CONTEÚDO

XXIV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

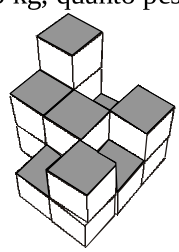
Problemas e Soluções da Primeira Fase

PROBLEMAS – NÍVEL 1

1. A razão $\frac{(2^4)^8}{(4^8)^2}$ é igual a:

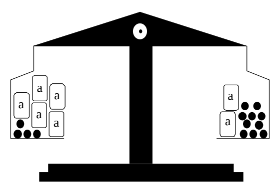
A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** 1 **D)** 2 **E)** 8

2. Num armazém foram empilhadas embalagens cúbicas conforme mostra a figura a seguir. Se cada caixa pesa 25 kg, quanto pesa toda a pilha?



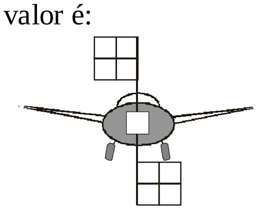
A) 300 kg **B)** 325 kg **C)** 350 kg **D)** 375 kg **E)** 400 kg

3. Na balança a seguir temos pesadas bolas de chumbo, todas iguais, e leves saquinhos de plástico, todos com a mesma quantidade de bolinhas, iguais às que estão fora dos mesmos. Quantas bolinhas há em cada saquinho?



A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 6

4. Escreva os números inteiros de 1 a 9 nos nove quadradinhos, de forma que as somas dos quatro números em cada uma das pás da "hélice" sejam iguais e de maior valor possível. Esse valor é:

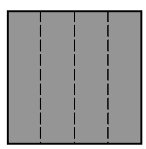


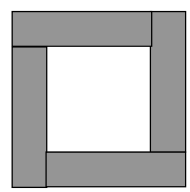
A) 23 **B)** 22 **C)** 21 **D)** 20 **E)** 19

5. Qual é a quantidade total de letras de todas as respostas incorretas desta questão?
A) Quarenta e oito. **B)** Quarenta e nove. **C)** Cinqüenta.
D) Cinqüenta e um. **E)** Cinqüenta e quatro.

6. Toda a produção mensal de latas de refrigerante de uma certa fábrica foi vendida a três lojas. Para a loja A, foi vendida metade da produção; para a loja B, foram vendidos $\frac{2}{5}$ da produção e para a loja C, foram vendidas 2500 unidades. Qual foi a produção mensal dessa fábrica?
A) 4166 latas **B)** 10000 latas **C)** 20000 latas **D)** 25000 latas
E) 30000 latas

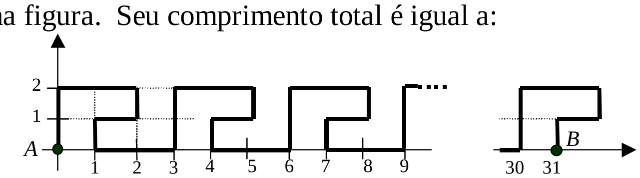
7. Um quadrado de área 1 foi dividido em 4 retângulos congruentes, conforme indicado no desenho à esquerda. Em seguida, os quatro retângulos foram reagrupados de maneira a formar um quadrado, com um buraco quadrado no centro, conforme indica o desenho à direita.





A área do buraco é igual a:
A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{9}{16}$ **C)** $\frac{16}{25}$ **D)** $\frac{3}{4}$ **E)** 1

8. A linha poligonal AB é desenhada mantendo-se sempre o mesmo padrão mostrado na figura. Seu comprimento total é igual a:



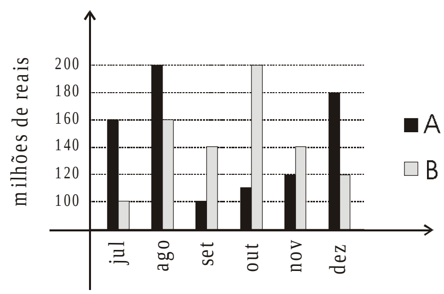
A) 31 **B)** 88 **C)** 90 **D)** 97 **E)** 105

9. A diferença entre os quadrados de dois números inteiros positivos consecutivos é sempre:
A) um número primo.
B) um múltiplo de 3.
C) igual à soma desses números.
D) um número par.
E) um quadrado perfeito.

10. Marcelo leva exatamente 20 minutos para ir de sua casa até a escola. Uma certa vez, durante o caminho, percebeu que esquecera em casa a revista Eureka! que ia mostrar para a classe; ele sabia que se continuasse a andar, chegaria à escola 8 minutos antes do sinal, mas se voltasse para pegar a revista, no mesmo passo, chegaria atrasado 10 minutos. Que fração do caminho já tinha percorrido neste ponto?

A) $\frac{2}{5}$ **B)** $\frac{9}{20}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{9}{10}$

11. O gráfico abaixo mostra o *faturamento mensal* das empresas A e B no segundo semestre de 2001.



Com base nesse gráfico, podemos afirmar que:

A) houve um mês em que o faturamento da empresa A foi o dobro do faturamento da empresa B.
B) no mês de julho, a diferença de faturamentos foi maior que nos demais meses.
C) a empresa B foi a que sofreu a maior queda de faturamento entre dois meses consecutivos.
D) no semestre, o faturamento total de A foi maior que o de B.
E) a diferença entre os faturamentos totais do semestre excedeu os 20 milhões de reais.

12. Patrícia mora em São Paulo e quer visitar o Rio de Janeiro num feriado prolongado. A viagem de ida e volta, de ônibus, custa 80 reais, mas Patrícia está querendo ir com seu carro, que faz, em média, 12 quilômetros com um litro de gasolina. O litro da gasolina custa, em média, R$1,60 e Patrícia calcula que terá de rodar cerca de 900 quilômetros com seu carro e pagar 48 reais de pedágio. Ela irá de carro e para reduzir suas despesas, chama duas amigas, que irão repartir com ela todos os gastos. Dessa forma, não levando em conta o desgaste do carro e outras despesas inesperadas, Patrícia irá:

A) economizar R$20,00.
B) gastar apenas R$2,00 a mais.

C) economizar R$24,00.
D) gastar o mesmo que se fosse de ônibus.
E) gastar R$14,00 a mais.

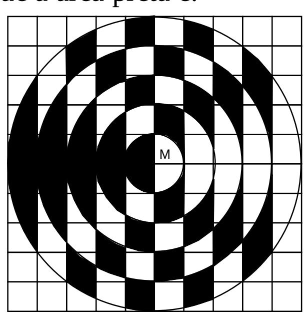
13. Uma escola vai organizar um passeio ao zoológico. Há duas opções de transporte. A primeira opção é alugar "vans": cada van pode levar até 6 crianças e seu aluguel custa R$60,00. A segunda opção é contratar uma empresa para fazer o serviço: a empresa usa ônibus com capacidade para 48 crianças e cobra R$237,00, mais R$120,00 por ônibus utilizado. A escola deve preferir a empresa de ônibus se forem ao passeio pelo menos N crianças. O valor de N é:
A) 28 **B)** 31 **C)** 32 **D)** 33 **E)** 36

14. O produto de um milhão de números naturais, não necessariamente distintos, é igual a um milhão. Qual é o maior valor possível para a soma desses números?

A) 1 000 000 **B)** 1 250 002 **C)** 1 501 999 **D)** 1 999 999
E) 13 999 432

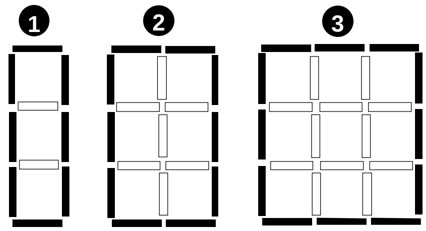
15. Se você tiver uma mesa de bilhar retangular cuja razão entre a largura e o comprimento seja 5/7 e bater em uma bola que está em um canto, de modo que ela saia na direção da bissetriz do ângulo desse canto, quantas vezes ela baterá nos lados antes de bater em um dos cantos?
A) 10 vezes **B)** 12 vezes **C)** 13 vezes **D)** 14 vezes **E)** 15 vezes

16. Na malha quadriculada a seguir, todas as circunferências têm centro em M. Então pode-se concluir que a área preta é:



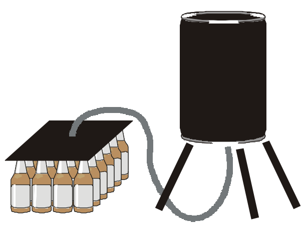
A) dois quintos da área do círculo maior.
B) três sétimos da área do círculo maior.
C) metade da área do círculo maior.
D) quatro sétimos da área do círculo maior.
E) três quintos da área do círculo maior.

17. As figuras a seguir são construídas com palitos pretos e brancos. Para construir as figuras, os palitos pretos foram colocados apenas nas bordas e os brancos apenas no interior. A figura de número n corresponde a um retângulo 3 por n. Continuando esse procedimento, quantos palitos brancos teremos na figura 2002?



A) 2001 **B)** 4004 **C)** 12006 **D)** 10007 **E)** 10010

18. Um produtor de leite engarrafa diariamente toda a produção de leite de sua fazenda. Depois de tirado, o leite segue para um tanque de forma cilíndrica e então é engarrafado, conforme vemos na figura a seguir. Na tabela vemos a quantidade de garrafas que foram enchidas e o nível do leite dentro do tanque. Depois de quantas garrafas serem enchidas o tanque ficará vazio?



Quantidade de garrafas enchidas	0	200	400	600
Nível do tanque (cm)	210	170	130	90

A) 1000 **B)** 1050 **C)** 1100 **D)** 1150 **E)** 1200

19. Escrevendo todos os números inteiros de 100 a 999, quantas vezes escrevemos o algarismo 5?
A) 250 **B)** 270 **C)** 271 **D)** 280 **E)** 292

20. Uma usina comprou 2000 litros de leite puro e então retirou certo volume V desse leite para produção de iogurte e substituiu esse volume por água. Em seguida, retirou novamente o mesmo volume V da mistura e novamente substituiu por água. Na mistura final existem 1125 litros de leite. O volume V é:
A) 500 litros **B)** 600 litros **C)** 700 litros **D)** 800 litros **E)** 900 litros

PROBLEMAS – NÍVEL 2

1. Um comerciante comprou dois carros por um total de R$ 27.000,00. Vendeu o primeiro com lucro de 10% e o segundo com prejuízo de 5%. No total ganhou R$ 750,00. Os preços de compra foram, respectivamente,
A) R$ 10.000,00 e R$ 17.000,00
B) R$ 13.000,00 e R$ 14.000,00
C) R$ 14.000,00 e R$ 13.000,00
D) R$ 15.000,00 e R$ 12.000,00
E) R$ 18.000,00 e R$ 9.000,00

2. Veja o problema N^{o}. 15 do Nível 1.

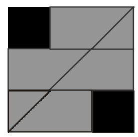
3. Dizer que uma tela de televisão tem 20 polegadas significa que a diagonal da tela mede 20 polegadas. Quantas telas de televisão de 20 polegadas cabem numa de 60 polegadas?
A) 9 **B)** 10 **C)** 18 **D)** 20 **E)** 30

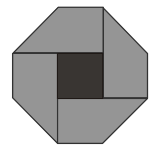
4. Veja o problema N^{o}. 20 do Nível 1.

5. Dois irmãos, Pedro e João, decidiram brincar de pega-pega. Como Pedro é mais velho, enquanto João dá 6 passos, Pedro dá apenas 5. No entanto, 2 passos de Pedro equivalem à distância que João percorre com 3 passos. Para começar a brincadeira, João dá 60 passos antes de Pedro começar a persegui-lo. Depois de quantos passos Pedro alcança João?
A) 90 passos **B)** 120 passos **C)** 150 passos **D)** 180 passos
E) 200 passos

6. Veja o problema N^{o}. 9 do Nível 1.
7. Veja o problema N^{o}. 10 do Nível 1.
8. Veja o problema N^{o}. 4 do Nível 1.
9. Veja o problema N^{o}. 12 do Nível 1.

10. Traçando segmentos, podemos dividir um quadrado em dois quadradinhos congruentes, quatro trapézios congruentes e dois triângulos congruentes, conforme indica o desenho abaixo, à esquerda. Eliminando algumas dessas partes, podemos montar o octógono representado à direita. Que fração da área do quadrado foi eliminada?





A) $\frac{1}{9}$ **B)** $\frac{2}{9}$ **C)** $\frac{1}{4}$ **D)** $\frac{1}{3}$ **E)** $\frac{3}{8}$

11. Veja o problema N^{o}. 11 do Nível 1.
12. Veja o problema N^{o}. 14 do Nível 1.

13. O lava-rápido "Lave Bem" faz uma promoção:

Lavagem simples R$5,00
Lavagem completa R$7,00

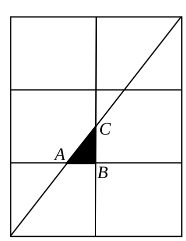
No dia da promoção, o faturamento do lava-rápido foi de R$176,00. Nesse dia, qual o menor número possível de clientes que foram atendidos?
A) 23 **B)** 24 **C)** 26 **D)** 28 **E)** 30

14. Veja o problema N^{o}. 7 do Nível 1.

15. Quantos números inteiros positivos menores que 900 são múltiplos de 7 e terminam em 7?
A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

16. Dado um triângulo *ABC* onde $\hat{A} = 80°$ e $\hat{C} = 40°$, a medida do ângulo agudo formado pelas bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ é:
A) 40° **B)** 60° **C)** 70^{o} **D)** 80° **E)** 110^{o}

17. Na malha quadrada abaixo, há 6 quadrados de lado 30 cm. A área do triângulo *ABC* é:



A) 150 cm^2 **B)** 100 cm^2 **C)** 75 cm^2 **D)** 50 cm^2 **E)** 25 cm^2

18. Veja o problema N^{o}. 8 do Nível 1.
19. Veja o problema N^{o}. 19 do Nível 1.

20. Se $xy = 2$ e $x^2 + y^2 = 5$, então $\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} + 2$ vale:

A) $\dfrac{5}{2}$ **B)** $\dfrac{25}{4}$ **C)** $\dfrac{5}{4}$ **D)** $\dfrac{1}{2}$ **E)** 1

21. Veja o problema N^{o}. 13 do Nível 1.

22. Durante sua viagem ao país das Maravilhas a altura de Alice sofreu quatro mudanças sucessivas da seguinte forma: primeiro ela tomou um gole de um líquido que estava numa garrafa em cujo rótulo se lia: "beba-me e fique 25% mais alta". A seguir, comeu um pedaço de uma torta onde estava escrito: "prove-me e fique 10% mais baixa"; logo após tomou um gole do líquido de outra garrafa cujo rótulo estampava a mensagem: "beba-me e fique 10% mais alta". Finalmente, comeu um pedaço de outra torta na qual estava escrito:"prove-me e fique 20% mais baixa". Após a viagem de Alice, podemos afirmar que ela:

A) ficou 1% mais baixa
B) ficou 1% mais alta
C) ficou 5% mais baixa
D) ficou 5% mais alta
E) ficou 10% mais alta

23. Vamos provar que 4 é maior que 4.
Sejam a e b dois números tais que $a > 4$ e $a = b$.

1) Vamos subtrair 4 dos dois termos desta equação:

$$a = b$$
$$a - 4 = b - 4$$

2) Colocamos –1 em evidência no segundo membro da equação:

$$a - 4 = -1\,(-b + 4)$$
$$a - 4 = -1\,(4 - b)$$

3) Elevamos ambos os termos da equação ao quadrado:

$$(a-4)^2 = [-1 \cdot (4-b)]^2$$
$$(a-4)^2 = (-1)^2 (4-b)^2$$
$$(a-4)^2 = 1 \cdot (4-b)^2 \qquad (a-4)^2 = (4-b)^2$$

4) Extraímos a raiz quadrada dos dois membros da equação:

$$\sqrt{(a-4)^2} = \sqrt{(4-b)^2}$$
$$a - 4 = 4 - b$$

5) Como $a = b$, substituímos b por a

$$a - 4 = 4 - a$$

6) Resolvemos a equação:

$$a - 4 = 4 - a$$
$$2a = 8$$
$$a = 4$$

Como escolhemos a tal que $a > 4$, chegamos à inacreditável conclusão de que $4 > 4$.
Onde está o erro no argumento acima?

A) Na passagem 2. **B)** Na passagem 3. **C)** Na passagem 4.
D) Na passagem 5. **E)** Na passagem 6.

24. Veja o problema No. 5 do Nível 1.

25. O resto da divisão por 9 de $\sqrt{1111111111 - 22222}$ é:

A) 0 **B)** 1 **C)** 3 **D)** 6 **E)** 8

PROBLEMAS – NÍVEL 3

1. Veja o problema N°. 11 do Nível 1.

2. Se $\dfrac{p}{q}$ é a fração irredutível equivalente a $\dfrac{6{,}888\ldots}{2{,}444\ldots}$ o valor de $p + q$ é igual a:

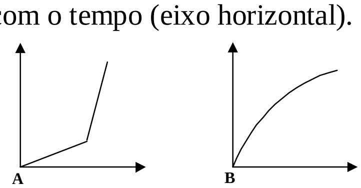
A) 38 **B)** 39 **C)** 40 **D)** 41 **E)** 42

3. Veja o problema N°. 1 do Nível 2.

4. A seguir vemos quatro vasos, os quais Angela vai encher com água, numa torneira cuja vazão é constante.

1 **2** **3** **4**

Os gráficos A e B a seguir representam o nível da água (eixo vertical), em dois dos vasos, de acordo com o tempo (eixo horizontal).



Qual dos vasos corresponde ao gráfico **A** e qual ao gráfico **B**, respectivamente?

A) 3 e 4 **B)** 2 e 4 **C)** 1 e 3 **D)** 2 e 3 **E)** 1 e 4

5. Veja o problema N^o. 13 do Nível 1.
6. Veja o problema N^o. 22 do Nível 2.
7. Veja o problema N^o. 10 do Nível 1.
8. Veja o problema N^o. 8 do Nível 1.
9. Veja o problema N^o. 10 do Nível 2.
10. Veja o problema N^o. 20 do Nível 2.

11. A média aritmética das idades de um grupo de médicos e advogados é 40 anos. A média aritmética das idades dos médicos é 35 anos e a dos advogados é 50 anos. Pode-se, então, afirmar que:
A) O número de advogados é o dobro do número de médicos no grupo.
B) O número de médicos é o dobro do número de advogados no grupo.
C) Há um médico a mais no grupo.
D) Há um advogado a mais no grupo.
E) Existem as mesmas quantidades de médicos e advogados no grupo.

12. Os valores de *x*, *y* e *z* que satisfazem às equações $x+\frac{1}{y}=5$, $y+\frac{1}{z}=1$ e $z+\frac{1}{x}=2$ são tais que $x+3y+2z$ é igual a:
A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

13. Veja o problema N^o. 23 do Nível 2.
14. Veja o problema N^o. 5 do Nível 1.

15. Sejam *x*, *y*, *z* números inteiros tais que $x + y + z = 0$. Sobre $x^3 + y^3 + z^3$ são feitas as seguintes afirmativas:
i) É necessariamente múltiplo de 2.
ii) É necessariamente múltiplo de 3.
iii) É necessariamente múltiplo de 5.
Podemos afirmar que:

A) somente i) é correta.
B) somente ii) é correta.
C) somente i) e ii) são corretas.
D) somente i) e iii) são corretas.
E) i), ii) e iii) são corretas.

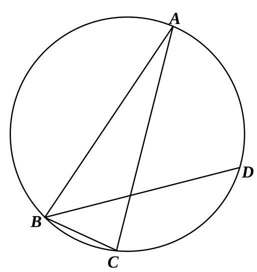
16. Seja f uma função real de variável real que satisfaz a condição:

$$f(x) + 2f\left(\frac{2002}{x}\right) = 3x$$

para $x > 0$. O valor de $f(2)$ é igual a:
A) 1000 **B)** 2000 **C)** 3000 **D)** 4000
E) 6000

17. Veja o problema N°. 25 do Nível 2.

18. Na circunferência abaixo, temos que: $AB = 4$, $BC = 2$, AC é diâmetro e os ângulos $A\hat{B}D$ e $C\hat{B}D$ são iguais. Qual é o valor de BD?



A) $2\sqrt{3}+1$ **B)** $\frac{9}{\sqrt{5}}$ **C)** $3\sqrt{2}$ **D)** $2+\sqrt{5}$ **E)** 4

19. Seja α a maior raiz de $x^2 + x - 1 = 0$. O valor de $\alpha^5 - 5\alpha$ é :
A) – 1 **B)** – 2 **C)** – 3 **D)** 1 **E)** 2

20. Qual é o dígito das unidades de $7^{7^{7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{7}}}}}}}$, onde aparecem 2002 setes?
A) 7 **B)** 9 **C)** 3 **D)** 1 **E)** 5.

21. Em um trapézio $ABCD$ de área 1, a base BC mede a metade da base AD. Seja K o ponto médio da diagonal AC. A reta DK corta o lado AB no ponto L. A área do quadrilátero $BCKL$ é igual a:
A) $\frac{3}{4}$ **B)** $\frac{2}{3}$ **C)** $\frac{1}{3}$ **D)** $\frac{2}{9}$ **E)** $\frac{1}{9}$

22. N = ❑539984❑ é um número inteiro positivo com oito algarismos, sendo o primeiro e o último desconhecidos. Sabendo que N é um múltiplo de 198, encontre o algarismo das unidades de N / 198.
A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

23. No triminó marciano, as peças têm 3 números cada (diferente do dominó da terra, onde cada peça tem apenas 2 números). Os números no triminó marciano também variam de 0 a 6, e para cada escolha de 3 números (não necessariamente distintos) existe uma e somente uma peça que contém esses 3 números. Qual é a soma dos números de todas as peças do triminó marciano?
A) 756 **B)** 1512 **C)** 84 **D)** 315 **E)** 900

24. No triângulo *ABC*, o ângulo $\hat{A}$ mede 60° e o ângulo *B* mede 50°. Sejam *M* o ponto médio do lado *AB* e *P* o ponto sobre o lado *BC* tal que $AC + CP = BP$. Qual a medida do ângulo *MPC*?
A) 120° **B)** 125° **C)** 130° **D)** 135° **E)** 145°

25. Duas pessoas vão disputar uma partida de **par ou ímpar**. Elas não gostam do zero e, assim, cada uma coloca 1, 2, 3, 4 ou 5 dedos com igual probabilidade.
A probabilidade de que a pessoa que escolheu **par** ganhe é:
A) 1/2 **B)** 2/5 **C)** 3/5 **D)** 12/25 **E)** 13/25

GABARITO

NÍVEL 1 (5ª. e 6ª. Séries)

1) C	6) D	11) D	16) C
2) C	7) B	12) C	17) D
3) B	8) D	13) B	18) B
4) B	9) C	14) D	19) D
5) D	10) B	15) A	20) A

NÍVEL 2 (7ª. e 8ª. Séries)

1) C	6) C	11) D	16) C	21) B
2) A	7) B	12) D	17) C	22) A
3) A	8) B	13) C	18) D	23) C
4) A	9) C	14) B	19) D	24) D
5) E	10) B	15) D	20) B	25) D

NÍVEL 3 (Ensino Médio)

1) D	6) A	11) B	16) B	21) D
2) E	7) B	12) B	17) D	22) C
3) C	8) D	13) C	18) C	23) A
4) C	9) B	14) D	19) C	24) E
5) B	10) B	15) C	20) C	25) E

XXIV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e Soluções da Segunda Fase

PROBLEMAS – NÍVEL 1

PROBLEMA 1

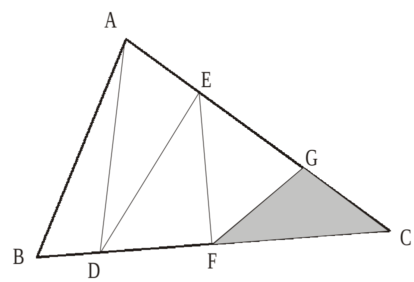
O ano 2002 é palíndromo, ou seja, continua o mesmo se lido da direita para a esquerda.

a) Depois de 2002, quais serão os próximos quatro anos palíndromos?

b) O último ano palíndromo, 1991, era ímpar. Quando será o próximo ano palíndromo ímpar?

PROBLEMA 2

Um fazendeiro resolveu repartir sua fazenda para seus cinco filhos. O desenho ao lado (fora de escala) representa a fazenda e as partes dos herdeiros, que são da forma triangular, de modo que $BD = \frac{BC}{4}$, $AE = \frac{AC}{3}$, $DF = \frac{DC}{2}$ e $EG = GC$. O filho mais novo recebeu o terreno representado pelo triângulo escuro, de 40 alqueires. Quantos alqueires tinha a propriedade original?



PROBLEMA 3

Dado um número, pode-se escrever o seu dobro ou suprimir o seu algarismo das unidades. Apresente uma seqüência que começa com 2002 e termina com 13, usando somente essas duas operações.

PROBLEMA 4

Três amigas foram para uma festa com vestidos azul, preto e branco, respectivamente. Seus pares de sapato apresentavam essas mesmas três cores, mas somente Ana usava vestido e sapatos de mesma cor. Nem o vestido nem os sapatos de Júlia eram brancos. Marisa usava sapatos azuis. Descreva a cor do vestido de cada uma das moças.

PROBLEMA 5

No jogo pega-varetas, as varetas verdes valem 5 pontos cada uma, as azuis valem 10 pontos, as amarelas valem 15, as vermelhas, 20 e a preta, 50. Existem 5 varetas verdes, 5 azuis, 10 amarelas, 10 vermelhas e 1 preta. Carlinhos conseguiu fazer 40 pontos numa jogada. Levando em conta apenas a quantidade de varetas e suas cores, de quantas maneiras diferentes ele poderia ter conseguido essa pontuação, supondo que em cada caso fosse possível pegar as varetas necessárias?

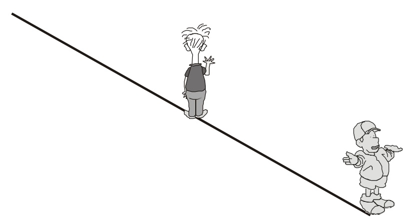
PROBLEMA 6

Nas casas de um tabuleiro 8×8 foram escritos números inteiros positivos de forma que a diferença entre números escritos em casas vizinhas (quadrados com um lado comum) é 1. Sabe-se que numa das casas está escrito 17 e, em outra, está escrito 3. Desenhe um tabuleiro 8×8, preencha-o segundo essas regras e calcule a soma dos números escritos nas duas diagonais do tabuleiro.

PROBLEMAS – NÍVEL 2

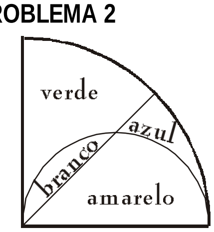
PROBLEMA 1

Geraldinho e Magrão saíram de suas casas no mesmo instante com a intenção de um visitar o outro, caminhando pelo mesmo percurso. Geraldinho ia pensando num problema de olimpíada e Magrão ia refletindo sobre questões filosóficas e nem perceberam quando se cruzaram. Dez minutos depois, Geraldinho chegava à casa de Magrão e meia hora mais tarde, Magrão chegava à casa de Geraldinho. Quanto tempo cada um deles andou?



Observação: Cada um deles anda com velocidade constante.

PROBLEMA 2

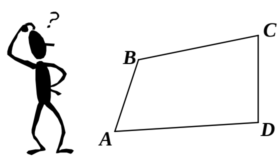


Um grande painel na forma de um quarto de círculo foi composto com 4 cores, conforme indicado na figura ao lado, onde o segmento divide o setor em duas partes iguais e o arco interno é uma semicircunferência. Qual é a cor que cobre a maior área?

PROBLEMA 3

Nas casas de um tabuleiro 8×8 foram escritos números inteiros positivos de forma que a diferença entre números escritos em casas vizinhas (quadrados com um lado comum) é 1. Sabe-se que numa das casas está escrito 17 e, em outra, está escrito 3. Calcule a soma dos números escritos nas duas diagonais do tabuleiro.

PROBLEMA 4



O professor Pardal está estudando o comportamento familiar de uma espécie de pássaro. Os pontos *A*, *B*, *C* e *D* da figura ao lado, representam a disposição de quatro ninhos desses pássaros. O professor construiu um posto de observação equidistante dos quatro ninhos.
Todos os ninhos e o posto de observação estão em um mesmo nível de altura a partir do solo, a distância de *B* a *D* é de 16 metros e $B\hat{A}D = 45°$. Determine a distância que o posto guarda de cada ninho.

PROBLEMA 5

O primeiro número de uma seqüência é 7. O próximo é obtido da seguinte maneira: Calculamos o quadrado do número anterior $7^2 = 49$ e a seguir efetuamos a soma de seus algarismos e adicionamos 1, isto é, o segundo número é 4 + 9 + 1 = 14. Repetimos este processo, obtendo $14^2 = 196$ e o terceiro número da seqüência é 1 + 9 + 6 + 1 = 17 e assim sucessivamente. Qual o 2002º elemento desta seqüência?

PROBLEMA 6

O ano 2002 é palíndromo, ou seja, continua o mesmo se lido da direita para a esquerda.

a) Depois de 2002, quais serão os próximos quatro anos palíndromos?
b) O último ano palíndromo, 1991, era ímpar. Quando será o próximo ano palíndromo ímpar?
c) O último ano palíndromo primo aconteceu há mais de 1000 anos, em 929. Determine qual será o próximo ano palíndromo primo.

PROBLEMAS – NÍVEL 3

PROBLEMA 1

Veja o problema Nº. 5 do Nível 2.

PROBLEMA 2

Para quais inteiros positivos *n* existe um polígono não regular de *n* lados, inscrito em uma circunferência, e com todos os ângulos internos de mesma medida?

PROBLEMA 3

Determine o maior natural k para o qual existe um inteiro n tal que 3^k divide $n^3 - 3n^2 + 22$.

PROBLEMA 4

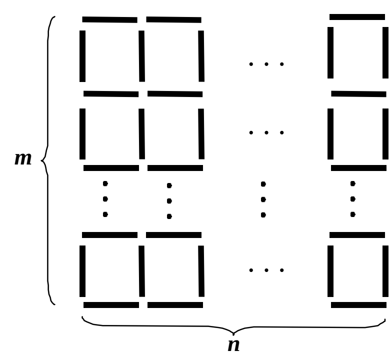
Quantos dados devem ser lançados ao mesmo tempo para maximizar a probabilidade de se obter exatamente um 2?

PROBLEMA 5

Em um quadrilátero convexo $ABCD$, os lados opostos AD e BC são congruentes e os pontos médios das diagonais AC e BD são distintos.
Prove que a reta determinada pelos pontos médios das diagonais forma ângulos iguais com AD e BC.

PROBLEMA 6

Colocamos vários palitos sobre uma mesa de modo a formar um retângulo $m \times n$, como mostra a figura.
Devemos pintar cada palito de azul, vermelho ou preto de modo que cada um dos quadradinhos da figura seja delimitado por exatamente dois palitos de uma cor e dois de outra cor. De quantas formas podemos realizar esta pintura?



SOLUÇÕES – NÍVEL 1

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1

a) Os palíndromos entre 2000 e 3000 são da forma 2*aa*2, onde *a* é um algarismo. Logo os próximos quatro serão 2112, 2222, 2332 e 2442.

b) Como o primeiro algarismo é igual ao último, um palíndromo ímpar maior que 2002 deve começar e terminar por um número ímpar maior ou igual a 3. Logo o próximo será 3003.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2

Seja S a área do triângulo ABC.

Se $BD = \frac{BC}{4}$, então $(ABD) = \frac{S}{4}$.

Se $AE = \frac{AC}{3}$, então $(AED) = \frac{(ADC)}{3} = \frac{S - \frac{S}{4}}{3} = \frac{\frac{3S}{4}}{3} = \frac{S}{4}$.

Se $DF = \frac{DC}{2}$, então $(DEF) = \frac{(DEC)}{2} = \frac{S - \left(\frac{S}{4} + \frac{S}{4}\right)}{2} = \frac{S}{4}$.

Se $EG = EC$, então $(GFC) = \frac{(EFC)}{2} = \frac{S - \left(\frac{3S}{4}\right)}{2} = \frac{S}{8}$.

Como $(GFC) = 40$ temos $\frac{S}{8} = 40 \Leftrightarrow S = 320$ alqueires.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3

Uma possível solução é:

2002, 200, 20, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 51, 102, 204, 408, 816, 1632, 163, 326, 652, 1304, 130, 13.

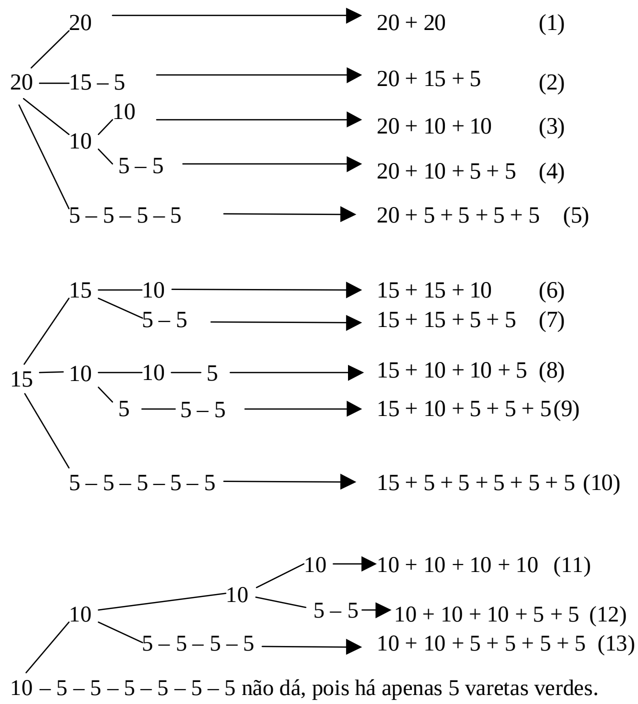
SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4

Como os sapatos de Marisa eram azuis, e nem o vestido nem os sapatos de Júlia eram brancos, conclui-se que os sapatos de Júlia eram pretos e portanto os sapatos de Ana eram brancos.

O vestido de Ana era branco, pois era a única que usava vestido e sapatos da mesma cor; conseqüentemente, o vestido de Júlia era azul e o de Marisa era preto.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5

A soma dos pontos é 40. Segundo as regras do jogo, as possibilidades são:



A resposta é portanto: de 13 maneiras diferentes.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6

Como a diferença entre o 17 e o 3 é 14, esses números devem estar em posições afastadas de 14 casas, contadas na horizontal ou vertical.

Portanto 17 e 3 devem ocupar as extremidades de uma das diagonais do tabuleiro.

A partir disso, o preenchimento das diagonais é feito de maneira única. E uma maneira de se preencher o tabuleiro é a seguinte:

17	16	15	14	13	12	11	10
16	15	14	13	12	11	10	9
15	14	13	12	11	10	9	8
14	13	12	11	10	9	8	7
13	12	11	10	9	8	7	6
12	11	10	9	8	7	6	5
11	10	9	8	7	6	5	4
10	9	8	7	6	5	4	3

a soma dos números escritos nas diagonais é: $8 \times 10 + (3 + 5 + ... + 17) = 160$.

SOLUÇÕES – NÍVEL 2

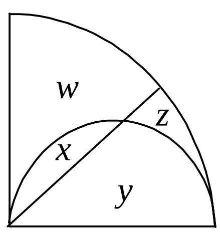
SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1

Seja $t > 0$ o tempo, em minutos, decorrido desde a saída de Geraldinho e Magrão até o instante do encontro.

Sejam g e m as distâncias entre o ponto de encontro e as casas de Geraldinho e Magrão, respectivamente. Como Geraldino percorre a distância g em t minutos e a distância m em 10 minutos, temos $\frac{g}{m} = \frac{t}{10}$.

Analogamente, $\frac{g}{m} = \frac{40}{t}$. Logo $\frac{t}{10} = \frac{40}{t} \Leftrightarrow t^2 = 400 \Leftrightarrow t = 20$ (pois $t > 0$). Logo Geraldinho andou 10 + 20 = 30 minutos e Magrão andou 40 + 20 = 60 minutos.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2



Sejam x, y, z e w as áreas das regiões branca, amarela, azul e verde, respectivamente.

Seja R o raio do semicírculo. Temos $x + y = \frac{\pi R^2}{2}$

e $y + z = x + w = \frac{1}{8}\pi(2R)^2 = \frac{\pi R^2}{2}$

Assim, $x + y = y + z = x + w$, logo $x = z$ e $y = w$.

Como se x é a área de um segmento circular de ângulo 90° e raio R, $x = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} = \left(\frac{\pi - 2}{4}\right)R^2$ e $y = \left(\frac{\pi + 2}{4}\right)R^2$. Assim $x = z < y = w$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3

Como a diferença entre o 17 e o 3 é 14, esses números devem estar em posições afastadas de 14 casas, contadas na horizontal ou vertical.

Portanto 17 e 3 devem ocupar as extremidades de uma das diagonais do tabuleiro.

A partir disso, o preenchimento das diagonais é feito de maneira única. E uma maneira de se preencher o tabuleiro é a seguinte:

17	16	15	14	13	12	11	10
16	15	14	13	12	11	10	9
15	14	13	12	11	10	9	8
14	13	12	11	10	9	8	7
13	12	11	10	9	8	7	6
12	11	10	9	8	7	6	5
11	10	9	8	7	6	5	4
10	9	8	7	6	5	4	3

a soma dos números escritos nas diagonais é: $8 \times 10 + (3 + 5 + ... + 17) = 160$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4

Observe que o posto do observador coincide com o centro do círculo circunscrito ao quadrilátero *ABCD*. Como $\overline{BD} = 16$, sendo *O* o centro do círculo circunscrito, temos $B\hat{O}D = 2 \cdot B\hat{A}D = 90°$ e $\overline{BO} = \overline{OD} = r$, donde $16^2 = r^2 + r^2$, pelo teorema de Pitágoras, e logo $r = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$. Assim, a distância do posto (que deve ficar em *O*) aos ninhos será de $8\sqrt{2}$ metros.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5

Os primeiros números da seqüência são (7, 14, 17, 20, 5, 8, 11, 5...) donde vemos que, exceto pelos 4 primeiros termos, a seqüência é periódica com período 3. Como 2002 deixa resto 1 quando dividido por 3, o número procurado coincide com aquele que ocupa o 7^o. lugar na seqüência, a saber, 11.

Observação:

Para qualquer termo inicial, a seqüência construída de acordo com método descrito no enunciado do problema será eventualmente periódica, (isto é teremos $a_{n+k} = a_k$ para todo $k \geq m$, para certos valores positivos de m e n).

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6

a) Os palíndromos entre 2000 e 3000 são da forma 2*aa*2, onde *a* é um algarismo. Logo os próximos quatro serão 2112, 2222, 2332 e 2442.

b) Como o primeiro algarismo é igual ao último, um palíndromo ímpar maior que 2002 deve começar e terminar por um número ímpar maior ou igual a 3. Logo o próximo será 3003.

c) Um palíndromo de quatro algarismos é da forma $abba = a + 10b + 100b + 1000a = 1001a + 110b$, que é múltiplo de 11, já que 110 e 1001 são múltiplos de 11. Logo o próximo ano palíndromo primo tem no mínimo 5 algarismos.

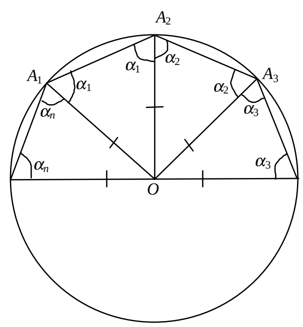
Os menores palíndromos de 5 algarismos são 10001, que é múltiplo de 73 e 10101, que é múltiplo de 3. O próximo é $10201 = 101^2$, divisível por 101. O seguinte, 10301, é primo, pois não é divisível por qualquer primo menor que $\sqrt{10301} < 102$.

SOLUÇÕES – NÍVEL 3

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1
Veja a solução do problema N°. 5 do Nível 2.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2
Seja C a circunferência de centro O circunscrita ao polígono $A_1A_2...A_n$. Os triângulos $A_iA_{i+1}\,O$ (com $A_{n+1} = A_1$) são isósceles. Seja $\alpha_i = O\hat{A}_i A_{i+1}$.
Então
(1) $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_3 + \alpha_4 = ... = \alpha_n + \alpha_1$.
Portanto.

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = ..., \\ \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 = ... \\ \alpha_n = \alpha_2 \end{cases}$$



Se n for ímpar, então $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n$, logo todos os ângulos $A_i\hat{O}A_{i+1}$ serão iguais e o polígono será regular.
Para n par, não é necessário que todos os ângulos sejam iguais.
Escolhendo $x \neq y$ de modo que $x + y$ = ângulo interno = $\dfrac{180(n-2)}{n}$ e fazendo
$x = \alpha_1 = \alpha_3 = ... = \alpha_{n-1}$,
$y = \alpha_2 = \alpha_4 = ... = \alpha_n$, obtemos um polígono inscritível não regular com todos os ângulos de mesma medida.
Portanto, para n par ≥ 4, existe um polígono de n lados satisfazendo as condições do problema.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3
Se $n = 3r$, então $n^3 - 3n^2 + 22 = (3r)^3 - 3\cdot(3r)^2 + 22$ é a soma de um múltiplo de 3 com 22, logo não é múltiplo de 3.
Se $n = 3r + 1$, então

$n^3 - 3n^2 + 22 = (3r+1)^3 - 3(3r+1)^2 + 22 = (3r)^3 + 3\cdot(3r)^2 + 3\cdot(3r) + 1 - 3\cdot(3r)^2 -$
$3\cdot 2\cdot(3r) - 3 + 22 = (3r)^3 - 3\cdot(3r) + 20$, que também não é múltiplo de 3.

Finalmente, se $n = 3r - 1$, então $n^3 - 3n^2 + 22 = (3r-1)^3 - 3(3r-1)^2 + 22 =$
$= (3r)^3 - 3\cdot(3r)^2 + 3\cdot(3r) - 1 - 3\cdot(3r)^2 + 3\cdot 2\cdot(3r) - 3 + 22 = (3r)^3 - 6\cdot(3r)^2 + 9\cdot 3r + 18,$
que é a soma de um múltiplo de 27 com 18, e portanto é múltiplo de 9 mas não de 27, logo a maior potência de 3 que divide um número da forma $n^3 - 3n^2 + 22$ é 3^2 = 9. Assim, k é no máximo 2.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4

Suponha que os dados estão numerados de 1 a n. A probabilidade de que somente o dado N^o. 1 resulte em 2 é:

$$\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\ldots\frac{5}{6} = \frac{5^{n-1}}{6^n}.$$

Analogamente, a probabilidade de que somente o dado k, $(1 \le k \le n)$ resulte em 2 é

$$\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\ldots\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{5}{6} = \frac{5^{n-1}}{6^n}.$$

Portanto, a probabilidade de obter exatamente um 2 é

$$P_n = \frac{5^{n-1}}{6^n} + \frac{5^{n-1}}{6^n} + \ldots + \frac{5^{n-1}}{6^n} = n\cdot\frac{5^{n-1}}{6^n}.$$

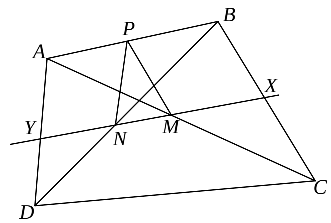
Agora observe que $P_n \ge P_{n+1} \Leftrightarrow n\cdot\dfrac{5^{n-1}}{6^n} \ge (n+1)\cdot\dfrac{5^n}{6^{n+1}} \Leftrightarrow 6n \ge 5(n+1) \Leftrightarrow n \ge 5.$

Para $n = 5$, ocorre a igualdade ($P_5 = P_6$), $P_5 = P_6 > P_7 > P_8 > P_9 >\ldots$ e
$P_1 < P_2 < P_3 < P_4 < P_5 = P_6$
E a probabilidade é máxima para $n = 5$ ou $n = 6$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5

Sejam M e N os pontos médios de AC e BD e P o ponto médio do lado AB. Então PM é base média do ΔABC e PN base média do ΔABD. Segue que $PM = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{AD}{2} = PN$.

Sendo X e Y as interseções da reta MN com BC e AD, temos então $B\hat{X}M = P\hat{M}N = P\hat{N}M = A\hat{Y}N$ ou $B\hat{X}M = \pi - P\hat{M}N = \pi - P\hat{N}M = A\hat{Y}N$.



SOLUÇÃO ALTERNATIVA:

Provaremos que se, $M = \dfrac{A+C}{2}$ e $N = \dfrac{B+D}{2}$ então o vetor $\overrightarrow{MN}$ faz ângulos iguais com $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{BC}$. Para isso, como $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$, basta ver que os produtos internos $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC}$ têm o mesmo módulo.

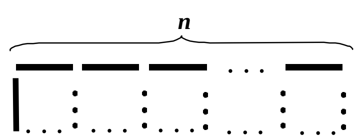
Temos

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AD} = (N - M) \cdot (D - A) = \left(\frac{A + C - B - D}{2}\right) \cdot (D - A) = \frac{(C - B) \cdot (D - A) - |D - A|^2}{2} =$$

$$= \frac{(C - B) \cdot (D - A) - |C - B|^2}{2} = \frac{(D + B - A - C) \cdot (C - B)}{2} = (M - N) \cdot (C - B) = -\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC}$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6

Há 3^n maneiras de colorir a fileira horizontal superior de palitos. O palito vertical mais à esquerda da primeira linha também pode ser colorido de 3 maneiras.



Uma vez definidas as cores dos palitos superior e mais à esquerda de um quadradinho, há duas maneiras de completá-lo segundo as condições do enunciado: se ambos têm mesma cor, há duas escolhas para a cor dos dois palitos restantes; se ambos têm cores diferentes, há duas maneiras de colorir os dois palitos restantes com estas cores.

Assim, para completar a primeira linha de quadrados há $3^n \cdot 3 \cdot 2^n$ maneiras

Da mesma forma, a cor do palito vertical mais à esquerda da segunda linha de quadrados pode ser escolhido de 3 maneiras, e há 2^n maneiras de colorir os demais palitos desta linha. Assim, para $m = 2$, há $3^n \cdot 3 \cdot 2^n \cdot 3 \cdot 2^n$ colorações possíveis.

Analogamente, no caso geral, há $3^n \cdot (3 \cdot 2^n)^m = 3^{n+m} \cdot 2^{nm}$ maneiras de realizar a pintura pedida.

XXIV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e Soluções da Terceira Fase

PROBLEMAS – NÍVEL 1

PROBLEMA 1

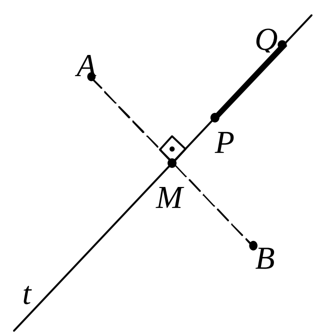
No quadriculado ao lado estão escritos todos os inteiros de 1 a 25. Considere todos os conjuntos formados por cinco desses números, de modo que, para cada conjunto, não existem dois números que estão na mesma linha ou na mesma coluna.

2	13	16	11	23
15	1	9	7	10
14	12	21	24	8
3	25	22	18	4
20	19	6	5	17

a) Apresente um conjunto cujo maior elemento é o 23.
b) Apresente um conjunto cujo maior elemento é o menor possível.

PROBLEMA 2

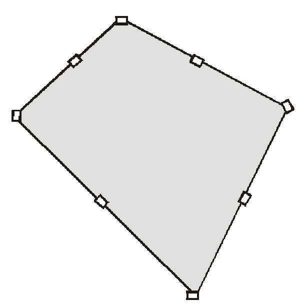
No desenho ao lado, a reta t é perpendicular ao segmento AB e passa pelo seu ponto médio M. Dizemos que A é o simétrico de B em relação à reta t (ou em relação ao segmento PQ).



Seja XYZ um triângulo retângulo de área 1m^2. Considere o triângulo $X'Y'Z'$ tal que X' é o simétrico de X em relação ao lado YZ, Y' é o simétrico de Y em relação ao lado XZ e Z' é o simétrico de Z em relação ao lado XY.
Calcule a área do triângulo $X'Y'Z'$.

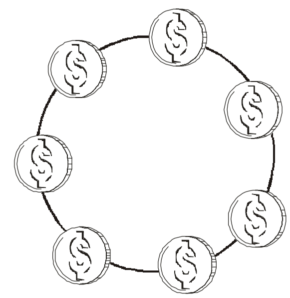
PROBLEMA 3

Um parque tem a forma de um quadrilátero e possui oito portões de entrada: um em cada vértice do quadrilátero e um no meio de cada lado. Os portões foram numerados de 1 a 8, de forma que a soma T dos números em cada lado é a mesma para os quatro lados. Apresente um exemplo de numeração dos pontos para cada um dos possíveis valores de T.



PROBLEMA 4

Sete moedas estão dispostas em círculo, com a coroa visível.



a) Mostre que é possível, virando-se cinco moedas consecutivas de cada vez, fazer com que todas fiquem com a cara visível.
b) Mostre que não é possível, virando-se quatro moedas consecutivas de cada vez, fazer com que todas fiquem com a cara visível.

PROBLEMA 5

São dados um tabuleiro de xadrez (8×8) e palitinhos do tamanho dos lados das casas. Dois jogadores jogam alternadamente e, em cada jogada, um dos jogadores coloca um palitinho sobre um lado de uma casa do tabuleiro, sendo proibido sobrepor palitinhos.
Vence o jogador que conseguir completar primeiro um quadrado 1×1 de palitinhos. Supondo que nenhum jogador cometa erros, qual dos dois jogadores tem a estratégia vencedora, ou seja, consegue vencer independentemente de como jogue seu adversário?

PROBLEMAS – NÍVEL 2

PROBLEMA 1

Veja o problema N^{o}. 2 do Nível 1.

PROBLEMA 2

Mostre que, entre dezoito inteiros consecutivos de três algarismos, sempre existe algum que é divisível pela soma de seus algarismos.

PROBLEMA 3

São dados um tabuleiro quadriculado $m \times n$ e palitinhos do tamanho dos lados das casas. Dois jogadores jogam alternadamente e, em cada jogada, um dos jogadores coloca um palitinho sobre um lado de uma casa do tabuleiro, sendo proibido sobrepor palitinhos.
Vence o jogador que conseguir completar primeiro um quadrado 1×1 de palitinhos. Supondo que nenhum jogador cometa erros, qual dos dois jogadores tem a estratégia vencedora, ou seja, consegue vencer independentemente de como jogue seu adversário?

PROBLEMA 4

Uma mistura possui os componentes *A* e *B* na razão 3 : 5, uma segunda mistura possui os componentes *B* e *C* na razão 1 : 2 e uma terceira mistura possui os componentes *A* e *C* na razão 2 : 3. Em que razão devemos combinar a 1ª, 2ª e 3ª misturas para que os componentes *A*, *B* e *C* apareçam na razão 3 : 5 : 2?

PROBLEMA 5

Seja *ABC* um triângulo inscrito em uma circunferência de centro *O* e *P* um ponto sobre o arco *AB* que não contém *C*. A perpendicular traçada por *P* à reta *BO* intersecta *AB* em *S* e *BC* em *T*. A perpendicular traçada por *P* a *AO* intersecta *AB* em *Q* e *AC* em *R*.

Prove as duas afirmações a seguir:

a) *PQS* é um triângulo isósceles

b) $PQ^2 = QR \cdot ST$

PROBLEMA 6

Seja n um inteiro positivo. Definimos $\varphi(n) = \left(1 - \dfrac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \dfrac{1}{p_k}\right) \cdot n$, onde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ são os fatores primos distintos de *n*. Prove que para todo $m \geq 1$, existe *n* tal que $\varphi(n) = m!$.

Obs: $m! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m$.

PROBLEMAS – NÍVEL 3

PROBLEMA 1

Mostre que existe um conjunto *A* formado por inteiros positivos tendo as seguintes propriedades:

a) *A* tem 2002 elementos.

b) A soma de qualquer quantidade de elementos distintos de *A* (pelo menos um) nunca é uma potência perfeita.

Obs: Uma potência perfeita é um número da forma a^b, onde a e b são inteiros positivos e $b \geq 2$.

PROBLEMA 2

ABCD é um quadrilátero convexo e inscritível e *M* é um ponto sobre o lado *CD*, tal que o triângulo *ADM* e o quadrilátero *ABCM* têm a mesma área e o mesmo perímetro. Prove que *ABCD* tem dois lados de comprimentos iguais.

PROBLEMA 3

Numeramos as casas de um tabuleiro quadriculado $m \times n$, onde m, $n \geq 2$, com os inteiros 1, 2, 3,...,mn de modo que, para todo $i \leq mn - 1$, as casas i e $i + 1$ tenham um lado em comum.

Prove que existe $i \leq mn - 3$ tal que as casas i e $i + 3$ têm um lado em comum.

PROBLEMA 4

Definimos o diâmetro de um subconjunto não vazio de $\{1, 2, ..., n\}$ como a diferença entre seu maior elemento e seu menor elemento (em módulo).

Calcule a soma dos diâmetros de todos os subconjuntos não vazios de $\{1, 2, ..., n\}$.

PROBLEMA 5

Temos um número finito de quadrados, de área total 4. Prove que é possível arranjá-los de modo a cobrir um quadrado de lado 1.

Obs: É permitido sobrepor quadrados e parte deles pode ultrapassar os limites do quadrado a ser coberto.

PROBLEMA 6

Arnaldo e Beatriz se comunicam durante um acampamento usando sinais de fumaça, às vezes usando uma nuvem grande, às vezes uma pequena.

No tempo disponível antes do café da manhã, Arnaldo consegue enviar uma seqüência de 24 nuvens. Como Beatriz nem sempre consegue distinguir uma nuvem pequena de uma grande, ela e Arnaldo fizeram um dicionário antes de ir para o acampamento. No dicionário aparecem *N* seqüências de 24 tamanhos de nuvem (como por exemplo a seqüência *PGPGPGPGPGPGGPGPGPGPGPGP*, onde *G* significa nuvem grande e *P* significa nuvem pequena). Para cada uma das *N* seqüências, o dicionário indica seu significado. Para evitar interpretações erradas, Arnaldo e Beatriz evitaram incluir no dicionário seqüências parecidas. Mais precisamente, duas seqüências no dicionário sempre diferem em pelo menos 8 das 24 posições.

Demonstre que $N \leq 4096$.

SOLUÇÕES – NÍVEL 1

PROBLEMA 1: SOLUÇÃO DE MÁRCIO H. MORAES FERNANDES (RIO DE JANEIRO - RJ)

Das informações dadas pelo problema conclui-se a seguinte propriedade:

Propriedade:

Como dois números não podem ficar na mesma coluna ou na mesma linha, sendo que para formar um conjunto são precisos 5 números e sabendo que o quadriculado possui 5 linhas e 5 colunas, cada número do conjunto tem que ocupar uma linha e uma coluna e conseqüentemente, cada linha e cada coluna estarão ocupadas por um número do conjunto a ser formado.

A) A resolução mais simples para que dois números não se encontrem na mesma linha ou na mesma coluna são as diagonais. Na diagonal do número 23, apenas o número 25 é maior que este. Assim peguei todos os números da diagonal menos o 25 que tive que substituir pelo 3 (que estava numa coluna que ainda não usara) e assim não pude utilizar o 20 se não repetiria a coluna, dessa forma o último número foi o 19 que estava em linha e coluna que não utilizei. Conjunto $A = \{23, 7, 21, 3, 19\}$. O conjunto A é a solução para o item a).

B) O menor número que pode ser maior no conjunto de 5 números é o 5. Assim, fui eliminando os números na seqüência. O número 5 pode ser descartado porque o 4 e o 3 estão na mesma linha e para fazer o conjunto sendo 5 o maior, os dois teriam que ser utilizados. O número 6 pode ser descartado porque na 4ª. coluna da esquerda para a direita, o único número menor que 6 está na mesma linha que ele. Se o número 7 for usado, o único número menor que ele na segunda coluna, estará na mesma linha dele. Com o 8, na quarta coluna poderá ser escolhido o 7 ou 5, escolhendo qualquer um, outros números não poderão ser utilizados: O 1 (na segunda coluna) ou o 6 (na terceira coluna). Com o 9 e o 10, se forem escolhidos, o número 1 não poderá ser utilizado por estar na mesma linha, não restando outro número na segunda coluna a ser utilizado. E com o 11 pode se fazer um conjunto obedecendo a propriedade. Conjunto $B = \{1, 3, 6, 8, 11\}$ sendo 11 o menor número possível.

PROBLEMA 2

Veja a solução do problema Nº. 1 do Nível 2.

PROBLEMA 3: SOLUÇÃO DE LUCIO ASSAOKA HOSSAKA (CURITIBA – PR)

Os possíveis valores de T são 12, 13, 14 e 15 pois $8 < T < 16 = 1 + 8 + 7$ (note que $4 + 5 + 6 < 16$ é a maior soma possível de números fora de $\{1, 7, 8\}$).

9 não é o valor de T pois 8 deve existir e, usando 3 números, é impossível fazer com que a soma de seu lado seja 9. O mesmo acontece com 10, já que não se pode usar 1

e 1. Não pode, igualmente, ser 11 o valor de T pois 7 e 8 devem existir. O único jeito de 7 chegar a 11 com mais dois números, é 7, 1, 3, pois não se pode repetir números. O único jeito de somar dois números a 8 com o resultado 11 é 8, 1 e 2. Fazemos então uma ilustração:

1	**8**	**2**
7		
3		

Restam para colocar, os números 4, 5 e 6. É impossível somar 2 desses números com 3 resultando 11. Os únicos valores para T, são: 12, 13, 14 e 15.

12 $\Rightarrow$

3	**7**	**2**
8		**4**
1	**5**	**6**

13 $\Rightarrow$

5	**2**	**6**
7		**3**
1	**8**	**4**

14 $\Rightarrow$

7	**6**	**1**
3		**5**
4	**2**	**8**

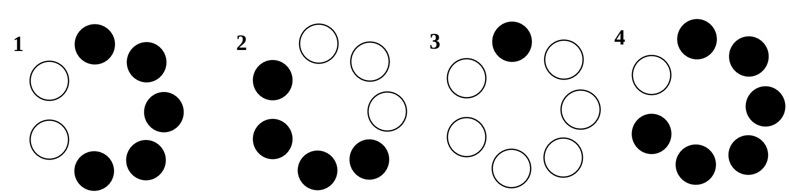
15 $\Rightarrow$

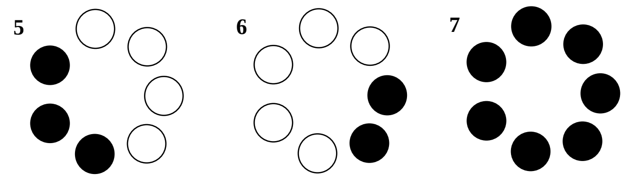
7	**2**	**6**
5		**1**
3	**4**	**8**

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DE DEBORAH DE SÁ PEREIRA BELFORT (RECIFE – PE)

a) Para conseguir desviar as sete moedas, foi preciso desvirar as cinco primeiras moedas, e depois desvira-se as próximas cinco, e algumas voltarão a estar viradas no lado Coroa. Continuo com este ciclo até chegar o resultado:

○ **= coroa** ● **= cara**



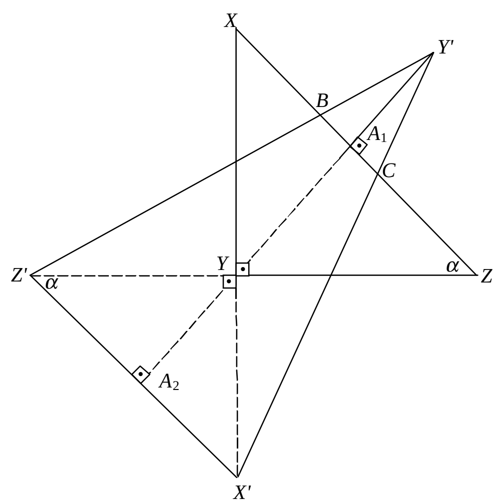


b) De 4 em 4, que é um número par, não se consegue as sete moedas viradas. Virando as moedas de 4 em 4, a quantidade de caras vai ser sempre número par; e 7 é ímpar.

PROBLEMA 5
Veja a solução do problema N°. 3 do Nível 2.

SOLUÇÕES – NÍVEL 2

PROBLEMA 1: SOLUÇÃO DE ANDRÉ L. RIBEIRO DOS SANTOS (PINDAMONHANGABA - SP)



$$\triangle XYZ \cong \triangle X'YZ \quad (LAL) \Rightarrow Y\hat{Z}'X' = Y\hat{Z}X = \alpha$$
$$\Rightarrow \overline{XZ} = \overline{X'Z'}$$

Logo $\overline{XZ} // \overline{X'Z'}$ (olhe os ângulos formados pela transversal $\overline{ZZ'}$).
Marque os pontos B e C no segmento $\overline{XZ}$, como mostra a figura.
Seja $\overline{Y'A_1}$ a altura do $\triangle BY'C$, em relação a Y'. Prolongue A_1 até encontrar o segmento $\overline{X'Z'}$, formando 90° em A_2.

Agora, note que $\overline{Y'A_2}$ é a altura do $\triangle Z'Y'X'$, em relação a $\overline{Y'}$.
Chame a medida de $\overline{XZ}$ de $y \Rightarrow \text{med}(\overline{XZ}) = y = \text{med}(\overline{X'Z'})$.
Chame a medida de $\overline{YA_1}$ de $h \Rightarrow \text{med}(\overline{YA_1}) = h$
$\overline{YA_1}$ é a altura do $\triangle ZYX$, em relação a *Y*; portanto $h = \overline{YA_1} = \overline{YA_2}$ que é a altura correspondente no $\triangle Z'YX'$.
Como *Y* é simétrico a *Y'* em relação a $\overline{XZ}$, então $\overline{YA_1} = \overline{Y'A_1} = h$
Assim $\overline{Y'A_1} = \overline{YA_1} = \overline{YA_2} = h$,
Área do $\triangle XYZ = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\overline{XZ} \cdot \overline{YA_1}}{2} = \frac{yh}{2}$
Logo $\frac{yh}{2} = 1$.
Área do $\triangle X'Y'Z' = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\overline{X'Z'} \cdot \overline{Y'A_2}}{2} =$
$= \frac{\overline{XZ} \cdot \left(\overline{Y'A_1} + \overline{YA_1} + \overline{YA_2}\right)}{2} = \frac{y \cdot (h+h+h)}{2} = \frac{3yh}{2}$
De $\frac{yh}{2} = 1 \Rightarrow \frac{3yh}{2} = 3$
Área do $\triangle X'Y'Z' = 3m^2$.

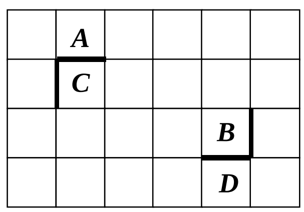
PROBLEMA 2: SOLUÇÃO DE EDUARDO FISCHER (ENCANTADO - RS)
Um número divisível por 18 cumpre a condição. Um número assim possui a soma dos algarismos igual a 9 ou a 18 (27 só com o 999, que não é par). Qualquer número divisível por 18 é divisível por 9 e 18. Como em cada 18 números inteiros consecutivos um é divisível por 18 o problema está resolvido.
Resp. Entre quaisquer 18 inteiros consecutivos, um é divisível por 18. A soma dos algarismos de um múltiplo de 18 (com 3 algarismos) é 18 ou 9.
Em qualquer caso, o número é divisível pela soma dos algarismos.

PROBLEMA 3: SOLUÇÃO DE ANDRÉ L. RIBEIRO DOS SANTOS (PINDAMONHANGABA - SP)
Para preencher todos os quadrados do tabuleiro, precisamos de um número ímpar de palitos, se as paridades de m e n forem diferentes; ou de um número par de palitos, se as paridades forem iguais:

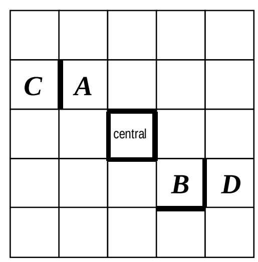
i) m e n são de paridades diferentes: o primeiro jogador coloca o primeiro palito na posiçào central do tabuleiro e imita espelhadamente *(em relação ao palito) as jogadas do adversário. Haverá uma hora em que todos os quadrados serão ocupados com 2 palitos e será a vez do segundo jogador. Este por sua vez preenche um dos quadradinhos com o terceiro palito e o primeiro jogador o completa em seguida, vencendo o jogo.

ii) m e n são de paridades iguais: o segundo jogador copia as jogadas do primeiro, espelhadamente*, quando sobram todos os quadrados preenchidos com 2 palitos é a vez do primeiro jogador, este preenche um quadrado com o terceiro palito, e o segundo jogador o completa ganhando o jogo.
*espelhadamente: como se estivesse olhando para um espelho, tem a mesma profundidade mas é invertido lateralmente. Exemplos:

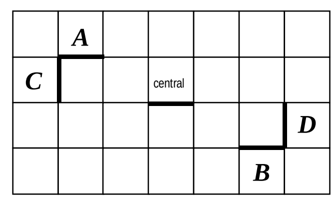
par x par



ímpar x ímpar



ímpar x par



Em todos os casos A está espelhando a B e C está espelhando D.
Se m e n tem a mesma paridade o segundo jogador ganha, se tem paridades diferentes o primeiro ganha.

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DE THOMÁS YOITI SASAKI HOSHINA (RIO DE JANEIRO – RJ)

Temos na mistura:

$$\text{I} \Rightarrow \frac{3}{8}A \text{ e } \Rightarrow \frac{5}{8}B$$

$$\text{II} \Rightarrow \frac{1}{3}B \text{ e } \Rightarrow \frac{2}{3}C$$

$$\text{III} \Rightarrow \frac{2}{5}A \text{ e } \Rightarrow \frac{3}{5}C$$

Queremos que na mistura

$$\text{IV} \Rightarrow \frac{3}{10}A,\ \frac{1}{2}B \text{ e } \frac{1}{5}C$$

Se pegarmos x da I, y da II e z da III teremos:

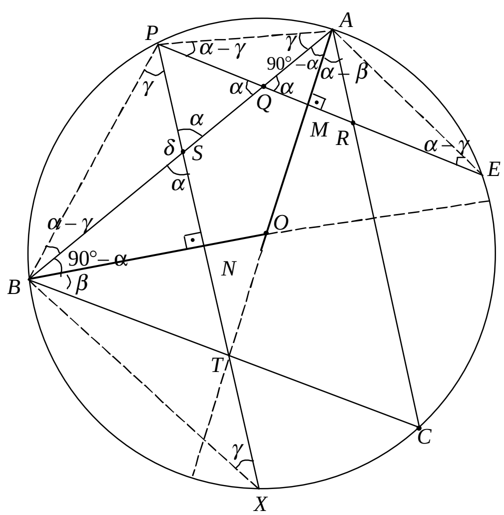
$$\left.\begin{array}{l} A \Rightarrow \dfrac{3}{8}x + \dfrac{2}{5}z = \dfrac{3}{10} \therefore \\ B \Rightarrow \dfrac{1}{3}y + \dfrac{5}{8}x = \dfrac{1}{2} \therefore \\ C \Rightarrow \dfrac{2}{3}y + \dfrac{3}{5}z = \dfrac{1}{5} \therefore \end{array}\right| \quad \left.\begin{array}{l} 15x + 16z = 12 \\ 15x + 8y = 12 \\ 10y + 9z = 3 \end{array}\right\rangle y = 2z$$

$$y = \frac{6}{29} \quad z = \frac{3}{29}$$

Teriamos que $y = \dfrac{6}{29}$ e $z = \dfrac{3}{29}$, logo $x = \dfrac{20}{29}$

$x : y : z = 20 : 6 : 3.$

PROBLEMA 5: SOLUÇÃO DE THOMÁS YOITI SASAKI HOSHINA (RIO DE JANEIRO – RJ)



a) Chamemos $P\hat{Q}S$ de α, logo $Q\hat{A}M = 90° - \alpha$ e sendo $\triangle ABO$ isósceles $A\hat{B}O = 90° - \alpha$, então $P\hat{S}Q = \alpha$.

Logo $\triangle PSQ$ é isósceles.

b) Agora chamemos $P\hat{A}Q = \gamma$ e $O\hat{B}C = \beta$ teremos então que, como

$B\hat{P}S = B\hat{X}P = P\hat{A}B = \gamma$, $\triangle APQ \cong \triangle PSB$, logo $\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{PS}} = \dfrac{\overline{PQ}}{\overline{BS}} \therefore \overline{PQ} \cdot \overline{PS} = \overline{AQ} \cdot \overline{BS}$

Como queremos provar que $\overline{PQ}^2 = \overline{QR}\cdot\overline{ST}$, e $\overline{PQ} = \overline{PS}$,

Basta apenas provar $\overline{AQ}\cdot\overline{BS} = \overline{QR}\cdot\overline{ST}$ ou $\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{QR}} = \dfrac{\overline{ST}}{\overline{BS}}$

Pelo $\triangle AQM$, $sen\alpha = \dfrac{\overline{AM}}{\overline{AQ}} \therefore \overline{AQ} = \dfrac{\overline{AM}}{sen\alpha}$

Pelo $\triangle AQR$, $\dfrac{\overline{QR}}{sen(90-\beta)} = \dfrac{\overline{AR}}{sen\alpha} \therefore \overline{QR} = \dfrac{\overline{AR}\cdot\cos\beta}{sen\alpha}$

Logo $\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{QR}} = \dfrac{\overline{AM}}{\overline{AR}\cdot\cos\beta}$

$\cos(\alpha-\beta) = \dfrac{\overline{AM}}{\overline{AR}}$

Pelo $\triangle BST$, $\dfrac{\overline{ST}}{sen(90°-\alpha+\beta)} = \dfrac{\overline{BT}}{sen\alpha} \therefore \overline{ST} = \dfrac{\overline{BT}\cos(\alpha-\beta)}{sen\alpha}$

Pelo $\triangle BSN$, $sen\alpha = \dfrac{\overline{BN}}{\overline{BS}} \therefore \overline{BS} = \dfrac{\overline{BN}}{sen\alpha}$

Logo $\dfrac{\overline{ST}}{\overline{BS}} = \dfrac{\overline{BT}\cos(\alpha-\beta)}{\overline{BN}}$; $\cos\beta = \dfrac{\overline{BN}}{\overline{BT}}$

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AR}\cdot\cos\beta} = \frac{\overline{BT}\cos(\alpha-\beta)}{\overline{BN}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{AR}\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\overline{BT}\cos\beta}{\overline{BN}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\cos\beta}{\cos\beta} \Leftrightarrow 1 = 1.$$

PROBLEMA 6: SOLUÇÃO ADAPTADA DE GABRIEL BUJOKAS (SÃO PAULO - SP)

Seja p_i o i-ésimo primo positivo.

$\varphi(p_1^{e_1}\cdot p_2^{e_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{e_n}) = p_1^{e_1-1}\cdot p_2^{e_{2n}-1}\cdot p_n^{e_n-1}(p_1-1)\ldots(p_n-1)$; com $n, e_1 \in \mathbb{Z}_*^+$ (isso vem diretamente da fórmula). Então basta escrever $M!$ da forma ao lado direito da igualdade. Para M pequeno é fácil.

$1! = 2^0\cdot(2-1) = \varphi(2)$

$2! = 2\cdot(2-1) = \varphi(4)$

$3! = 2^0\cdot 3^1(2-1)(3-1) = \varphi(18)$

$4! = 2^2 \cdot 3^1(2-1)(3-1) = \varphi(72)$

Agora utilizarei indução. Seja $p_n \geq 5$ o n-ésimo primo. Suponha que para todo $k < p_n, k!$ possa ser escrito na forma acima utilizando apenas primos menores que p_n na fatoração. Então $(p_n - 2)! = \varphi(p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_{n-1}^{e_{n-1}})$ implica $p_n! = p_n(p_n - 1)(p_n - 2)! = \varphi(p_n^2) \cdot (p_n - 2)! = \varphi(p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \ldots \cdot p_{n-1}^{e_{n-1}} \cdot p_n^2)$. Para os m com $p_n < m < p_{n+1}, m$ é um produto de primos menores ou iguais a p_n, donde $m! = m \cdot (m-1)!$ também é da forma acima. Conclusão: Para todo M existe um N tal que $M! = \varphi(N)$.

SOLUÇÕES – NÍVEL 3

PROBLEMA 1: SOLUÇÃO DE THIAGO MORELLO PERES (RIO DE JANEIRO - RJ)

Por absurdo, suponhamos a inexistência da seqüência satisfazendo o item *b*.

Seja *p* um número primo maior que 2005003. Seja uma seqüência a progressão aritmética de primeiro termo *p* e a razão *p*:

$A = \{p, 2p, 3p ..., 2002p\}$

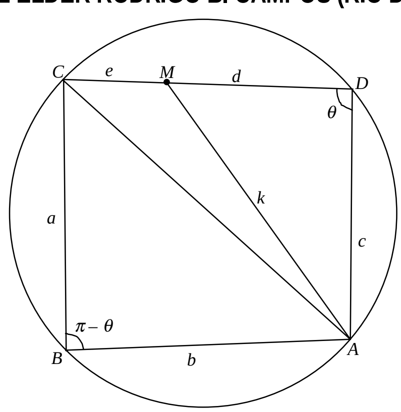
Assim qualquer soma é do tipo $n \cdot p$ com $n < p$ até mesmo para a soma total:

$$p \cdot \frac{(1+2002) \cdot 2002}{2} = p \cdot 2005003$$

Garante-se assim, que a soma não é potência perfeita, quaisquer que sejam as parcelas desta.

Como este exemplo não confere com a suposição, esta é um absurdo e, portanto existem seqüências satisfazendo os itens *a* e *b* simultaneamente. cqd.

PROBLEMA 2: SOLUÇÃO DE ELDER RODRIGO B. CAMPOS (RIO DE JANEIRO - RJ)



$\bullet\, 2p(\Delta ADM) = 2p(\square ABCM) \Leftrightarrow a+b+e+k = c+d+k \Leftrightarrow c+d = a+b+e$ (I)

$\bullet\, S(\square ABCD) = \dfrac{(d+e)\ c\ sen\ \theta}{2} + \dfrac{ab\ sen\ \theta}{2}.$

$\bullet\, S(\Delta ADM) = \dfrac{cd\ sen\ \theta}{2}\cdot$ ora, se $S(\Delta ADM) = S(\square ABCM)$ e

$S(\Delta ADM) + S(\square ABCM) = S(\square ABCD) \Rightarrow S(\square ABCD) = 2S(\Delta ADM) \Leftrightarrow$

$(d+e)c\ sen\ \theta + ab\ sen\ \theta = 2cd\ sen\ \theta \Leftrightarrow ec + ab = cd \Leftrightarrow$

(II) $ab = c(d-e)$. De (I): $b + a - c = d - e$.

(I) em (II) $\Rightarrow ab = c(a+b-c) \Leftrightarrow ab = ac + bc - c^2 \Leftrightarrow$

$a(b-c) = c(b-c) \Rightarrow b = c$ ou $a = c$

Logo, $\square ABCD$ tem dois lados de mesmo comprimento. cqd.

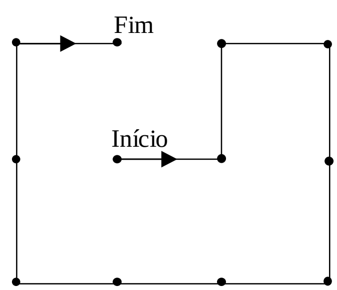
PROBLEMA 3: SOLUÇÃO DE HENRIQUE CHOCIAY (PINHAIS - PR)

A numeração da tabela pode ser comparada com o preenchimento de uma malha de pontos, observe:

Ex.: Tabela 3×4

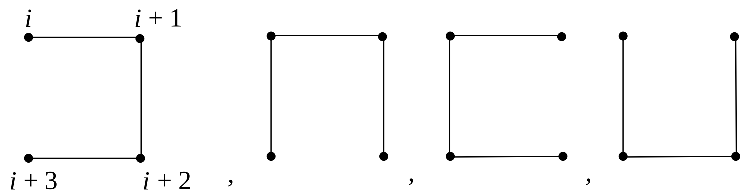
11	**12**	**3**	**4**
10	**1**	**2**	**5**
9	**8**	**7**	**6**

Malha 3×4



O preenchimento da tabela é análogo à tarefa de passar por todos os pontos da malha com uma linha única (sem "quebras" ou bifurcações).

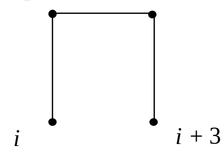
A ocorrência de i ao lado de $(i + 3)$, por sua vez, é análoga às figuras:



na malha.

O problema torna-se, então, provar que é impossível preencher a tabela sem realizar uma dessas figuras. A malha é formada por $(m-1)(n-1)$ quadrados de 4 pontos próximos, os quais terão alguns de seus lados preenchidos ao fim do preenchimento.

Se houver quadrado com 3 lados pintados, haverá



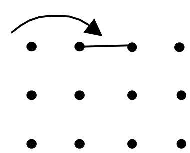
Ou i ao lado de $i+3$.

O total de lados dos quadrados (com multiplicidade) é $4(m-1)\cdot(n-1) = t_\ell$

Para fazer a linha, efetuamos $(mn-1)$ riscos, que podem preencher lados de 1 ou de 2 quadrados.

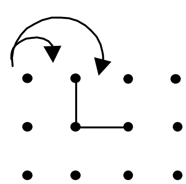
• Se o risco for feito na lateral da malha, preencherá apenas 1 lado de quadrado.

Exemplo:



• Se o risco for feito no "miolo" da malha, preencherá dois lados de quadrado.

Exemplo:



Supondo a distribuição mais homogênea de lados preenchidos, cada quadrado tem o mesmo número de seus lados preenchidos.

Se o número de lados preenchidos por riscos for maior que a metade do total de lados de quadrados, haverá com certeza um quadrado com 3 lados riscados.

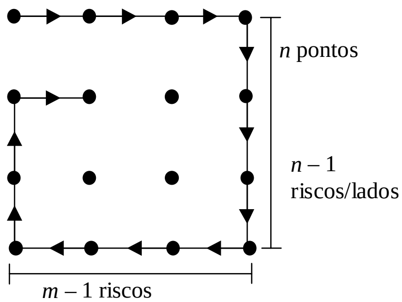
$$N^o > \frac{t_\ell}{2}$$

O número de lados preenchidos por p riscos laterais é $(p \cdot 1) = p$

O número de lados preenchidos por $(mn - 1) - p$ riscos no meio é $2(mn - 1) - 2p$

O número total de riscos é: $[2(mn - 1) - 2p] + (p) = 2mn - p - 2 = N^o$.

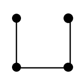
O número máximo de riscos laterais é:



$2(m - 1) + 2(n - 1) - 1$

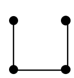
$P_{\max} = 2m + 2n - 5$

O número mínimo de lados preenchidos é $2mn - P_{\max} - 2 = 2mn - 2m - 2n + 3 =$
$= N^o$ min.

Se $N^o \min > \frac{t_\ell}{2}$, fica provado que há  (ou similar) e i ao lado de $i + 3$

$$2mn - 2m - 2n + 3 > \frac{4(m-1)(n-1)}{2}$$
$$2mn - 2m - 2n + 3 > 2mn - 2m - 2n + 2$$
$$3 > 2$$

O número de lados preenchido é maior que a metade do total de lados.

Há  e portanto há i ao lado de $i + 3$ para qualquer tabela.

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO ADAPTADA DE RODRIGO KENDY YAMASHITA (SÃO PAULO - SP)

Sejam m e M as somas dos elementos mínimos e máximos dos subconjuntos. Como o diâmetro de um conjunto é definido como a diferença entre seu máximo e seu mínimo, a soma desejada é igual a $M - m$. Note que podemos incluir os subconjuntos unitários, já que seus máximos e mínimos coincidem.

O número k, $1 \le k \le n$, é elemento mínimo dos subconjuntos da forma $\{k\} \cup A$, sendo A um subconjunto de $\{k+1; k+2; ...; n\}$. Logo k é elemento mínimo de 2^{n-k} subconjuntos.

Conseqüentemente, $m = \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \cdot 2^k$.

Contemos o número de subconjuntos de diâmetro k. Seja a o mínimo de um desses subconjuntos. O seu máximo é, então, $a + k$. Assim, $a + k \le n \Leftrightarrow a \le n - k$. Logo podemos escolher a de $n - k$ maneiras. Como há $k - 1$ números entre a e $a + k$, podemos escolher os demais elementos do subconjunto de 2^{k-1} maneiras. Logo há $(n-k) \cdot 2^{k-1}$ subconjuntos de diâmetro k. Como há, no total, $2^n - n - 1$ subconjuntos não vazios e não unitários,

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \cdot 2^{k-1} = 2^n - n - 1 \Leftrightarrow 2\sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \cdot 2^{k-1} = 2^{n+1} - 2n - 2 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \cdot 2^k =$$

$$= 2^{n+1} - 2n - 2 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \cdot 2^k = 2^{n+1} - 2n - 2 + n = 2^{n+1} - n - 2$$

Logo $m = 2^{n+1} - n - 2$.

Para calcular M, basta observar que podemos associar cada conjunto $A = \{a_1; a_2; ...; a_n\}$ ao conjunto $f(A) = \{n+1-a_1; n+1-a_2; ...; n+1-a_n\}$, de modo que se a = mín A então $n + 1 - a = \max f(A)$. A função f é claramente uma bijeção. Logo, como há $2^n - 1$ subconjuntos não vazios, $M = (n+1) \cdot (2^n - 1) - m \Leftrightarrow M - m = (n+1) \cdot 2^n - n - 1 - 2m \Leftrightarrow M - m =$

$$= (n+1) \cdot 2^n - n - 1 - 2 \cdot (2^{n+1} - n - 2) = (n-3) \cdot 2^n + n + 3.$$

PROBLEMA 5: SOLUÇÃO DE RAFAEL DAIGO HIRAMA (CAMPINAS – SP)

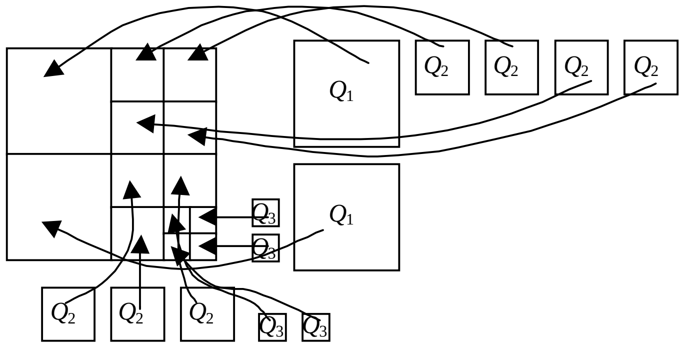
Podemos supor então que os quadrados têm lado menor que 1, caso contrário é só posicionar o quadrado de 1 ou mais sobre o quadrado a se cobrir.

Vamos classificar os quadrados como do tipo Q_k tal que o lado do quadrado seja menor que $\frac{1}{2^{k-1}}$ e maior ou igual a $\frac{1}{2^k}$.

Se tivermos um Q_0 acabou, pois ele terá lado maior ou igual a 1 e pronto.

Caso contrário vamos dividir o tabuleiro em 4 partes iguais. Cada uma tem lado 1/2, ou seja, é satisfatoriamente coberto por um Q_1 cada um. Então se posiciona todos os disponíveis. Se tiver pelo menos 4 Q_1 acabou.

Caso contrário os que sobraram devem ser divididos em 4 e preenchidos por quantos Q_2 tiverem. E assim sucessivamente até preencher o tabuleiro.
Exemplo:



Agora, para provar que isso sempre é possível basta provar que a área total dos quadrados usados é menor que 4. Assim, já que o modo de preenchimento pede "use tantos do Q_k quanto existirem", se sobrar buraco ou esqueceu-se de usar um quadrado em um passo anterior ou falta usar os quadrados menores.
Para isso vamos ver o desperdício de cada quadrado, ou seja, quanto do quadrado não usamos para preencher a área de interesse (por exemplo, o desperdício de um quadrado Q_3 ao ser colocado sobre um tabuleiro de lado 1/8 é o quanto do quadrado ficará de fora desse tabuleiro, mesmo que esse resto esteja sobre outra parte do tabuleiro total ele vai ser contado como desperdício).

Vejamos, como sempre usamos Q_k para cobrir um tabuleiro de lado $\frac{1}{2^k}$, a área do Q_k é $\frac{1}{2^{2k-2}}$ no máximo e $\frac{1}{2^{2k}}$ no mínimo e a do tabuleiro é $\frac{1}{2^{2k}}$, logo o desperdício é de $\frac{1}{2^{2k-2}} - \frac{1}{2^{2k}} = \frac{3}{2^{2k}}$ no máximo, isso prova que o desperdício não passa de $\frac{\frac{3}{2^{2k}}}{\frac{1}{2^{2k}}} = 3$ vezes da área preenchida, ou seja, é desperdiçado no total no máximo 3/4 da área dos quadrados utilizados, ou seja, 1/4 pelo menos é utilizado. Como o total da área dos quadrados é 4, a área utilizada é pelo menos 1, o que termina o problema.

PROBLEMA 6: SOLUÇÃO DE FÁBIO DIAS MOREIRA (RIO DE JANEIRO - RJ)

Definição: A distância entre duas palavras p e q é o número de posições em que duas palavras diferem (símbolo: $d(p, q)$).

Teorema 1: $d(p, q) + d(q, r) \geq d(p, r)$.

Prova: Seja $\Delta_{\alpha\beta}$ o conjunto das posições em que α e β diferem. Então o teorema equivale a $\#(\Delta_{pq}) + \#(\Delta_{qr}) \geq \#(\Delta_{pr})$. Mas $\Delta_{pr} = (\Delta_{pq} \cup \Delta_{qr}) - (\Delta_{pq} \cap \Delta_{qr})$, pois só há dois tipos de nuvens, logo p e r são iguais nas posições onde ambos diferem de q. Mas $\Delta_{pq} \cap \Delta_{qr} \subset \Delta_{pq} \cup \Delta_{qr}$, logo $\#(\Delta_{pr}) = \#(\Delta_{pq} \cup \Delta_{qr}) - \#(\Delta_{pq} \cap \Delta_{qr}) =$
$= \#(\Delta_{pq}) + \#(\Delta_{qr}) - 2\#(\Delta_{pq} \cap \Delta_{qr})$, e nossa afirmação equivale a $\#(\Delta_{pq} \cap \Delta_{qr}) \geq 0$, obviamente verdadeiro.

Definição: A palavra real mais próxima a uma palavra q é a palavra p que:

i) Pertence ao dicionário.

ii) Minimiza a distância entre p e q.

(se existir mais de uma palavra que atende i) e ii) todas elas são mais próximas).

Definição: A vizinhança de uma palavra p pertencente ao dicionário é o conjunto de todas as palavras mais próximas a p (símbolo: ε_p).

Teorema 2: Toda vizinhança de uma palavra p contém todas as palavras cujas distâncias até p sejam menores ou iguais a 4.

Prova: Seja q tal que $d(p,q) \leq 4$ mas $q \notin \varepsilon_p$. Então $q \in \varepsilon_r$ para r pertencente ao dicionário. Isso implica $d(q,r) < d(p,q) \leq 4$, logo $d(p,r) \leq d(p,q) + d(q,r) < 4+4=8$, absurdo, pois p e r não poderiam estar simultaneamente no dicionário.

Teorema 3: Toda palavra p pertence a no máximo seis vizinhanças.

Prova: Suponha que $p \in \varepsilon_{q_1} \cap \varepsilon_{q_2} \cap \varepsilon_{q_3} \cap \varepsilon_{q_4} \cap \varepsilon_{q_5} \cap \varepsilon_{q_6} \cap \varepsilon_{q_7}$. Como $d(q_i, q_j) \leq d(p, q_i) + d(p, q_j), d(q_i, q_j) \leq 8$. Como $d(q_i, q_j) \geq 8$, $d(q_i, q_j) = 8$. Como $d(p, q_i) = d(p, q_j), d(p, q_i) = 4, \forall i \in \{1, ..., 7\}$. Como cada palavra só tem 24 nuvens, existem duas palavras (q_1 e q_2, sem perda de generalidade) tais que $\Delta_{pq_1} \cap \Delta_{pq_2} \neq \phi$. Mas então, pelos argumentos do teorema 1, $d(q_1,q_2) = d(p,q_1) + d(p,q_2) - 2\#(\Delta_{pq_1} \cap \Delta_{pq_2}) \Rightarrow d(q_1,q_2) = 8 - 2\#(\Delta_{pq_1} \cap \Delta_{pq_2}) \leq 8 - 2 \cdot 1 = 6$ absurdo, pois q_1 e q_2 não poderiam pertencer simultaneamente ao dicionário.

N é máximo quando todas as palavras distam no máximo quatro da palavra do dicionário mais próxima a ela e todas as palavras que distam exatamente quatro da palavra do dicionário mais próxima pertencem a seis vizinhanças, já que isso caracteriza a formação mais densa possível, devido ao seguinte teorema:

Teorema 4: $p \in \varepsilon_q \cap \varepsilon_r, q \neq r \Rightarrow d(p,q) = d(p,r) = 4.$

Prova: Suponha que $d(p,q) = d(p,r) < 4$ (a igualdade é obrigatória pela definição de vizinhança). Então $d(q,r) \leq d(p,q) + d(q,r) < 4 + 4 = 8$, absurdo, pois as duas palavras não poderiam pertencer simultaneamente ao dicionário.
Porquê isso valida nossa afirmação acima? Porque nenhum ponto que dista três ou menos ao ponto mais próximo pertence a mais de uma vizinhança. Assim, o arranjo descrito acima é o mais denso, pois todas as palavras que não pertencem ao dicionário estão sempre cercadas por palavras do dicionário (pertencem sempre ao número máximo de vizinhanças).
Nas circunstancias acima descritas $\#(\varepsilon_p) = \#(\varepsilon_q)$ para todo p e q (pois $C_{24}^0 + C_{24}^1 + C_{24}^2 + C_{24}^3 + C_{24}^4$ é constante e igual a $\#(\varepsilon_p)$ por (1)). Além disso, $\sum_{p \in D} \#(\varepsilon_p)$, onde D é o dicionário, seria 2^{24}, mas não, é pois as palavras que distam quatro de uma palavra no dicionário são contadas seis vezes. Vamos achar então n_p', com um fator de correção apropriado:

$$n_p' = \underbrace{C_{24}^0}_{\substack{d=0 \\ \text{(própria} \\ \text{palavra)}}} + \underbrace{C_{24}^1}_{d=1} + \underbrace{C_{24}^2}_{d=2} + \underbrace{C_{24}^3}_{d=3} + \frac{C_{24}^4 \;\leftarrow d=4}{6}$$

Vamos contar só uma vez!

$$n_p' = 1 + 24 + 276 + 2024 + \frac{10626}{6} = 4096 \text{ (que coincidência!)}$$

Mas até agora consideramos o melhor caso – há algum desperdício de palavras envolvido. Logo algumas vizinhanças são maiores do que são no caso ideal. Por isso, $n_p' \geq 4096$ em geral.

Assim $2^{24} \geq 4096N = 2^{12} N \Rightarrow N \leq 2^{12} = 4096.$

XXIV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e Soluções da Primeira Fase – Nível Universitário

PROBLEMA 1

A função $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ é contínua e derivável.
Sabe-se que $f(0) = 0$, $f'(0) = a$ e que $f(x + 1) = e^{f(x)}$ para todo $x > -1$.
Calcule $f'(3)$.

PROBLEMA 2

Seja A a matriz real $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} x+y & x & \dots & x \\ x & x+y & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \cdots & x+y \end{pmatrix}.$$

Diga para que valores de x e y a matriz A é inversível e calcule A^{-1}.

PROBLEMA 3

Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}\,dx.$

PROBLEMA 4

Determine todos os valores inteiros positivos de m para os quais o polinômio $(x + 1)^m + x^m + 1$ é divisível por $(x^2 + x + 1)^2$.

PROBLEMA 5

Jogamos 10 dados comuns (com 6 faces equiprováveis numeradas de 1 a 6).
Calcule a probabilidade de que a soma dos 10 resultados seja igual a 20.

PROBLEMA 6

Considere a curva $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3 - 43x + 166\}$.

a) Seja $Q = (a, b)$ um ponto de C. Suponha que a reta tangente a C no ponto Q intersecte C num único outro ponto, Q'. Determine as coordenadas de Q'.

b) Seja $P_0 = (3, 8)$. Para cada inteiro não negativo n, definimos $P_{n+1} = P'_n$, o ponto de interseção de C com a reta tangente a C em P_n. Determine P_{2002}.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1

Derivando a equação $f(x+1)=e^{f(x)}$ temos $f'(x+1)=f'(x)\cdot e^{f(x)}$.

Assim $f(1)=e^0=1,\ \ f'(1)=f'(0)\cdot e^{f(0)}=a$

$f(2)=e^1=e,\ f'(2)=f'(1)\cdot e^{f(1)}=ae$

$f'(3)=f'(2)\cdot e^{f(2)}=ae^{e+1}$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2

Se y = 0 todas as linhas são iguais e a matriz não é inversível. Se $nx + y = 0$ a soma das n linhas é 0 e portanto a matriz novamente é não inversível. Vamos mostrar que se nenhuma destas duas condições ocorre a matriz é inversível.

Se $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ temos $B^2 = nB$ e $A = yI + xB$.

Tome $C=\dfrac{1}{y}I-\dfrac{x}{y(nx+y)}B.$

$$AC=(yI+xB)\left(\frac{1}{y}I-\frac{x}{y(nx+y)}B\right)=I$$

Comentário (não faz parte da solução)

Encontramos C conjecturando que $A^{-1}=uI+vB$.

E resolvendo um sistema para encontrar u e v. Pode-se demonstrar antes de tentar resolver o sistema que A^{-1}, se existir, deve ter a forma acima: A^{-1} é uma função analítica de A, logo um polinômio em A, logo um polinômio em B. Como observamos que B^2 é um múltiplo escalar de B segue que todo polinômio em B é da forma $uI + vB$.

SOLUÇÃO ALTERNATIVA

Vamos resolver o sistema

$$\begin{cases} (x+y)a_1 + x\cdot a_2 + \dots + x\cdot a_n = b_1 \\ x\cdot a_1 + (x+y)a_2 + \dots + x\cdot a_n = b_2 \\ \vdots \\ x\cdot a_1 + x\cdot a_2 + \dots + (x+y)\cdot a_n = b_n \end{cases}$$

Somando todas as equações, obtemos $(nx+y)(a_1+...+a_n)=(b_1+...+b_n)$, donde $x(a_1+...+a_n)=\dfrac{x}{nx+y}(b_1+...+b_n)$, caso $nx+y\neq 0$.

Diminuindo essa igualdade da j-ésima equação, obtemos $y\cdot a_j=b_j-\dfrac{x}{nx+y}(b_1+...+b_n)$ e, caso

$y\neq 0, a_j=\dfrac{-x}{y(nx+y)}b_1-...+\dfrac{(n-1)x+y}{y(nx+y)}b_j-...-\dfrac{x}{y(nx+y)}b_n.$

Assim, $A^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{(n-1)x+y}{y(nx+y)} & \dfrac{-x}{y(nx+y)} & \cdots & \dfrac{-x}{y(nx+y)} \\ \dfrac{-x}{y(nx+y)} & \dfrac{(n-1)x+y}{y(nx+y)} & \cdots & \dfrac{-x}{y(nx+y)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{-x}{y(nx+y)} & \dfrac{-x}{y(nx+y)} & \cdots & \dfrac{(n-1)x+y}{y(nx+y)} \end{pmatrix}.$

Note que, se $nx+y=0$, o sistema não tem solução se $b_1+...+b_n\neq 0$, e, se $y=0$, o sistema não tem solução se $b_j-\dfrac{x}{nx+y}(b_1+...+b_n)\neq 0$ para algum j. Em nenhum desses casos A é invertível.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3

Seja $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}$. Racionalizando, temos

$f(x)=\dfrac{(\sqrt{x^2+1}+x-1)\left(\sqrt{x^2+1}-x-1\right)}{(x^2+1)-(x+1)^2}=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)^2-x^2}{-2x}$, logo $f(-x)=-f(x)$, para todo x, e portanto, $\int_{-1}^{1}f(x)dx=0$.

SOLUÇÃO ALTERNATIVA

Vamos achar uma primitiva de f: Em $\int\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}dx$ fazemos $x=\tan\theta$, $dx=\sec^2\theta\, d\theta$, e, como $\sqrt{\tan^2\theta+1}=\sec\theta$ (para $\dfrac{-\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$), obtemos

$\int\dfrac{\sec\theta+\tan\theta-1}{\sec\theta+\tan\theta+1}\cdot\sec^2\theta\ d\theta=$

$$\int \frac{1+sen\theta - \cos\theta}{\cos^2\theta(1+sen\theta+\cos\theta)}\,d\theta.$$

Fazendo $\tan\frac{\theta}{2} = z,\ d\theta = \frac{2dz}{1+z^2},\ sen\theta = \frac{2z}{1+z^2}, \cos\theta = \frac{1-z^2}{1+z^2}$, obtemos

$$\int \frac{2z^2+2z}{2+2z}\cdot\left(\frac{1+z^2}{1-z^2}\right)^2\frac{2dz}{1+z^2} = \int \frac{2z(1+z^2)dz}{(1-z^2)^2}.$$

Buscando A, B, C, D tais que $\frac{A}{1+z}+\frac{B}{(1+z)^2}+\frac{C}{1-z}+\frac{D}{(1-z)^2} = \frac{2z(1+z^2)}{(1-z^2)^2}$, obtemos $(A + B + Az)(1-z)^2 + (C + D - Cz)(1+z)^2 = 2z(1+z^2)$, donde $A - C = 2$, $B - A + D - C = 0$, $-A - 2B + C + 2D = 2$, $A + B + C + D = 0$. Assim, $D = -B$, $C = -A$, logo $A = 1$, $C = -1$, $D = 1$, $B = -1$.

Assim, $\int \frac{2z(1+z^2)}{(1-z^2)^2}dz = \ln(1+z)+\frac{1}{1+z}+\ln(1-z)+\frac{1}{1-z} = \ln(1-z^2)+\frac{2}{1-z^2}.$

Quando x varia entre – 1 e 1, θ varia entre $\frac{-\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{4}$, donde z varia entre $-\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ e $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$. Temos $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{sen\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1,$ donde z varia entre $1-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}-1.$ Assim, a integral é $\left.\ln(1-z^2)+\frac{2}{1-z^2}\right|_{1-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}-1} = 0,$ pois $(\sqrt{2}-1)^2 = (1-\sqrt{2})^2.$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4

Seja $\omega = \frac{-1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$ uma raiz de $x^2 + x + 1$. Para que $(x^2 + x + 1)^2$ divida $(x + 1)^m + x^m + 1 = P(x)$, devemos ter $P(\omega) = 0$ e $P'(\omega) = 0$.

Assim, $(\omega+1)^m + \omega^m = -1$ e $m((\omega+1)^{m-1}+\omega^{m-1}) = 0.$

Temos que $\omega+1 = \frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$ é tal que $(\omega+1)^2 = \omega$ e $(\omega+1)^3 = -1$. Como ω e $\omega + 1$ são raízes sextas da unidade, o comportamento se repetirá com período 6.

Assim, $(\omega+1)^{m-1}+\omega^{m-1} = 0$ equivale a $(\omega+1)^{m-1} = -\omega^{m-1} = (\omega+1)^{3+2(m-1)}$, ou seja $(\omega+1)^{m+2} = 1,$ o que equivale a $m \equiv -2 \pmod 6$. Nesse caso, temos $(\omega+1)^m+\omega^m = (\omega+1)^4+\omega = \omega^2+\omega = -1,$ donde as duas condições são satisfeitas. Assim, os números que satisfazem o enunciado são os inteiros positivos da forma $6k - 2$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5

Devemos encontrar o número de soluções de $a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = 20,\ 1 \le a_i \le 6.$

O número de soluções de $a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = 20,\ a_i \ge 1$ é claramente $\binom{19}{9}$.

Devemos agora descontar as soluções para as quais apenas um dentre os a_i é ≥ 7 pois caso contrário tal soma seria ≥ 7 + 7 + 8 · 1 = 22. Assim, basta descontar 10 vezes o número de soluções de $a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = 20,\ a_1 \ge 7,\ a_i \ge 1,$

ou de $\tilde{a}_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = 14,\ \ \tilde{a}_1, a_i \ge 1,$ que é $\binom{13}{9}$. Assim $N = \binom{19}{9} - 10\binom{13}{9}$ e a probabilidade pedida é $p = \dfrac{\binom{19}{9} - 10\binom{13}{9}}{6^{10}}.$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6

a) De $y^2 = x^3 - 43x + 166,$ temos $2y\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 43,$ donde $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2 - 43}{2y}.$

A equação da reta tangente a C passando por (a, b) é

$y = \left(\dfrac{3a^2 - 43}{2b}\right)x + \left(b - \left(\dfrac{3a^2 - 43}{2b}\right) \cdot a\right)$ Substituindo em $y^2 = x^3 - 43x + 166$ temos

$x^3 - 43x + 166 = \left(\left(\dfrac{3a^2 - 43}{2b}\right)x + \dfrac{2b^2 - 3a^3 + 43a}{2b}\right)^2,$ que terá uma raiz dupla em $x = a$, e cuja soma das raízes é $\left(\dfrac{3a^2 - 43}{2b}\right)^2.$ Assim, o outro ponto terá primeira coordenada igual a $\left(\dfrac{3a^2 - 43}{2b}\right)^2 - 2a$, e, substituindo na equação da reta, segunda coordenada igual a $\left(\dfrac{3a^2 - 43}{2b}\right)^3 - 2a\left(\dfrac{3a^2 - 43}{2b}\right) + \dfrac{2b^2 - 3a^3 + 43a}{2b} = \left(\dfrac{3a^2 - 43}{2b}\right)^3 + \left(\dfrac{2b^2 - 9a^3 + 129a}{2b}\right).$

b) Usando a fórmula acima, obtemos P_1 = (–5, 16), P_2 = (11, 32), P_3 = (3, – 8), P_4 = (–5, – 16), P_5 = (11, – 32) e P_6 = (3, 8). Assim, a seqüência (P_n) é periódica de período 6, logo $P_{2002} = P_4 = (-5, -16)$.

Observação: No item b), o fato de P_3 diferir de P_0 apenas por uma troca de sinal da segunda coordenada já é suficiente para concluir que a seqüência é periódica de período 6.

XXIV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e Soluções da Segunda Fase – Nível Universitário

PROBLEMA 1

Seja $y = P(x)$ um polinômio de grau 4. Mostre que se existe uma reta (em $\mathbb{R}^2$) que corta o gráfico de P em 4 pontos então existe uma reta que corta o gráfico em 4 pontos igualmente espaçados.

PROBLEMA 2

$A = (a_{ij})$ uma matriz real simétrica $n \times n$ tal que $a_{ii} = 1$ e $\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 2$, para todo $i \in \{1,2,\dots,n\}$. Prove que $0 < \det A \le 1$.

PROBLEMA 3

Sejam $A_1, A_2, \dots, A_k \subset \{1,2,\dots,n\}$ conjuntos com $|A_i| \ge \frac{n}{2}$ e $|A_i \cap A_j| \le \frac{n}{4}$ para todo i, j com $i \ne j$. Prove que $\left| \bigcup_{i=1}^{k} A_i \right| \ge \frac{k}{k+1} \cdot n.$

PROBLEMA 4

Determine todas as soluções reais da equação $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + x}}}.$

PROBLEMA 5

Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos $\ln_0(x) = x$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, se $\ln_k(x) > 0$, definimos $\ln_{k+1}(x) = \ln(\ln_k(x))$, onde ln é o logaritmo natural.

Dado n inteiro positivo, definimos $k(n)$ como o maior k tal que $\ln_k(n) \ge 1$, e a_n como $\prod_{j=0}^{k(n)} \ln_j(n) = n \cdot \ln(n) \cdot \ln\ln(n) \cdot \ldots \cdot \ln_{k(n)}(n).$

Diga se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ converge ou diverge.

PROBLEMA 6

Considere duas elipses no plano $\mathbb{R}^2$ que se intersectam em 4 pontos. Nestes 4 pontos trace as retas tangentes às duas elipses, obtendo assim 8 retas.

Prove que existe uma elipse (ou circunferência) tangente a estas 8 retas.

SOLUÇÕES – NÍVEL UNIVERSITÁRIO

PROBLEMA 1: SOLUÇÃO DE FABRÍCIO SIQUEIRA BENEVIDES (FORTALEZA – CE)

Seja $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ e seja $\ell(x) = kx + q$ a reta que o intersecta em 4 pontos.
Ou seja, $Q(x) = P(x) - \ell(x)$ tem quatro raizes.
Queremos mostrar que existe $r(x) = tx + s$ tal que $S(x) = P(x) - r(x)$ tem quatro raizes igualmente espaçadas.

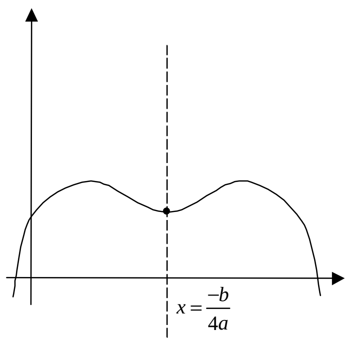
$$S(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + (d-t)x + (e-s)$$
$$= ax^4 + bx^3 + cx^2 + d'x + e'.$$

Note que nosso problema é equivalente a dados *a*, *b*, *c* achar *d'*, *e'* tais que *S*(*x*) acima tenha 4 raizes igualmente espaçadas.
Primeiro, mostraremos que é possível escolher *d*' de modo que *S*(*x*) seja simétrico em relação à reta $x = \frac{-b}{4a}$, isto é, $S\left(\frac{-b}{4a} - k\right) = S\left(\frac{-b}{4a} + k\right), \forall k \in \mathbb{R}$.

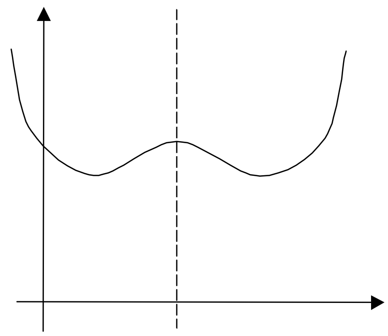
Para escrever menos seja $u = \frac{-b}{4a}$.

$$S(u-k) = S(u+k) \Leftrightarrow a(u-k)^4 + b(u-k)^3 + c(u-k)^2 + d'(u-k) + e' =$$
$$= a(u+k)^4 + b(u+k)^3 + c(u+k)^2 + d'(u+k) + e' \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a(u^4 - 4u^3k + 6u^2k^2 - 4uk^3 + k^4) + b(u^3 - 3u^2k + 3uk^2 - k^3) + c(u^2 - 2uk + k^2) - dk =$$
$$a(u^4 + 4u^3k + 6u^2k^2 + 4uk^3 + k^4) + b(u^3 + 3u^2k + 3uk^2 + k^3) + c(u^2 + 2uk + k^2) + d'k =$$
$$\Leftrightarrow 8au^3k + 8auk^3 + 6bu^2k + 2bk^3 + 4cuk + 2d'k = 0$$
$$\left(u = \frac{-b}{4a} \Rightarrow 8auk^3 = -2bk^3\right)$$
$$\Leftrightarrow (4au^3 + 3bu^2 + 2cu + d')\cdot k = 0$$

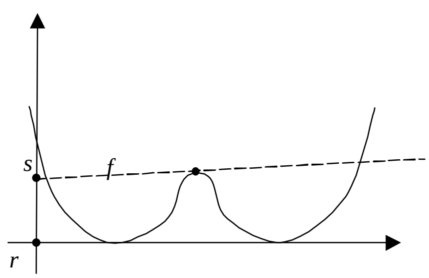
Basta então tomar $d' = -4au^3 - 3bu^2 - 2cu$
O fato de já existir uma reta que intersecta o *P*(*x*) inicial em 4 pontos, nos diz que *a*, *b*, *c* nos foram dados de modo que *S*(*x*) tenha 3 pontos de máx/mín locais. (Senão o gráfico de *S*(*x*) seria convexo ou côncavo, e qualquer reta o intersectaria em no máximo 2 pontos).
Logo, o gráfico de *S*(*x*) é algo do tipo:



ou



Finalmente mudar *e*' significa transladar o gráfico de *S* para cima ou para baixo. Claramente podemos escolher um e tal que *S* tenha 4 raízes $x_{1e}, x_{2e}, x_{3e}, x_{4e}$.



Para cada *e*' desses considere as funções

$$f(e) = x_{2e} - x_{1e}$$

$$g(e) = x_{3e} - x_{2e}, \qquad \text{para } r \le e \le s \text{ (ver gráfico)}$$

$$h(e) = x_{4e} - x_{3e}$$

Pela escolha de *d'*, *S* é simétrico e *f*(*e*) = *h* (*e*).

$f(r) = 0, g(r) > 0$

$f(s) > 0, g(s) = 0$

Pelo T.V.I. existe $e' \in (r, s)$ tal que $f(e') = g(e')$.

Neste caso, $f(e') = g(e') = h(e')$, e este é o nosso tão procurado *e'*.

PROBLEMA 2: SOLUÇÃO DE HUMBERTO SILVA NAVES (S.J. DOS CAMPOS - SP)

Temos que a matriz *A* é diagonalizável, pois é simétrica, ou seja:
$A = H \cdot D \cdot H^{-1}$ onde $H^{T} = H^{-1}$ e *D* é uma matriz diagonal formada pelos auto-valores de *A*.
Obs. As matrizes *D* e *H* são reais.
Claramente det. *A* = det. *D*.
Primeiramente vamos provar que todos os auto-valores de *A* são positivos:
Seja *X* um auto-vetor de *A*, i.e., *X* é uma matriz $n \times 1$, não nula, tal que

$$AX = \lambda X \qquad\qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Seja i, tal que $0 < |x_i| = \max\{|x_1|;|x_2|;...;|x_n|\}$. Se fosse $\lambda \le 0$

teríamos: $\lambda x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \Leftrightarrow$

$(\lambda - 1)x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ii-1}x_{i-1} + a_{ii+1}x_{i+1} + ... + a_{in}x_n$

Temos $|(\lambda-1)x_i| \ge |x_i|$ e $\sum\limits_{\substack{j\ne i\\ 1\le j\le n}} |a_{ij}| < 1 \Rightarrow \sum\limits_{\substack{j\ne i\\ 1\le j\le n}} |a_{ij}x_j| < |x_i|$, pois

$|x_i| = \max\{|x_1|;...;|x_n|\}$, logo $|x_i| \le |(\lambda-1)x_i| = \left|\sum\limits_{\substack{j\ne i\\ 1\le j\le n}} a_{ij}x_j\right| \le \sum\limits_{\substack{j\ne i\\ 1\le j\le n}} |a_{ij}x_j| < |x_i|$ um

absurdo! Logo det $D > 0 \Rightarrow$ det $A > 0$.

Claramente um auto-valor de A é uma raiz de $P(x)$ = det $(A - xI)$.

O coeficiente de x^{n-1} de $P(x)$ é a soma da diagonal principal de A multiplicada por $(-1)^{n-1}$, ou seja, $(-1)^{n-1}n$. Logo a soma das raízes de $P(x)$ (com suas respectivas multiplicidades) é $\dfrac{-(-1)^{n-1}n}{(-1)^n} = n.$

Temos: $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = n$ onde os λ_i's são os auto-valores de A, com $\lambda_i \ge 0 \ \ \forall i$; $1 \le i \le n$. Pela desigualdade das médias, temos:

$1 = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n}{n} \ge \sqrt[n]{\lambda_1\lambda_2...\lambda_n} \Rightarrow \lambda_1\lambda_2\lambda_3...\lambda_n \le 1$

Mas det $D = \lambda_1\lambda_2...\lambda_n \le 1 \Rightarrow$ det $A \le 1$.

PROBLEMA 3: SOLUÇÃO DE CARLOS STEIN NAVES DE BRITO (S.J. DOS CAMPOS - SP)

Seja $\left|\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i\right| = U$

Seja $S = \sum\limits_{i=1}^{k} |A_i| \ge k \cdot \dfrac{n}{2}$ (I)

Por absurdo, suponha que $U < \dfrac{k}{k+1} \cdot n$ (II)

Seja a_i quantas vezes os elementos de A_i aparecem nos outros $A_j\,(j \neq i)$, por exemplo, se $A_1 = \{1,2,3\}$, $A_2 = \{1,2,5\}$ e $A_3 = \{1,3,6\}$, temos que $a_1 = 4$. Temos $a_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} |A_i \cap A_j|$

Para cada $t \in \bigcup_{i=1}^{k} A_i$, o seja b_t o número de A_i's que contém t.

Lema: $\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{j \in \bigcup_{i=1}^{k} A_i} b_j(b_j - 1).$

Prova: Temos que a_i é quantas vezes aparece cada $t \in A_i$ em outros $A_j\,(j \neq i)$, logo cada t aparece em $(b_t - 1)$ outros A_j, pois b_t conjuntos contém t, tirando o A_i, logo temos $(b_t - 1)$ outros que contém t. Assim $a_i = \sum_{t \in A_i} (b_t - 1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{k} (\sum_{t \in A_i} (b_t - 1)).$

Para cada $t \in \bigcup_{i=1}^{k} A_i$, existem b_t conjuntos que contém t, logo cada parcela $b_t - 1$ aparece b_t vezes em $\sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{t \in A_i} (b_t - 1) \right)$, logo $\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{t \in \bigcup_{i=1}^{k} A_i} b_t(b_t - 1).$ cqd.

Logo $\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{t \in \bigcup_{i=1}^{k} A_i} b_t^2 - b_t = \sum_{t \in \bigcup_{i=1}^{k} A_i} b_t^2 - \sum_{t \in \bigcup_{i=1}^{k} A_i} b_t$ (note que $\sum_{t \in \bigcup_{i=1}^{k} A_i} b_t = \sum_{i=1}^{k} |A_i| \geq k \cdot \frac{n}{2}$, pois estamos contando quantas vezes aparece cada elemento). Por Cauchy-Schwarz:

$$\sum_{t \in \bigcup_{i=1}^{k} A_i} (b_t^2) \geq \frac{\left(\sum_{t \in \bigcup_{i=1}^{k} A_i} b_t \right)^2}{\left| \bigcup_{i=1}^{k} A_i \right|} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} |A_i| \right)^2}{U} = \frac{S^2}{U} \geq \frac{\frac{k^2 \cdot n^2}{4}}{U} > \frac{\frac{k^2 \cdot n^2}{4}}{\frac{k}{k+1} \cdot n} = \frac{(k+1)k \cdot n}{4}$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i = \sum b_t^2 - \sum b_t > \frac{(k+1)kn}{4} - \frac{kn}{2} = \frac{kn}{4}(k+1-2) = \frac{k \cdot n(k-1)}{4}$$

Pelo princípio das casas dos pombos, $\exists a_j$, tal que $a_j > \frac{\frac{k \cdot n \cdot (k-1)}{4}}{k}$ (senão $\sum a_i \le \frac{kn(k-1)}{4}$, absurdo).

Logo $\exists a_j, a_j > \frac{n(k-1)}{4}$. De novo pela casa dos pombos, como $a_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{k} |A_j \cap A_i|$,

existe um p tal que $|A_j \cap A_p| \ge \frac{a_j}{k-1} > \frac{\frac{n(k-1)}{4}}{k-1} = \frac{n}{4} \Rightarrow |A_j \cap A_p| > \frac{n}{4}$, absurdo.

Logo $U \ge \frac{k}{k+1} \cdot n$.

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DE MÁRCIO AFONSO ASSAD COHEN (RIO DE JANEIRO - RJ)

É, tá difícil…vamos tentar uma idéia:

Seja $x = 2\cos\alpha$, com $\alpha \in (0, \pi/3)$ (Ok, pois já sei que 1 < $\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2+\sqrt{2}}$ < 2).

Obs: $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2sen^2\theta$

$2 + x = 2(1+\cos\alpha) = 4\cos^2(\alpha/2) \to \sqrt{2+x} = 2\cos(\alpha/2)$

(pois $\alpha/2 \in (0, \pi/6)$ logo $\cos(\alpha/2) > 0$).

$\sqrt{2+x} = 2\cos(\alpha/2) \to 2 - \sqrt{2+x} = 2 - 2\cos(\alpha/2) = 2(1-\cos(\alpha/2)) =$

$= 2 \cdot 2sen^2(\alpha/4) \to \sqrt{2-\sqrt{2+x}} = 2sen(\alpha/4)$

(pois $sen(\alpha/4) > 0$).

Logo, $x = \sqrt{2 + 2sen(\alpha/4)} \to$ $\quad Obs.: \quad sen(\alpha/4) = \cos(\pi/2 - \alpha/4)$

$2 + 2sen(\alpha/4) = 2 + 2\cos(\pi/2 - \alpha/4) = 2 \cdot [1 + \cos(\pi/2 - \alpha/4)] = 2[2 \cdot \cos^2(\pi/4 - \alpha/8)]$

Portanto, tirando raiz: $x = 2\cos(\pi/4 - \alpha/8)$, *i.e.*

$2\cos\alpha = 2\cos(\pi/4 - \alpha/8) \to \cos\alpha = \cos(\pi/4 - \alpha/8)$

$\to \alpha = \pi/4 - \alpha/8 \to 9\alpha/8 = \pi/4 \to \alpha = 2\pi/9$

Logo, $x = 2\cos 2\pi/9$ é a única solução real da equação.

PROBLEMA 5: SOLUÇÃO DA BANCA

Sejam $b_0 = 1$, $b_{k+1} = e^{b_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Para $b_k \le n < b_{k+1}$ temos $k(n) = k$.

Como a derivada de $\ln_{k+1}(x)$ é $\prod_{j=0}^{k} \frac{1}{\ln_j(x)} =: g_k(x)$, temos, para cada n,

$\ln_{k+1}(n+1) - \ln_{k+1}(n) = \int_n^{n+1} g_k(x)dx \le g_k(n)$, para todo $n \ge b_k$, pois g_k é decrescente.

Assim, $\sum_{b_k \le n < b_{k+1}} \frac{1}{a_n} = \sum_{b_k \le n < b_{k+1}} g_k(n) \ge \ln_{k+1}(\lceil b_{k+1} \rceil) - \ln_{k+1}(\lceil b_k \rceil)$.

Como $\ln_{k+1}(\lceil b_k \rceil) < \ln_{k+1}(b_k + 1) < \ln_{k+1}(b_k) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ para todo $k \ge 1$ e $\ln_{k+1}(\lceil b_{k+1} \rceil) \ge \ln_{k+1}(b_{k+1}) = 1$, temos $\sum_{b_k \le n < b_{k+1}} \frac{1}{a_n} > \frac{1}{2}$ para todo k, donde

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{b_k \le n < b_{k+1}} \frac{1}{a_n} \right)$ diverge.

PROBLEMA 6: SOLUÇÃO DA BANCA

Vamos utilizar coordenadas projetivas (Ref.: "Aplicações de planos projetivos em Teoria dos Números e Combinatória" de Carlos Yuzo Shine - Eureka! N^o. 15).

Consideremos as duas cônicas do problema inseridas no plano projetivo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. O fato de serem elipses significa que essas cônicas não cortam a "reta do infinito" $z = 0$.

Lema: Se, A, B, C e D são tais que 3 quaisquer não são colineares, existe um sistema de coordenadas projetivas no qual $A = [1, 0, 0]$, $B = [0, 1, 0]$, $C = [0, 0, 1]$ e $D = [1, 1, 1]$

Demonstração: Sejam $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ vetores de $\mathbb{R}^3$ representando as classes de equivalência de A, B, C e D respectivamente. Como A, B e C não são colineares, $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ são *l.i.*, logo existem reais k, l, m tais que $\vec{d} = k\vec{a} + l\vec{b} + m\vec{c}$. Como d não pertence às retas AB, BC ou AC, k, l, m são diferentes de zero. Assim, se considerarmos a base $k\vec{a}, l\vec{b}, m\vec{c}$ de $\mathbb{R}^3$ teremos $A = [1, 0, 0]$, $B = [0, 1, 0]$, $C = [0, 0, 1]$, $D = [1, 1, 1]$, o que prova o lema.

Sejam A, B, C e D os pontos de interseção entre as duas elipses. Usando o lema, podemos realizar uma mudança de coordenadas que leve os pontos [–1, 1, 1], [–1, –1, –1], [1, –1, 1] e [1, 1, 1] em [1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1] e [–1, 1, 1] como toda mudança de coordenadas é invertível, usando o lema podemos realizar uma mudança de coordenadas que leve os pontos A, B, C e D em [1, 1, 1], [–1, 1, 1], [–1, –1, 1], [1, –1, 1].
Podemos escolher esse novo sistema de coordenadas de modo que as duas cônicas continuem sendo elipses, em relação à reta do infinito $z = 0$.
De fato a família de cônicas no plano que passam por (–1, –1), (–1, 1), (1, –1) e (1, 1) é dada pelas equações $tx^2 + (1-t)y^2 = 1,\ t \in \mathbb{R}$ (se $t \in \{0,1\}$ a cônica se degenera num par de retas). No novo sistema de coordenadas temos duas cônicas dessa família. Se uma delas é uma hipérbole, digamos $tx^2 + (1-t)y^2 = 1$, com $t > 1$, podemos aplicar a mudança de coordenadas projetivas que leva $[X, Y, Z]$ em $[Y, Z, X]$ (e, no plano, leva (x, y) em $\left(\frac{y}{x}, \frac{1}{x}\right)$): a imagem de $Q = \{(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)\}$ ainda é Q e a imagem da hiperbole ($tx^2 + (1-t)y^2 = 1$) é a elipse $\left(\frac{(t-1)x^2}{t} + \frac{y^2}{t} = 1\right)$.
Assim, temos agora duas cônicas que passam pelos pontos de Q tais que, se uma delas é uma hiperbole então a outra é uma elipse. Assim, ou essas cônicas são duas elipses ou qualquer reta no plano intersecta uma dessas cônicas. O segundo caso não é possível, pois nesse caso as cônicas não poderiam ser imagem de duas elipses por uma mudança de coordenadas projetivas, dado que a imagem da reta do infinito, que continua sendo uma reta, sempre intersecta uma dessas cônicas.

Agora, temos duas elipses que passam pelos pontos de Q. Suponhamos que suas tangentes no ponto (1, 1) sejam as retas ($ax + by = 1$) e ($cx + dy = 1$), com $a, b, c, d > 0$, $a + b = c + d = 1$. Após aplicarmos uma mudança de coordenadas afim do tipo $T(x, y) = (x/\lambda, y)$, com $\lambda > 0$, obtemos duas outras elipses cujas retas tangentes em T (1, 1) = $(1/\lambda, 1)$ são $(a\lambda x + by = 1)$ e $(c\lambda x + dy = 1)$. As distâncias dessas retas à origem são, respectivamente, $\frac{1}{\sqrt{a^2\lambda^2 + b^2}}$ e $\frac{1}{\sqrt{c^2\lambda^2 + d^2}}$.

Temos $a^2\lambda^2 + b^2 = c^2\lambda^2 + d^2 \Leftrightarrow \lambda^2 = \dfrac{d^2 - b^2}{a^2 - c^2}$, que é positivo, pois $a + b = c + d \Rightarrow (a - c > 0 \Leftrightarrow d - b > 0)$.

Assim, tomando $\lambda = \sqrt{\dfrac{d^2 - b^2}{a^2 - c^2}}$, e aplicando $T(x, y) = (x/\lambda, y)$ às nossas duas elipses, obtemos duas elipses que se intersectam em quatro pontos de modo que todas as 8 retas tangentes às duas elipses nesses pontos estão a uma mesma distância da origem (por simetria), e logo existe uma círculo tangente a todas elas, o qual está contido na união dos interiores dessas elipses, e portanto não intersecta a imagem da reta do infinito pela mudança de coordenadas projetivas que leva as elipses originais nestas, e logo é imagem de uma elipse por essa mudança de coordenadas. Essa elipse é tangente às 8 retas do enunciado. Isso resolve o problema.

Nota: Os enunciados dos problemas 3 e 5 da segunda fase do Nível Universitário saíram com alguns erros na prova: no problema 3, aparecia $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|$ em vez de $\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right|$, e , no problema 5, aparecia $\prod_{j=0}^{k(n)} \ln_j(x) = x \cdot \ln(x) \cdot \ln\ln(x) \cdot \ldots \cdot \ln_{k(n)}(x)$ em vez de $\prod_{j=0}^{k(n)} \ln_j(n) = n \cdot \ln(n) \cdot \ln\ln(n) \cdot \ldots \cdot \ln_{k(n)}(n)$.

♦ ♦ ♦

Agradecemos a Okakamo Kokobongo Matsubashi pela revisão deste número.

♦ ♦ ♦

Errata: No artigo "Reciprocidade Quadrática", de Carlos Gustavo Moreira e Nicolau Saldanha (publicado na Eureka! Nº. 15), onde está "símbolo de Lagrange" deveria ser "símbolo de Legendre".

XXIV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Resultado – Nível 1 (5ª. e 6ª. Séries)

MEDALHA DE OURO	
Henrique Ponde de Oliveira Pinto	Salvador - BA
Camila Alves Pereira	Gloria do Goitá - PE
Cássio Kendi Takamori	São José dos Campos - SP
Jéssica Guerra Caldato	Santo André - SP
Vinícius Marques Regitano	Piracicaba - SP
MEDALHA DE PRATA	
Mário Henrique Mendonça Castilho	São João da Boa Vista - SP
Bernardo de Oliveira Veiga	Rio de Janeiro - RJ
Rafael Tupynambá Dutra	Belo Horizonte - MG
Gabrielle Collato Marcelino	Santo André - SP
Maria Fernanda Petri Beto	São Paulo - SP
Guilherme Philippe Figueiredo	Fortaleza - CE
Cristiano Peres Guimarães	Mendonça- SP
Gustavo Henrique dos Santos Figueiredo	Santo André - SP
Larissa Lais de Sá	São Paulo - SP
Rafael Augusto da Silva Gonçalves	Salvador - BA
MEDALHA DE BRONZE	
Diogo Bonfim Moraes Morant de Holanda	Rio de Janeiro - RJ
Fernanda Sá Leal de Moura	Teresina - PI
Luísa Dias Barbosa Alves	Recife - PE
David Francisco dos Santos	Serra - ES
Marcos Coppa Gomes Filho	Natal - RN
Anderson Vasconcelos Maciel	Fortaleza - CE
Samuel Carvalho Lima Holanda	Fortaleza - CE
Rodolfo de Andrade Marinho Silva	Campina Grande - PB
Franz Biondi Siemon	Vitória - ES
Rafael Sampaio de Rezende	Fortaleza - CE
André Vasconcelos Barros	Natal - RN
Guilherme Silva Moura	Jequié - BA
MENÇÃO HONROSA	
Daniel Luna de Menezes	João Pessoa - PB
Laís Moutinho Medeiros	Recife - PE
Rafael Moura e Sucupira	Fortaleza - CE
Vinicius de Souza Lima e Oliveira	Rio de Janeiro - RJ
Weslen Costa Timoteo	Paulista - PE
Filipe Alves Tomé	Fortaleza - CE
Lays Cardoso Tatagiba	Itaperuna - RJ
Marlon Vieira de Lima Júnior	Fortaleza - CE
Lukas Carmona Macedo de Souza	São Paulo - SP
Alessandro Wagner Palmeira	Guarulhos - SP
Nathália Pereira Gonçalves	Rio de Janeiro - RJ
Renan Magri	Itaporã - PR
Rafael Alcoforado Domingues	João Pessoa - PB
Letícia Duarte Ferrari	Rio de Janeiro - RJ
Lucio Eiji Assaoka Hossaka	Curitiba - PR
Flavia Contartesi	São Carlos - SP
Odair Dutra Santana Júnior	Botuporanga - SP
Mayara Franco Rodrigues	Araraquara - SP
Artur de Almeida Losnak	São Paulo - SP
Thaísa Giorno Dantas Rabaneda Lopes	Atibaia - SP
Cássio dos Santos Araújo	Recife - PE
Amanda Yumi Iseri	Uberaba - MG
Tiago Madeira	Itajaí - SC
Matheus Mello Asunção	Belém - PA
Luísa Castro Noronha	Valinhos - SP
Rafael Ellis Reuben	São Paulo - SP

Resultado – Nível 2 (7ª. e 8ª. Séries)

MEDALHA DE OURO	
Thomás Yoiti Sasaki Hoshina	Rio de Janeiro - RJ
André Lucas Ribeiro dos Santos	Pindamonhangaba - SP
Vitor Humia Fontoura	Salvador - BA
Gabriel Tavares Bujokas	São Paulo - SP
MEDALHA DE PRATA	
Guilherme Rodrigues Nogueira de Souza	São Paulo - SP
Douglas Bokliang Ang Cunha	São José dos Campos - SP
Hector Kenzo Horiuti Kitahara	São Paulo - SP
Guilherme Rohden Echelmeier	Itajaí - SC
Enzo Haruo Hiraoka Moriyama	São Paulo - SP
Luty Rodrigues Ribeiro	Fortaleza - CE
Eduardo Fischer	Encantado - RS
Rafael Kitayama Shiraiwa	São Paulo - SP
Thaís Viveiro	São Paulo - SP
MEDALHA DE BRONZE	
Caio dos Santos Pereira Gazzola	Belo Horizonte - MG
Rodrigo Augusto Santana	Belém - PA
Rodrigo Viana Soares	Fortaleza - CE
André Linhares Rodrigues	Fortaleza - CE
Fábio Eigi Imada	São José dos Campos - SP
Rafael Montezuma Pinheiro Cabral	Fortaleza - CE
Pedro Paulo Gondim Cardoso	Salvador - BA
Rhamon Barroso de Sousa	Fortaleza - CE
Lucas Magalhães Pereira Castello Branco	Fortaleza - CE
Max Douglas Peixoto da Silva	Fortaleza - CE
Renata Mayer Gukovas	São Paulo - SP
Milena Pinheiro Martins	Teresina - PI
Anderson Hoshiko Aiziro	São Carlos - SP
MENÇÃO HONROSA	
Daniel Yoshio Futenma da Silva	São Paulo - SP
Landerson Bezerra Santiago	Maracanaú - CE
José Armando Barbosa Filho	Fortaleza - CE
Danilo Eiki Yokoyama	São Paulo - SP
Fernando Mizoguchi Gorgoll	São Paulo - SP
Pedro Thiago Ezequiel de Andrade	Fortaleza - CE
José Robério Xavier dos Santos Júnior	Fortaleza - CE
Erick Vizolli	Curitiba - PR
Camila Vasconcelos de Oliveira	Fortaleza - CE
Raphael Rodrigues Mata	Salvador - BA
Adriano César Braga Borges	Contagem - MG
Gustavo Eidji Camarinha Fujiwara	São Paulo - SP
Henrique Kenji Formagio Noguchi	São Paulo - SP
André Ikeda Cantão	Curitiba - PR
Paulo André Carvalho de Melo	Rio de Janeiro - RJ
Fábio Queiroz Vasconcelos Cunha	Salvador - BA
Flaviano Ramos Pereira Junior	Belém - PA
Mauro Cardoso Lopes	São Paulo - SP
Luiz Müller	Vitória - ES
Tiago Nery Vasconcelos	São Paulo - SP
Thiago de Azevedo Pinheiro Hoshino	São Paulo - SP

Resultado – Nível 3 (Ensino Médio)

MEDALHA DE OURO	
Guilherme Issao Camarinha Fujiwara	São Paulo - SP
Fábio Dias Moreira	Rio de Janeiro - RJ
Rafael Daigo Hirama	Campinas - SP
MEDALHA DE PRATA	
Yuri Gomes Lima	Fortaleza - CE
Thiago da Silva Sobral	Fortaleza - CE
Alex Corrêa Abreu	Niterói - RJ
Henrique Chociay	Curitiba - PR
Antonio Carlos Maldonado Silveira A. Munhoz	Rio de Janeiro - RJ
Henry Wei Cheng Hsu	São Paulo - SP
Samuel Barbosa Feitosa	Fortaleza - CE
Larissa Cavalcante Queiroz de Lima	Fortaleza - CE
Bernardo Freitas Paulo da Costa	Rio de Janeiro - RJ
Davi Máximo Alexandrino Nogueira	Fortaleza - CE
Thiago Costa Leite Santos	São Paulo - SP
MEDALHA DE BRONZE	
Einstein do Nascimento Júnior	Fortaleza - CE
Eduardo de Moraes Rodrigues Poço	São Paulo - SP
Rafael Tajra Fonteles	Teresina - PI
Felipe Rodrigues Nogueira de Souza	São Paulo - SP
Murilo Vasconcelos Andrade	Maceió - AL
Thiago Braga Cavalcante	Fortaleza - CE
Paulo Ribeiro de Almeida Neto	Ananindeua - PA
Germanna de Oliveira Queiroz	Fortaleza - CE
Juliana Gomes Varela	Fortaleza - CE
Rodrigo Aguiar Pinheiro	Fortaleza - CE
Israel Franklim Dourado Carrah	Fortaleza - CE
Daniel Pessoa Martins Cunha	Fortaleza - CE
Renato Seiji Tavares	São Paulo - SP
Carlos Augusto David Ribeiro	Fortaleza - CE
Letícia Rosa dos Santos	Rio de Janeiro - RJ
MENÇÃO HONROSA	
Rafael Marini Silva	Vila Velha - ES
Telmo Luis Correa Junior	São Paulo - SP
Diego Alvarez Araujo Correia	Fortaleza - CE
Vitor Gabriel Kleine	Mogi das Cruzes - SP
Francisco Bruno de Lima Holanda	Fortaleza - CE
Diogo dos Santos Suyama	Belo Horizonte - MG
Anderson Torres	São Paulo - SP
Larissa Rodrigues Ribeiro	Fortaleza - CE
Marina Lima Medeiros	Fortaleza - CE
Antonia Taline de Souza Mendonça	Fortaleza - CE
Rodrigo Angelo Muniz	Cariacica - ES
Eduardo Paiva Costa	Teresina - PI
Eduardo Monteiro Nicodemos	Rio de Janeiro - RJ
Thiago Morello Peres	Rio de Janeiro - RJ
Elder Rodrigo Barbosa Campos	Rio de Janeiro - RJ
Thiago Luís Viana de Santana	Rio de Janeiro - RJ
Filipe Rodrigues de Souza Moreira	Rio de Janeiro - RJ
Rodrigo Kendy Yamashita	São Paulo - SP
João Marcos da Cunha Silva	Fortaleza - CE
Lyussei Abe	São Paulo - SP

Resultado – Nível Universitário

MEDALHA DE OURO	
Carlos Yuzo Shine	São Paulo - SP
Humberto Silva Naves	São José dos Campos - SP
Marcio Afonso Assad Cohen	Rio de Janeiro - RJ
MEDALHA DE PRATA	
Thiago Barros Rodrigues Costa	Fortaleza - CE
Carlos Stein Naves de Brito	São José dos Campos - SP
Rodrigo Villard Milet	Rio de Janeiro - RJ
Daniel Massaki Yamamoto	São Paulo - SP
Giuliano Boava	Florianópolis - SC
Fabrício Siqueira Benevides	Fortaleza - CE
Eduardo Famini Silva	Rio de Janeiro - RJ
MEDALHA DE BRONZE	
Tertuliano Franco Santos Franco	Salvador - BA
Rodrigo Roque Dias	São Paulo - SP
Lucas de Melo Pontes e Silva	São Paulo - SP
Thiago Afonso de André	São Paulo - SP
Sergio Alvarez Araujo Correia	Fortaleza - CE
Daniel Nobuo Uno	São Paulo - SP
Evandro Makiyama de Melo	São Paulo - SP
Leonardo Augusto Zão	Nilópolis - RJ
Bruno Fernandes Cerqueira Leite	São Paulo - SP
Daniel Mourão Martins	Rio de Janeiro - RJ
Daniele Véras de Andrade	Rio de Janeiro - RJ
Lucas Heitzmann Gabrielli	São Paulo - SP
Diogo Diniz P.S. Silva	Campina Grande - PB
Diêgo Veloso Uchôa	Teresina - PI
Marcelo Handro Maia	São José dos Campos - SP
MENÇÃO HONROSA	
Gilberto Kirk Rodrigues	Rio de Janeiro - RJ
Diogo Luiz Duarte	Rio de Janeiro - RJ
Camilo Marcantonio Junior	Rio de Janeiro - RJ
Marcio Miranda de Carvalho	Teresina - PI
Marcio Paiva Reis	Vitória - ES
Arnaldo João do Nascimento Junior	Duque de Caxias - RJ

Veja a lista de coordenadores regionais na nossa página na internet: www.obm.org.br/coordreg.htm

AGENDA OLÍMPICA

XXV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

NÍVEIS 1, 2 e 3
Primeira Fase – Sábado, 7 de junho de 2003
Segunda Fase – Sábado, 13 de setembro de 2003
Terceira Fase – Sábado, 18 de outubro de 2003 (níveis 1, 2 e 3)
Domingo, 19 de outubro de 2003 (níveis 2 e 3 - segundo dia de prova).

NÍVEL UNIVERSITÁRIO
Primeira Fase – Sábado, 13 de setembro de 2003
Segunda Fase – Sábado, 18 e Domingo, 19 de outubro de 2003

♦

IX OLIMPÍADA DE MAIO
10 de maio de 2003

♦

XIV OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL
23 a 30 de maio de 2003
Ica – Peru

♦

XLIV OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA
07 a 19 de julho de 2003
Tóquio – Japão

♦

X OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
25 a 31 de julho de 2003
Universidade Babes-Bolyai, Cluj-Napoca, Romênia

♦

XVIII OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA
13 a 20 de setembro de 2003
Argentina

♦

VI OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
8 de novembro de 2003

♦ ♦ ♦