CONTEÚDO

AOS LEITORES

Caros leitores,

Neste número a Eureka! publica várias provas de 2003 de competições internacionais nas quais o Brasil participa: Olimpíada de Maio, Olimpíada do Cone Sul, Olimpíada Internacional, Olimpíada Ibero-americana e Olimpíada Internacional Uhniversitária (IMC). Este foi o primeiro ano em que uma delegação brasileira participa desta última competição, resultado de uma parceria da OBM com as Universidades em que estudam os membros da equipe brasileira. Começamos bem: obtivemos três segundos prêmios, três terceiros prêmios e duas menções honrosas.
Neste número excepcionalmente não publicamos a seção "Olimpíadas ao redor do mundo", que volta no próximo. Por outro lado, criamos a seção "Como é que faz?", onde vamos resolver problemas sugeridos pelos leitores.
A idéia é que os leitores enviem problemas que não conseguem resolver, que tenham aparecido em alguma Eureka! (por exemplo em algum artigo ou prova publicada) ou alguma competição (ou de qualquer outra origem), que tentaremos resolver e publicar os mais interessantes na nossa seção.

Os editores

IX OLIMPÍADA DE MAIO

Enunciados e Resultado Brasileiro

PRIMEIRO NÍVEL

Duração da prova: 3 horas

PROBLEMA 1

Pedro escreve todos os números de quatro algarismos diferentes que podem ser armados com dígitos a, b, c, d que cumprem as seguintes condições:

$$a \neq 0 \text{ ; } b = a + 2; \ c = b + 2 \text{ ; } d = c + 2.$$

Calcule a soma de todos os números que Pedro escreveu.

PROBLEMA 2

O triângulo ABC é retângulo em A e R é o ponto médio da hipotenusa BC. Sobre o cateto maior AB se marca o ponto P tal que $CP = BP$ e sobre o segmento BP se marca o ponto Q tal que o triângulo PQR é equilátero. Se a área do triângulo ABC é 27, calcule a área do triângulo PQR.

PROBLEMA 3

Determine o menor número inteiro positivo que termina em 56, é múltiplo de 56 e tem a soma de seus dígitos igual a 56.

PROBLEMA 4

Célia escolhe um número n e escreve a lista dos números naturais de 1 até n:

$$1, 2, 3, 4, \ldots, n - 1, n.$$

Em cada passo, troca a lista: copia o primeiro número ao final e apaga os dois primeiros.
Depois de $n - 1$ passos ficará escrito um único número.
Por exemplo, para $n = 6$ os cinco passos são:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6 \rightarrow 3, 4, 5, 6, 1 \rightarrow 5, 6, 1, 3 \rightarrow 1, 3, 5 \rightarrow 5, 1 \rightarrow 5$$

e ficará escrito o número 5.

Célia escolheu um número n entre 1000 e 3000 e depois de $n - 1$ passos ficou o número 1.

Determine todos os valores de n que Célia pode ter escolhido.
Justifique porque estes valores servem e os demais não.

PROBLEMA 5

Temos um tabuleiro quadriculado 4×4. Definimos a *separação* entre duas casas como o menor número de movimentos que deve empregar um cavalo de xadrez para ir de uma casa a outra (utilizando movimentos do cavalo). Três casas A, B, C formam um *trio bom* se as três separações entre A e B, entre A e C e entre B e C são iguais. Determine um número de *trios bons* que se formam no tabuleiro.

OBSERVAÇÃO:

Em cada movimento o cavalo se desloca 2 casas em direção horizontal mais uma casa em direção vertical ou se desloca 2 casas em direção vertical mais uma casa em direção horizontal.

SEGUNDO NÍVEL

Duração da prova: 3 horas

PROBLEMA 1

São escolhidos quatro dígitos a, b, c, d diferentes entre si e diferentes de zero e se escreve a lista de todos os números de quatro algarismos que se obtém trocando de lugar os dígitos a, b, c, d.
Que dígitos deve-se escolher para que a lista tenha a maior quantidade possível de números de quatro algarismos que sejam múltiplos de 36?

PROBLEMA 2

Seja $ABCD$ um retângulo de lados $AB = 4$ e $BC = 3$. A perpendicular à diagonal BD traçada por A corta BD no ponto H. Chamamos de M o ponto médio de BH e de N o ponto médio de CD. Calcule a medida do segmento MN.

PROBLEMA 3

Encontre todos os pares de números inteiros positivos (a, b) tais que $8b + 1$ é múltiplo de a e $8a + 1$ é múltiplo de b.

PROBLEMA 4

Beto marcou 2003 pontos verdes no plano, de maneira que todos os triângulos com seus três vértices verdes têm área menor que 1.
Demonstre que os 2003 pontos verdes estão contidos num triângulo T de área menor que 4.

PROBLEMA 5

Uma formiga, que está numa aresta de um cubo de lado 8, deve realizar um percurso pela superfície do cubo e regressar ao ponto de partida. Seu caminho deve conter pontos interiores das seis faces do cubo e deve visitar só uma vez cada face do cubo. Encontre o comprimento do caminho mais curto que a formiga pode realizar e justifique porque é o caminho mais curto.

RESULTADOS

PRIMEIRO NÍVEL

Lucio Eiji Assaoka Hossaka	Medalha de Ouro	Curitiba - PR
Marlon Vieira de Lima Junior	Medalha de Prata	Fortaleza - CE
Henrique Pondé de Oliveira Pinto	Medalha de Prata	Salvador - BA
Guilherme Philippe Figueiredo	Medalha de Bronze	Fortaleza - CE
Fernanda Sá Leal de Moura	Medalha de Bronze	Teresina - PI
Régis Prado Barbosa	Medalha de Bronze	Fortaleza - CE
Tiago Madeira	Medalha de Bronze	Itajaí - SC
Mateus Faitanin Yin	Menção Honrosa	Vitória - ES
Diogo Bonfim Moraes Morant de Holanda	Menção Honrosa	Rio de Janeiro - RJ
Ronaldo Rozenbaum Paiva	Menção Honrosa	Rio de Janeiro - RJ

SEGUNDO NÍVEL

Telmo Luis Correa Junior	Medalha de Ouro	São Paulo - SP
Luty Rodrigues Ribeiro	Medalha de Prata	Fortaleza - CE
Pedro Thiago Ezequiel de Andrade	Medalha de Prata	Fortaleza - CE
Gabriel Tavares Bujokas	Medalha de Bronze	São Paulo - SP
Juliana G. Cavalcante	Medalha de Bronze	Fortaleza - CE
Leandro Farias Lima	Medalha de Bronze	Fortaleza - CE
Eduardo Fischer	Medalha de Bronze	Encantado - RS
André Linhares Rodrigues	Menção Honrosa	Fortaleza - CE
Rodrigo Viana Soares	Menção Honrosa	Fortaleza - CE
Raphael Rodrigues Viana	Menção Honrosa	Salvador - BA

XIV OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL

Enunciados e Resultado Brasileiro

A XIV Olimpíada de Matemática do Cone Sul foi realizada na cidade de Ica, Peru, no período de 23 a 30 de maio de 2003. A equipe brasileira foi liderada pelos professores Paulo José Bonfim Gomes Rodrigues e Emanuel de Souza Carneiro, ambos de Fortaleza – CE. Novamente a equipe brasileira obteve a maior pontuação entre os países participantes.

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	**Fábio Dias Moreira**	**Prata**
BRA2	**Henry Wei Cheng Hsu**	**Prata**
BRA3	**Thiago Costa Leite Santos**	**Prata**
BRA4	**Rodrigo Aguiar Pinheiro**	**Ouro**

PROBLEMA 1

Em um torneio de futebol entre quatro equipes, A, B, C e D, cada equipe joga com cada uma das outras exatamente uma vez.

a) Decidir se é possível que, ao finalizar o torneio, as quantidades de gols marcados e sofridos pelas equipes sejam:

	A	B	C	D
Gols marcados	1	3	6	7
Gols sofridos	4	4	4	5

Se a resposta é afirmativa, dê um exemplo com os resultados das seis partidas; em caso contrário, justifique.

b) Decidir se é possível que, ao finalizar o torneio, as quantidades de gols marcados e sofridos pelas equipes sejam:

	A	B	C	D
Gols marcados	1	3	6	13
Gols sofridos	4	4	4	11

Se a resposta é afirmativa, dê um exemplo com os resultados das seis partidas; em caso contrário, justifique.

PROBLEMA 2

Considere a seqüência $\{a_n\}$ definida da seguinte maneira:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 3$$
$$a_{n+2} = 2a_{n+1}\,a_n + 1, \text{ para todo inteiro } n \geq 1.$$

Provar que a máxima potência de 2 que divide $a_{4006} - a_{4005}$ é 2^{2003}.

PROBLEMA 3

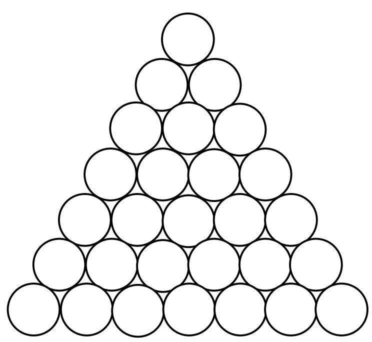
Seja ABC um triângulo acutângulo tal que o ângulo B mede 60^o. A circunferência de diâmetro AC intersecta as bissetrizes internas de A e C nos pontos M e N respectivamente ($M \neq A$, $N \neq C$). A bissetriz interna do ângulo B intersecta MN e AC nos pontos R e S, respectivamente. Demonstrar que $BR \leq RS$.

PROBLEMA 4

No triângulo acutângulo ABC, os pontos H, G e M encontram-se sobre o lado BC, de modo que AH, AG e AM são altura, bissetriz e mediana do triângulo, respectivamente. Sabe-se que $HG = GM$, $AB = 10$ e $AC = 14$. Determinar a área do triângulo ABC.

PROBLEMA 5

Seja $n = 3k + 1$, onde k é um inteiro, $k \geq 1$. Constrói-se um arranjo triangular de lado n formado por círculos de mesmo raio como o mostrado na figura para $n = 7$.



Determinar, para cada *k*, o maior número de círculos que podem ser coloridos de vermelho de tal modo que não existam dois círculos vermelhos tangentes entre si.

PROBLEMA 6

Demonstrar que existe uma seqüência de inteiros positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ que satisfaz as duas condições seguintes:

i) contém exatamente uma vez cada um dos inteiros positivos,

ii) para cada $n = 1, 2, \ldots$ a soma parcial $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ é divisível por n^n.

XLIV OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

07 a 19 de julho, Tóquio - Japão

A XLIV Olimpíada Internacional de Matemática foi realizada em Tóquio, Japão, no período de 07 a 19 de julho de 2003. A equipe brasileira foi liderada pelos professores Nicolau Saldanha, do Rio de Janeiro – RJ e Élio Mega, de São Paulo – SP.

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	**Alex Corrêa Abreu**	**Medalha de Bronze**
BRA2	**Samuel Barbosa Feitosa**	**Medalha de Bronze**
BRA3	**Rafael Daigo Hirama**	**Menção Honrosa**
BRA4	**Larissa Cavalcante Queiroz de Lima**	**Menção Honrosa**
BRA5	**Fábio Dias Moreira**	**Medalha de Prata**
BRA6	**Davi Máximo Alexandrino Nogueira**	**Medalha de Bronze**

PROBLEMA 1

Seja A um subconjunto do conjunto $S = \{1,2,\ldots,1000000\}$ com exatamente 101 elementos. Demonstre que existem números $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ em S tais que os conjuntos

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\}, \qquad \text{para} \qquad j = 1, 2, \ldots, 100,$$

são disjuntos dois a dois.

PROBLEMA 2

Determine todos os pares de inteiros positivos (a, b) tais que

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

é um inteiro positivo.

PROBLEMA 3

Considere um hexágono convexo tal que para cada quaisquer dois lados opostos verifica-se a seguinte propriedade: a distância entre os seus pontos médios é igual a $\sqrt{3}/2$ vezes a soma dos seus comprimentos. Demonstre que todos os ângulos do hexágono são iguais.

(Um hexágono convexo $ABCDEF$ tem três pares de lados opostos: AB e DE, BC e EF, CD e FA).

PROBLEMA 4

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo cujos vértices estão sobre uma circunferência. Sejam P, Q e R os pés das perpendiculares às retas BC, CA e AB, respectivamente, passando por D. Demonstre que $PQ = QR$ se e só se as bissetrizes dos ângulos $\angle ABC$ e $\angle ADC$ se intersectam sobre a reta AC.

PROBLEMA 5

Sejam n um inteiro positivo e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais tais que $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$.

(a) Demonstre que

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|x_i - x_j\right|\right)^2 \le \frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2.$$

(b) Demonstre que a igualdade é válida se e só se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ formam uma progressão aritmética.

PROBLEMA 6

Seja p um número primo. Demonstre que existe um número primo q tal que, para todo inteiro *n*, o número $n^p - p$ não é divisível por *q*.

X OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA PARA ESTUDANTES UNIVERSITÁRIOS

25 a 31 de Julho, Cluj - Napoca, Romênia

A X Olimpíada Internacional de Matemática para estudantes universitários foi realizada na cidade de Cluj-Napoca, Romênia, no período de 25 a 31 de Julho de 2003. A equipe brasileira foi liderada pelo professor Luciano Castro, do Rio de Janeiro – RJ.

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

Márcio Afonso Assad Cohen	**IME**	**Medalha de Prata**
Humberto Silva Naves	**ITA**	**Medalha de Prata**
Rodrigo Villard Milet	**UFRJ**	**Medalha de Prata**
Carlos Stein Naves de Brito	**ITA**	**Medalha de Bronze**
Daniel Yamamoto	**ITA**	**Medalha de Bronze**
Giuliano Boava	**UFSC**	**Medalha de Bronze**
Eduardo Famini Silva	**IME**	**Menção Honrosa**
Thiago Barros Rodrigues Costa	**UNICAMP**	**Menção Honrosa**

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

a) Seja $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ uma seqüência de números reais tais que $a_1 = 1$ e

$$a_{n+1} > \frac{3}{2}a_n, \forall n.$$

Prove que a seqüência $\dfrac{a_n}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}$ tem um limite finito ou tende a infinito.

b) Prove que para todo $\alpha > 1$ existe uma seqüência $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ com as mesmas propriedades, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}} = \alpha.$

PROBLEMA 2

Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_{51}$ elementos não nulos de um corpo. Simultaneamente trocamos cada elemento pela soma dos outros 50. Desta forma a nova seqüência $b_1, b_2, \ldots, b_{51}$ é uma permutação da anterior. Quais são os possíveis valores da característica do corpo?

PROBLEMA 3

Seja A uma matriz quadrada $n \times n$ tal que $3A^3 = A^2 + A + I$. Prove que $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge a uma matriz idempotente B (i.e., a uma matriz B tal que $B^2 = B$).

PROBLEMA 4

Determine o conjunto de todos os pares (a, b) de inteiros positivos para os quais o conjunto dos inteiros positivos pode ser decomposto em dois conjuntos A e B tais que $a \cdot A = b \cdot B$.

PROBLEMA 5

Sejam $g:[0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $f_n:(0,1] \to \mathbb{R}$ a seqüência de funções definida por $f_0(x) = g(x)$ e $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{x}\int_0^x f_n(t)dt,\ \forall x \in (0,1], n \geq 0.$

Determine $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para todo $x \in (0,1]$.

PROBLEMA 6

Seja $f(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ um polinômio com coeficientes reais. Prove que se as raízes de f estão no semi-plano esquerdo $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < 0\}$ então $a_k a_{k+3} < a_{k+1} a_{k+2}$ para todo $k = 0, 1, \ldots, n - 3$.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 1

Sejam A e B matrizes reais $n \times n$ tais que $AB + A + B = 0$. Prove que $AB = BA$.

PROBLEMA 2

Calcule o seguinte limite: $\lim_{x\to 0^+} \int_x^{2x} \frac{sen^m t}{t^n} dt$ (m, n naturais dados).

PROBLEMA 3

Seja A um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$ e seja B o conjunto de todos os pontos b de $\mathbb{R}^n$ tais que existe exatamente um ponto a_0 em A tal que $|a_0 - b| = \inf_{a\in A} |a - b|$. Prove que B é denso em $\mathbb{R}^n$.

PROBLEMA 4

Encontre todos os inteiros positivos n para os quais existe uma família F de subconjuntos de três elementos de $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ que satisfaz as seguintes condições:

(i) para quaisquer elementos distintos $a, b \in S$ existe exatamente um $A \in F$ tal que $a, b \in A$.

(ii) Se a, b, c, x, y, z são tais que $\{a, b, x\}, \{a, c, y\}, \{b, c, z\} \in F$ então $\{x, y, z\} \in F$.

PROBLEMA 5

a) Mostre que para toda função $f : \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ existe uma função $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) \le g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbb{Q}$.

b) Encontre uma função $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para a qual não existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) \le g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

PROBLEMA 6

Seja $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ a seqüência definida por $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2}$.

Calcule $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}$ (se existir).

XVIII OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA

13 a 20 de setembro, Mar del Plata - Argentina

A XVIII Olimpíada Iberoamericana de Matemática foi realizada na cidade de Mar del Plata, Argentina, no período de 13 a 20 de setembro de 2003. A equipe brasileira foi liderada pelos professores Augusto C. de Oliveira Morgado, do Rio de Janeiro – RJ e Luzinalva Miranda de Amorim, de Salvador – BA.

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	**Alex Corrêa Abreu**	**Medalha de Ouro**
BRA2	**Davi Máximo Alexandrino Nogueira**	**Medalha de Prata**
BRA3	**Fábio Dias Moreira**	**Medalha de Ouro**
BRA4	**Samuel Barbosa Feitosa**	**Medalha de Bronze**

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

a) Têm-se duas sucessões, cada uma de 2003 inteiros consecutivos, e um tabuleiro de 2 linhas e 2003 colunas

			………		
			………		

Decida se é sempre possível distribuir os números da primeira sucessão na primeira linha e os da segunda sucessão na segunda linha, de modo que os resultados obtidos ao somar os dois números de cada coluna formem uma nova sucessão de 2003 números consecutivos.

b) E se trocássemos 2003 por 2004?

Tanto em *a*) como em *b*), se a resposta for afirmativa, explique como distribuiria os números, e se for negativa, justifique o porquê.

PROBLEMA 2

Sejam C e D dois pontos da semicircunferência de diâmetro AB tais que B e C estão em semiplanos distintos em relação à reta AD. Denotemos por M, N e P os pontos médios de AC, DB e CD, respectivamente. Sejam O_A e O_B os circuncentros dos triângulos ACP e BDP. Demonstre que as retas $O_A\, O_B$ e MN são paralelas.

PROBLEMA 3

Pablo copia o seguinte problema:

Considere todas as sucessões de 2004 *números reais* $(x_0, x_1, x_2, ..., x_{2003})$, *tais que*

$$\begin{gathered} x_0 = 1, \\ 0 \le x_1 \le 2x_0, \\ 0 \le x_2 \le 2x_1, \\ \vdots \\ 0 \le x_{2003} \le 2x_{2002}. \end{gathered}$$

Entre todas estas sucessões, determine aquela para a qual a expressão seguinte assume o seu maior valor: S = … .

Quando Pablo ia copiar a expressão S, apagaram o quadro. Só conseguia lembrar-se de que S era da forma

$$S = \pm x_1 \pm x_2 \pm ... \pm x_{2002} + x_{2003},$$

onde o último termo, x_{2003}, tinha coeficiente +1, e os anteriores tinham coeficiente +1 ou –1. Demonstre que Pablo, apesar de não ter o enunciado completo, pode determinar com certeza a solução do problema.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Seja M ={1, 2,…,49} o conjunto dos primeiros 49 inteiros positivos. Determine o maior inteiro k tal que o conjunto M tenha um subconjunto de k elementos em que não haja 6 números consecutivos. Para esse valor máximo de k, encontre a quantidade de subconjuntos de m, de k elementos, que tenham a propriedade mencionada.

PROBLEMA 5

No quadrado *ABCD*, sejam *P* e *Q* pontos pertencentes aos lados *BC* e *CD* respectivemamte, distintos dos extremos, tais que *BP* = *CQ*. Consideram-se pontos *X* e *Y*, $X \neq Y$, pertencentes aos segmentos *AP* e *AQ* respectivamente. Demonstre que, quaisquer que sejam *X* e *Y*, existe um triângulo cujos lados têm os comprimentos dos segmentos *BX*, *XY* e *DY*.

PROBLEMA 6

Definen-se as sucessões $(a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0}$ por:

$$a_0 = 1, \quad b_0 = 4 \quad \text{e}$$

$$a_{n+1} = a_n^{2001} + b_n, \quad b_{n+1} = b_n^{2001} + a_n \ \text{para} \ n \geq 0.$$

Demonstre que 2003 não divide nenhum dos termos destas sucessões.

GEOMETRIA COM CONTAS

Carlos Yuzo Shine, Colégio Etapa

♦ Nível Avançado

Às vezes precisamos de mais elementos para resolver problemas de geometria. Pode-se traçar novos elementos na figura que possam ajudar ou fazer algumas contas. Mostraremos algumas técnicas para fazer algumas contas que ajudam (e até resolvem!).

Em geral, pode-se pensar em problemas de geometria seguindo esses passos:

(i) Faça a figura do problema (praticamente nenhum problema vem com figura), bem grande e com certa precisão (ou seja, use a régua e o compasso, mas não é necessário muito rigor).

(ii) Mexa um pouco com os elementos da figura. Algo que é sempre útil é fixar um certo número de ângulos (de preferência, o menor número possível, de modo que os ângulos marcados determinem a figura - a não ser, é claro, que acrescentar algum outro ângulo adicione alguma simetria algébrica útil) e calcular todos os outros ângulos possíveis (se os ângulos que você escolheu determinam a figura, é possível calcular todos os outros, de um jeito ou de outro). Procure quadriláteros inscritíveis para ajudar. Se necessário, faça conjecturas (é para isso que você fez um desenho bem feito!). Alguns problemas de geometria já são resolvidos nesse passo!

(iii) Se o problema ainda não foi resolvido, é hora de elaborar uma estratégia para resolver o problema, ou seja, determinar quais cálculos devem ser feitos. Nada de fazer cálculos sem planejá-los!

(iv) Execute sua estratégia. Lembre-se sempre de ter uma meta em mente (algo do tipo "precisamos calcular tal ângulo") e, se você estiver numa prova, de controlar seu tempo e o tamanho da conta (não deixe a conta crescer muito; a falta de controle é um fermento muito poderoso para contas.)

É claro que esses passos não são precisos e que, para dominá-los, é preciso muito treino e, por que não, aprender algumas técnicas.

TRIGONOMETRIA

Muitos problemas de geometria podem ser resolvidos com o auxílio da trigonometria. As fórmulas que você deve saber são basicamente essas quatro:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a \\
\operatorname{sen}(a-b) &= \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a \\
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} a \\
\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b
\end{aligned}$$

A partir dessas você pode deduzir essas outras, que na verdade são as mais úteis para nós e que tornam a trigonometria tão poderosa.

Transformando produtos em somas

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$$

$$\operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(a-b) + \operatorname{sen}(a+b))$$

Transformando somas em produtos

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos x - \cos y = -2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Por fim, relembramos a lei dos senos e a lei dos co-senos. No triângulo *ABC*, seja *AB* = *c*, *AC* = *b*, *BC* = *a*, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ e $\angle C = \gamma$. O circunraio de *ABC* é *R*.

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

A lei dos senos, por envolver proporções (que são mais simples) e elementos adicionais do triângulo (o circunraio), é particularmente útil.

Vamos resolver alguns problemas e mostrar algumas técnicas de cálculo.

CONVENÇÃO

Sempre que houver um triângulo *ABC*, α, β e γ são as medidas dos ângulos $\angle BAC$, $\angle ABC$ e $\angle ACB$, respectivamente.

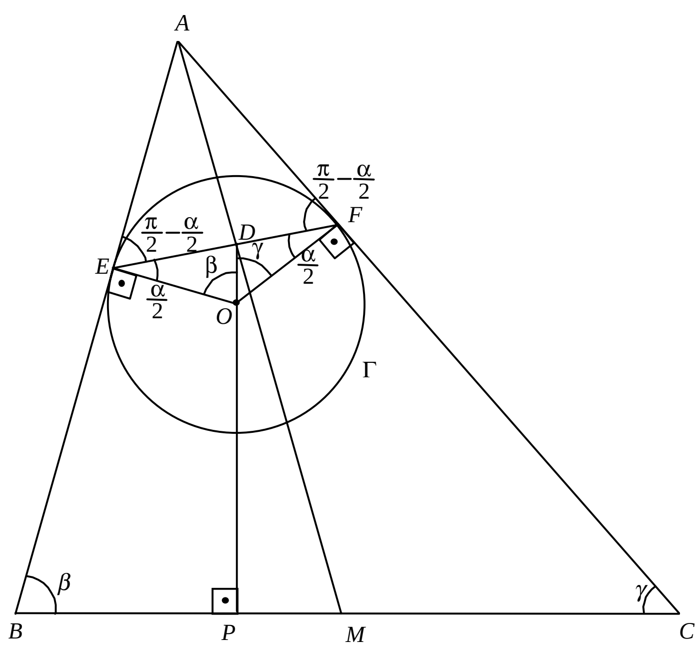
UM COMEÇO E O TRUQUE DA CO-TANGENTE

Exemplo

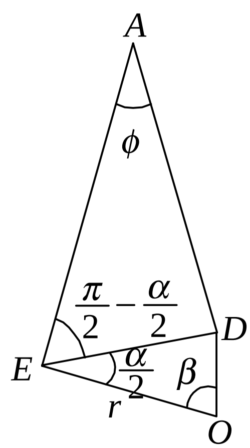
(Prova de Seleção para a IMO) Seja Γ uma circunferência de centro *O* tangente aos lados *AB* e *AC* do triângulo *ABC* nos pontos *E* e *F*. A reta perpendicular ao lado *BC* por *O* intercepta *EF* no ponto *D*. Mostre que *A*, *D* e *M* (ponto médio de *BC*) são colineares.

Resolução

Primeiro, um bom desenho, com todos os ângulos que pudermos marcar (a técnica do *arrastão* é bastante útil - é por isso que você deve fazer um desenho grande!!). Note que os ângulos do triângulo *ABC* já determinam os ângulos toda a figura (para perceber isso, note que se construir *ABC* todos os outros ângulos da figura já estão determinados).



É sempre bom justificar os cálculos. Seja P a interseção de BC e da reta perpendicular a BC por O. Como $\angle BEO$ e $\angle BPO$ são retos, o quadrilátero $BPOE$ é inscritível, de modo que $\angle DOE = \angle EBM = \beta$. Analogamente, $\angle DOF = \gamma$.
A reta AO é bissetriz de $\hat{A}$ e $AOEF$ é inscritível, logo $\angle OEF = \angle OFE = \alpha/2$.
Mas, como provar que A, D e M estão alinhados? Uma maneira é provar que $\angle BAD = \angle BAM$, por exemplo. Para isso, é só calcular os dois ângulos.
Como calcularemos $\phi = \angle BAD$? Veja o triângulo ADE. Sendo r o raio de Γ, com uma lei dos senos calculamos DE. AE pode ser facilmente calculado. Como já conhecemos $\angle AED$ (viu como é bom fazer o arrastão?), temos elementos suficientes para calcular ϕ.
Para calcular $\theta = \angle BAM$, usaremos o triângulo BAM, da qual conhecemos BM, AB, e $\angle ABM$.
Já temos uma estratégia. Vamos executar o plano!



No triângulo ODE,

$$\frac{DE}{\text{sen}\beta} = \frac{r}{\text{sen}\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)} \Leftrightarrow DE = \frac{r\,\text{sen}\beta}{\text{sen}\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)}$$

(note que $\angle ODE = \pi - (\beta + \alpha/2)$ - utilizamos o fato de que $\text{sen}x = \text{sen}(\pi - x)$ para todo x real; utilizaremos bastante esse fato e o fato $\text{sen}(\pi/2 - x) = \cos x$)
Sendo o triângulo AEO retângulo em E, obtemos $AE = r\,\text{cotg}(\alpha/2)$.

No triângulo *ADE*,

$$\frac{DE}{\operatorname{sen}\phi}=\frac{AE}{\cos\left(\phi+\frac{\alpha}{2}\right)} \qquad (*)$$

Quando temos uma equação do tipo

$$\frac{a}{\operatorname{sen}x}=\frac{b}{\operatorname{sen}(x+\delta)},$$

e queremos determinar *x*, utilizamos o *truque da co-tangente:*

$$\frac{a}{\operatorname{sen}x}=\frac{b}{\operatorname{sen}(x+\delta)}\Leftrightarrow\frac{\operatorname{sen}(x+\delta)}{\operatorname{sen}x}=\frac{b}{a}\Leftrightarrow\frac{\operatorname{sen}x\cos\delta+\operatorname{sen}\delta\cos x}{\operatorname{sen}x}=$$

$$=\frac{b}{a}\Leftrightarrow\cos\delta+\operatorname{sen}\delta\operatorname{cotg}x=\frac{b}{a}$$

e podemos isolar cotg x.

Voltemos a (*). Substituindo *DE* e *AE* e utilizando o truque da co-tangente, temos

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{cotg}\phi+\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\operatorname{cotg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{sen}\beta}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\operatorname{cotg}\phi=\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\beta\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

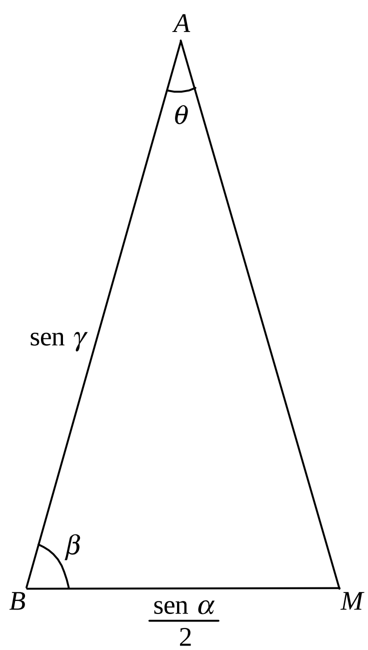
$$\Leftrightarrow\operatorname{cotg}\phi=\frac{2\operatorname{sen}\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)-2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

$$\Leftrightarrow\operatorname{cotg}\phi=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}\beta-2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

$$\Leftrightarrow\operatorname{cotg}\phi=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}\beta\left(1-2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

$$\Leftrightarrow \text{cotg}\phi = \frac{\text{sen}(\alpha+\beta)+\text{sen}\beta\cos\alpha}{\text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta}$$

Calculemos θ. Uma prática normal em trigonometria é adotar o circunraio de algum triângulo igual a 1/2, de modo que, pela lei dos senos, seus lados sejam iguais aos senos dos seus respectivos ângulos opostos. Podemos fazer isso porque estamos só fixando o tamanho da figura. É claro que só podemos fazer isso uma vez só em cada problema.



Nesse caso, façamos isso com ΔABC. Temos $BM = BC/2 = \frac{1}{2}\text{sen}\alpha$ e $AB = \text{sen}\gamma = \text{sen}(\alpha+\beta)$. No triângulo ABM,

$$\frac{BM}{\text{sen}\theta} = \frac{AB}{\text{sen}(\theta+\beta)} \Leftrightarrow \text{sen}\beta\text{cotg}\theta + \cos\beta = \frac{2\text{sen}(\alpha+\beta)}{\text{sen}\alpha} \Leftrightarrow \text{cotg}\theta =$$

$$= \frac{2\text{sen}(\alpha+\beta) - \text{sen}\alpha\cos\beta}{\text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta}$$

Puxa, os resultados de $\text{cotg}\phi$ e $\text{cotg}\theta$ são diferentes! Na verdade, não são. Nunca perca a fé!

$$\text{cotg}\phi = \text{cotg}\theta \Leftrightarrow \text{sen}(\alpha+\beta) + \text{sen}\beta\cos\alpha = 2\text{sen}(\alpha+\beta) - \text{sen}\alpha\cos\beta$$
$$\Leftrightarrow \text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta + \text{sen}\beta\cos\alpha,$$

que é sempre verdade.

ALGUMAS IDENTIDADES

Suponha que o circunraio do triângulo ABC é $R = 1/2$. Então, $c = AB = \text{sen}\gamma$, $b = AC = \text{sen}\beta$ e $a = BC = \text{sen}\alpha$.

Além disso, por exemplo,

- O perímetro do triângulo é $2p = 4\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$;
- A área do triângulo é $S = \text{sen}\alpha\text{sen}\beta\text{sen}\gamma/2$;
- O inraio do triângulo é $r = 2\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right)$;
- $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + r/R$;
- $p - a = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right)$.

Exercício: Prove todas as identidades acima.

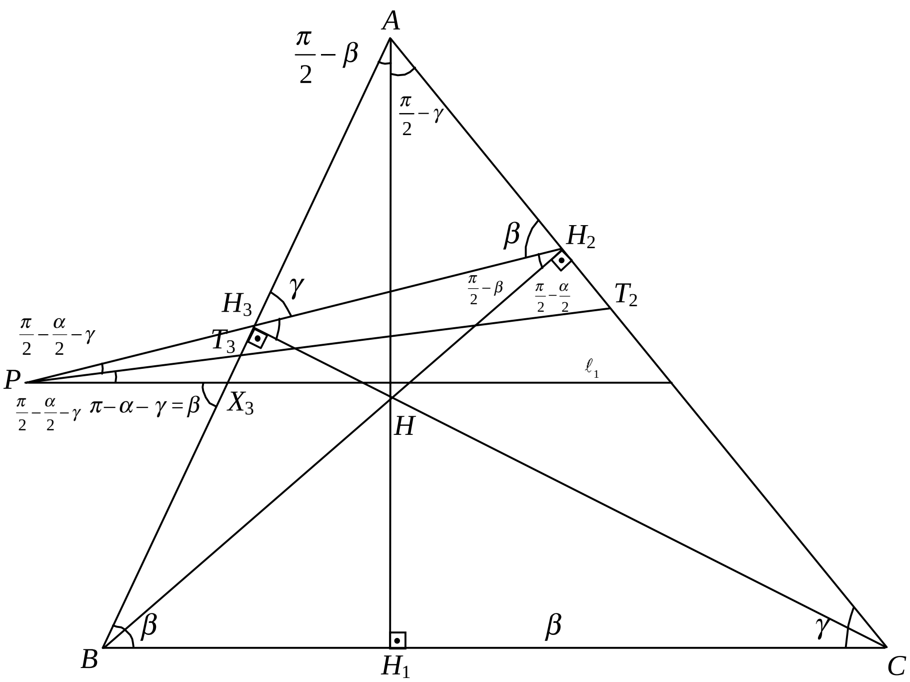
Exemplo:

(IMO) Sejam AH_1, BH_2 e CH_3 as alturas de um triângulo acutângulo ABC. A circunferência inscrita no triângulo ABC é tangente aos lados BC, CA, AB em T_1, T_2 e T_3, respectivamente. Considere a reta simétrica da reta H_1H_2 relativamente à reta T_1T_2, a reta simétrica da reta H_2H_3 relativamente à reta T_2T_3, a reta simétrica da reta H_1H_3 relativamente à reta T_1T_3. Prove que estas retas simétricas determinam um triângulo cujos vértices pertencem à circunferência inscrita no triângulo ABC.

Resolução:

Esse é o problema 6 da IMO de 2001.

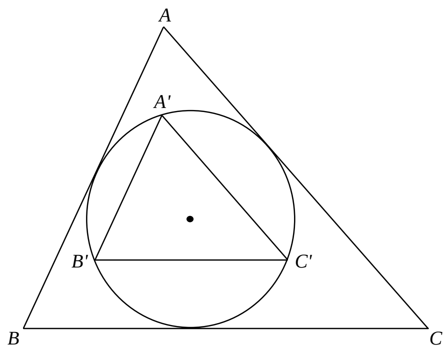
Primeiro, uma boa, e bem grande, figura. Vamos só desenhar a reta simétrica relacionada a T_2T_3. H é o ortocentro de ABC.

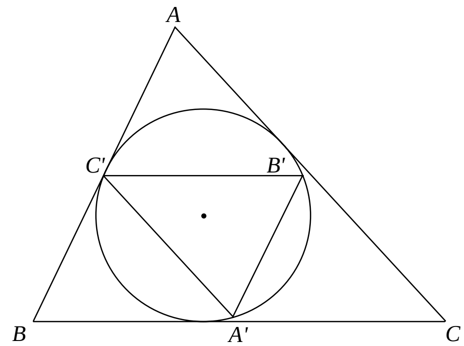


Façamos o arrastão: veja que AH_2HH_3 é inscritível, logo $\angle AH_3H_2=\gamma$. Seja P a interseção de T_2T_3 e H_2H_3 (só não podemos escolher duas retas T_iT_j e H_iH_j concorrentes quando o triângulo ABC é equilátero; tal caso é trivial). Como $AT_2=AT_3$, os ângulos $\angle AT_2T_3$ e $\angle AT_3T_2$ medem ambos $\pi/2-\alpha/2$. Assim, $\angle H_3PT_3=\angle AT_3T_2-\angle PH_3T_3=\pi-\alpha/2-\gamma$ e, sendo l_1 a reta simétrica da reta H_2H_3 relativamente à reta T_2T_3, o ângulo entre l_1 e T_2T_3 é igual também a $\pi-\alpha/2-\gamma$. Logo o ângulo entre l_1 e AB é $2(\pi/2-\alpha/2-\gamma)+\gamma=\pi-\alpha-\gamma=\beta$, ou seja, l_1 e BC são paralelos.

Definindo analogamente l_2 e l_3, temos $l_2 // AC$ e $l_3 // AB$.

Com isso, já sabemos que o triângulo determinado por l_1, l_2 e l_3 é semelhante a ABC, e com lados homólogos paralelos. Temos, então, dois candidatos a tal triângulo:





Estudando um caso particular (o triângulo equilátero, por exemplo), vemos que o candidato mais indicado é o da direita. Podemos, então calcular a distância entre lados homólogos nessa situação e compararmos com a distância entre *BC* e l_1.

Assuma que o circunraio de *ABC* é 1/2, para termos $BC = \text{sen}\alpha, CA = \text{sen}\beta$ e $BC = \text{sen}\alpha.$

Vamos calcular a distância entre *BC* e l_1. Seja X_3 a interseção de l_1 e *AB*. A distância de *A* a l_1 é $AX_3\text{sen}\beta.$ E a distância desejada é $AH_1 - AX_3\text{sen}\beta.$ Bom, AH_1 é fácil de calcular: $AH_1 = AB\text{sen}\beta = \text{sen}\gamma\text{sen}\beta.$ E AX_3? AH_3 é fácil de calcular, AT_3 também. Podemos calcular $H_3T_3 = AT_3 - AH_3$ e usar a lei dos senos no triângulo PH_3X_3, com a ceviana PT_3. Mãos à obra!!

Para começar, $AH_3 = AC\cos\alpha = \text{sen}\beta\cos\alpha$ e $AT_3 = p - \text{sen}\alpha,$ sendo p o semiperímetro de *ABC*. Portanto $H_3T_3 = p - \text{sen}\alpha - \text{sen}\beta\cos\alpha.$

Pela lei dos senos no triângulo PH_3T_3,

$$\frac{PT_3}{\text{sen}\gamma} = \frac{H_3T_3}{\text{sen}\angle H_3PT_3}$$

No triângulo PT_3X_3,

$$\frac{PT_3}{\text{sen}\beta} = \frac{X_3T_3}{\text{sen}\angle X_3PT_3}$$

Dividindo as duas últimas equações e tendo em vista que $\angle H_3PT_3 = \angle X_3PT_3$, obtemos $X_3T_3 = \dfrac{\text{sen}\gamma}{\text{sen}\beta}H_3T_3 = \dfrac{p\text{sen}\gamma - \text{sen}\gamma\text{sen}\alpha - \text{sen}\gamma\text{sen}\beta\cos\alpha}{\text{sen}\beta}$

Da lei dos co-senos no ΔABC (ela também é útil de vez em quando!),

$$\text{sen}\gamma\,\text{sen}\beta\cos\alpha = \frac{\text{sen}^2\beta + \text{sen}^2\gamma - \text{sen}^2\alpha}{2}$$

Logo, substituindo $p = \dfrac{\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta + \text{sen}\gamma}{2}$,

$$X_3T_3 = \frac{-\text{sen}\alpha\,\text{sen}\gamma + \text{sen}\beta\,\text{sen}\gamma + \text{sen}^2\gamma - \text{sen}^2\beta - \text{sen}^2\gamma + \text{sen}^2\alpha}{2\,\text{sen}\beta}$$

$$= \frac{-\text{sen}\alpha\,\text{sen}\gamma + \text{sen}\beta\,\text{sen}\gamma - \text{sen}^2\beta + \text{sen}^2\alpha}{2\,\text{sen}\beta}$$

Enfim, podemos calcular $AX_3 = AT_3 + X_3T_3$. Veja que

$$AT_3 = p - \text{sen}\alpha = \frac{-\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta + \text{sen}\gamma}{2}.$$

$$AX_3 = \frac{\text{sen}\beta(-\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta + \text{sen}\gamma) - \text{sen}\alpha\,\text{sen}\gamma + \text{sen}\beta\,\text{sen}\gamma - \text{sen}^2\beta + \text{sen}^2\alpha}{2\,\text{sen}\beta}$$

$$= \frac{-\text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta + 2\,\text{sen}\beta\,\text{sen}\gamma - \text{sen}\alpha\,\text{sen}\gamma + \text{sen}^2\alpha}{2\,\text{sen}\beta}$$

Enfim, a distância entre l_1 e BC é

$$AH_1 - AX_3\,\text{sen}\beta = \text{sen}\beta\,\text{sen}\gamma - \frac{-\text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta + 2\,\text{sen}\beta\,\text{sen}\gamma - \text{sen}\alpha\,\text{sen}\lambda + \text{sen}^2\alpha}{2}$$

$$= \frac{\text{sen}\alpha(-\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta + \text{sen}\gamma)}{2}$$

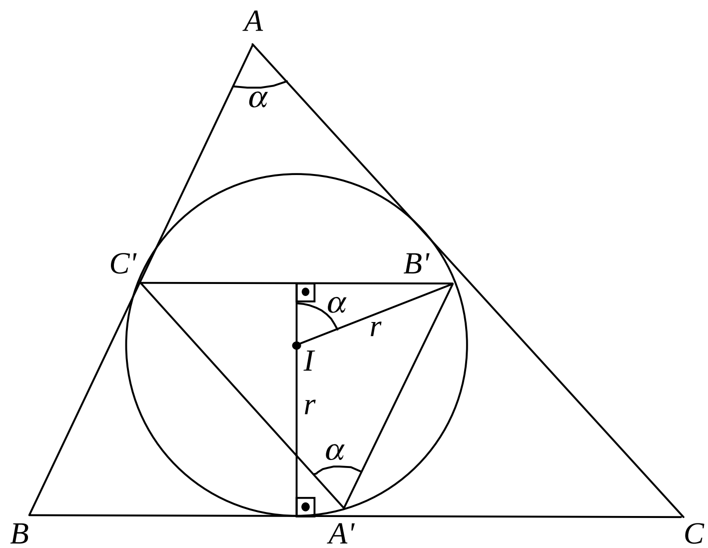
Na seção de identidades, você deve provar que

$$p - a = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

Logo a distância entre l_1 e BC é (ufa!)

$$d = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right)\text{sen}\alpha$$

Agora calculemos a distância entre os lados homólogos dos triângulos *ABC* e o de lados respectivamente paralelos aos lados de *ABC*.



Seja I o incentro do triângulo ABC. A distância de I a BC é igual ao inraio r e a distância de I a $B'C'$ é $r\cos\alpha$.
Assim, a distância entre BC e $B'C'$ é:

$$d' = r + r\cos\alpha = r(1+\cos\alpha) = 2r\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Você tem outra identidade para provar:

$$r = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

Logo

$$\begin{aligned} d' &= 2\cdot 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= 2\cdot 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right)\operatorname{sen}\alpha = d \end{aligned}$$

Conseqüentemente, l_1 contém $B'\,C'$. Analogamente (ou você acha que eu faria todas as contas de novo?), l_2 contém $A'\,C'$ e l_3 contém $A'B'$.

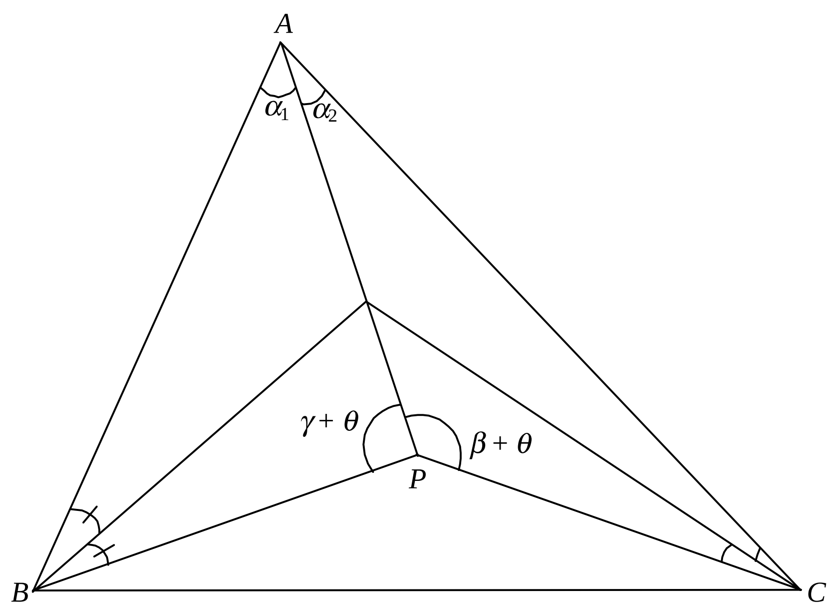
Às vezes traçar novos elementos na figura também ajuda.

Exemplo
(IMO) Seja P um ponto interior ao triângulo ABC tal que

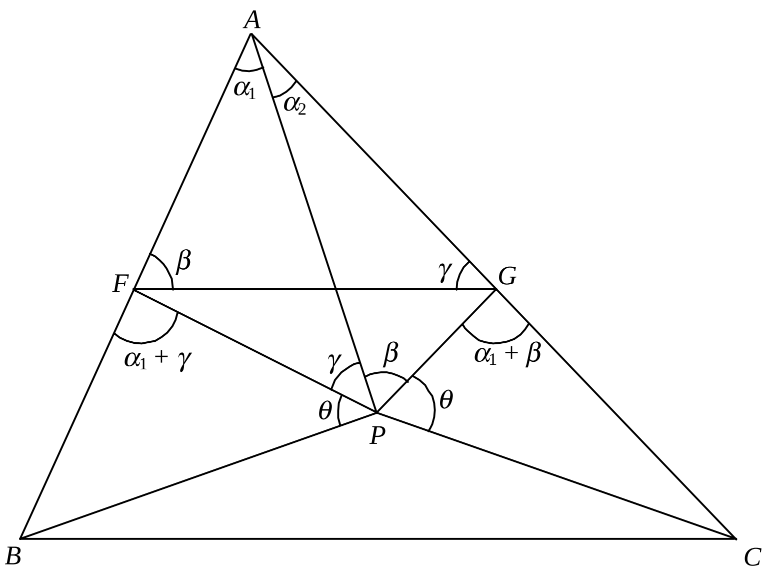
$$\angle APC - \angle ABC = \angle APB - \angle ACB$$

Sejam D e E os incentros dos triângulos APB e APC, respectivamente. Prove que as retas BD, CE e AP passam por um ponto em comum.

Resolução
Seja $\theta = \angle APC - \angle ABC = \angle APB - \angle ACB$.



Veja que podemos "separar" θ de β e γ. Note que se θ ficar "para baixo" obtemos um quadrilátero inscritível, então faremos isso.



O quadrilátero *AFPG* é inscritível, logo $\angle AFG = \beta$, ou seja, $FG \,//\, BC$.

O problema pede, na verdade, para provarmos que as bissetrizes de $\angle ACP$ e $\angle ABP$ se encontram sobre *AP*. Sejam *Q* e *R* as interseções de *BD* e *CE* com *AP*. Devemos ter *Q* = *R*. Do teorema das bissetrizes,

$$\frac{AQ}{QP} = \frac{AB}{BP} \text{ e } \frac{AR}{RP} = \frac{AC}{CP}$$

Como

$$Q = R \Leftrightarrow AQ = AR \Leftrightarrow \frac{AQ}{AP - AQ} = \frac{AR}{AP - AR} \Leftrightarrow \frac{AQ}{QP} = \frac{AR}{RP},$$

é suficiente demonstrarmos que

$$\frac{AB}{BP} = \frac{AC}{CP}$$

Vamos, então, calcular *BP* e *CP*. Sendo *FG* paralela a *BC*, temos *FB* = *k* · *AB*.
Aplicando a lei dos senos ao triângulo *BFP*, temos

$$\frac{BP}{\operatorname{sen}(\alpha_1 + \gamma)} = \frac{FB}{\operatorname{sen}\theta} \Leftrightarrow BP = \frac{k \cdot AB \operatorname{sen}(\alpha_1 + \gamma)}{\operatorname{sen}\theta} \Leftrightarrow \frac{AB}{BP} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{k \operatorname{sen}(\alpha_1 + \gamma)}$$

Analogamente,

$$\frac{AC}{CP}=\frac{\operatorname{sen}\theta}{k\operatorname{sen}(\alpha_2+\beta)}$$

Como $\alpha_1+\gamma$ e $\alpha_2+\beta$ somam π, o resultado está demonstrado.

GEOMETRIA ANALÍTICA

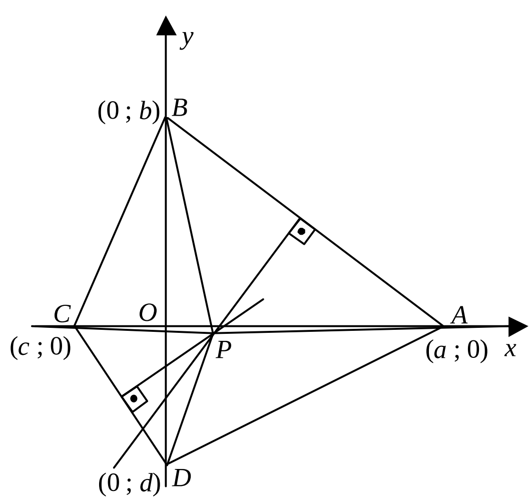
Quando aparecem problemas com muitos ângulos retos e que envolvam só retas, geometria analítica às vezes é indicada.

Exemplo

(IMO) No quadrilátero convexo *ABCD*, as diagonais *AC* e *BD* são perpendiculares e os lados opostos *AB* e *CD* não são paralelos. Sabemos que o ponto *P*, onde se intersectam as mediatrizes de *AB* e *CD*, está no interior de *ABCD*. Prove que *ABCD* é um quadrilátero cíclico se, e somente se, os triângulos *ABP* e *CDP* têm áreas iguais.

Resolução

Esse problema é perfeito para se resolver com geometria analítica: é muito fácil colocar as coisas nos eixos (tome como eixos as diagonais); tudo é muito fácil de calcular analiticamente (mediatrizes e áreas); e , por fim, a única condição que poderia complicar, que é saber quando *ABCD* é cíclico, pode ser facilmente transformada na potência da interseção das diagonais em relação ao seu circuncírculo.



Sejam, então, $A = (a; 0)$, $B = (0, b)$, $C = (c, 0)$ e $D = (0; d)$. O quadrilátero $ABCD$ é inscritível se, e somente se, $OA \cdot OC = OB \cdot OD \Leftrightarrow ac = bd$. Fácil não?

Seja $P = (x; y)$. Como P pertence às mediatrizes de AB e CD, temos $PA = PB$ e $PC = PD$.

$PA = PB \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - 0)^2 = (x - 0)^2 + (y - b)^2 \Leftrightarrow 2ax - a^2 = 2by - b^2$

Analogamente, $PC = PD \Leftrightarrow 2cx - c^2 = 2by - b^2$. Resolvendo o sistema obtido, temos

$$\left|\begin{array}{l} 2ax - 2by = a^2 - b^2 \\ 2cx - 2dy = c^2 - d^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x = \dfrac{(a^2 - b^2)d - (c^2 - d^2)b}{2(ad - bc)} \\ y = \dfrac{(a^2 - b^2)c - (c^2 - d^2)a}{2(ad - bc)} \end{array}\right.$$

Tudo bem com os denominadores pois, como AB e CD não são paralelos, $OA/OB \neq OC/OD \Leftrightarrow a/b \neq c/d \Leftrightarrow ad - bc \neq 0$ (nunca se esqueça de verificar quando os denominadores são nulos; essa verificação às vezes faz você perceber que tem que estudar alguns casos em separado).

A área do triângulo PAB é igual a $|D|/2$ em que

$$D = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = -ay - bx + ab$$

Da mesma forma, a área do triângulo PCD é igual a $|D'|/2,$ em que

$$D' = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ c & 0 & 1 \\ 0 & d & 1 \end{vmatrix} = -cy - dx + cd$$

Assim, devemos ter

$$\left|-ay-bx+ab\right|=\left|-cy-dx+cd\right|$$

Seria muito bom nos livrarmos do módulo. O sinal de D depende da ordem em que colocamos as coordenadas no determinante. Se os pontos correspondentes estão dispostos no sentido anti-horário, D é positivo; se estão no sentido horário, é negativo. Como P pertence ao interior de $ABCD$, PAB e PCD têm a mesma orientação, de modo que realmente podemos nos livrar do módulo. Logo, tirando o módulo e substituindo x e y, temos que as áreas de PAB e PCD são iguais se, e somente se,

$$(a-c)\frac{(a^2-b^2)c-(c^2-d^2)a}{2(ad-bc)}+(b-d)\frac{(a^2-b^2)d-(c^2-d^2)b}{2(ad-bc)}=ab-cd \quad (**)$$

Nada de abrir tudo com pressa! Queremos $ac = bd$, e isso significa que provavelmente em algum momento fatoraremos a equação com $ac - bd$ como um dos fatores.

(**)

$$\Leftrightarrow (a^2-b^2)(ac+bd-c^2-d^2)+(c^2-d^2)(ac+bd-a^2-b^2)=2(ab-cd)(ad-bc)$$

$$\Leftrightarrow (ac+bd)(a^2+c^2-b^2-d^2)-a^2c^2-a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2-a^2c^2-b^2c^2+a^2d^2+b^2d^2$$

$$=2(a^2bd-ab^2c-acd^2+bc^2d)$$

$$\Leftrightarrow ac(a^2+c^2)-bd(b^2+d^2)-acb^2-acd^2+bda^2+bdc^2-2(a^2c^2-b^2d^2)$$

$$=2(a^2bd-ab^2c-acd^2+bc^2d)$$

$$\Leftrightarrow ac(a^2+c^2)-bd(b^2+d^2)-(-acb^2-acd^2+bda^2+bdc^2)-2(a^2c^2-b^2d^2)=0$$

$$\Leftrightarrow ac(a^2+c^2)-bd(b^2+d^2)+ac(b^2+d^2)-bd(a^2+c^2)-2(ac-bd)(ac+bd)=0$$

$$\Leftrightarrow (ac-bd)((a-c)^2+(b-d)^2)=0$$

$$\Leftrightarrow ac=bd \text{ ou } (a=c \text{ e } b=d)$$

Não é possível termos $a = c$ e $b = d$ pois já vimos que $ad \neq bc$. Logo as áreas de PAB e PCD são iguais se, e somente se, $ac = bd$.

A geometria analítica tem uma pequena desvantagem: não passa de aplicações extensivas do teorema de Pitágoras.

Apesar de Pitágoras resolver problemas como o que acabamos de ver, mesclar um pouco as contas com trigonometria e números complexos pode vir a calhar.

Agora, alguns problemas para você pensar.

PROBLEMAS

01. Seja ABC um triângulo acutângulo, M o ponto médio do segmento BC, P o ponto sobre o segmento AM tal $PM = BM$, H o pé da perpendicular de P a BC, Q o ponto de interseção entre o segmento AB e a reta que passa através de H e é perpendicular a PB e, finalmente, R o ponto de interseção entre o segmento AC e a reta que passa através de H e é perpendicular a PC. Mostre que o circuncírculo do triângulo QHR é tangente a BC no ponto H.

02. No triângulo ABC, $AB = AC$. D é um ponto sobre o lado BC tal que $BD = 2\ CD$. Se P é o ponto de AD tal que $\angle ABP = \angle PAC$, prove que $2\angle DPC = \angle BAC$.

03. Um quadrilátero convexo está inscrito em uma circunferência de raio unitário. Demonstre que a diferença entre seu perímetro e a soma das diagonais é maior do que zero e menor do que 2.

04. (IMO) O prolongamento da bissetriz AL do triângulo acutângulo ABC intercepta a circunferência circunscrita no ponto N. A partir do ponto L traçam-se perpendiculares LK e LM aos lados AB e AC, respectivamente. Prove que a área do triângulo ABC é igual a área do quadrilátero $AKNM$.

05. (Ibero) A circunferência inscrita no triângulo ABC é tangente aos lados BC, CA e AB nos pontos D, E e F, respectivamente. AD corta a circunferência num segundo ponto Q. Demonstrar que a reta EQ passa pelo ponto médio de AF se, e somente se, $AC = BC$.

06. (IMO) Seja I o incentro do triângulo ABC. A circunferência inscrita no triângulo ABC é tangente aos lados BC, CA e AB nos pontos K, L e M, respectivamente. A reta que passa por B, paralela ao segmento MK, intercepta as retas LM e LK nos pontos R e S, respectivamente. Prove que o ângulo $\angle RIS$ é agudo.

07. (Vietnã) Seja ABC um triângulo e A', B', C' pontos médios dos arcos BC, AC e AB do circuncírculo de ABC, respectivamente. As retas $A'B'$ e $A'C'$ interceptam o lado BC em M e N, respectivamente. Defina os pares de pontos P, Q e R, S analogamente. Prove que $MN = PQ = RS$ se, e somente se, ABC é equilátero.

08. (IMO) Seja ABC um triângulo acutângulo com circuncentro O. Seja PA uma altura do triângulo com P no lado BC.

    Considere que $\angle BCA \geq \angle ABC + 30°$.

    Prove que $\angle CAB + \angle COP < 90°$.

09. (IMO) Num triângulo ABC, seja AP a bissetriz de $\angle BAC$ com P no lado BC, e seja BQ a bissetriz de $\angle ABC$ com Q no lado CA.

    Sabemos que $\angle BAC = 60°$ e que $AB + BP = AQ + QB$.

    Quais são os possíveis valores dos ângulos do triângulo ABC?

10. (Coréia) Sejam R e r o circunraio e o inraio, respectivamente, do triângulo ABC, e R' e r' o circunraio e o inraio, respectivamente, do triângulo $A'B'C'$. Prove que se $\angle C = \angle C'$ e $Rr' = R'r$ então os triângulos são semelhantes.

11. (Turquia) Sejam A_C e P_C a área e o perímetro, respectivamente, do quadrilátero cíclico C. Se a área e o perímetro do quadrilátero cujos lados são tangentes ao circuncírculo de C são A_T e P_T, respectivamente, prove que

$$\frac{A_C}{A_T} \geq \left(\frac{P_C}{P_T}\right)^2$$

12. (EUA) Seja $ABCD$ um trapézio isósceles com AB // CD. O incírculo do triângulo BCD toca CD em E. Seja F um ponto da bissetriz de $\angle DAC$ tal que $EF \perp CD$. O circuncírculo do triângulo ACF corta a reta CD em C e G.

    Mostre que o triângulo AFG é isósceles.

13. (Balcânica, adaptado) Seja ABC um triângulo acutângulo e M, N e P as projeções ortogonais do baricentro de ABC sobre seus lados. Prove que

$$\frac{2}{9} < \frac{[MNP]}{[ABC]} \leq \frac{1}{4}$$

([XYZ] é a área do triângulo XYZ)

14. (Ibero) Dados dois círculos ω_1 e ω_2, dizemos que ω_1 *bissecta* ω_2 quando se intersectam e a corda comum é um diâmetro de ω_2. Se ω_1 e ω_2 são idênticas, dizemos que ω_1 e ω_2 bissectam-se mutuamente. Considere dois círculos fixos e não concêntricos ω_1 e ω_2.

    (a) Mostre que há infinitos círculos ω que bissectam tanto ω_1 como ω_2.

    (b) Encontre o lugar geométrico do centro de ω.

15. (Ibero) Seja ABC um triângulo acutângulo com circuncírculo ω centrado em O. Seja AD, BE e CF as alturas de ABC. A reta EF corta ω em P e Q.

    (a) Prove que $AO \perp PQ$.

    (b) Se M é o ponto médio de BC, prove que $AP^2 = 2AD \cdot OM$

16. (São Petersburgo) Seja AL uma bissetriz interna do triângulo ABC, com L sobre BC. As retas paralelas l_1 e l_2 passam por B e C, respectivamente, e são equidistantes de A. Os postos M e N pertencem a l_1 e l_2, respectivamente, e são tais que os pontos médios de LM e LN pertencem a AB e AC, respectivamente. Prove que $LM = LN$.

17. (IMO) No plano, considere uma circunferência C, uma reta L tangente à circunferência e M um ponto da reta L. Encontre o lugar geométrico dos pontos P com a seguinte propriedade: existem dois pontos Q, R da reta L tais que M é o ponto médio de QR e C é a circunferência inscrita no triângulo PQR.

A ENUMERABILIDADE DE $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ E O CHÃO TRIANGULAR

José Paulo Carneiro

♦ Nível Intermediário

Uma das maneiras mais conhecidas de mostrar que o conjunto $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ é enumerável, isto é, que existe uma bijeção entre $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}$, (onde $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \ldots\}$ é o conjunto dos números naturais) é exibir uma bijeção de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N}$, inspirada na figura:

$$\begin{array}{ccccc}
(0; 0) & (0; 1) & (0; 2) & (0; 3) & \ldots \\
(1; 0) & (1; 1) & (1; 2) & (1; 3) & \ldots \\
(2; 0) & (2; 1) & (2; 2) & (2; 3) & \ldots \\
(3; 0) & (3; 1) & (3; 2) & (3; 3) & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots &
\end{array}$$

a qual sugere a enumeração:

(0; 0); (1; 0); (0; 1); (2; 0); (1; 1); (0; 2); (3; 0); (2; 1); (1; 2); (0; 3);… Ou seja, colocamos, sucessivamente, os pares (a; b) tais que a soma $a + b$ assuma os valores 0; 1; 2; 3; …, e dentro da cada grupamento que tenha $a + b$ constante (correspondente, na figura, a uma das diagonais indicadas), ordenamos os pares pela ordem natural de sua segunda componente.
Obtém-se então a bijeção:

$$\begin{array}{c}
f: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N} \\
(0; 0) \to 0 \\
(1; 0) \to 1 \\
(0; 1) \to 2 \\
(2; 0) \to 3 \\
(1; 1) \to 4 \\
(0; 2) \to 5 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots.
\end{array}$$

Onde $f(x; y)$ é o lugar que ocupa (x; y) nesta enumeração. (Como estamos incluindo 0 em N, é preciso começar a contar a partir do 0-ésimo lugar).
Uma questão interessante é produzir uma fórmula explícita para esta função e utilizar esta fórmula para provar que f é realmente uma bijeção.

Para isto, seja $(x; y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Observando a figura, vê-se que se $(x; y)$ for tal que $x + y = s > 0$, então o par $(x; y)$ é precedido, pelo menos, por todos os pares $(u; v)$ tais que $u + v = 0; 1; 2;\ldots;s - 1$. Existe um par que tem soma 0, dois que têm soma 1, e assim por diante, até s pares que têm soma $s - 1$, de modo que esses pares são em número de $1+\ldots+s=\dfrac{s(s+1)}{2}$. Além disto, já na sua diagonal, o par $(x; y)$ é precedido por y pares.

Portanto, $f(x;y)=\dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2}+y=\dfrac{(x+y)^2+x+3y}{2}$. Finalmente, constata-se diretamente que esta fórmula também é válida se $(x; y) = (0; 0)$. Podemos então concluir que f é dada pela fórmula:

$$f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$$
$$f(x;y)=\frac{(x+y)^2+x+3y}{2}$$

Pode ser útil ao leitor testar esta fórmula para pares específicos.

Imaginemos agora que seja apresentado ao leitor, sem nenhuma menção a sua origem, o seguinte problema: provar que a função definida por $f(x;y)=\dfrac{(x+y)^2+x+3y}{2}$ é uma bijeção de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N}$.

Naturalmente, o leitor iniciará tentando provar que f é injetiva, mostrando que $f(a; b) = f(c; d)$ implica $(a; b) = (c; d)$. Mas da equação $\dfrac{(a+b)^2+a+3b}{2}=\dfrac{(c+d)^2+c+3d}{2}$ não é imediato concluir que $(a; b) = (c; d)$, como o leitor pode experimentar.

No entanto, se lembrarmos a maneira pela qual criamos a fórmula definidora de f, podemos raciocinar do seguinte modo. Suponhamos primeiro que $a + b = c + d$ (ou seja, $(a; b)$ e $(c; d)$ estão na mesma diagonal). Neste caso, $f(a; b) = f(c; d) \Rightarrow (a + b)^2 + a + 3b = (c + d)^2 + c + 3d \Rightarrow a + b + 2b = c + d + 2d \Rightarrow 2b = 2d \Rightarrow b = d$ e, portanto, $a = c$.

Por outro lado; se $a + b \neq c + d$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $a + b > c + d$. Mas então $(a + b)^2 > (c + d)^2$ e, como $f(a; b) = f(c; d)$, obtém-se $(a + b)^2 - (c + d)^2 = 3d + c - (3b + a) > 0$, mas $(a + b)^2 - (c + d)^2 =$

$(a + b - c - d)(a + b + c + d) \geq a + b + c + d$, e logo $3d + c-(3b + a) \geq a + b + c + d$, donde $2d \geq 2a + 4b$, e portanto $c + d \geq d \geq a + 2b \geq a + b$, absurdo.
Logo, não pode ocorrer o caso $a + b > c + d$, e a conclusão final é que f é injetiva.
Provar a sobrejetividade de f, sem apelar para a forma pela qual criamos f, não parece fácil. O que queremos provar é que, dado $n \in \mathbb{N}$, existe um par $(x; y)$ tal que $f(x; y) = \dfrac{(x+y)^2 + x + 3y}{2} = n$. É aconselhável que o leitor primeiro tente fazê-lo, para sentir a dificuldade de calcular x e y em função de n.

Para começar por um exemplo concreto, se $n = 50$, quem é $(x; y) = f^{-1}(50)$? Ou seja, calcule x e y naturais (e já sabemos, pela injetividade, que serão únicos!) tais que $\dfrac{(x+y)^2 + x + 3y}{2} = 50$. Se apelarmos para o esquema das diagonais, vamos iniciar perguntando em que diagonal está o 50º. par. Para isto, vamos descobrir primeiro quais números da forma 1; 1 + 2 = 3; 1 + 2 + 3 = 6, etc., precedem 50. Calculando "no braço", vemos que 50 é precedido por 1; 3; 6; 10; 15; 21; 28; 36; 45 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 (o próximo já seria 55). Isto significa que $f^{-1}(50)$ é precedido pelos 45 pares $(u; v)$ que têm somas $u + v = 0; 1; 2;\ldots;8$, sendo o último deles igual a $(0; 8) = f^{-1}(44)$ (não esqueça de contar a partir do 0). A diagonal seguinte começa com o par $(9; 0) = f^{-1}(45)$. Para chegar ao 50, precisamos andar mais cinco pares sobre esta diagonal: (8; 1); (7; 2); (6; 3); (5; 4); (4; 5), chegando até o $(4; 5) = f^{-1}(50)$. Este par é o 50º. da seqüência (nunca esquecendo de contar a partir do 0) e, portanto, é o único que satisfaz a $f(x; y) = 50$.
Para abordar o caso geral, vamos primeiro lembrar que os números $T_1 = 1$; $T_2 = 1 + 2 = 3$, $T_3 = 1 + 2 + 3,\ldots$, $T_k = 1 + \ldots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$, são chamados **números triangulares** (ver [1]). Dado n (vamos considerar somente $n > 0$, já que $f^{-1}(0) = (0; 0)$ é imediato), para determinar $(x; y) = f^{-1}(n)$ pelo método usado acima, é necessário primeiro determinar o maior número triangular T_k tal que $T_k \leq n$, que vamos chamar de **chão triangular de** n. Por exemplo, como vimos, o chão triangular de 50 é 45.
A existência do chão triangular de n, no caso geral, decorre do seguinte: a seqüência $T_1; \ldots; T_m; \ldots$ é ilimitada superiormente; logo, algum T_m é maior do que n; pelo Princípio da Boa Ordenação dos números naturais (ver [2]), seja T_j o menor dos T_m que são maiores do que n; então T_{j-1} é o chão triangular de n; de fato, $T_{j-1} \leq n < T_j$.

Para mostrar a unicidade do chão triangular de n, suponha (por absurdo) que $T_p \le n < T_{p+1}$ e $T_q \le n < T_{q+1}$ com $p < q$ (sem perda de generalidade). Como a seqüência (T_m) é estritamente crescente, $n < T_{p+1} \le T_q \le n,$ absurdo.

Uma vez então determinado T_k, o chão triangular de n, o par $(x; y) = f^{-1}(n)$ estará na diagonal de soma k, formada pelos pares $(k; 0)$; $(k - 1; 1)$;…;$(0; k)$. Nesta diagonal, $f(k; 0) = T_k$; $f(k - 1; 1) = T_k + 1$;…; $f(0; k) = T_k + k = T_{k+1} - 1$, ou seja, de um modo geral: $f(k - j; j) = T_k + j$. Quando $j = n - T_k$, termos $f(k-n+T_k;n-T_k)=n$. Logo: $(x;y)=f^{-1}(n)=(k-n+T_k;n-T_k)$. Por exemplo: $f^{-1}(50)=(9-50+45;50-45)=(4;5)$.

Como conseqüência deste raciocínio, fica claro que f é injetiva e sobrejetiva e que se pode determinar de modo único $f^{-1}(n)$ para cada n pela fórmula:

$$f^{-1}(n)=\begin{cases} 0; & \text{se} \quad n=0 \\ (k-n+T_k;n-T_k); & \text{se} \quad n>0 \end{cases}$$

onde T_k é o chão triangular de n.

Mas permanece um problema mais sutil; existe alguma fórmula fechada que calcule k tal que T_k seja o chão triangular de um dado n?

Para responder a isto, observe que a solução positiva de $\dfrac{x(x+1)}{2}=n$ é $x_0=\dfrac{\sqrt{8n+1}-1}{2}$ e que a função $f(x)=\dfrac{x(x+1)}{2}$ é crescente em $[0;+\infty[$. Sendo, pois $k=\lfloor x_0 \rfloor$ (onde $\lfloor x_0 \rfloor$ simboliza o **chão inteiro de** x_0, ou **a parte inteira de** x_0), temos $k \le x_0 < k+1$ e, portanto: $T_k=\dfrac{k(k+1)}{2} \le \dfrac{x_0(x_0+1)}{2}=n<\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}=T_{k+1}.$

Conclusão: uma expressão explícita para k tal que T_k seja o chão triangular de n é:

$$k = \left\lfloor \frac{\sqrt{8n+1}-1}{2} \right\rfloor.$$

Por exemplo, para n = 50, temos: $k = \left\lfloor \frac{\sqrt{401}-1}{2} \right\rfloor = \lfloor 9,51... \rfloor = 9.$

Referências:

[1] Carneiro, J.P.; *Contar de duas maneiras, para generalizar;* Eureka! N^{o}. 6; pp. 15-17.
[2] Carneiro, J.P; *O Princípio da Descida Infinita de Fermat;* Revista do Professor de Matemática, N^{o}. 32; 3^{o}. quadrimestre de 1996; pp. 39-44.

COMO É QUE FAZ?

PROBLEMA 1
PROPOSTO POR ASDRUBAL SANTOS (BOTUCATU – SP)

Encontre todas as funções $f:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tais que:

i) $f(x) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}_+$

ii) $f(f(x)-x) = 2x,$ para todo $x \in \mathbb{R}_+.$

SOLUÇÃO DE GUILHERME RODRIGUES NOGUEIRA DE SOUZA (SÃO PAULO - SP)

Seja a função $g:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que $g(x) = f(x) - x,$ para todo $x \in \mathbb{R}_+$

Logo:

$$f(g(x)) = 2x$$
$$\Leftrightarrow g(x) + g(g(x)) = 2x$$
$$\Leftrightarrow g(g(x)) = -g(x) + 2x \text{ (I)}$$

Seja: $g^0(x) = x, g^{n+1}(x) = g(g^n(x)),$ para todo $n \in \mathbb{N}.$

Logo, por (I):

$$g(g(g^{(n)}(x))) = -g(g^{(n)}(x)) + 2g^{(n)}(x)$$
$$\Leftrightarrow g^{(n+2)}(x) = -g^{(n+1)}(x) + 2g^{(n)}(x)$$

Seja $a_n = g^{(n)}(x),$ com x fixo.

Então chegamos na seguinte recursão:

$$a_{n+2} = -a_{n+1} + 2a_n$$

Resolvendo essa recursão chegamos em:

$$a_n = \left(\frac{g(x)+2x}{3}\right)\cdot 1^n - \left(\frac{g(x)-x}{3}\right)(-2)^n$$
$$\Leftrightarrow g^{(n)}(x) = \frac{g(x)+2x}{3} - \left(\frac{g(x)-x}{3}\right)(-2)^n$$

Para n suficientemente grande temos

$$\left|\frac{g(x)+2x}{3}\right| < 2^n \left|\frac{g(x)-x}{3}\right|, \text{ desde que } g(x) \ne x.$$

Suponha, por absurdo que $g(x) > x$ para algum $x \in \mathbb{R}_+$

Tome *n* par. Temos que $g^{(n)}(x)$ é negativo se *n* é suficientemente grande, o que é absurdo, pois *g* é de $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.
Suponha agora que $g(x) < x.$ Também por absurdo, tomando *n* ímpar, concluímos que $g^{(n)}(x)$ é negativo, e como já vimos antes isso é um absurdo.
Portanto, para todo *x* positivo, $g(x) > x$ e $g(x) < x$ são falsos.
Logo $g(x) = x$, para todo *x* positivo. Então $f(x) - x = x \Leftrightarrow f(x) = 2x$
Vamos testar $f(x) = 2x$.
Temos: $f(f(x) - x) = 2x \Leftrightarrow f(2x - x) = 2x \Leftrightarrow f(x) = 2x \Leftrightarrow 2x = 2x,$
então a única função que satisfaz o enunciado é $f(x) = 2x.$

PROBLEMA 2
PROPOSTO POR ASDRUBAL SANTOS (BOTUCATU – SP)
Mostre que não existem funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(f(x)) = x^2 - 2, \forall x \in \mathbb{R}.$

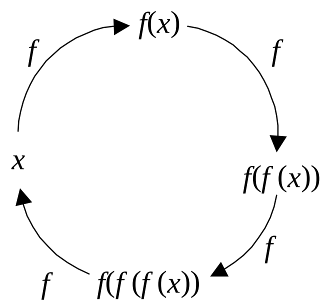
SOLUÇÃO DE TELMO LUIS CORREA JÚNIOR (SÃO PAULO – SP)
Vamos determinar os possíveis valores de *x* para que $f(f(x)) = x$:
$x = x^2 - 2 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -1$.
Agora, os valores tais que $f(f(f(f(x)))) = x$:

$$\Leftrightarrow f(f(x^2 - 2)) = x$$
$$\Leftrightarrow (x^2 - 2)^2 - 2 = x$$
$$\Leftrightarrow x^4 - 4x^2 - x + 2 = 0$$

Mas 2 e –1 devem ser raízes dessa equação, pois
$f(f(x)) = x \Rightarrow f(f(f(f(x)))) = x$.
Fatorando, obtemos:

$$(x - 2)(x + 1)(x^2 + x - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x - 2)(x + 1)\left(x - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right) = 0$$

Logo os únicos valores tais que $f(f(f(f(x)))) = x$ são 2, –1, $\dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ e $\dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.
Considere os valores $x, f(x), f(f(x))$ e $f(f(f(x)))$.

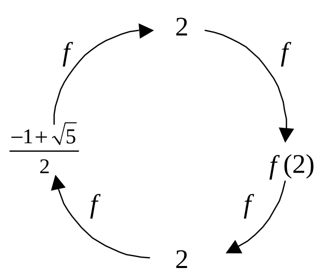


Para $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $f(f(f(f(x))))=x.$

Considere os possíveis valores de $f(x)$: como $f(f(f(f(f(x)))))=f(x)$, $f(x)$ pode ser apenas 2, –1, $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}.$

De fato, se $f(x)=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, então $f(x)=x$, logo $f(f(x))=f(x).$ Absurdo, pois temos

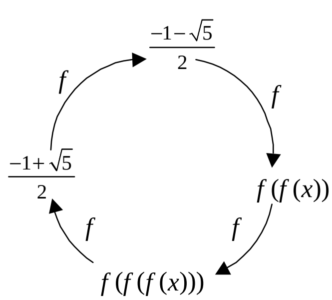
$$f\left(f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)=\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-2\neq\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$



Se $f(x)=2$, como $f(f(2))=2$, então $f(f(f(x)))=2$, logo $f(2)=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, absurdo.

Se $f(x)=-1$, de modo análogo ao caso $f(x)=2$ chegamos a um absurdo.

Se $f(x)=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, os possíveis valores para $f(f(x))$ são $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, 2 ou –1.



Se $f(f(x))=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, então $x=f(f(x))$, absurdo.

Se $f(f(x))=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, então $f\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, Logo $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = f(f(f\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right))) = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, absurdo.

Se $f(f(x)) = 2$, $f(f(f(f(x)))) = 2 \Rightarrow 2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, absurdo.

Se $f(f(x)) = -1$, $f(f(f(f(x)))) = -1 \Rightarrow -1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, absurdo.

Como em qualquer caso $f(f(x)) = x^2 - 2$ é um absurdo, não existe função f nessas condições.

PROBLEMA 3

PROPOSTO POR DAVI MÁXIMO ALEXANDRINO NOGUEIRA (FORTALEZA - CE)

Prove que é possível decompor o conjunto $\{1, 2, 3,\ldots,2^n\}$ em dois subconjuntos A e B não contendo nenhuma progressão aritmética de tamanho $2n$.

SOLUÇÃO:

Vamos escolher o conjunto A aleatoriamente:

Cada elemento de $U = \{1, 2,\ldots,2^n\}$ é colocado em A (ou em $B = U \setminus A$) com probabilidade 1/2, de forma independente. Agora, se fixarmos uma PA com $2n$ termos, a probabilidade de ela estar contida em A ou em B é $2\cdot\dfrac{1}{2^{2n}} = \dfrac{1}{2^{2n-1}}$. Por outro lado, podemos estimar o número de progressões aritméticas de tamanho $2n$ em U da seguinte forma: temos no máximo $\dfrac{2^n}{2n-1}$ possibilidades para a razão e no máximo 2^n possibilidades para o termo inicial, e logo temos no máximo $\dfrac{2^{2n}}{2n-1}$ tais PA's.

Como, para cada uma dessas PA's, a probabilidade de ela estar contida em A ou em B é $\dfrac{1}{2^{2n-1}}$, a probabilidade de alguma dessas PA's estar contida em A ou em B é, no máximo, $\dfrac{2^{2n}}{2n-1}\cdot\dfrac{1}{2^{2n-1}} = \dfrac{2}{2n-1} < 1$, para todo $n \geq 2$, donde há exemplos (de fato a grande maioria, se n é grande) de decomposições $U = A \cup B$ onde nem A nem B contêm progressões aritméticas de tamanho $2n$ (para $n = 1$ podemos tomar o exemplo $A = \{1\}$ e $B = \{2\}$).

SOLUÇÕES DE PROBLEMAS PROPOSTOS

✐ Publicamos aqui algumas das respostas enviadas por nossos leitores.

68. Seja ABC um triângulo de lados inteiros e área racional. Prove que existem pontos X, Y, Z com coordenadas inteiras no plano $\mathbb{R}^2$ tais que o triângulo XYZ é congruente ao triângulo ABC.

SOLUÇÃO DE ZOROASTRO AZAMBUJA NETO (RIO DE JANEIRO – RJ)

Sejam a, b, c as medidas dos lados do triângulo, respectivamente opostos aos vértices A, B e C. Podemos supor que $A=(0,0)$, $B=(c,0)$ e $C=(m,h)$. Temos que c é inteiro e $m^2+h^2=b^2, (m-c)^2+h^2=a^2$, com a e b inteiros. Daí obtemos $m=\dfrac{b^2-a^2+c^2}{2c}$ e logo $h^2=\dfrac{4b^2c^2-(b^2-a^2+c^2)^2}{4c^2}$. Como a área $\dfrac{ch}{2}$ de ABC é racional, segue que h é racional, e logo $4b^2c^2-(b^2-a^2+c^2)^2$ é um quadrado perfeito. Isso implica que $b^2-a^2+c^2$ é par (senão $4b^2c^2-(b^2-a^2+c^2)^2$ seria congruente a 3 módulo 4, absurdo).

Assim, $m=\dfrac{r}{c}$ e $h=\dfrac{s}{c}$ com r, s inteiros, e portanto, $r^2+s^2=b^2c^2$ (pois $m^2+h^2=b^2$).

Vamos agora mostrar que existem $x,y,u,v\in\mathbb{Z}$ tais que $x^2+y^2=c^2$, $u^2+v^2=b^2$ e $(x+yi)(u+vi)=r+si$. Isso resolve o problema, pois o número complexo $\varphi=\dfrac{x}{c}-\dfrac{y}{c}i$ tem módulo 1, e portanto a multiplicação por α é uma rotação em $\mathbb{R}^2$ que leva A, B, e C em $X=(0,0)$, $Y=(x,-y)$ e $Z=\varphi(m+hi)=\dfrac{(x-yi)}{c}\cdot\dfrac{(r+si)}{c}=$

$$=\frac{(x-yi)(x+yi)(u+vi)}{c^2}=u+vi=(u,v).$$ Assim, XYZ é congruente a ABC e seus vértices têm coordenadas inteiras.

Vamos mostrar a existência dos x, y, u, v: queremos mostrar que se $N(r+si)=r^2+s^2=b^2c^2$, com b, c, r, $s\in\mathbb{Z}$ então existem x, y, u, $v\in\mathbb{Z}$ com $(x+yi)(u+vi)=r+si$, $N(x+yi)=x^2+y^2=c^2$ e $N(u+vi)=u^2+v^2=b^2$.

Vamos provar isso por indução em $N(r+si)$ (se $N(r+si)=1$ o resultado é óbvio), usando existência e unicidade de fatoração em $\mathbb{Z}[i]=\{a+bi, a,b\in\mathbb{Z}\}$ (vejam o artigo de Guilherme Fujiwara na Eureka! No. 14).

Se $|c|=1,$ tomamos x = 1, y = 0, u = r e v = s. Se $|c|>1,$ tome α um fator irredutível de c. Temos que $\alpha | b^2c^2=(r+si)(r-si)$, e logo $\alpha | r+si$ ou $\alpha | r-si$ (e, nesse caso $\bar{\alpha} | r+si$). Suponha então, sem perda de generalidade, que $\alpha | r+si$. Temos então $\dfrac{r+si}{\alpha}\in \mathbb{Z}[i]$ e $N\left(\dfrac{r+si}{\alpha}\right)=\dfrac{(r+si)}{\alpha}\cdot\dfrac{(r-si)}{\bar{\alpha}}$. Se $N(\alpha)$ é um quadrado perfeito (o que nesse caso equivale a α ser o produto de um elemento de $\mathbb{Z}$ por um elemento de {1, i}), existem, por hipótese de indução, $\tilde{x}, \tilde{y}, u, v \in \mathbb{Z}$ com $\dfrac{r+si}{\alpha}=(\tilde{x}+\tilde{y}i)(u+vi),\ \tilde{x}^2+\tilde{y}^2=\dfrac{c^2}{N(\alpha)}, u^2+v^2=b^2,$ e basta tomar $(x+yi)=\alpha(\tilde{x}+\tilde{y}i)$ para concluir. Caso contrário, como $\alpha\,|\,c,\ \bar{\alpha}\,|\,c,$ e logo $\alpha\bar{\alpha}\,|\,c$ (pois α é irredutível e $\dfrac{\tilde{\alpha}}{\alpha}\notin\mathbb{Z}[i]$). Assim, $\alpha^2\bar{\alpha}^2\,|\,c^2\,|\,b^2c^2=(r+si)(r-si)$, e portanto $\alpha\bar{\alpha}\,|\,r+si$ ou $\alpha^2\,|\,r+si$. No primeiro caso, $N\left(\dfrac{r+si}{\alpha\bar{\alpha}}\right)=\dfrac{N(r+si)}{N(\alpha\bar{\alpha})}=b^2\cdot\left(\dfrac{c^2}{N(\alpha)^2}\right)$, e podemos escrever $\dfrac{r+si}{\alpha\bar{\alpha}}=(\tilde{x}+\tilde{y}i)(u+vi)$ com $\tilde{x}^2+\tilde{y}^2=\dfrac{c^2}{N(\alpha)^2}, u^2+v^2=b^2,$ e basta tomar $x+yi=\alpha\bar{\alpha}(\tilde{x}+\tilde{y}i)$. O segundo caso é análogo: $N\left(\dfrac{r+si}{\alpha^2}\right)=\dfrac{N(r+si)}{N(\alpha^2)}=b^2\cdot\left(\dfrac{c^2}{N(\alpha)^2}\right),$ e podemos escrever $\dfrac{r+si}{\alpha^2}=(\tilde{x}+\tilde{y}i)(u+vi)$ com $\tilde{x}^2+\tilde{y}^2=\dfrac{c^2}{N(\alpha)^2}, u^2+v^2=b^2,$ e basta tomar $x+yi=\alpha^2(\tilde{x}+\tilde{y}i)$.

69. Sejam a e b inteiros positivos tais que a^n-1 divide b^n-1 para todo inteiro positivo n.
Prove que existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $b=a^k$.

SOLUÇÃO DE ZOROASTRO AZAMBUJA NETO (RIO DE JANEIRO – RJ)
Suponha por absurdo que b não seja uma potência de a.
Então existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $a^k<b<a^{k+1}$. Consideremos a seqüência $x_n=\dfrac{b^n-1}{a^n-1}\in\mathbb{N},\ \forall\, n\ge 1.$ Como $\dfrac{1}{a^n-1}=\dfrac{1}{a^n}+\dfrac{1}{a^{2n}}+\ldots=\sum_{j=1}^{\infty}\dfrac{1}{a^{jn}},$ temos

$x_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b^n}{a^{jn}} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{a^{jn}} = \left(\frac{b}{a}\right)^n + \left(\frac{b}{a^2}\right)^n + \ldots \left(\frac{b}{a^k}\right)^n + \frac{b^n}{a^{kn}(a^n-1)} - \frac{1}{a^n-1}.$ Note que como $\frac{b^n}{a^{kn}(a^n-1)} = \frac{\left(b/a^{k+1}\right)^n}{1-a^{-n}}$ e $\frac{1}{a^n-1}$ tendem a 0 quando n cresce, se definimos $y_n = \left(\frac{b}{a}\right)^n + \left(\frac{b}{a^2}\right)^n + \ldots + \left(\frac{b}{a^k}\right)^n = \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{b}{a^j}\right)^n$, temos que $x_n - y_n = \frac{b^n}{a^{kn}(a^n-1)} - \frac{1}{a^n-1}$ tende a 0 quando n tende a infinito. Por outro lado, como y_n é uma soma de k progressões geométricas de razões b/a^j, $1 \le j \le k$, y_n satisfaz a equação de recorrência $C_0 y_{n+k} + C_1 y_{n+k-1} + \ldots + C_k y_n = 0, \quad \forall\, n \ge 0$, onde

$$C_0 x^k + C_1 x^{k-1} + \ldots + C_{k-1}x + C_k = a^{k(k+1)/2}\left(x - \frac{b}{a}\right)\left(x - \frac{b}{a^2}\right)\ldots\left(x - \frac{b}{a^k}\right)$$

(vejam o artigo "Equações de recorrência" na Eureka! No. 9).

Note que todos os C_i são inteiros. Note também que $C_0 x_{n+k} + C_1 x_{n+k-1} + \ldots + C_k x_n = C_0(x_{n+k} - y_{n+k}) + C_1(x_{n+k-1} - y_{n+k-1}) + \ldots + C_k(x_n - y_n)$ tende a 0 quando n tende a infinito, pois $x_{n+j} - y_{n+j}$ tende a 0 para todo j com $0 \le j \le k$ (e k está fixo). Como os C_i e os x_n são todos inteiros, isso mostra que $C_0 x_{n+k} + C_1 x_{n+k-1} + \ldots + C_k x_n = 0$ para todo n grande.

Agora, como $x_n = y_n + \left(\frac{b}{a^{k+1}}\right)^n + \frac{b^n}{a^{(k+1)n}(a^n-1)} - \frac{1}{a^n-1}$, temos

$$C_0 x_{n+k} + C_1 x_{n+k-1} + \ldots + C_k x_n = \sum_{j=0}^{k} C_j\left(\left(\frac{b}{a^{k+1}}\right)^{n+k-j} + z_{n+k-j}\right),$$ onde

$$z_m = \frac{b^m}{a^{(k+1)m}(a^m-1)} - \frac{1}{a^m-1}.$$

Note que $\sum_{j=0}^{k} C_k \left(\frac{b}{a^{k+1}}\right)^{n+k-j} = P\left(\frac{b}{a^{k+1}}\right)\cdot\left(\frac{b}{a^{k+1}}\right)^n$, onde

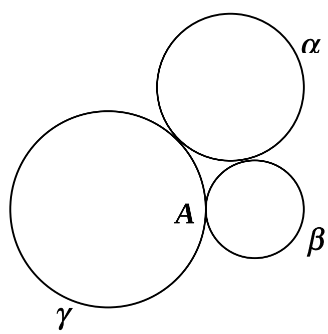
$P(x) = C_0 x^k + C_1 x^{k-1} + \ldots + C_{k-1}x + C_k = a^{k(k+1)/2}\left(x - \frac{b}{a}\right)\left(x - \frac{b}{a^2}\right)\ldots\left(x - \frac{b}{a^k}\right)$, donde $P\left(\frac{b}{a^{k+1}}\right) \ne 0.$ Por outro lado, para todo j com

$0 \le j \le k,\ z_{n+k-j} \Big/ \left(\dfrac{b}{a^{k+1}}\right)^n = \dfrac{\left(b/a^{k+1}\right)^{k-j}}{a^{n+k-j}-1} - \dfrac{1}{\left(a^{k-j}-a^{-n}\right)\left(b/a^k\right)^n}$, que tende a 0 quando n tende a infinito, donde $w_n = \left(\sum_{j=0}^{k} C_j x_{n+k-j}\right) \Big/ \left(\dfrac{b}{a^{k+1}}\right)^n$ tende a $P\left(\dfrac{b}{a^{k+1}}\right) \ne 0$, o que é um absurdo, pois, como vimos antes, w_n é igual a 0 para todo n grande.

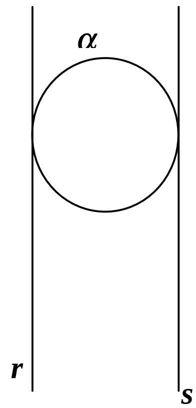
71. Considere três circunferências, tangentes duas a duas. Prove que há apenas duas circunferências tangentes às três simultaneamente, e mostre como construí-las.

SOLUÇÃO DE ANTONIO CAMINHA MUNIZ NETO (FORTALEZA – CE)

Prova Analisemos o caso em que as três circunferências, α, β, γ digamos, são tangentes *exteriormente* duas a duas (a análise dos demais casos é completamente análoga).



Seja A o ponto de tangência das circunferências β e γ. Aplicando à configuração mostrada na figura acima a inversão I de pólo A e módulo igual à potência de A em relação a α, a circunferência α permanece fixa, ao passo que as circunferências β e γ são respectivamente transformadas em retas distintas r e s, perpendiculares à reta que une seus centros. Como inversões preservam tangência de curvas, segue que r e s são ainda tangentes a α, de modo que a situação é exatamente a da figura abaixo (observe que r e s podem ser construídas com régua e compasso: elas são as tangentes a α que são perpendiculares à reta dos centros de β e γ):



Seja δ uma circunferência qualquer que tangência α, β e γ. É claro que δ não contém *A*, donde concluímos que sua inversa δ' ainda é uma circunferência, ademais tangente às inversas de α, β e γ, quer dizer, tangente a α, *r* e *s*. Portanto, segue imediatamente da figura acima que só há duas possibilidades para δ', digamos δ'_1 e δ'_2. Tais circunferências podem ser facilmente construídas com régua e compasso, basta para tanto observar que, sendo *R* o raio e *O* o centro de α, os centros de δ'_1 e δ'_2 são os pontos situados sobre a paralela a *r* por *O*, distando 2*R* de *O*. Portanto, há exatamente duas circunferências tangentes simultaneamente α, β e γ e tais circunferências são as inversas δ_1 e δ_2 de δ'_1 e δ'_2 por *I* (as quais também podem ser facilmente construídas).

73. Prove que, dado um inteiro positivo *n*, existe uma progressão aritmética crescente formada por *n* inteiros positivos cujas somas dos dígitos também formam uma progressão aritmética crescente, mas não existe uma progressão aritmética infinita de inteiros positivos cujas somas dos dígitos formem uma progressão aritmética crescente.

SOLUÇÃO DE JOSÉ DE ALMEIDA PANTERA (RIO DE JANEIRO – RJ)

Vamos mostrar, por indução em *k*, que para quaisquer inteiros positivos $k \ge 2$ e *N* e todo $\varepsilon > 0$ existe uma progressão aritmética crescente de inteiros positivos $(x_j)_{-N \le j \le k+N}$ tal que se $s(x_j)$ é a soma dos dígitos de x_j então $(s(x_j))_{-N \le j \le 1}$ é constante, $(s(x_j))_{1 \le j \le k}$ é uma progressão aritmética crescente de razão *r* e

$s(x_{k+i})-s(x_{k+i-1})<\varepsilon r$ para $1\le i\le N$. De fato, para k = 2, podemos tomar $x_1=10^{2m}-10^m, x_2-x_1=10^m-1,$ onde m é grande o suficiente para que $m\ge N$ (e logo $10^{\sqrt{m}}>N$) e $\frac{1}{\sqrt{m}}<\varepsilon.$

De fato, $s(x_i)=9m$, para $2-10^m\le i\le 1$ [pois, para $1\le a\le 10^m$, $a(10^m-1)=(a-1)\cdot 10^m+10^m-1-(a-1),$ donde $s(a\cdot(10^m-1))=s(a-1)+9m-s(a-1)=9m)$, $s(a\cdot(10^m-1))=s(x_2)=18m$ e, para $j>2$, digamos $j = 2 + a$, $x_j=a\cdot 10^m+10^{2m}-1-a=10^{2m}+(a-1)\cdot 10^m+10^m-1-a$, e, como $1+a\le N<10^{\sqrt{m}}$, $s(x_{j+1})-s(x_j)=1+s(a)+9m-s(a+1)-(1+s(a-1)+9m-s(a))=$
$=2s(a)-s(a-1)-s(a+1)<9\sqrt{m}<\varepsilon\cdot(9m).$

Vamos agora conseguir uma tal progressão aritmética com k = 1 elementos. Para isso, seja $(x_j)_{-N-1\le j\le k+N+1}$ uma progressão como acima associada a $\left(k,N+1,\frac{\varepsilon}{3}\right).$
Podemos supor que $N\ge k$ e $\frac{1}{\sqrt{N}}<\frac{\varepsilon}{2}$. Seja ℓ um inteiro tal que $10^{\ell}>x_{k+N+1}$.
Considere a seqüência $(y_j)_{-N\le j\le k+N+1}$, $y_j=x_j+10^{\ell}\cdot t_{j-k+1}$, onde $t_s=10^{2m}-1+s(10^m-1)$ e $m=\frac{r-(s(x_{k+1})-s(x_k))}{9}\ge(1-\varepsilon)N$, onde $r=s(x_2)-s(x_1)$ (note que m é inteiro pois $s(x_j)\equiv x_j(\text{mod}\,9)$ para todo j). Assim, $s(y_j)=s(x_j)+s(t_{j-k-1})$. Temos então $(s(y_j))_{-N\le j\le 1}$ constante e $s(y_{j+1})-s(y_j)=9m$, para $1\le j\le k.$ De fato, para $1\le j\le k-1,$ isso segue do fato análogo para $(x_j)_{1\le j\le k}$, e de $(s(t_{j-k-1}))_{1\le j\le k}$ ser constante, e para $j = k$,
$s(t_{j-k})-s(t_{j-k-1})=9m=r-(x_{k+1}-x_k)$, donde $s(y_{k+1})-s(y_k)=r=s(x_2)-s(x_1)$. O fato de termos $s(y_{k+1+i})-s(y_{k+i})<\varepsilon r$ para $1\le i\le N$ segue dos fatos análogos para $s(x_{k+i+1})$ e $s(y_i)$.

Suponha agora que exista uma progressão aritmética infinita de inteiros positivos $(x_j)_{j\ge 1}$ cujas somas dos dígitos $(s(x_j)_{j\ge 1})$ formam uma progressão aritmética crescente. Tome um inteiro positivo k tal que $10^k>x_2>x_1$, e note que $s(x_{10^k+1})=s(x_1+10^k(x_2-x_1))=s(x_1)+s(x_2-x_1)=s(x_1+10^{k+1}(x_2-x_1))=s(x_{10^{k+1}+1})$, absurdo.

74. Ache todas as funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tais que:
$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot\cos y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$

SOLUÇÃO DE MARCÍLIO MIRANDA DE CARVALHO (TERESINA – PI)

Faça $y=\dfrac{\pi}{2}$ e $x=\dfrac{\pi}{2}+t\Rightarrow f(\pi+t)+f(t)=0$ (I)

Faça $x = 0$ e $y = t \Rightarrow f(t) + f(-t) = 2a\cos t$, onde $a = f(0)$. (II)

Faça $x=\dfrac{\pi}{2}$ e $y=\dfrac{\pi}{2}+t\Rightarrow f(\pi+t)+f(-t)=2b\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+t\right)=-2b\operatorname{sen}t$, (III)

onde $b=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Somando (I) com (II) e subtraindo de (III) chegamos a $f(t) = a\cos t + b\operatorname{sen} t$, $\forall t\in\mathbb{R}$. É fácil verificar, apenas substituindo, que todas as funções $f(t)$ desta forma funcionam.

75. Seja T_n um triângulo retângulo cujos lados medem $(4\cdot n^2,\ 4\cdot n^4-1,\ 4\cdot n^4+1)$, onde n é um número inteiro positivo. Seja α_n a medida do ângulo oposto ao lado de medida $4\cdot n^2$. Mostre que, se n varia dentro dos inteiros positivos, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots=90^0$.

SOLUÇÃO DE ANTONIO CAMINHA MUNIZ NETO (FORTALEZA – CE)

Seja T_n um triângulo retângulo cujos lados medem $4n^2$, $4n^4 - 1$ e $4n^4 + 1$, onde n é um número inteiro positivo. Seja α_n a medida, em graus, do ângulo oposto ao lado de medida $4n^2$. Mostre que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ... = 90°$.

Solução: Sabemos que tg $\alpha_n = \dfrac{4n^2}{4n^4-1}$. Portanto, sendo $\alpha_n = 2\beta_n$ temos

$$\frac{2tg\beta_n}{1-tg^2\beta_n}=\frac{4n^2}{4n^4-1}.$$

Resolvendo a equação acima para tg β_n obtemos tg $\beta_n = \dfrac{1}{2n^2}$ para todo $n \geq 1$. Assim, basta provar que $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + ... = 45°$. Sendo $b_n = \text{tg}(\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n)$ para $n \geq 1$, temos então de provar que $b_n \to 1$ quando $n \to +\infty$.

Temos $b_1 = \text{tg}\,\beta_1 = \dfrac{1}{2}$ e, pela fórmula para a tangente da soma,

$$b_{n+1} = \frac{b_n + tg\beta_{n+1}}{1 - b_n tg\beta_{n+1}} = \frac{b_n + \frac{1}{2(n+1)^2}}{1 - \frac{b_n}{2(n+1)^2}} = \frac{2(n+1)^2 b_n + 1}{2(n+1)^2 - b_n}.$$

Provemos, por indução sobre $k \geq 1$, que (*) $b_k = \dfrac{k}{k+1}$, o que terminará a demonstração. A relação (*) é trivialmente verdadeira para $k = 1$. Suponha que já provamos que ela é verdadeira para $1 \leq k \leq n$, onde $n \geq 1$ é um inteiro. Então

$$b_{n+1} = \frac{2(n+1)^2\left(\frac{n}{n+1}\right)+1}{2(n+1)^2 - \left(\frac{n}{n+1}\right)} = \frac{[2(n+1)n+1](n+1)}{2(n+1)^3 - n}$$

$$= \frac{(2n^2+2n+1)(n+1)}{(2n^2+2n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

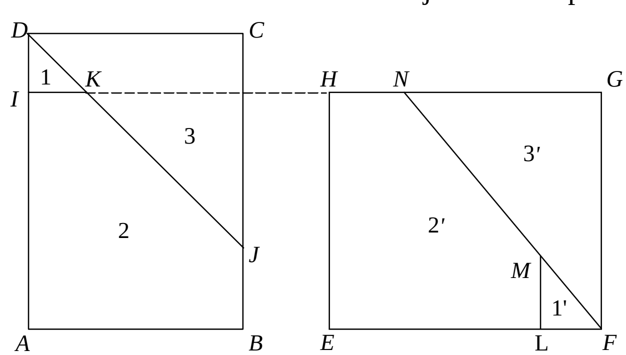
76. Mostre que um polígono qualquer pode ser recortado e os recortes reorganizados, sem superposição, de tal jeito que formem um quadrado.

SOLUÇÃO DE ANDERSON TORRES (SÃO PAULO – SP)

Este problema é tão legal que dá para generalizar! Vamos demonstrar que se dois polígonos têm mesma área podemos fatiar um deles e reorganizar as fatias de modo a produzir um polígono congruente ao segundo.

Lema 1: Um retângulo pode ser convertido em um novo retângulo do qual conhecemos um dos lados (por exemplo, qualquer retângulo de área x pode ser decomposto para formar um retângulo em que um dos lados mede 1 (e o outro medirá x neste caso).

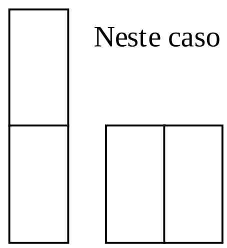
Prova: Basta exibir uma maneira de fazer isto. Veja este exemplo:



1) Faça com que as bases dos retângulos estejam alinhadas. Prolongue o lado *HG* até cortar o outro retângulo no ponto *I*.

2) Trace $DJ//IB$. Seja KI $//AB$ e $K \in DJ$. Agora é só deslizar o triângulo *DCJ* até *DC* se alinhar com *IK*. E depois encaixa *DIK* no espaço abaixo, em *MLF*.
   E acabou!

Esta construção só vale se $2.HE \geq DI$. Caso não seja possível, basta fatiar da maneira mais primitiva: fatia em partes iguais até cair no caso anterior:



Neste caso nem precisou!

Agora é só escrever. Dado um polígono qualquer, recortamos o desdito em triângulos quaisquer. Cada um deles pode ser fatiado para virar um paralelogramo (parte pela base média) e cada paralelogramo pode ser fatiado nun retângulo, é só cortar em uma altura. Podemos transformar cada um destes retângulos em fatias de lado 1, empilhá-los pelo lado comum e transformar isto tudo num quadrado (oras, um quadrado é um retângulo equilátero) E fim!

77. Prove que as distâncias entre um ponto sobre uma circunferência e os quatro vértices de um quadrado nesta inscrita não podem ser todos números racionais.

SOLUÇÃO DE CLAUDIO BUFFARA (SÃO PAULO – SP)

Seja o quadrado inscrito *ABCD* de lado *L* e suponhamos, sem perda de generalidade, que o ponto *P* se encontra no arco *AB*.

Se *P* coincide com *B*, então $m(PA) = m(PC) = L$ e $m(PD) = L \cdot \sqrt{2}$. Assim, se *L* é racional, então $m(PD)$ é irracional e se *L* é irracional, então $m(PA) = m(PC)$ é irracional. De forma análoga pode-se provar que se *P* coincide com *A*, então $m(PB)$, $m(PD)$ ou $m(PD)$ será irracional.

Suponhamos agora que *P* não coincide com *A* nem com *B* e que $m(PA)$, $m(PB)$, $m(PC)$ e $m(PD)$ sejam todos racionais.

O quadrilátero *PBCD* é inscritível. Assim, pelo Teorema de Ptolomeu, teremos:

$m(PD) \cdot m(BC) + m(PB) \cdot m(CD) = m(BD) \cdot m(PC)$.

Mas $m(BC) = m(CD) = L$ e $m(BD) = L \cdot \sqrt{2}$. Portanto:
$m(PD) + m(PB) = m(PC) \cdot \sqrt{2}$.
Mas:
$m(PD)$ e $m(PB)$ são racionais $\Rightarrow m(PD) + m(PB)$ é racional e

$m(PC)$ é racional $\Rightarrow m(PC) \cdot \sqrt{2}$ é irracional

Ou seja, um número racional é igual a um número irracional.

Temos, portanto, uma contradição, a qual ocorreu em virtude da hipótese feita inicialmente de serem $m(PA)$, $m(PB)$, $m(PC)$, $m(PD)$ todos racionais.

Conclusão: pelo menos um destes quatro segmentos tem de ter comprimento irracional.

Observação: se tomarmos o quadrilátero inscritível *PADB*, o Teorema de Ptolomeu nos dará:

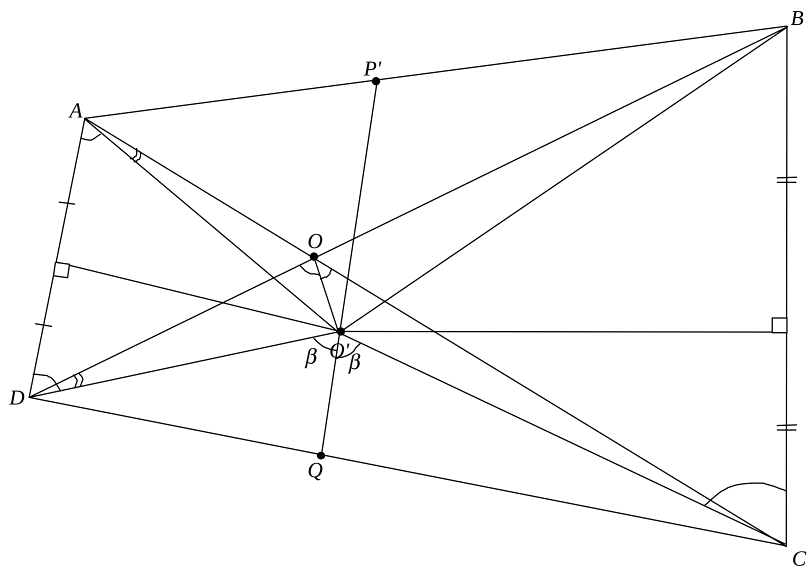
$m(PA) \cdot m(BD) + m(PB) \cdot m(AD) = m(PD) \cdot m(AB)$, ou seja:
$m(PA) \cdot \sqrt{2} + m(PB) = m(PD)$, e mais uma vez cairemos na contradição de ter um número racional igual a um número irracional.

78. Seja *ABCD* um quadrilátero convexo não trapézio, de diagonais *AC* e *BD* iguais. Tomamos sobre os lados *AB* e *CD*, respectivamente, pontos *P* e *Q* tais que:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{DQ}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}$$

Mostre que os pontos *P* e *Q* são colinares com o ponto de interseção das mediatrizes dos lados *AD* e *BC*.

SOLUÇÃO DE MARCOS FRANCISCO FERREIRA MARTINELLI (RIO DE JANEIRO – RJ)
Considere o quadrilátero *ABCD* $AC = BD$, onde *O* é o ponto de encontro das diagonais e *O*' o ponto de encontro das mediatrizes de *AD* e *BC*.



Provarei que os quadriláteros $AOO'D$ e $BOO'C$ são inscritíveis (i).

Seja $\alpha = \Delta A\hat{D}O'$. Como $DO' = O'A \Rightarrow \Delta D\hat{A}O' = \alpha$

Observe que os $\Delta ACO'$ e $\Delta BDO'$ são congruentes (L.L.L), mais uma vez porque $O'B = O'C$ e, do enunciado, $AC = BD$.

$\Rightarrow O'\hat{A}O = O\hat{D}O'$ e $D\hat{B}O' = A\hat{C}O' \Rightarrow i)$ está provado.

Como o quadrilátero $AOO'D$ é inscritível, $D\hat{O}O' = D\hat{A}O' = \alpha$

E ainda, $O'\hat{O}C = 180° - O'\hat{O}A = 180° - (180° - \alpha) = \alpha$

Como o quadrilátero $BOO'C$ é inscritível $, O'\hat{O}C = O'\hat{B}C = \alpha = O'\hat{C}B$ (ii)

De ii), observe que o $\Delta AO'D \sim \Delta O'BC \Rightarrow$

$$\frac{AO'}{AD} = \frac{BO'}{BC} \Rightarrow \frac{AD}{BC} = \frac{AO'}{BO'} \ (iii)$$

Seja $Q \in CD$, $\dfrac{DQ}{QC} = \dfrac{AD}{BC}$, bem como P' a interseção de QO' com AB. Se provarmos que $\dfrac{AP'}{P'B} = \dfrac{AD}{BC}$, teremos $P' \equiv P$.

Como, por hipótese, $\dfrac{DQ}{QC} = \dfrac{AD}{BC}$ e de (iii), temos $\dfrac{DQ}{QC} = \dfrac{AO'}{BO'} = \dfrac{DO'}{CO'}$, e conclui-se que $O'Q$ é bissetriz do $\Delta DO'C$.

Seja $D\hat{O}'Q = Q'\hat{O}'C = \beta \Rightarrow AO'P' = 180° - (\beta + 180° - 2\alpha) = 2\alpha - \beta$ e
$P'O'B = 180° - (\beta + 180° - 2\alpha) = 2\alpha - \beta$

$\Rightarrow O'P'$ é bissetriz do $\Delta AO'B \Rightarrow \dfrac{AP'}{P'B} = \dfrac{AO'}{O'B} = \dfrac{AD}{BC} \Rightarrow$ está provado que $P' \equiv P$.
Portanto, *P*, *O*'e *Q* estão sobre uma mesma reta. (c.q.d.)

79. Temos uma fileira infinita de copos, cada um deles associado a um inteiro *k*, e um número finito de pedras distribuídas de alguma maneira por esses copos. Se há pelo menos duas pedras no copo *k* podemos pular uma pedra para o copo *k* – 1 e outra para o copo *k* + 1.
Prove que fazendo movimentos desse tipo um número suficientemente grande de vezes, chega-se necessariamente a uma situação onde não é possível fazer nenhum movimento desse tipo (i.e., onde há no máximo uma pedra em cada copo), e que a configuração final não depende da escolha dos movimentos durante o processo.

SOLUÇÃO:

Sejam $x_1,...,x_n \in \mathbb{Z}$ as posições das *n* pedras. O número de pedras é sempre *n*, e em um movimento trocamos duas pedras na posição *k* (digamos com $x_i = x_j = k$) por $x_i = k-1$ e $x_j = k+1$. Temos então que $\sum_{i=1}^{n} x_i$ permanece constante e $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ aumenta a cada movimento, pois $(k+1)^2 + (k-1)^2 = 2k^2 + 2 > 2k^2$. Seja agora *m* o maior número de copos vazios entre dois copos ocupados. Então, se $m \neq 0$, *m* não aumenta em nenhum movimento e, se *m* = 0, após um movimento *m* passa a ser no máximo 1. Assim, a distância entre dois copos ocupados consecutivos fica limitada, e como o centro de gravidade $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ das pedras é constante, a "energia" $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ também fica limitada, e como sempre aumenta, em algum momento não será mais possível fazer nenhum movimento. O número de movimentos é limitado por $f(x_1,\ldots,x_n) = \ell^2 \sum_{j=1}^{n} j^2$, onde $\ell = \max\{2, r\}$ e, se $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$, $r = \max_{2 \leq i \leq n}(x_i - x_{i-1}) + 1$. Para cada $x_1, \ldots, x_n$, seja $g(x_1,...,x_n) \leq f(x_1,...,x_n)$ o número máximo possível de movimentos a partir da posição inicial $x_1, x_2,..., x_n$.

Suponha agora que exista uma posição inicial a partir da qual seja possível chegar a duas posições finais distintas. Seja $x_1,...,x_n$ uma tal posição com $g(x_1,...,x_n)$ mínimo. Esses dois jeitos de chegar em posições finais diferentes não podem começar com o mesmo movimento, pois senão, após esse movimento, o valor de *g* diminui, e a posição final passa a ser única pela minimalidade de $g(x_1,...,x_n)$, absurdo.
Agora, se os movimentos iniciais das duas seqüências de movimentos que levam a posições finais diferentes são feitos nas posições *k* e ℓ, após cada um desses movimentos o valor de *g* diminui e as posições finais ficam determinadas.
Por outro lado, se nos dois primeiros lances mexemos primeiro no copo *k* e depois no copo ℓ chegamos à mesma configuração que se primeiro mexermos no copo ℓ e depois no copo *k* (de fato, se inicialmente $x_i = x_j = k$ e $x_r = x_s = \ell$, chegaremos após esses dois lances, em qualquer ordem, em $x_i = k-1,\ x_j = k+1,\ x_r = \ell - 1$ e $x_s = \ell + 1$), donde as posições finais são iguais, absurdo.

80. Sejam $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $A = \{\lfloor n\alpha \rfloor, n \in \mathbb{N}^*\}$ e $B = \{\lfloor n\alpha^2 \rfloor, n \in \mathbb{N}^*\}$. Prove que $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = \mathbb{N}^*$.

Observação: $\lfloor x \rfloor$ é o inteiro tal que $\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1$.

SOLUÇÃO DE RODRIGO VILLARD MILET (RIO DE JANEIRO – RJ)
Temos que $\alpha^2 = \alpha + 1$.

1ªparte: $A \cap B = \emptyset$
Suponha o contrário, ou seja, que existem *m* e *n* naturais tais que $[\alpha m] = [\alpha^2 n] = k$. Daí temos que $k < \alpha m < k + 1$ e $k < \alpha^2 n < k + 1$
(a desigualdade é estrita, pois α é irracional), portanto :

$$\frac{m+n}{k+1} < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = 1 < \frac{m+n}{k} \Rightarrow k < m+n < k+1$$

o que é uma contradição, já que *k*, *m* e *n* são naturais.

2ªparte: $A \cup B = \mathbb{N}^*$

Suponha que exista um natural h que não está nem em A nem em B. Então existem naturais m e n tais que $\alpha m < h < h + 1 < \alpha(m + 1)$ e $\alpha^2 n < h < h + 1 < \alpha^2(n + 1)$. Logo :

$$\frac{m+n}{h} < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = 1 < \frac{m+n+2}{h+1} \Rightarrow m+n < h < h+1 < m+n+2$$

o que é uma contradição, já que $m + n + 1$ é o único natural entre $m + n$ e $m + n + 2$.

Enviaram soluções de problemas anteriores os seguintes leitores da EUREKA!

Carlos Alberto da Silva Victor	**Nilópolis – RJ**
Diêgo Veloso Uchôa	**Teresina – PI**
Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva	**Enviado via correio eletrônico**
Helder Oliveira de Castro	**Mogi das Cruzes – SP**
João Fernandes de Moura	**Niterói – RJ**
Leno Silva Rocha	**Goiânia – GO**
Murilo Rebouças Fernandes de Lima	**Goiânia – GO**

PROBLEMAS PROPOSTOS

✉ *Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e sugestões de novos problemas para os próximos números.*

81) Num triângulo isósceles ABC com $AB = BC$, temos $AC = BH$, onde BH é a altura relativa ao lado AC. Traçamos uma reta BD que corta o prolongamento da reta AC em D de tal forma que os raios dos círculos inscritos nos triângulos ABC e CBD são iguais. Determine o ângulo $A\hat{B}D$.

82)

a) Demonstre a identidade

$$\cos(\alpha)\cdot\cos(2\alpha)\cdot\cos(4\alpha)...\cos(2^n\alpha)=\sum_{j=0}^{n}\cos(2^j\alpha)=\frac{sen(2^{n+1}\alpha)}{2^{n+1}\cdot sen(\alpha)}$$

b) Prove que $\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}...=\prod_{j=0}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2^{j+2}}\right)=\frac{2}{\pi}.$

83) Seja $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,...\}$.

Determine quantas funções $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ satisfazem $f(2003) = 2003$, $f(n) \le 2003$ para todo $n \le 2003$ e $f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$, para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

84) Prove que se $A\subset\mathbb{N}^*=\{1,2,3,...\}$ é um conjunto não-vazio tal que $n\in A\Rightarrow 4n\in A$ e $\lfloor\sqrt{n}\rfloor\in A$ então $A=\mathbb{N}^*$.

Obs. $\lfloor x\rfloor$ é o único inteiro tal que $x-1<\lfloor x\rfloor\le x$

85) Mostre que todo triângulo pode ser dividido em 9 pentágonos convexos de áreas iguais.

86) Encontre todas as triplas de inteiros positivos (a, m, n) tais que a^m+1 divide $(a+1)^n$.

87) Seja $a(1) = 1$ e, para cada inteiro $n \geq 2$, $a(n)$ igual ao menor inteiro positivo que não pertence a $\{a(j), j < n\}$ tal que $\sum_{j=1}^{n} a(j)$ seja múltiplo de n. Prove que $a(a(n)) = n$ para todo inteiro positivo n.

88) Prove que se $r \in \mathbb{Q}$ e $\cos(r \cdot \pi) \in \mathbb{Q}$ então $\cos(r \cdot \pi) \in \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

Você sabia…

O grande Leonard Euler afirmou que não há soluções inteiras positivas para a equação

$X^4 + y^4 + z^4 = w^4$. Durante 200 anos ninguém conseguiu demonstrar isto. Parecia ser uma afirmação verdadeira uma vez que também ninguém pode provar que era falsa.

Entretanto, Noam Elkies da Universidade de Harvard trabalhando com um potente computador encontrou

$2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = 20615673^4$

A afirmação de Euler é falsa!

Problema 81 proposto por Geraldo Perlino (Itapecerica da Serra – SP); Problema 82 proposto por Clodoaldo Lessa (Mogi das Cruzes – SP); Problema 83 adaptado de um problema proposto por Gibran M. de Souza (Natal – RN); Problema 84 proposto por Anderson Torres (São Paulo – SP); Problema 85 proposto por Gibran M. de Souza (Natal – RN); Problema 88 proposto por C.G. Moreira e José Paulo Carneiro (Rio de Janeiro – RJ).

AGENDA OLÍMPICA

XXV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

NÍVEIS 1, 2 e 3
Primeira Fase – Sábado, 7 de junho de 2003
Segunda Fase – Sábado, 13 de setembro de 2003
Terceira Fase – Sábado, 18 de outubro de 2003 (níveis 1, 2 e 3)
Domingo, 19 de outubro de 2003 (níveis 2 e 3 - segundo dia de prova).

NÍVEL UNIVERSITÁRIO
Primeira Fase – Sábado, 13 de setembro de 2003
Segunda Fase – Sábado, 18 e Domingo, 19 de outubro de 2003

♦

IX OLIMPÍADA DE MAIO
10 de maio de 2003

♦

XIV OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL
23 a 30 de maio de 2003
Ica – Peru

♦

XLIV OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA
07 a 19 de julho de 2003
Tóquio – Japão

♦

X OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
25 a 31 de julho de 2003
Universidade Babes-Bolyai, Cluj-Napoca, Romênia

♦

XVIII OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA
13 a 20 de setembro de 2003
Argentina

♦

VI OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
8 de novembro de 2003

♦ ♦ ♦

COORDENADORES REGIONAIS

Alberto Hassen Raad	(UFJF)	Juiz de Fora – MG
Amarísio da Silva Araújo	(UFV)	Viçosa – MG
Ana Paula Bernardi da Silva	(Universidade Católica de Brasília)	Brasília – DF
Benedito Tadeu Vasconcelos Freire	(UFRN)	Natal – RN
Carlos Frederico Borges Palmeira	(PUC-Rio)	Rio de Janeiro – RJ
Claus Haetinger	(UNIVATES)	Lajeado – RS
Cleonor Crescêncio das Neves	(UTAM)	Manaus – AM
Élio Mega	(Colégio Etapa)	São Paulo – SP
Florêncio Ferreira Guimarães Filho	(UFES)	Vitória – ES
Gil Cunha Gomes Filho	(Colégio ACAE)	Volta Redonda – RJ
Ronaldo Alves Garcia	(UFGO)	Goiânia – GO
Reginaldo de Lima Pereira	(Escola Técnica Federal de Roraima)	Boa Vista – RR
Ivanilde Fernandes Saad	(UC. Dom Bosco)	Campo Grande– MS
Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia	(UFPB)	João Pessoa – PB
Janice T. Reichert	(UNOCHAPECÓ)	Chapecó – SC
João Benício de Melo Neto	(UFPI)	Teresina – PI
João Francisco Melo Libonati	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
José Carlos dos Santos Rodrigues	(Unespar)	Campo Mourão – PR
José Cloves Saraiva	(UFMA)	São Luis – MA
José Gaspar Ruas Filho	(ICMC-USP)	São Carlos – SP
José Luiz Rosas Pinho	(UFSC)	Florianópolis – SC
José Vieira Alves	(UFPB)	Campina Grande – PB
Licio Hernandes Bezerra	(UFSC)	Florianópolis – SC
Luzinalva Miranda de Amorim	(UFBA)	Salvador – BA
Mário Rocha Retamoso	(UFRG)	Rio Grande – RS
Marcelo Rufino de Oliveira	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Marcelo Mendes	(Colégio Farias Brito, Pré-vestibular)	Fortaleza – CE
Pablo Rodrigo Ganassim	(Liceu Terras do Engenho)	Piracicaba – SP
Ramón Mendoza	(UFPE)	Recife – PE
Raúl Cintra de Negreiros Ribeiro	(Colégio Anglo)	Atibaia – SP
Reinaldo Gen Ichiro Arakaki	(INPE)	SJ dos Campos – SP
Ricardo Amorim	(Centro Educacional Logos)	Nova Iguaçu – RJ
Sérgio Cláudio Ramos	(IM-UFRGS)	Porto Alegre – RS
Tadeu Ferreira Gomes	(UEBA)	Juazeiro – BA
Tomás Menéndez Rodrigues	(U. Federal de Rondônia)	Porto Velho – RO
Valdenberg Araújo da Silva	(U. Federal de Sergipe)	São Cristovão – SE
Valdeni Soliani Franco	(U. Estadual de Maringá)	Maringá – PR
Vânia Cristina Silva Rodrigues	(U. Metodista de SP)	S.B. do Campo – SP
Wagner Pereira Lopes	(CEFET – GO)	Jataí – GO