro membro e o membro central da identidade acima; por indução.

Para $n = 0$, temos que $\cos\left(\frac{\pi}{2^{0+2}}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Assim a propriedade é verdadeira para $n = 0$. Vamos mostrar que para todo k temos

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \dots \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}}}_{(k+1) \text{ Radicais}} = \prod_{j=0}^k \cos\left(\frac{\pi}{2^{j+2}}\right)$$

Para isso, vamos

mostrar que para todo k temos $\sqrt{\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}}_{(k+1) \text{ Radicais}}} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)$. Considere

$$x = \sqrt{\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}}_{(k+2) \text{ Radicais}}} \text{ temos que } x^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right) = 2x^2 - 1.$$

Como sabemos $\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$. Logo $x = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2^{k+2}}}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+3}}\right)$

satisfaz a equação. Logo $x = \sqrt{\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}}_{[(k+1)+1] \text{ Radicais}}} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{(k+1)+2}}\right)$. Portanto a

identidade também é válida para $n = k + 1$. Logo, pelo Princípio da Indução segue-se que a identidade é válida $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$. Em particular, quando $n \rightarrow \infty$ temos a identidade conforme acima.

$$\begin{aligned} \text{Agora, sabemos que } \prod_{j=0}^n \cos\left(\frac{\pi}{2^{j+2}}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{16}\right) \cdot \dots \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \cdot \dots \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \prod_{j=0}^n \cos(2^j \alpha), \text{ onde } \alpha = \frac{\pi}{2^{n+2}}. \end{aligned}$$

$$\text{Utilizando (a) temos: } \prod_{j=0}^n \cos(2^j \alpha) = \frac{\text{sen}\left(2^{n+1} \cdot \frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{2^{n+1} \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)} = \frac{1}{2^{n+1} \text{sen}\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}.$$

Sabemos que, quando $n \rightarrow \infty$ então $2^{n+1} \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \rightarrow \frac{\pi}{2}$. (Pois $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} x}{x} = 1$).

$$\text{Logo: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\prod_{j=0}^n \cos\left(\frac{\pi}{2^{j+2}}\right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2^{n+1} \text{sen}\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)} \right] = \frac{2}{\pi}.$$

83) Seja $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Determine quantas funções $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ satisfazem $f(2003) = 2003$, $f(n) \leq 2003$ para todo $n \leq 2003$ e $f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$, para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

84) Prove que se $A \subset \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ é um conjunto não-vazio tal que $n \in A \Rightarrow 4n \in A$ e $\lfloor \sqrt{n} \rfloor \in A$ então $A = \mathbb{N}^*$.

Obs. $\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro tal que $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$

85) Mostre que todo triângulo pode ser dividido em 9 pentágonos convexos de áreas iguais.

86) Encontre todas as triplas de inteiros positivos (a, m, n) tais que $a^m + 1$ divide $(a+1)^n$.

87) Seja $a(1) = 1$ e, para cada inteiro $n \geq 2$, $a(n)$ igual ao menor inteiro positivo que não pertence a $\{a(j), j < n\}$ tal que $\sum_{j=1}^n a(j)$ seja múltiplo de n . Prove que $a(a(n)) = n$ para todo inteiro positivo n .

88) Prove que se $r \in \mathbb{Q}$ e $\cos(r \cdot \pi) \in \mathbb{Q}$ então $\cos(r \cdot \pi) \in \left\{ -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}$.



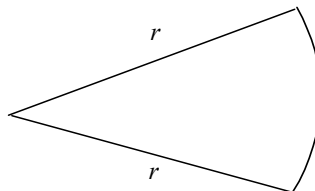
Seguimos aguardando as soluções dos problemas: 83, 84, 85, 86, 87 e 88...

PROBLEMAS PROPOSTOS

☒ Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e sugestões de novos problemas para os próximos números.

- 89) Uma prova de múltipla escolha com n questões é feita por k alunos. Uma resposta correta na i -ésima questão vale p_i pontos, onde p_i é um inteiro positivo, para $1 \leq i \leq n$. A nota de cada aluno é a soma dos pontos correspondentes às questões que ele acertou. Após a realização a prova, foi observado que, mudando os pesos p_i , as notas dos alunos podem estar em qualquer uma das $k!$ possíveis ordens (em que não há duas notas iguais). Dado n , qual é o maior valor possível de k ?
- 90) Prove que, para todo inteiro positivo n e para todo inteiro não nulo a , o polinômio $x^n + ax^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + ax - 1$ é irredutível, i.e., não pode ser escrito como o produto de dois polinômios não constantes com coeficientes inteiros.
- 91) Um jardineiro deve construir um canteiro com a forma de setor circular. Ele dispõe de 100 metros de fio para cercá-lo.

Figura:



Qual deve ser o valor do raio do círculo para que o canteiro tenha área máxima?
Qual é a área máxima?

- 92) Seja $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a seqüência de Fibonacci, definida por $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Prove que $\text{mdc}(F_m, F_n) = F_{\text{mdc}(m,n)}$ para quaisquer inteiros positivos m e n .

93) Um inteiro positivo n é dito **perfeito** se n é igual à soma dos divisores positivos de n que são menores que n . Prove que um número par n é perfeito se e somente se existe um número primo $p \geq 2$ tal que $2^p - 1$ é primo e $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$.

94) A ilha das amazonas é habitada por amazonas e homens.

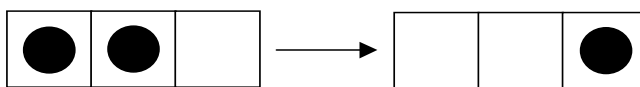
As amazonas mandam em tudo, são inteligentíssimas, ciumentíssimas e muito fofoqueiras. O que uma amazona mais gosta de fazer é trair outra amazona com o marido desta. Consumada a traição, ela conta o seu feito a todas as amazonas da ilha **menos** à amazona traída. As outras amazonas também não contam nada à vítima da traição. Mas se uma amazona descobre que está sendo traída ela mata o seu marido na próxima meia noite.

A rainha das amazonas, que é viúva, vê esta situação com desagrado. Ela vê que há traição na ilha mas, como nunca ninguém descobre nada, nenhum marido morre. No dia 1 de janeiro de 3333, então, contrariando a tradição, ela chama todas as amazonas para a praça central e faz uma proclamação solene: "Há traição nesta ilha."

Nenhuma amazona sonha em duvidar da palavra da rainha e todas as amazonas sabem disso. Como já foi dito, todas são inteligentes e ciumentas: estes e os outros fatos mencionados neste enunciado até aqui são conhecimento comum entre as amazonas.

Supondo que haja 1000 amazonas na ilha e que 365 delas tenham sido traídas, o que acontecerá?

95) "Resta-Um" é um jogo de tabuleiro na qual as peças ocupam um tabuleiro formando parte de um reticulado retangular (na verdade, existem variações em tabuleiros de reticulado triangular). O único movimento permitido consiste em tomar duas peças em casas adjacentes vizinhas a uma casa vazia, e fazer a peça mais distante da casa vazia pular sobre a outra peça, ocupando a casa vazia. A peça pulada é retirada.



(esse movimento pode ser feito para a direita, para a esquerda, para cima ou para baixo).

Agora imagine um tabuleiro que é um reticulado retangular infinito e uma reta que contém uma linha do reticulado, dividindo-o em dois lados. Todas as casas de um dos lados da linha estão vazias e cada casa do outro lado da linha pode ou não ter uma peça.

Quantas peças, no mínimo, precisamos para chegar a uma casa do lado vazio do tabuleiro, a uma distância n da linha? Abaixo indicamos uma casa a distância n , para $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

			5			
			4			
			3			
			2			
			1			
...	●	●	●	●	●	...
...	●	●	●	●	●	...
...	●	●	●	●	●	...
...



Você sabia...

Que $2^{20996011} - 1$ é primo? Este é o maior primo conhecido, tem 6320430 dígitos e foi descoberto por Michael Shafer, um participante do GIMPS (um projeto distribuído para procurar primos de Mersenne. Veja: <http://www.mersenne.org> para mais informações). Agora são conhecidos 40 expoentes p para os quais $2^p - 1$ é primo (e portanto $2^{p-1}(2^p - 1)$ é perfeito - veja o problema proposto 93): 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213, 19937, 21701, 23209, 44497, 86243, 110503, 132049, 216091, 756839, 859433, 1257787, 1398269, 2976221, 3021377, 6972593, 13466217 e 20996011.

Problema 89 proposto na 27 Olimpíada Russa de Matemática em 2001, problema 90 proposto na Olimpíada Romena de Matemática de 1992, problema 91 proposto por Osvaldo Mello Sponquiado (Ilha Solteira - SP).



Você sabia...

Que existem infinitos inteiros positivos ímpares k tais que $k \cdot 2^n + 1$ é composto para todo $n \in \mathbb{N}$? Tais inteiros k são chamados **números de Sierpinski**. Em 1962, John Selfridge provou que 78557 é um número de Sierpinski, e conjectura-se que seja o menor deles. Atualmente há 11 números menores que 78557 sobre os quais não se sabe se são números de Sierpinski ou não: 4847, 10223, 19249, 21181, 22699, 24737, 27653, 28433, 33661, 55459 e 67607. O número 5359 fazia parte dessa lista até 6/12/2003, quando Randy Sundquist (um participante do **Seventeen or Bust**, um projeto distribuído para atacar o problema de Sierpinski) encontrou o primo $5359 \cdot 2^{5054502} + 1$, que tem 1521561 dígitos e é o quarto maior primo conhecido, e maior primo conhecido que não é de Mersenne.

Veja: <http://www.seventeenorbust.com> para mais informações.

Exercício: Prove que 78557 é um número de Sierpinski, e que existem infinitos números de Sierpinski a partir das congruências

$$78557 \cdot 2^0 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$78557 \cdot 2^1 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$78557 \cdot 2^7 + 1 \equiv 0 \pmod{7}$$

$$78557 \cdot 2^{11} + 1 \equiv 0 \pmod{13}$$

$$78557 \cdot 2^3 + 1 \equiv 78557 \cdot 2^{39} + 1 \equiv 0 \pmod{73}$$

$$78557 \cdot 2^{15} + 1 \equiv 0 \pmod{19}$$

$$78557 \cdot 2^{27} + 1 \equiv 0 \pmod{37}.$$

COORDENADORES REGIONAIS

Alberto Hassen Raad	(UFJF)	Juiz de Fora – MG
Amarísio da Silva Araújo	(UFV)	Viçosa – MG
Ana Paula Bernardi da Silva	(Universidade Católica de Brasília)	Brasília – DF
Benedito Tadeu Vasconcelos Freire	(UFRN)	Natal – RN
Carlos Frederico Borges Palmeira	(PUC-Rio)	Rio de Janeiro – RJ
Claus Haetinger	(UNIVATES)	Lajeado – RS
Cleonor Crescêncio das Neves	(UTAM)	Manaus – AM
Élio Mega	(Colégio Etapa)	São Paulo – SP
Florêncio Ferreira Guimarães Filho	(UFES)	Vitória – ES
Gil Cunha Gomes Filho	(Colégio ACAE)	Volta Redonda – RJ
Ronaldo Alves Garcia	(UFGO)	Goiânia – GO
Reginaldo de Lima Pereira	(Escola Técnica Federal de Roraima)	Boa Vista – RR
Ivanilde Fernandes Saad	(UC. Dom Bosco)	Campo Grande – MS
Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia	(UFPB)	João Pessoa – PB
Janice T. Reichert	(UNOCHAPECÓ)	Chapecó – SC
João Benício de Melo Neto	(UFPI)	Teresina – PI
João Francisco Melo Libonati	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
José Carlos dos Santos Rodrigues	(Unespar)	Campo Mourão – PR
José Cloves Saraiva	(UFMA)	São Luis – MA
José Gaspar Ruas Filho	(ICMC-USP)	São Carlos – SP
José Luiz Rosas Pinho	(UFSC)	Florianópolis – SC
José Vieira Alves	(UFPB)	Campina Grande – PB
Licio Hernandez Bezerra	(UFSC)	Florianópolis – SC
Luzinalva Miranda de Amorim	(UFBA)	Salvador – BA
Mário Rocha Retamoso	(UFRG)	Rio Grande – RS
Marcelo Rufino de Oliveira	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Marcelo Mendes	(Colégio Farias Brito, Pré-vestibular)	Fortaleza – CE
Pablo Rodrigo Ganassim	(Liceu Terras do Engenho)	Piracicaba – SP
Ramón Mendoza	(UFPE)	Recife – PE
Raúl Cintra de Negreiros Ribeiro	(Colégio Anglo)	Atibaia – SP
Reinaldo Gen Ichiro Arakaki	(INPE)	SJ dos Campos – SP
Ricardo Amorim	(Centro Educacional Logos)	Nova Iguaçu – RJ
Sérgio Cláudio Ramos	(IM-UFRGS)	Porto Alegre – RS
Tadeu Ferreira Gomes	(UEBA)	Juazeiro – BA
Tomás Menéndez Rodrigues	(U. Federal de Rondônia)	Porto Velho – RO
Valdenberg Araújo da Silva	(U. Federal de Sergipe)	São Cristovão – SE
Valdeni Soliani Franco	(U. Estadual de Maringá)	Maringá – PR
Vânia Cristina Silva Rodrigues	(U. Metodista de SP)	S.B. do Campo – SP
Wagner Pereira Lopes	(CEFET – GO)	Jataí – GO