CONTEÚDO

AOS LEITORES

É com grande alegria que anunciamos que, mais uma vez, os 6 estudantes da equipe brasileira obtiveram medalhas na IMO. Isto mostra a nossa grande evolução com a nova OBM e as atividades extras que apareceram com ela: a Eureka, a Semana Olímpica, as semanas de treinamento antes das competições internacionais.
Mas o que nos traz maior satisfação é saber que esses 6 jovens são a ponta de um iceberg. Basta observar o número de pessoas que resolvem os vários problemas que trazemos a cada nova edição da Eureka. São estudantes, professores, profissionais liberais, enfim, amantes da Matemática que provam que no nosso país há muitas pessoas de boa vontade e de grande competência.

Falando mais um pouco sobre problemas, nesse número publicamos algumas provas do *Torneio das Cidades*, uma competição que se caracteriza pela originalidade de suas questões, algumas das quais já entraram para o folclore matemático. Ela possui duas modalidades, Sênior (2^a e 3^a séries EM) e Júnior (8^a série EF e 1^a série EM); níveis O (iniciante) e A (avançado).

Para encerrar, os agradecimentos. Mais uma vez, o professor Carlos Shine e os estudantes Alex Lopes, Felipe de Souza, Henry Hsu, Rodrigo Yamashita e Guilherme Fujiwara fizeram uma leitura cuidadosa das versões prévias desta edição.

Os editores.

VIII OLIMPÍADA DE MAIO

Enunciados e Resultado Brasileiro

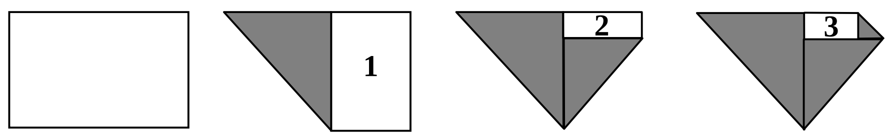
PRIMEIRO NÍVEL

PROBLEMA 1

Um grupo de homens, alguns dos quais acompanhados pelas esposas, gastaram 1000 dólares num hotel. Cada homem gastou 19 dólares e cada mulher, 13 dólares. Determine quantas mulheres e quantos homens estavam no hotel.

PROBLEMA 2

Uma folha de papel retangular (branca de um lado e cinza do outro) foi dobrada três vezes, como mostra a figura abaixo:



O retângulo 1, que ficou da cor branca após a primeira dobra, tem 20cm a mais de perímetro que o retângulo 2, que ficou branco após a segunda dobra, e este por sua vez tem 16cm a mais de perímetro que o retângulo 3, que ficou branco após a terceira dobra. Determine a área da folha.

PROBLEMA 3

Mustafá comprou um tapete. O vendedor mediu o tapete com uma régua que supostamente media um metro. Como o resultado foi que o tapete tinha 30 metros de largura e 20 metros de comprimento, o vendedor cobrou 120000 rupias. Quando Mustafá chegou a sua casa mediu novamente o tapete e percebeu que o vendedor tinha cobrado 9408 rupias a mais. Quantos centímetros mede a régua usada pelo vendedor?

PROBLEMA 4

Num banco só o diretor conhece o segredo do cofre, que é um número de cinco dígitos. Para proteger este segredo são dados a cada um dos dez empregados do banco um número de cinco dígitos. Cada um destes números tem numa das cinco posições o mesmo dígito que o segredo e nas outras quatro posições um dígito diferente do que tem o segredo nesse lugar. Os números de proteção são:

07344, 14098, 27356, 36429, 45374, 52207, 63822, 70558, 85237, 97665.

Qual é o segredo do cofre?

PROBLEMA 5

Encontre o máximo número de caixinhas de $3 \times 5 \times 7$ que podem ser colocadas dentro de uma caixa de $11 \times 35 \times 39$. Para o número encontrado, indique como colocar essa quantidade de caixinhas dentro da caixa.

SEGUNDO NÍVEL

PROBLEMA 1

Utilizando cubinhos brancos de lado 1 foi montado um prisma (sem buracos).
As faces do prisma foram pintadas de preto. Sabe-se que os cubinhos que ficaram com exatamente 4 faces brancas são 20 no total. Determine quais podem ser as dimensões do prisma. Encontre todas as possibilidades.

PROBLEMA 2

Seja k um número inteiro positivo fixo, $k \leq 10$.
Dada uma lista de dez números, a operação permitida é: escolher k números da lista, e somar 1 a cada um deles. Obtém-se assim uma nova lista de dez números.
Se inicialmente temos a lista 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, determine os valores de k para os quais é possível, mediante uma seqüência de operações permitidas, obter uma lista que tenha os dez números iguais. Indique a seqüência para cada caso.

PROBLEMA 3

Num triângulo ABC, retângulo em A e isósceles, seja D um ponto do lado AC ($D \neq A$ e $D \neq C$) e seja E o ponto do prolongamento do lado BA tal que o triângulo ADE é isósceles. Se P é o ponto médio do segmento BD, R é o ponto médio do segmento CE e Q o ponto onde se cortam as retas ED e BC, demonstre que o quadrilátero $ARQP$ é um quadrado.

PROBLEMA 4

Os vértices de um polígono regular de 2002 lados estão numerados de 1 a 2002, no sentido horário. Dado um inteiro n, $1 \leq n \leq 2002$, pinta-se de azul o vértice n, logo, seguindo o sentido horário, contam-se n vértices começando no seguinte de n, e pinta-se de azul o número n. E assim sucessivamente, a partir do vértice que segue ao último vértice que há sido pintado, contam-se n vértices, pintados ou sem pintar, e o número n é pintado de azul. Quando o vértice que tem que ser pintado já é azul, o processo pára. Denotamos $P(n)$ ao conjunto de vértices azuis que se obtém com este procedimento quando se começa pelo vértice n. Por exemplo, $P(364)$ está formado pelos vértices 364, 728, 1092, 1456, 1820, 182, 546, 910, 1274, 1638 e 2002.
Determine todos os inteiros n, $1 \leq n \leq 2002$, tais que $P(n)$ tem exatamente 14 vértices.

PROBLEMA 5

Dados x e y inteiros positivos, consideramos um quadriculado de $x \times y$, que tem pintados de vermelho os $(x + 1) \cdot (y + 1)$ pontos que são vértices de quadradinhos. Inicialmente há uma formiga em cada um dos pontos vermelhos. Num instante dado, todas as formigas começam a caminhar pelas linhas do quadriculado, todas com a mesma velocidade. Cada vez que chegam num ponto vermelho, giram 90° em alguma direção.

Determine todos os valores de x e y para os quais é possível que as formigas continuem movendo-se indefinidamente de maneira que em nenhum momento há duas ou mais formigas num mesmo ponto vermelho. (Não interessam as possíveis coincidências em pontos das linhas do quadriculado que não são vermelhos.)

RESULTADO BRASILEIRO

PRIMEIRO NÍVEL (ATÉ 13 Anos)

Eduardo Fischer	Encantado – RS	Medalha de Ouro
Pedro Nogueira Machado	Rio de Janeiro – RJ	Medalha de Prata
André Márcio de Lima Curvello	Goiânia – GO	Medalha de Prata
Katja Stephanie Ried	Valinhos – SP	Medalha de Bronze
Enzo Haruo Hiraoka Moriyama	São Paulo – SP	Medalha de Bronze
Anderson Gleryston Silva Sousa	Campina Grande – PB	Medalha de Bronze
Mariana Nasser Brolezzi	Santo André – SP	Medalha de Bronze
Arthur Rodrigues de Oliveira Sobral	S. José dos Campos – SP	Menção Honrosa
Cássio Kendi Takamori	S. José dos Campos – SP	Menção Honrosa
Diogo Bonfim Moraes Morant de Holanda	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa

SEGUNDO NÍVEL (ATÉ 15 Anos)

Fábio Dias Moreira	Rio de Janeiro – RJ	Medalha de Ouro
Guilherme Rodrigues Salerno	Goiânia – GO	Medalha de Prata
Telmo Luis Correa Júnior	Santo André – SP	Medalha de Prata
Thiago Costa Leite Santos	São Paulo – SP	Medalha de Bronze
André Rodrigues Salerno	Goiânia – GO	Medalha de Bronze
Henry Wei Cheng Hsu	São Paulo – SP	Medalha de Bronze
Rodrigo Aguiar Pinheiro	Fortaleza – CE	Medalha de Bronze
Rafael Marini Silva	Vila Velha – ES	Menção Honrosa
Larissa Rodrigues Ribeiro	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Douglas Bokliang Ang Cunha	S. José dos Campos – SP	Menção Honrosa

XIII OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL

Enunciados, Soluções e Resultado Brasileiro

A XIII Olimpíada de Matemática do Cone Sul foi realizada na cidade de Fortaleza, Ceará no período de 22 a 28 de junho de 2002.

A equipe brasileira foi liderada pelos professores Yoshiharu Kohayakawa (São Paulo – SP) e Luciano Guimarães Castro (Rio de Janeiro – RJ).

O Resultado da Equipe Brasileira

BRA 1	**Alex Corrêa Abreu**	**Ouro**
BRA 2	**Israel Dourado Carrah**	**Bronze**
BRA 3	**Larissa Cavalcante Queiroz de Lima**	**Ouro**
BRA 4	**Rafael Daigo Hirama**	**Ouro**

PRIMEIRO DIA
DURAÇÃO: 4 horas e meia.

PROBLEMA 1:
Os alunos da turma de Pedro praticam a soma e a multiplicação de números inteiros. A professora escreve os números de 1 a 9 em nove fichas, uma para cada número, e as coloca em uma urna. Pedro retira três fichas e deve calcular a soma e o produto dos três números correspondentes. Ana e Julián fazem o mesmo, esvaziando a urna. Pedro informa à professora que retirou três números consecutivos cujo produto é 5 vezes a soma. Ana informa que não tem nenhum número primo, mas sim dois consecutivos e que o produto desses três números é 4 vezes a soma dos mesmos. Quais números retirou Julián?

SOLUÇÃO DE ISRAEL FRANKLIM DOURADO CARRAH (FORTALEZA – CE):
Diremos que Pedro escolheu os números P_1, $P_1 + 1$ e $P_1 + 2$, Ana retirou os números A_1, A_2 e A_3. Logo, temos que:
$P_1 \cdot (P_1+1)\cdot(P_1+2) = 5\cdot(P_1+P_1+1+P_1+2) = 5\cdot(3P_1+3) = 3\cdot 5\cdot(P_1+1)$ e como $(P_1 + 1)$ é um número positivo $\Rightarrow$ $P_1\cdot(P_1+2) = 3\cdot 5 = 15 \Rightarrow P_1$ e (P_1+2) são divisores de 15 (obviamente $P_1 + 2 > P_1$). Assim, temos duas possibilidades:

$$1^a.\begin{cases} P_1 = 1 \\ P_1+2 = 15 \to P_1 = 13 = 1 \end{cases} \qquad \text{Absurdo!}$$

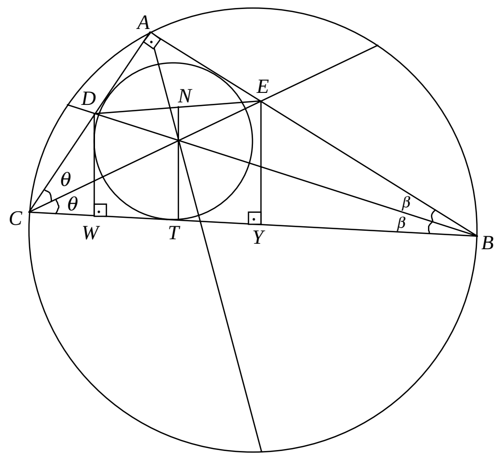
$$2^a.\begin{cases} P_1 = 3 \\ P_1+2 = 5 \to P_1 = 3 \end{cases} \qquad \text{Ok!}$$

Portanto, Pedro escolheu os números 3, 4 e 5.

Como Ana escolheu 3 números que não são primos $\Rightarrow$ os possíveis números retirados por Ana são 1, 6, 8 e 9. (pois 2 e 7 são números primos e 3, 4 e 5 são números que já foram retirados por Pedro.)
Mas temos também que Ana retirou dois números consecutivos e dentre (1, 6, 8 e 9) os únicos dois números consecutivos são 8 e 9 $\Rightarrow$ Ana escolheu os números 8 e 9. Assim: $A_2 = 8$, $A_3 = 9$ e $A_1 \cdot 8 \cdot 9 = 4 \cdot (A_1 + 8 + 9) \Rightarrow A_1 \cdot 18 = A_1 + 17 \Rightarrow 17A_1 = 17$ $\Rightarrow A_1 = 1$. Logo, Ana escolheu os números 1, 8 e 9.
Portanto, Julián retirou os números restantes: 2, 6 e 7.

PROBLEMA 2:
De um triângulo *ABC*, retângulo em *A*, conhecemos: o ponto *T* de tangência da circunferência inscrita em *ABC* com a hipotenusa *BC*, o ponto *D* de interseção da bissetriz interna do ângulo $\hat{B}$ com o lado *AC* e o ponto *E* de interseção da bissetriz interna do ângulo $\hat{C}$ com o lado *AB*. Descreva uma construção com régua e compasso para obter os pontos *A*, *B* e *C*. Justifique.

SOLUÇÃO DE LARISSA CAVALCANTE QUEIROZ DE LIMA (FORTALEZA – CE):



$BC = a$, $AC = b$, $AB = c$; $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

$\Rightarrow CT = p - c$; $BT = p - b$
sejam *Y* tal que $EY \perp BC$ e *W* tal que $DW \perp BC$

$$* \Delta EYC \equiv \Delta AEC \begin{cases} EC \text{ comum} \\ A\hat{C}E = E\hat{C}Y \; (CE \text{ bissetriz} \\ C\hat{A}E = E\hat{Y}C = 90° \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AE = EY \\ AC = CY = b \end{cases}$$

$$* \Delta DWB \equiv \Delta ADB \begin{cases} BD \text{ comum} \\ B\hat{W}D = B\hat{A}D = 90° \\ A\hat{B}D = D\hat{B}W \,(DB \text{ bissetriz}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} DW = AD \\ AB = WB = c \end{cases}$$

* $WT = WB - TB = c - (p - b) = (c + b + a) - a - p = 2p - p - a = p - a$
* $YT = YC - CT = b - (p - c) = c + b - p = p - a$
$\Rightarrow T$ é ponto médio de WY. *$DEYW$ é um trapézio retângulo $\left(D\hat{W}Y = W\hat{Y}E = 90°\right)$.

Construção do Δ *ABC*.
Dados D e E, é fácil obter com régua e compasso o ponto N, ponto médio de DE.
Sabemos que os pontos D, E, Y e W do ΔABC formam um trapézio retângulo, sendo T o ponto médio de YW $\Rightarrow$ NT será base média e $NT//EY//DW$ $\Rightarrow$ $N\hat{T}Y = 90° \Rightarrow NT \perp BC \Rightarrow$ Conhecemos já a reta NT, com compasso, marcamos $N' \in NT; N'T = TN$.
A mediatriz de NN'é perpendicular a NN' em T, portanto coincide com a reta $BC \Rightarrow$ conhecemos agora a reta $\overleftrightarrow{BC}$.
* $E\hat{Y}T = 90° \Rightarrow$ para encontrar Y, encontramos M_1, ponto médio de ET e contruímos com compasso a circunferência Γ_1 de centro M_1 passando por E e T. Onde Γ_1 encontrar a reta $\overleftrightarrow{BC}$ será o ponto Y (note que será no segundo ponto de encontro com $\overleftrightarrow{BC}$, o primeiro é T). Analogamente, encontramos o ponto W no encontro da circunfrência Γ_2 de diâmetro DT e da reta $\overleftrightarrow{BC}$.
Dessa maneira, encontramos $\overline{EY}$ e $\overline{DW}$. Com o compasso, encontramos Γ_3 de raio EY e centro E, e Γ_4 de raio DW e centro D. $\Gamma_3 \cap \Gamma_4 = \{A, A'\}$ A será o ponto que está "acima"de DE (supondo o ponto T "abaixo"de DE).
Encontramos então as retas $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{AD}$.
$B = \overleftrightarrow{AE} \cap \overleftrightarrow{BC}$ e $C = \overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{BC}$
$\therefore$Encontramos então ΔABC
obs: Se Y coincidir com T, temos que W coincidirá com T e $p - a = 0$ ou seja, $\frac{a+b+c}{2} - a = 0 \Leftrightarrow a + b + c - 2a = 0 \Leftrightarrow b + c = a$ Absurdo!
$\Rightarrow Y \neq T$ e $W \neq T$.

PROBLEMA 3:
Arnaldo e Bernardo jogam uma Super Batalha Naval. Cada um tem um tabuleiro n x n. Arnaldo coloca barcos em seu tabuleiro (pelo menos um mas não se sabe quantos). Cada barco ocupa as n casas de uma linha ou de uma coluna e os barcos não podem se superpor nem ter um lado comum. Bernardo marca m casas (representando tiros) em seu tabuleiro. Depois que Bernardo marcou as m casas, Arnaldo diz quais dentre elas correspondem a posições ocupadas por barcos. Bernardo ganha se, a seguir, descobre quais são as posições de todos os barcos de

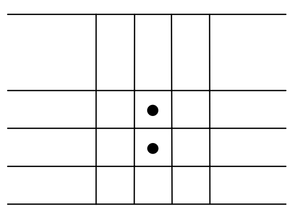
Arnaldo. Determine o menor valor de m para o qual Bernardo pode garantir sua vitória.

SOLUÇÃO DE ALEX CORRÊA ABREU (NITERÓI – RJ):

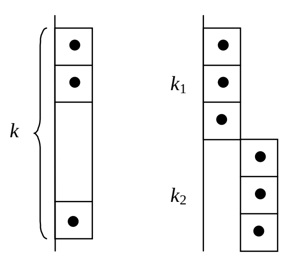
Suponha $n \geq 4$

(I) Primeiro vemos que obviamente tem que marcar casas em todas as linhas e colunas, pois se uma linha não tiver nenhuma casa marcada obviamente podemos ter um barco em uma linha não adjacente portanto Bernardo não saberá se ali tem ou não um barco. De modo análogo para as colunas.

(II) Agora suponha que uma casa está marcada, se na linha e na coluna dessa casa não tiver mais nenhuma outra casa marcada, pode vir a calhar de arnaldo ter colocado apenas um barco no tabuleiro e ser exatamente nessa linha, portanto Bernardo não sabe se o barco está na vertical ou na horizontal pois só vai ter uma casa onde sabe que o barco está. Então para cada casa marcada existe outra na linha ou na coluna.

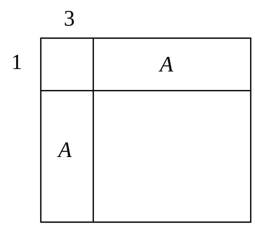


Considere agora que Arnaldo marcou um barco na linha i $\Rightarrow$ se uma casa é marcada na linha i, para identificar se o barco está na horizontal ou na vertical precisamos de mais uma casa adjacente. Se esta estiver pintada o barco está na vertical (baseado no desenho) e na horizontal caso contrário.



O problema consiste em pintar blocos $1 \times k$ tais que cada linha e cada coluna tem interseção com um deles, agora se tivermos um $1 \times k$ se $k > 3$ podemos dividir e de fato apenas melhoramos as coisas então os blocos são 1×2 e 1×3.

$M(n)$ é o mínimo procurado para um tabuleiro $n \times n$.



Se $n \geq 3$ retire as 3 primeiras linas e as 3 primeiras colunas então $m(n) = m(3) + m\,(n - 3)$ pois precisamos de $m(n - 3)$ pois se não tiver nenhum barco nas 6 fileiras que saíram e $m(3)$ se não tiver nas que ficaram pois se considerarmos só a região *A*.
temos que colocar 3 em cada no mínimo, o que dá mais 6 contra 4 de $m(3) \Rightarrow$ (também porque podemos diminuir as intersecções) $\Rightarrow$

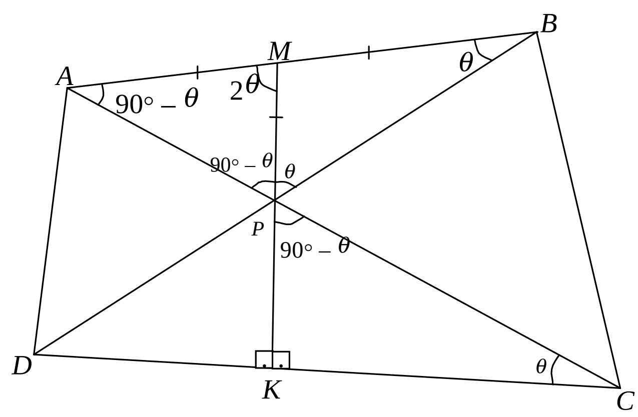
$$\begin{cases} m(3k) = km(3) = 4k \\ m(3k+1) = (k-1)m(3) + m(4) = 4k - 4 + 6 = 4k + 2 \\ m(3k+2) = 4(k-1) + m(5) = 4k + 3 \end{cases}$$

é fácil ver que $m(3) = 4$ pois 3 obviamente não é e $m(4) = 6$, $m\,(5) = 7$ como ao lado.

SEGUNDO DIA
DURAÇÃO: 4 horas e meia.

PROBLEMA 4:
Seja *ABCD* um quadrilátero convexo tal que suas diagonais *AC* e *BD* são perpendiculares. Seja *P* a interseção de *AC* e *BD* e seja *M* o ponto médio de *AB*. Mostre que o quadrilátero *ABCD* é inscritível se, e somente se, as retas *PM* e *CD* são perpendiculares.

SOLUÇÃO DE ISRAEL FRANKLIM DOURADO CARRAH (FORTALEZA – CE):
Primeiramente vejamos quando $\overleftrightarrow{PM}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são perpendiculares



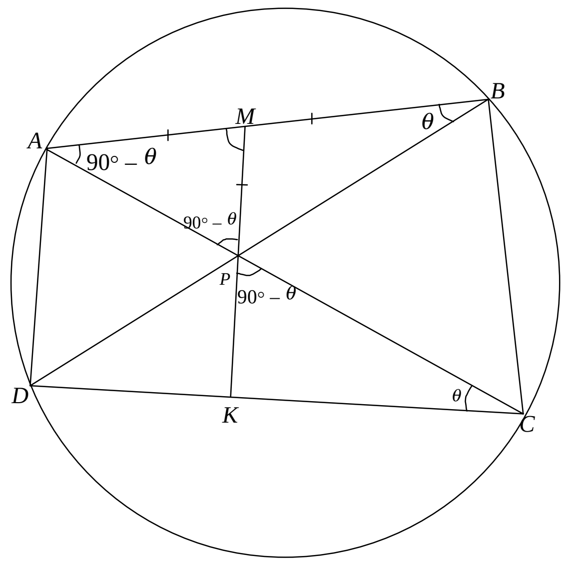
Seja $\overleftrightarrow{MP} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{K\}$. Como no ΔABP, retângulo em P, M é o ponto médio da hipotenusa $\overline{AB} \Rightarrow \overline{PM} = \overline{MA} = \overline{MB}$. Assim, seja

$A\hat{B}D = \theta \Rightarrow M\hat{P}B = \theta \Rightarrow A\hat{M}P = 2\theta \Rightarrow$

$M\hat{P}A = 90° - \theta \Rightarrow C\hat{P}K = A\hat{P}M = 90° - \theta$ e como

$P\hat{K}C = 90° \Rightarrow P\hat{C}D = \theta$. Logo, $A\hat{B}D = A\hat{C}D = \theta \Rightarrow$ O quadrilátero $ABCD$ é inscritível!

Vejamos agora se $ABCD$ é inscritível:



Do mesmo modo como M é o ponto médio da hipotenusa $\overline{AB}$ do triângulo retângulo $APB \Rightarrow \overline{PM} = \overline{MA} = \overline{MB}$.

Logo, se $A\hat{B}D = \theta \Rightarrow B\hat{A}P = M\hat{P}A = 90° - \theta \Rightarrow C\hat{P}K = 90° - \theta$ e como $ABCD$ é inscritível $\Rightarrow A\hat{C}D = A\hat{B}D = \theta \Rightarrow P\hat{K}C = 180° - (90° - \theta + \theta) = 90° \Rightarrow \overleftrightarrow{MP} \perp \overleftrightarrow{CD}$.

Portanto, $ABCD$ é inscritível $\Leftrightarrow PM \perp CD$.

PROBLEMA 5:

Considere o conjunto $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Para cada inteiro k, seja r_k a maior quantidade de elementos distintos de A que podemos escolher de maneira que a diferença entre dois números escolhidos seja sempre diferente de k. Determine o maior valor possível de r_k, onde $1 \le k \le \frac{n}{2}$.

SOLUÇÃO DE RAFAEL DAIGO HIRAMA (CAMPINAS – SP):

Vamos analizar casos pequenos:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 $k = 1$ $r_k = 4$
$k = 2$ $r_k = 4$
$k = 3$ $r_k = 5$
$k = 4$ $r_k = 4$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 $k = 1$ $r_k = 5$
$k = 2$ $r_k = 5$
$k = 3$ $r_k = 6$
$k = 4$ $r_k = 5$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
$k = 1$ $r_k = 5$
$k = 2$ $r_k = 6$
$k = 3$ $r_k = 6$
$k = 4$ $r_k = 6$
$k = 5$ $r_k = 5$

Isso me deu idéia para um lema!

Lema: Para $n = m \cdot k$ (m inteiro positivo maior que 1) temos que $r_k = k \cdot \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor$

Prova: Podemos dividir os números em casas de congruências módulo k. Por exemplo o 0.

Seus componentes serão k, $2k$, $3k$,...,mk. Como a diferença entre dois deles deve ser diferente de k, não podemos escolher dois números consecutivos nessa seqüência. Sempre deve haver um "ausente" ou mais entre dois "presentes". Para m par temos que só poderemos ter $\frac{m}{2}$ escolhidos pois caso tenhamos $\frac{m}{2}+1$ escolhidos teremos $\frac{m}{2}-1$ não escolhidos, mas para separar os escolhidos (para não serem consecutivos) deveríamos ter pelo menos $\frac{m}{2}$ não escolhidos. Absurdo.

Para m ímpar teremos $\frac{m+1}{2}$ escolhidos que podem ser espaçados pelos $\frac{m+1}{2}-1$ não escolhidos. Do mesmo modo, para $\frac{m+1}{2}+1$ deveríamos ter $\frac{m+1}{2}$ espaços mas só teriam sobrado $m-\left(\frac{m+1}{2}+1\right)=\frac{m-3}{2}$ não escolhidos que não são suficientes.

Como temos k casas de congruência com m números cada e pelo fato de

$$\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor = \begin{cases} \frac{m+1}{2} & \text{se } m \text{ é ímpar} \\ \frac{m}{2} & \text{se } m \text{ é par} \end{cases}$$ temos que $r_k = k \cdot \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor$.

Agora precisamos ver como transformar o lema em algo que seja mais versátil ao nosso problema, ou seja, não devemos ter de usar o fato $n = m \cdot k$.

Analizando mais casos pequenos estou conjecturando que o r_k máximo é $\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor$.

Vamos provar que $r_k \le \frac{2n}{3}$ para todo k.

Suponha o contrário, que há $r_k > \frac{2n}{3}$. Logo vamos provar primeiro que em uma casa de congruência módulo k com j termos o aproveitamento máximo de termos é $\frac{2}{3}$ do total j de termos. Temos a seguinte regra: se x foram escolhidos então pelo menos $x - 1$ não podem ter sido. Logo devemos provar que $\frac{x}{j} \le \frac{2}{3} \Rightarrow 2j \ge 3x$. Sabemos que $j \ge x + x - 1$, portanto vale $2j \ge 3x \Leftarrow 2[x + (x-1)] \ge 3x \Leftrightarrow 4x - 2 \ge 3x \Leftrightarrow x \ge 2.$

Para $x \ge 2$ já está provado. Mas se escolhermos $x = 1$ necessariamente $j = 2$ pois se $j = 1$, ou seja, se há somente um número entre 1 e n com congruência módulo k significa que $2k > n$, então $k > \frac{n}{2}$ o que contradiz o enunciado.

Nesse caso o aproveitamento é $\frac{1}{2}$ que é menor que $\frac{2}{3}$.

Chamando o aproveitamento para a casa de congruência i de a_i e o número de termos nessa casa de congruência de b_i temos

$$r_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_k b_k \le \frac{2}{3}(b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_k) = \frac{2}{3}n$$

$(\text{ pois } b_1 + b_2 + \ldots + b_k = n)$ portanto $r_k \le \frac{2}{3}n$

como r_k é inteiro r_k máximo é $\left\lfloor \frac{2}{3}n \right\rfloor$.

Falta provar a existência de tal r_k. Se faz assim:

Divide-se n por 3 e arredonda-o para cima. Esse é o nosso k. $k = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$. É obvio que para $n \geq 2$, $k \leq \frac{n}{2}$. (se n =1 k não existe)

Se $n = 3k$ então $r_k = \frac{2}{3} n$ e é máximo

Se $n = 3k - 1$

$n + 1 = 3k$ então teríamos, em relação ao caso acima a perda de um termo, a escolher. O $3k$ r_k máximo é $r_k = \frac{2(n+1)}{3} - 1 = \frac{2}{3}n - \frac{1}{3} = \left\lfloor \frac{2}{3} n \right\rfloor$

Se $n = 3k - 2$

$n + 2 = 3k$ do mesmo modo perdemos 2 em relação ao primeiro caso $r_k = \frac{2(n+2)}{3} - 2 = \frac{2}{3}n - \frac{2}{3} = \left\lfloor \frac{2}{3} n \right\rfloor$.

Portanto ao montar o caso $n = 3k$ escolhe-se:

1, 2, 3,..., k, $2k$, $2k$ + 1,..., $3k$ totalizando $2k$ termos $\frac{2}{3}n$

O caso $n = 3k - 1$ e $n = 3k - 2$ retira-se o $3k$; e o $3k$ e o $3k - 1$ respectivamente.

Resposta: $\begin{cases} n = 1 \rightarrow \text{ não podemos ter } k \;\; 1 \leq k \leq \frac{1}{2} \\ n \neq 1 \qquad r_k \;\; \text{máximo é} \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor \end{cases}$

Obs: $\lfloor x \rfloor$ maior inteiro menor ou igual a x

$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$

$\lfloor x \rfloor$ inteiro

$\lceil x \rceil$ menor inteiro maior ou igual a x

$x \leq \lceil x \rceil < x + 1$

$\lceil x \rceil$ inteiro.

PROBLEMA 6:

Dizemos que um inteiro n, n, > 1, é *ensolarado* se ele é divisível pela soma dos seus fatores primos. Por exemplo, 90 é ensolarado pois $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ e $2 + 3 + 5 = 10$ divide 90. Mostre que existe um número ensolarado com pelo menos 10^{2002} fatores primos distintos.

SOLUÇÃO DE RAFAEL DAIGO HIRAMA (CAMPINAS – SP):

Vamos ver casos pequenos:

$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ e é ensolarado pois $2 + 3 + 5 = 10|30$

Olha só que interessante: se escolhemos alguns números primos e a soma deles puder ser escrita como um produto qualquer deles o produto de todos esses primos vezes a soma deles é um número ensolarado, aliás o *mmc* é ensolarado.

Vamos ver até onde isso vai:

$2 + 3 + 5 + 7 = 17$ droga! 17 é primo, vamos adaptar

$2 + 3 + 5 + 7 + 17 = 34$ e $34 = 2 \cdot 17$

mmc $(34, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17$ que é ensolarado

$2 + 3 + 5 + 7 + 11 = 28$ e $28 = 2^2 \cdot 7$

mmc $(28, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ que é ensolarado

$2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 = 41$

$2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 41 = 82$ e $82 = 2 \cdot 41$

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 41$ é ensolarado.

Prova geral: $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + ... + p_n = x$, $x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_n^{\alpha_n}$ (ou seja, não tem fatores primos além dos p_1 a p_n, mas α_i pode ser 0)

$mmc(p_1p_2p_3...p_n), x) = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ... p_n^{\beta_n} = y$. Como $x \mid y$ e y só tem fatores $p_1, p_2, ..., p_n$, y é ensolarado.

Percebendo os meus testes podemos ver um modo de adaptar se tivermos a soma desses primos um número primo diferente dos anteriores. E se tivermos mais?

$$p_1 < p_2 < p_3 < ... < p_n \text{ e } p_1 + p_2 + ... + p_n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} p_4^{\alpha_4} ... p_n^{\alpha_n} p_{n+1}^{\alpha_{n+1}} p_{n+2}^{\alpha_{n+2}} p_{n+3}^{\alpha_{n+3}} ...$$

$$p_1 + p_2 + ... + p_n + p_{n+1} = p_{n+1}(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} ... p_n^{\alpha_n} p_{n+1}^{\alpha_{n+1}-1} p_{n+2}^{\alpha_{n+2}} ... + 1)$$

este número é com certeza menor que a soma inicial logo terá um limite para seus fatores primos.

Fazendo:

$$p_1 + p_2 + ... + p_n + p_{n+1} = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} p_3^{\beta_3} ... p_{n+1}^{\beta_{n+1}} p_{n+2}^{\beta_{n+2}} p_{n+3}^{\beta_{n+3}} ...$$

$$p_1 + p_2 + ... + p_n + p_{n+1} + p_{n+2} = p_{n+2}(p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} p_3^{\beta_3} p_4^{\beta_4} ... p_{n+1}^{\beta_{n+1}} p_{n+2}^{\beta_{n+2}-1} p_{n+3}^{\beta_{n+3}} ... + 1)$$

Calma, podemos evitar tudo isso se escolhermos os n primeiros primos:

$2 + 3 + 5 + ... + p_n = x \le n \cdot p_n$. Se tivesem dois primos p_i e p_j em x tal que $i, j > n$ teremos $p_ip_j \le x \le n \cdot p_n$.

Mas perceba que $p_k > k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (isso acontece porque a seqüência dos k percorre todos os naturais enquanto a dos p_k "pula" vários naturais).

Continuando

Vamos provar que $n \cdot p_n < p_i \cdot p_j$, não o contrário. $p_i \cdot p_j > p_n \cdot p_n$

$\therefore p_i \cdot p_j > n \cdot p_n$

Logo em x só pode haver um fator primo diferente dos 2, 3, 5,..., p_n. Usaremos p_i e do mesmo modo vemos que x não é divisível duas vezes por p_i (é só fazer $j = i$)

$2 + 3 + 5 + ... + p_n = m \cdot p_i \le n \cdot p_n$

$$m \le \frac{n \cdot p_n}{p_i}$$

Olhe só, como $\frac{p_n}{p_i} < 1$ porque $p_n < p_i$ porque $n < i$, $m < n$ só que $n < p_n \Rightarrow m < p_n$

Como m e p_n são inteiros $m + 1 \le p_n$

Agora pronto:

$2 + 3 + 5 + ... + p_n = m \cdot p_i$

$2 + 3 + 5 + ... + p_n + p_i = (m + 1) \cdot p_i$

mas como $m + 1 \le p_n$, $m + 1$ pode ser escrito como produto dos primos 2, 3, 5,..., p_n, ou seja $2+3+5+...+p_n + p_i = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}...p_n^{\alpha_n}\, p_i$.

Como $2+3+5+...+p_n + p_i = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}...p_n^{\alpha_n}\, p_i$

$mmc\,(2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}...p_n^{\alpha_n}\, p_i, 2\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot p_n \cdot p_i) = 2^{\max(\alpha_1,1)} \cdot 3^{\max(\alpha_2,1)} ... \cdot p_n{}^{\max(\alpha_n,1)} \cdot p_i$ aliás, como $m + 1 \le p_n$ $\alpha_n = 0$ ou 1, ou seja $\max(\alpha_n, 1) = 1$

Como queremos 10^{2002} primos distintos, se $\underbrace{2+3+...+p_{10^{2002}}}_{\text{os } 10^{2002} \text{ primeiros primos}}$ não for fatorável nos primos $2,3,..., p_{10^{2002}}$ ele será da forma $m \cdot p_i$, $i > 10^{2002}$

$m < p_{10^{2002}}$.

Com isso $2+3+...+p_{10^{2002}} + p_i = (m+1)\cdot p_i$, que é fatorável em $2,3,5,..., p_{10^{2002}}, p_i$, já que $m+1 \le p_{10^{2002}}$.

Logo pelo menos um entre $2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}\cdot ...\cdot p_{10^{2002}}^{\alpha_{10^{2002}}}$ ou $2^{\beta_1}3^{\beta_2}\cdot ...\cdot p_{10^{2002}}^{\beta_{10^{2002}}}\cdot p_i$, com $p_i{}^{2+3+...+p_{10^{2002}}}$, com α_i e β_i suficientemente grandes são ensolarados, ou seja, há um número ensolarado com 10^{2002} ou $10^{2002} + 1$(ou ambos) fatores primos distintos

Alias, esse método prova que para todo t inteiro positivo existe pelo menos um número ensolarado com t fatores primos ou pelo menos um número ensolarado com $t + 1$ fatores primos (ou ambos).

Obs. $\max(x,y) = \begin{cases} x, \text{ se } x \ge y \\ y, \text{ se } y \ge x \end{cases}$

XLIII OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

Enunciados e Resultado Brasileiro

A LXIII Olimpíada Internacional de Matemática foi realizada na cidade de Glasgow, Reino Unido no período de 18 a 31 de julho de 2002.

A equipe brasileira foi liderada pelos professores Edmilson Motta (São Paulo – SP) e Ralph Costa Teixeira (Niterói – RJ).

O Resultado da Equipe Brasileira

BRA 1	**Alex Corrêa Abreu**	**Bronze**
BRA 2	**Larissa Cavalcante Queiroz de Lima**	**Prata**
BRA 3	**Guilherme Issao Camarinha Fujiwara**	**Bronze**
BRA 4	**Yuri Gomes Lima**	**Bronze**
BRA 5	**Davi Máximo Alexandrino Nogueira**	**Bronze**
BRA 6	**Thiago da Silva Sobral**	**Bronze**

PRIMEIRO DIA

DURAÇÃO: 4 horas e meia.

PROBLEMA 1

Seja n um inteiro positivo. Seja T o conjunto de pontos $(x; y)$ no plano onde x e y são inteiros não negativos e $x + y < n$. Cada ponto de T é pintado de vermelho ou azul. Se um ponto $(x; y)$ é vermelho, então todos os pontos $(x'; y')$ com $x' \le x$ e $y' \le y$ também são. Um conjunto X é um conjunto de n pontos azuis com abcissas todas distintas, e um conjunto Y é um conjunto de n pontos azuis com ordenadas todas distintas. Prove que o número de conjuntos X é igual ao número de conjuntos Y.

PROBLEMA 2

Seja BC um diâmetro do círculo Γ de centro O. Seja A um ponto de Γ tal que $0^0 < \angle AOB < 120^0$. Seja D o ponto médio do arco AB que não contém C. A reta que passa por O e é paralela a DA encontra a reta AC em J. A mediatriz de OA corta Γ em E e F. Prove que J é o incentro do triângulo CEF.

PROBLEMA 3

Encontre todos os pares de inteiros m, $n \ge 3$ tais que há infinitos inteiros positivos a para os quais $\dfrac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$ é inteiro.

SEGUNDO DIA
DURAÇÃO: 4 horas e meia.

PROBLEMA 4
Seja n inteiro maior que 1. Os divisores positivos de n são $d_1, d_2, \ldots, d_k$, onde

$$1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$$

Seja $D = d_1d_2 + d_2d_3 + \ldots + d_{k-1}\, d_k$.
(a) Prove que $D < n^2$.
(b) Encontre todos os valores de n para os quais D é um divisor de n^2.

PROBLEMA 5
Encontre todas as funções f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tais que

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$

para todo $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

PROBLEMA 6
Sejam $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ círculos de raio 1 no plano, onde $n \geq 3$. Seus centros são $O_1, O_2, \ldots, O_n$, respectivamente.
Suponha que não exista reta que intercepte mais que dois dos círculos. Prove que

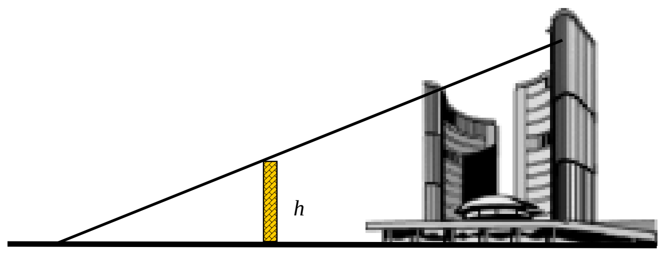
$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{O_iO_j} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

MUROS, PRÉDIOS E ESCADAS

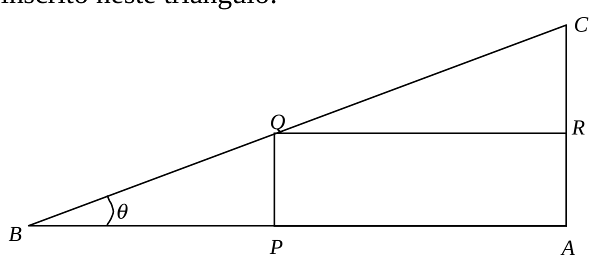
Cícero de Oliveira Holmer, São Paulo – SP

♦ Nível Avançado.

Há um clássico problema de máximos e mínimos cujo enunciado envolve um prédio (tão alto quanto se queira) e um muro de altura *h*, à uma distância *d* deste prédio. Pretende-se colocar uma escada, apoiada no muro, a partir do solo e alcançando o prédio, conforme o esquema:



Pergunta-se então o seguinte: Qual é o comprimento mínimo da escada?
Vamos montar um modelo, considerando um triângulo retângulo *ABC* e um retângulo *APQR* inscrito neste triângulo:



Sendo $PQ = a$, $QR = b$ e $m(A\hat{B}C) = \theta$, temos:

$BC = BQ + QC = \dfrac{a}{sen\theta} + \dfrac{b}{\cos\theta}$. Assim, $BC = f(\theta)$ e $f'(\theta) = -\dfrac{a.\cos\theta}{sen^2\theta} + \dfrac{b \cdot sen\theta}{\cos^2\theta}$

Para termos *BC* mínimo, é preciso que $f'(\theta) = 0$, isto é, $-\dfrac{a\cdot\cos\theta}{sen^2\theta} + \dfrac{b\cdot sen\theta}{\cos^2\theta} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{b\cdot sen\theta}{\cos^2\theta} = \frac{a\cdot\cos\theta}{sen^2\theta} \Leftrightarrow \frac{sen^3\theta}{\cos^3\theta} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow tg\theta = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \qquad \text{(I).}$$

Pelo teorema de Pitágoras, $BC^2 = BA^2 + AC^2 \Leftrightarrow BC^2 = (BP + PA)^2 + (AR + RC)^2 =$

$=\left(\dfrac{a}{tg\theta}+b\right)^2+(a+b\cdot tg\theta)^2$. Como BC deve ser mínimo, de (I), temos:

$$BC^2=\left(\dfrac{a}{\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}}+b\right)^2+\left(a+b\cdot\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}\right)^2=\left(\sqrt[3]{a^2\cdot b}+b\right)^2+\left(a+\sqrt[3]{a\cdot b^2}\right)^2=$$

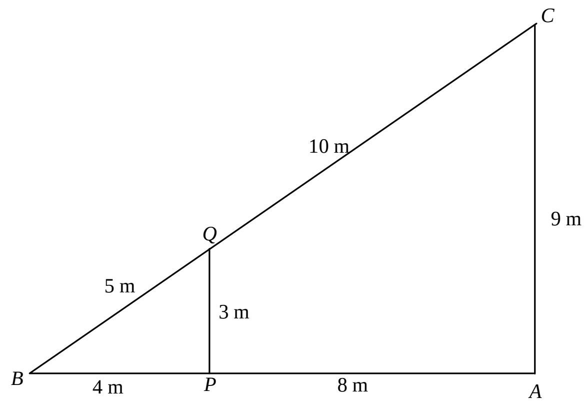
$$=a\cdot\sqrt[3]{a\cdot b^2}+2\cdot b\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot b}+b^2+a^2+2\cdot a\cdot\sqrt[3]{a\cdot b^2}+b\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot b}=$$

$$=a^2+3\cdot a\cdot\sqrt[3]{a\cdot b^2}+3\cdot b\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot b}+b^2=\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}\right)^3\Leftrightarrow BC=\sqrt{\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}\right)^3}.$$

Portanto, o comprimento mínimo da escada deve ser $\sqrt{\left(\sqrt[3]{h^2}+\sqrt[3]{d^2}\right)^3}$.

Vamos agora considerar uma situação com valores numéricos (talvez você possa aproveitar melhor o que vem a seguir tendo em mãos papel, caneta e, se possível, uma boa calculadora).

A partir de um triângulo retângulo bem conhecido, de lados 3, 4 e 5, e outro triângulo semelhante, por exemplo o de lados 9, 12 e 15, podemos montar a figura:

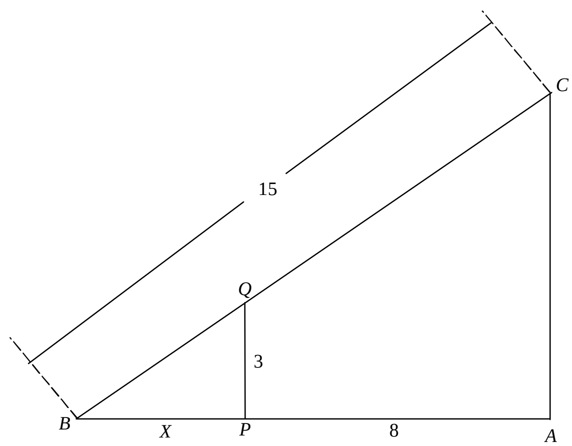


Formulamos, então, o seguinte problema: Se o muro tem 3 metros de altura, a distância do muro ao prédio é igual a 8 metros e a escada tem 15 metros de comprimento, poderíamos afirmar que a distância do pé da escada ao muro é igual a 4 metros?

Vejamos:

O menor comprimento possível da escada é de $\sqrt{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{8^2}} = \sqrt{\left(\sqrt[3]{9}+4\right)^3}$ metros.

Pode-se verificar que $\sqrt{\left(\sqrt[3]{9}+4\right)^3} < 15,$ e isto quer dizer que há duas maneiras distintas de posicionarmos a escada e, portanto, existem duas distâncias possíveis do pé da escada ao muro. Vamos então, novamente, montar um modelo:



Uma solução possível, claro, é $x = 4$ metros. Busquemos a outra solução:

$$\Delta PBQ \sim \Delta ABC, \text{ logo } \frac{BP}{BQ} = \frac{BA}{BC} \Leftrightarrow \frac{x}{BQ} = \frac{x+8}{15} \Leftrightarrow BQ = \frac{15\cdot x}{x+8}$$

No ΔBPQ temos

$$x^2 = BQ^2 - 3^2 \Leftrightarrow x^2 = \left(\frac{15\cdot x}{x+8}\right)^2 - 9 \Leftrightarrow x^4 + 16\cdot x^3 - 152\cdot x^2 + 144\cdot x + 576 = 0$$

Aplicando-se o algoritmo de Briot-Ruffini, obtemos:

1	**16**	**–152**	**144**	**576**	**4**
1	**20**	**–72**	**–144**	**0**	

Assim, a outra solução é raiz de $x^3 + 20x^2 - 72x - 144 = 0.$

É possível mostrar que essa equação tem duas raízes reais negativas e uma raiz real positiva, que é aproximadamente 4,3274534… e pode ser escrita como

$$\frac{4}{3}\left(\sqrt{154}\cdot\cos\frac{\arccos\left(\frac{-1567}{154\sqrt{154}}\right)}{3}-5\right)$$ (ver por exemplo [3] para um método de resolução de equações do terceiro e quarto graus).

Assim, as possíveis distâncias do pé da escada ao muro, são de 4 metros e de

$$\frac{4}{3}\cdot\left(\sqrt{154}.\cos\frac{\arccos\left(-\frac{1567}{154\cdot\sqrt{154}}\right)}{3}-5\right)=4{,}3274534\ldots \text{ metros.}$$

Referências Bibliográficas

[1] Piskunov N., Cálculo Diferencial e Integral, Tomos I e II, Ed. Mir 1977
[2] Demidovitch B., Problemas e Exercícios de Análise Matemática, Ed. Mir 1978
[3] Moreira, C.G., Uma solução das equações do terceiro e quarto graus, RPM 25, pp. 23-28.

INTEIROS DE GAUSS E INTEIROS DE EISENSTEIN

Guilherme Fujiwara, São Paulo – SP

♦ Nível Avançado.

Vamos abordar nesse artigo a aritmética de dois conjuntos de inteiros algébricos: os Inteiros de Gauss e os Inteiros de Eisenstein.

1. INTEIROS DE GAUSS

Definimos o conjunto $\mathbb{Z}[i]$ dos inteiros de Gauss como $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, onde ($i^2 = -1$). A seguir veremos as duas coisas mais importantes de sua aritmética, o teorema da fatoração única e os primos.

1.1 Norma

Vamos definir uma função N: $\mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}_+$ chamada norma, tal que $\forall z \in \mathbb{Z}[i]$, $N(z) = z \cdot \overline{z}$ sendo $\overline{z}$ o conjugado complexo de z. Observe que como $\overline{ab} = \overline{a} \cdot \overline{b}$, então $N(a) \cdot N(b) = a\overline{a} \cdot b\overline{b} = a \cdot b \cdot \overline{a} \cdot \overline{b} = ab \cdot \overline{ab} = N(ab)$, ou seja, a norma é multiplicativa.

1.2. Unidades

As unidades em $\mathbb{Z}[i]$, analogamente a $\mathbb{Z}$, são todos os elementos $z \in \mathbb{Z}[i]$ que possuem inverso, ou seja, que $\exists z' \in \mathbb{Z}[i]$ tal que $z \cdot z' = 1$. Segue que se $z = a + bi$ é uma unidade, então $1 = N(z \cdot z') = N(z) \cdot N(z') \Rightarrow N(z) = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a = \pm 1, b = 0$ ou $a = 0,\ b = \pm 1 \Leftrightarrow \mathbb{Z} = \pm 1$ ou $\mathbb{Z} = \pm i$, e como esses quatro tem inverso, todas as unidades são ± 1 e $\pm i$. Observe então que $x \in \mathbb{Z}[i]$ é unidade $\Leftrightarrow N(x) = 1$.

1.3. Divisibilidade

Dizemos que para $a, b \in \mathbb{Z}[i]$, $a|b$ (lê-se a divide b) se $\exists c \in \mathbb{Z}[i]$ tal que $b = ac$.

1.4. Divisão Euclidiana

Vamos ver como funciona a divisão euclidiana. A divisão Euclidiana é a existência de $q, r \in \mathbb{Z}[i], \forall a, b \in \mathbb{Z}[i], b \neq 0$ tal que $a = bq + r$, sendo $0 \leq N(r) < N(b)$. Para demonstrá-la, basta dividir:

$$a = x + yi,\ b = z + wi,\ \text{onde } x, y, z, w \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{a}{b}=\frac{x+yi}{z+wi}=\frac{x+yi}{z+wi}\cdot\frac{z-wi}{z-wi}\Leftrightarrow\frac{xz-xwi+yzi-ywi^2}{z^2+w^2}=\frac{xz+yw}{z^2+w^2}+\frac{yz-xw}{z^2+w^2}i$$

Tomamos m e n como os inteiros mais próximos de $\frac{xz+yw}{z^2+w^2}$ e $\frac{yz-xw}{z^2+w^2}$, respectivamente. Note que $\left|m-\frac{xz+yw}{z^2+w^2}\right|,\left|n-\frac{yz-xw}{z^2+w^2}\right|\le\frac{1}{2}$ Se $q = (m + ni)$, então:

$$r=a-bq=b\left(\frac{a}{b}-q\right)=b\left(\frac{yz-xw}{z^2+w^2}-m+\left(\frac{yz-xw}{z^2+w^2}-n\right)i\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow N(r)\le N(b)\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)=\frac{N(b)}{2}<N(b)$$

1.5. Lema de Euclides

A partir da divisão euclidiana podemos demonstrar o lema de Euclides, ou seja, se p é um primo de Gauss (ou seja, não pode ser escrito como o produto de dois inteiros de Gauss cujas normas são maiores que 1), então sendo $a, b \in \mathbb{Z}[i]$, $p|ab \Rightarrow p|a$ ou $p|b$. Para demonstrá-lo, vamos fazer sucessivas divisões euclidianas, sendo $a_0 = a$ e $a_1 = p$. Seja a_{k+2} o resto da divisão euclidiana de a_k por a_{k+1}. Temos então as divisões:

$$\begin{aligned}
a_0 &= q_1a_1 + a_2\\
a_1 &= q_2a_2 + a_3\\
a_2 &= q_3a_3 + a_4\\
&\vdots\\
a_{n-2} &= q_{n-1}a_{n-1} + a_n\\
a_{n-1} &= q_na_n + a_{n+1}
\end{aligned}$$

Observe que como $a_k \ne 0 \Rightarrow N(a_{k+1}) < N(a_k)$, podemos tomar n tal que $N(a_n +1) = 0$, ou seja, $a_{n+1} = 0$.

Logo $a_n|a_{n-1}$. Observe que $a_n \mid a_{k+1}$ e $a_n \mid a_k \Rightarrow a_n \mid a_{k-1}$. Logo $a_n \mid a_n$ e $a_n \mid a_{n-1}$, então indutivamente, $a_n \mid a_k, \forall k\ 0 \le k \le n$, particularmente $a_n \mid a_0 = a$ e $a_n \mid a_1 = p$. Tomando as $j + 1$ primeiras equações e realizando substituições adequadas, temos que $a_j = x_j a_1 + y_j a_0 = x_j p + y_j a$; particularmente $a_n = x_n p + y_n a$.

Voltando ao lema, veja que se $p|a$ então o lema está certo. Se p não divide a, então, como $a_n \mid p$, $a_n|a$ e $a_n = x_n p + y_n a$, então $a_n \in \{1; -1; i; -i\}$ e temos:

$a_n = x_n p + y_n a \Leftrightarrow b = a_n^{-1}(px_n b + aby_n) \Rightarrow p \mid b$, pois $p \mid ab$, o que conclui a demonstração.

1.6. Fatoração única

A fatoração única é uma das propriedades mais usadas em problemas envolvendo números inteiros. Vamos prová-la para os inteiros de Gauss. Primeiramente provaremos que todo inteiro z de Gauss com norma maior que 1 pode ser escrito como o produto de um ou mais primos de Gauss. Se $N(z) = 2$, como 2 é primo e a norma é multiplicativa, então z é primo, portanto está provado. Considere $N(z) > 2$. Se z é primo a fatoração é imediata. Se z não é primo, então $z = a \cdot b \Rightarrow N(z) = N(a) \cdot N(b)$, onde $N(a)$, $N(b) > 1$, portanto $N(a)$, $N(b) < N(z)$. Podemos supor, por indução, que se $N(x) < N(z)$, então x é fatorável. Logo a e b são fatoráveis, e portanto z.

Para provar que esta fatoração é unica, basta considerar as duas fatorações $p_1p_2\dots p_n$ e $q_1q_2\dots q_m$. Suponha, por indução, que $p_1p_2\dots p_n = \varepsilon q_1q_2\dots q_m$, sendo ε uma unidade, implica que a seqüência (p_i) é uma permutação (a menos que sejam multiplicações por unidades) da (q_i). Se $\max\{n; m\} = 1$, então o resultado é imediato. Supondo que ele vale se $\max\{n'; m'\} < \max\{n; m\}$, pelo lema de Euclides, vemos que para algum i, $p_n|q_i$. Sem perda de generalidade, $i = m$. Como p_n e q_m são primos, então $q_m = \varepsilon' p_n$, onde ε' é uma unidade. Logo $p_1p_2\dots p_n = \varepsilon q_1q_2\dots q_m$

$\Leftrightarrow p_1p_2\dots p_{n-1} = \varepsilon\varepsilon' q_1 q_2 \dots q_{m-1}$. Por indução, $p_1, p_2,\dots,p_{n-1}$ é uma permutação (a menos que sejam multiplicações por unidades) de $q_1, q_2, \dots, q_m$, portanto a fatoração única está provada.

1.7. Números primos

Vamos agora ver quem são os números primos em $Z[i]$. Observe que se $N(\pi)$ é primo em $\mathbb{Z}$, então π é um primo de Gauss (pois se π fatora então $N(\pi)$ fatora).

Observe que todo primo π divide $N(\pi)$, portanto ele deve dividir ao menos um fator primo em $\mathbb{Z}$ de $N(\pi)$. Se π dividir ao menos dois números distintos (absolutamente) x e y primos em $\mathbb{Z}$, como sempre é possível tomar $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que $ax + by = 1$, teríamos $\pi|1$, um absurdo. Logo todo primo de Gauss divide exatamente um primo inteiro positivo (e seu oposto negativo) em $\mathbb{Z}$. Seja esse primo inteiro positivo p. Temos três casos:

Se p é par, então $p = 2$. Sendo $\pi = a + bi$, então $a^2 + b^2 = 2 \Leftrightarrow \pi = \pm 1 \pm i$, e obtemos os quatro primos $1 + i$, $1 - i$, $-1 + i$ e $-1 - i$. Observe que eles são dois a dois um a multiplicação por uma unidade do outro.

Se $p \equiv 3$ (mód. 4), como $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 \equiv 0$ ou 1 (mód. 4), então, se existisse $\pi = c + di$, $c, d \in Z$, $1 < N(\pi) < p^2$ tal que $p = \pi\varphi$, é facil ver que, como p é um primo inteiro $\varphi = c - di$, logo $p = c^2 + d^2 \equiv 0$, 1 ou 2 (mod.4), absurdo, pois $p = 4k + 3$. Logo p é um primo de Gauss.

Se $p \equiv 1$ (mód. 4), então, sendo $x = 1 \times 2 \times \ldots \times (p - 1)/2$, então:

$$x^2 \equiv 1\times 2\times ...\times \frac{(p-1)}{2}\times 1\times 2\times ...\times \frac{(p-1)}{2}$$

$$\equiv 1\times 2\times ...\times \frac{(p-1)}{2}\times \frac{(p+1)}{2}\times ...\times (p-2)\times (p-1)\equiv 1\times (p-1)$$

$$\equiv -1 (mód.p)$$

Logo $p \mid x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$. Como π é um primo de Gauss que divide p, então $\pi \in Z$, $\pi|x + i$ ou $\pi|x - i \Rightarrow \pi|1$, absurdo. Portanto $\pi \notin \mathbb{Z}[i]$ tal que $p = \pi\varphi$. Seja $\pi = a + bi$ e $\varphi = c + di$, $a, b, c, d \in Z$. Como p é primo em z, então $mdc(a; b) = mdc(c;d) = 1$. Temos $p = (a + bi)(c + di) = ac - bd + (bc + ad)i$. Como $p \in Z$, então $bc = -ad \Rightarrow (a = c$ e $b = -d)$ ou $(a = -c$ e $b = d) \Leftrightarrow \varphi = \pm\overline{\pi}$. Como $p > 0$, então $\varphi = \overline{\pi} \Rightarrow N(\pi) = p$, logo π é primo (e π e seu conjugado são únicos primos de Gauss que dividem p).

Portanto vimos que os números primos em $\mathbb{Z}[i]$ são:

(1) O primo $1 + i$ e seus produtos pelas unidades.
(2) Os primos p em $\mathbb{Z}$ tal que $p \equiv 3$ (mod. 4) e seus produtos pelas unidades.
(3) Para cada primo p em $\mathbb{Z}_+$ tal que $p \equiv 1$ (mod. 4), os primos $a + bi$, $a - bi$ e seus produtos pelas unidades, sendo $a^2 + b^2 = p$.

1.8. Ternas pitágoricas

Agora que já vimos a aritmética básica dos inteiros de Gauss, vamos começar com um resultado simples e interessante. Vamos achar as soluções da equação $a^2 + b^2 = c^2$, sendo $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Seja $m = \text{mdc}(a; b)$, $a' = a/m$ e $b' = b/m$. Temos então $m^2 (a^2 + b^2) = c^2 \Rightarrow m|c$. Seja então $c' = c/m$, temos $a'^2 + b'^2 = c'^2$, $\text{mdc}(a';b';c') = 1$.

Note que $a'^2 + b'^2 = c'^2 \Leftrightarrow (a'+ b'i)(a'- b'i) = c'^2$. Observe que se $d = \text{mdc}(a' + b'i; a'- b'i)$, então $d|2a'$ e $d|2b' \Rightarrow d|2$. Se d não divide 1, então $d|a'^2 + b'^2 \Rightarrow a'$ e b' são ímpares, o que é um absurdo, basta ver congruência módulo 4. Portanto $d|1 \Leftrightarrow a' + b'i$ e $a' + b'i$ são primos entre si, logo ambos são quadrados perfeitos. Observe também que quaisquer a'e b' primos entre si tais que $a' + b'i$ e $a'- b'i$ são quadrados perfeitos são soluções da equação. Portanto a'e b' formam uma solução se e somente se existem $x, y, z, w \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$\left|\begin{array}{l} a'+b'i=(x+yi)^2 \\ a'-b'i=(z+wi)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a'+b'i=(x+yi)^2 \\ a'-b'i=(x-yi)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow a'+b'i=(x+yi)^2 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a'=x^2-y^2 \\ b'=2xy \end{array}\right.$$

Veja então que a' e b' são primos entre si se e só se x e y são primos entre si. Logo as soluções são $a = (x^2 - y^2) \cdot d$, $b = 2xy \cdot d$, ou vice-versa, e conseqüentemente $c = (x^2 + y^2) \cdot d$, para $x, y, d \in \mathbb{Z}$, sendo x e y primos entre si.

1.9. O número de representações de um inteiro como a soma de dois quadrados

Provaremos agora o seguinte

Teorema. Dado $n \in \mathbb{N}$, *o número de pares a, b* $\in \mathbb{Z}$ *tais que* $n = a^2 + b^2$ *é igual a quatro vezes a diferença entre o número de divisores da forma* $4k + 1$ de *n e o número de divisores da forma* $4k + 3$ de n.

Podemos expressar n da forma:

$$n = 2^{\alpha}\, p_1^{\alpha} \ldots p_k^{\alpha k} \times q_1^{\beta_1} (\overline{q}_i)^{\beta_1} \ldots q_m^{\beta_m} (\overline{q}_m)^{\beta_m}$$

Sendo p_i primos de Gauss inteiros (da forma $4k + 3$) e os pares de conjugados $q_i \neq \overline{q}_i$ primos de Gauss ($N(q_i)$ da forma $4k + 1$) e esses primos diferem dois a dois por mais do que uma multiplicação por uma unidade.

Sendo $n = a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$, então, pelo teorema da fatoração única e a multiplicidade do conjugado, temos:

$a + bi = \varepsilon (1+i)^{\alpha}\, p_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \ldots p_k^{\frac{\alpha_k}{2}} \times q_1^{\gamma_1} (\overline{q}_1)^{\beta_1 - \gamma_1} \ldots q_m^{\gamma_m} (\overline{q}_m)^{\beta_m - \gamma_m}$, onde $0 \le \gamma_i \le \beta_i$ e ε é uma unidade.

Portanto o número de representações de m como a soma de dois quadrados será 0 se algum α_i for ímpar e será $4(\beta_1 + 1)\ldots(\beta_m + 1)$ se todos α_i forem pares, sendo o fator 4 pois há 4 escolhas possíveis para a unidade.

Observe agora que a fatoração de n em primos inteiros será:

$$n = 2^{\alpha}\, p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k} \times N(q_1)^{\beta_1} \ldots N(q_m)^{\beta_m}$$

Onde p_i serão primos da forma $4k + 3$ e $N(q_i)$ serão primos da forma $4k + 1$. Observe agora que um divisor ímpar de n será da forma:

$$d = p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k} \times N(q_1)^{b_1} \ldots N(q_m)^{b_m}, \text{ onde } a_1 \le \alpha_1, \ldots, a_k \le \alpha_k, b_1 \le \beta_1, \ldots, b_m \le \beta_m$$

Note que se $a_1 + \ldots + a_k$ é par, então d é da forma $4k + 1$, se for ímpar é da forma $4k + 3$. Portanto, conseguimos verificar que se algum α_i for ímpar, o número de d's da forma $4k + 3$ será igual ao número de d's da forma $4k + 1$, e se todos os α_i forem pares, a diferença entre esses números será $(\beta_1 + 1)\ldots(\beta_m + 1)$, o que termina a demonstração do teorema.

1.10. Problemas

Problema 1. Determine todos os pares $x, y \in \mathbb{Z}$ tal que $y^3 = x^2 + 1$

Problema 2. Sejam $x, y, z \in \mathbb{N}$ tais que $xy = z^2 + 1$. Prove que existem inteiros a, b, c, d tais que $x = a^2 + b^2$, $y = c^2 + d^2$ e $z = ac + bd$.

Problema 3. Prove que existem duas seqüências inteiras (a_n) e (b_n) infinitas e estritamente crescentes tais que $a_k(a_k + 1)$ divide $b_k^2 + 1$ para todo natural k.

2. INTEIROS DE EISENSTEIN

Vamos agora ver os Inteiros de Eisenstein. Definimos o conjunto $\mathbb{Z}[\omega]$ dos inteiros de Eisenstein como $\mathbb{Z}[\omega] = \{a + b\omega |\ a, b \in \mathbb{Z}\}$, sendo $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, donde $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. Para $\zeta = a + b\omega \in \mathbb{Z}[\omega]$ definiremos a norma como $N(\zeta) = \zeta \cdot \overline{\zeta} = a^2 - ab + b^2$. Observe que essa norma segue as mesmas propriedades da norma dos inteiros de Gauss (é inteira não negativa e multiplicativa).

2.1. Unidades

As unidades em $\mathbb{Z}[\omega]$ são definidas como os seus elementos que possuem inverso, ou seja u, tal que $\exists u^{-1}$ tal que $u \cdot u^{-1} = 1 \Rightarrow N(u) = 1 \Leftrightarrow u = \pm 1, \pm\omega, \pm(1 + \omega)$, e verificamos que esses quatro números tem inverso, portanto u é unidade se, e só se $N(u) = 1$.

Obs. Note que $\pm(1+\omega) = \pm\ \omega^2$.

2.2. Divisão Euclidiana

Para provar a existência de divisão Euclidiana entre $a, b \in \mathbb{Z}[\omega]$, $b \neq 0$. Sejam α e β tais que:

$$\frac{a}{b} = \alpha + \beta\omega$$

Tomando $q = c + d\omega$, tais que c e d são respectivamente os inteiros mais próximos de α e β. Portanto:

$$r = a - bq = b(\alpha + \beta\omega - q) \Rightarrow N(r) =$$

$$= N(b)((\alpha - c)^2 - (\alpha - c)(\beta - d) + (\beta - d)^2) \leq N(b)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) < N(b)$$

Portanto existe a divisão Euclidiana.

2.3. Teorema da fatoração Única

Note que, para os inteiros de Gauss, provamos o lema de Euclides e a fatoração única, usando somente o fato de que existe divisão Euclidiana, portanto, seguindo os mesmos passos para provar o lema de Euclides e a fatoração única, provaremos a fatoração única para os inteiros de Eisenstein.

2.4. Primos

Tudo é muito parecido com os inteiros de Gauss: $N(\pi)$ é primo em $\mathbb{Z} \Rightarrow \pi$ é primo em $\mathbb{Z}[\omega]$; todo primo π em $\mathbb{Z}[\omega]$ divide exatamente um primo inteiro positivo. A demonstração desses dois fatos é exatamente igual que foi dada na seção de inteiros de Gauss. Seja p o inteiro positivo primo que o primo, π em $Z[\omega]$ divide. Temos três casos:

- Se p é da forma $3k$, então $p = 3$, e obtemos $\pi = \pm(1 - \omega)$ ou $\pm(2 + \omega)$.
- Se p é da forma $3k + 2$, como $a^2 - ab + b^2$ só é da forma $3k$ ou $3k + 1$ (verifique você mesmo), então p é um primo de em $Z[\omega]$ tal que $N(\pi) = p^2$.
- Se p é da forma $3k + 1$, pela lei da reprocidade quadrática*:

$$\left(\frac{p}{3}\right)\left(\frac{-3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\left(\frac{-3-1}{2}\right)} = 1 \Rightarrow \left(\frac{-3}{p}\right) = 1$$

Portanto existe x inteiro tal que $p \mid (x-1)^2 + 3 = x^2 - 2x + 2^2 = (x - 2\omega)(x - 2\omega^2)$, e como p não divide 2, então p não é primo em $Z[\omega]$ e existem π e ψ tal que $\pi\psi = p$. Como p é um primo inteiro, então $\psi = \overline{\pi}$, logo π e $\overline{\pi} = \psi$ são primos em $\mathbb{Z}[\omega]$ e $\pi \cdot \overline{\pi} = p$.

Portanto os primos em $\mathbb{Z}[\omega]$ são:

(1) O primo $1 - \omega$ e suas multiplicações por unidades.

(2) Os primos inteiros da forma $3k + 2$ e seus produtos pelas unidades, que também são primos em $\mathbb{Z}[\omega]$.

(3) Para todo primo inteiro p da forma $3k + 1$, os primos π e $\overline{\pi}$ tal que $\pi\overline{\pi} = p$ e seus produtos pelas unidades são primos em $\mathbb{Z}[\omega]$.

---

*A lei de reciprocidade quadrática de Gauss diz o seguinte: dados $a \in \mathbb{Z}$ e $p \in \mathbb{Z}$ primo que não divide a, definimos $\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, \text{se } a \text{ é resíduo quadrático mod.} p. \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$ Para p, $q \in \mathbb{Z}$ primos ímpares com $p > 0$ vale sempre $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{q-1}{2}\right)}$.

2.5. Exemplo

Ache todos os $a, b, c \in \mathbb{Z}_+^*$ lados de um triângulo com um ângulo de 60°.

Vamos supor, sem perda de generalidade, que o ângulo de 60° é entre os lados de medidas a e b. Pela lei dos co-senos, temos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(60°) = a^2 + b^2 - ab = (a + b\omega)(a - b\omega)$$

Observe a semelhança deste problema com o das ternas pitagóricas.

Seja $m = mdc(a; b)$, $a = a'm$, $b = b'm$. Segue que $m^2 \mid c^2 \Leftrightarrow m \mid c$, e teremos $c = c'm$. Logo $c^2 = a^2 + b^2 - ab \Leftrightarrow c'^2 = a'^2 + b'^2 - a'b'$, e temos $mdc(a'; b'; c') = 1$. Seja d tal que $d \mid a' + b'\omega$ e $d \mid a' - b'\omega$. Segue que $d \mid 2a'$ e $d \mid 2b'$, logo $d \mid 2$. Se d não divide 1, então $2 \mid d \Rightarrow 2 \mid a'^2 - a'b' + b'^2 \Rightarrow 2 \mid a'$ e $2 \mid b'$, absurdo, logo $d \mid 1$, e portanto:

$$a' + b'\omega = (x + y\omega)^2 = x^2 - y^2 + (2xy - y^2)\omega \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a' = x^2 - y^2 \\ b' = 2xy - y^2 \end{array} \right.$$

Portanto as soluções são $a = (x^2 - y^2)m, b = (2xy - y^2)m$ e $c = (x^2 - xy + y^2)m$, para todo $x, y, m \in \mathbb{Z}_+$ com $x > y$, e as permutações de a, b e c.

Outro bom exemplo de aplicação dos inteiros de Eisenstein é o problema 6 da IMO de 2001:

Sejam a, b, c, d inteiros com $a > b > c > d > 0$. Considere que

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$$

Prove que $ab + cd$ não é primo.

Primeiramente vamos mostrar por que usar inteiros de Eisenstein:

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ac + bd = b^2 + bd - ab + bc + bd + d^2 - ad + cd + ab + ad - a^2 + ac - bc - cd + ac - c^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b^2 + bd + d^2 = a^2 - ac + c^2$$

Aí vemos por que usar inteiros de Eisenstein.

$$(b - d\omega)(b - d\omega^2) = (a + c\omega)(a + c\omega^2)$$

Observe que como $a, b, c > 1$, então $mdc(b; d) > 1 \Rightarrow ab + cd$ não é primo, logo podemos supor que b e d são primos entre si. Analogamente supomos que $mdc(a; c) = mdc(a; d) = mdc(b; c) = 1$.

Seja π um primo em $\mathbb{Z}[\omega]$ tal que $\pi | b - d\omega$. Vamos provar que $\overline{\pi}$ não divide $a + c\omega \Leftrightarrow \pi$ não divide $a + c\omega^2$, e segue que $b - d\omega | a + c\omega$. Suponha então que $\overline{\pi} | a + c\omega$. Veja que $N(\pi) | (b - d\omega)(a + c\omega)$, e temos

$$(b - d\omega)(a + c\omega) = ab + cd + (bc + cd - ad)\omega$$

Como $N(\pi) \in \mathbb{Z}$, e $N(\pi) | (b - d\omega)(a + c\omega)$, então $N(\pi) | ab + cd$ e, supondo *ab* + *cd* primo, teríamos $ab + cd = N(\pi)$. Mas nesse caso segue que $b - d\omega = \varepsilon\pi^k \Rightarrow b - d\omega^2 = \overline{\varepsilon} \cdot \overline{\pi}^k \Rightarrow a + c\omega = \varepsilon' \overline{\pi}^k$, sendo ε e ε' unidades. Se $\mu = \varepsilon' / \overline{\varepsilon}$, então $b + d + d\omega = b - d\omega^2 = \mu(a + c\omega)$. Considerando o fato de *mdc*(*b*; *d*) = *mdc*(*a*; *c*) = *mdc*(*b*; *c*) = 1 e que *a* > *b* > *c* > *d* > 0, temos que isto é um absurdo (a verificação fica para o leitor, basta considerar as 6 possibilidades para μ). Logo $b - d\omega | a + c\omega$, e analogamente $a + c\omega | b - d\omega$. Portanto $b - d\omega = \upsilon(a + c\omega)$, onde υ é uma unidade. Novamente, basta verificar todas as possibilidades para υ e verificar que isto é um absurdo. Portanto *ab* + *cd* não é primo.

2.6. Problemas

Deixamos aqui mais alguns problemas para o leitor:

Problema 1.

(a) Prove que, para cada inteiro *n*, o número de soluções inteiras de $x^2 - xy + y^2 = n$ é finito e divisível por 6.

(b) Determine todas as soluções inteiras de $x^2 - xy + y^2 = 727$.

Problema 2.

Mostre que a equação diofantina $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ só tem soluções triviais, ou seja, tais que $xyz = 0$.

Problema 3.

Prove que se *n* é um inteiro positivo tal que a equação $x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$ tem soluções em inteiros (*x*; *y*), então ela tem pelo menos três soluções.

SEQÜÊNCIAS ARITMÉTICO-GEOMÉTRICAS

José Paulo Carneiro & Carlos Gustavo Moreira

♦ Nível Intermediário.

A) Seqüências Aritmético-Geométricas (à la Zé Paulo)

Uma progressão aritmética (PA) é uma seqüência tal que cada termo é igual ao anterior adicionado de uma constante (a razão), isto é, seu termo geral (a_n) satisfaz à relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + r$. Daí se deduz, como é conhecido, que $a_n = a_1 + (n-1)r$.

Analogamente, uma progressão geométrica (PG) é uma seqüência tal que cada termo é igual ao anterior multiplicado por uma constante (a razão), isto é, seu termo geral (a_n) satisfaz à relação de recorrência $a_n = q\ a_{n-1}$. Daí se deduz, como é conhecido, que $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Existe um outro tipo de seqüência que aparece freqüentemente, que é uma espécie de mistura de uma PA e uma PG. É aquela cujo termo geral (a_n) satisfaz a relação de recorrência $a_n = q\ a_{n-1} + r$, e que vamos chamar de **seqüência aritmético-geométrica** (à la Zé Paulo) (SAG), de "razão geométrica" q e "razão aritmética" r. (só vamos considerar os casos em que $r \neq 0$ e $q \neq 1$, para não recair numa PA ou numa PG.)

Observemos que, uma vez conhecido o primeiro termo a_1 e a relação de recorrência $a_n = q\ a_{n-1} + r$, conhecem-se sucessivamente a_2, a_3, etc., e, em princípio, todos os a_n. Mas permanece o interesse em determinar uma expressão explícita para o termo geral de uma SAG em função de n, uma vez conhecidos r, q e a_1.

Um exemplo de SAG aparece na solução do célebre problema da Torre de Hanói (ver [2]), onde são dados três pinos A, B e C, e se quer determinar o número mínimo de movimentos necessários para se mover do pino A para um dos dois outros pinos uma pilha de n discos de tamanhos desiguais, de modo que nunca um disco maior fique em cima de um disco menor. Se a_n for o número procurado, podemos raciocinar que, inicialmente, vão ser necessários a_{n-1} movimentos para mover os $n-1$ discos superiores para o pino B, digamos; em seguida, um movimento para mover o maior de todos os discos para o pino C; e finalmente, mais a_{n-1} movimentos para mover a pilha restante para C e completar a operação. Portanto, a_n satisfaz à relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1} = 2a_{n-1} + 1$, além da condição inicial $a_1 = 1$. A partir daí, podem ser determinados sucessivamente:

$a_2 = 2 \times 1 + 1 = 3$, $a_3 = 2 \times 3 + 1 = 7$, e assim por diante.

Uma seqüência constante pode ser considerada uma PA de razão 0 ou uma PG de razão 1.

Uma pergunta interessante é: uma SAG pode ser uma seqüência constante? É claro que, se c for este valor constante, isto ocorrerá se e só se: $c = qc + r$, ou seja: $c = \frac{r}{1-q}$.

Vamos agora determinar uma expressão explícita para o termo geral de uma SAG em função de n. Para isto, consideremos duas SAGs quaisquer, de termos gerais, respectivamente, a_n e b_n, que tenham a mesma razão aritmética r e a mesma razão geométrica q, e consideremos a sua diferença $d_n = a_n - b_n$. Como $a_n = q\,a_{n-1} + r$ e $b_n = q\,b_{n-1} + r$, então $d_n = a_n - b_n = q\,(a_{n-1} - b_{n-1}) = q\,d_{n-1}$. Mas isto mostra que (d_n) é uma PG de razão q e, portanto: $d_n = d_1\,q^{n-1}$, ou seja: $a_n - b_n = (a_1 - b_1)q^{n-1}$, ou ainda: $a_n = b_n + (a_1 - b_1)q^{n-1}$. Como a_n e b_n eram SAGs quaisquer, esta fórmula indica como qualquer SAG pode ser obtida de outra que tenha a mesma razão aritmética e a mesma razão geométrica q, podemos tomar b_n constante e igual a $\frac{r}{1-q}$, obtendo: $a_n = \frac{r}{1-q} + \left(a_1 - \frac{r}{1-q}\right)q^{n-1}$,

que é a expressão que se procurava para a_n.

Por exemplo, no caso da Torre de Hanói, $a_n = 2a_{n-1} + 1$, com $a_1 = 1$. Portanto:

$$\frac{1}{1-2} + \left(1 - \frac{1}{1-2}\right)2^{n-1} = 2^n - 1.$$

Vale a pena acrescentar que, se a SAG tiver uma infinidade de termos e $|q| < 1$, então q^{n-1} tende a zero, quando n tende a infinito. Portanto, a_n tende a $\frac{r}{1-q}$.

Por exemplo: a seqüência infinita definida por: $a_n = \frac{2 + a_{n-1}}{5}$, com $a_1 = 1$ tem termos: $1; \frac{3}{5}; \frac{13}{25}; \frac{63}{125}; \ldots$, ou, em decimais: 1,000; 0,600; 0,520; 0,504;….

Como $a_n = \frac{1}{5}a_{n-1} + \frac{2}{5}$, esta seqüência é uma SAG com $r = \frac{2}{5}$ e $q = \frac{1}{5}$, de modo que seu termo geral é $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{5^{n-1}}$, e o seu limite é $\frac{1}{2} = 0{,}5$.

B) **Seqüências Aritmético-Geométricas (à la Gugu)**

Na seção anterior definimos seqüências aritmético-geométricas (à la Zé Paulo) generalizando as recorrências de PA's e PG's. Vamos adotar agora um ponto de vista alternativo, generalizando a fórmula do termo geral de PA's e PG's.

Lembremos que em uma PA de termo inicial $a_0 = a$ e razão r temos $a_n = a + nr$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e numa PG de termo inicial $a_0 = a$ e razão q, temos $a_n = aq^n$. Fazemos, inspirados nessas fórmulas, a seguinte definição:

Definição: Uma progressão Aritmético-Geométrica (PAG) (à la Gugu) é uma seqüência (a_n) cujo termo geral satisfaz a fórmula $a_n = (a + nr)q^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Note que se $r = 0$ nossa PAG é uma PG, e se $q = 1$ nossa PAG é uma PA.
É interessante obter uma fórmula para a soma dos n primeiros termos de uma PAG ($s_n = \sum_{j=0}^{n-1} a_n$), a qual generalizaria as fórmulas para a soma dos n primeiros termos de PG's (a princípio generalizaria também de PA's, mas suporemos $q \neq 1$. Se fizermos q tender a 1 a fórmula tenderá à fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PA).
Temos $s_n = \sum_{j=0}^{n-1}(a+jr)q^j$. Então $\frac{s_n - a}{q} = \sum_{j=1}^{n-1}(a+jr)q^{j-1} = \sum_{\ell=0}^{n-2}(a+(\ell+1)r)q^\ell =$

$$= \sum_{\ell=0}^{n-2} rq^\ell + \sum_{\ell=0}^{n-2}(a+\ell r)q^\ell = r\frac{(q^{n-1}-1)}{q-1} + s_n - (a+(n-1)r)q^{n-1} \quad \text{e, portanto,}$$

$$s_n\left(\frac{q-1}{q}\right) = (a+(n-1)r)q^{n-1} - \frac{a}{q} - r\frac{(q^{n-1}-1)}{q-1} \Rightarrow s_n = \frac{q}{q-1}\left((a+(n-1)r - \frac{r}{q-1})q^{n-1} - \frac{a}{q} + \frac{r}{q-1}\right) =$$

$$= \frac{q}{q-1}\left(a + nr - \frac{qr}{q-1}\right)q^{n-1} + \frac{(r-a)q+a}{(q-1)^2}.$$

Note que se $r = 0$ a expressão acima se reduz a $\frac{aq^n}{q-1} + \frac{a\cdot(1-q)}{(q-1)^2} = \frac{a(q^n - 1)}{q-1}$, que é a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG.
Notemos finalmente que SAG's e PAG's satisfazem recorrências lineares homogêneas (ver [1]): Para SAG's, temos $a_{n+2} - qa_{n+1} = r = a_{n+1} - qa_n$, logo $a_{n+2} = (q+1)a_{n+1} - qa_n$, e para PAG's, notamos que se $b_n = a_n / q^n$, temos $b_n = a + nr$, e $b_{n+2} - b_{n+1} = r = b_{n+1} - b_n \Rightarrow b_{n+2} = 2b_{n+1} - b_n \Rightarrow \frac{a_{n+2}}{q^{n+2}} = \frac{2a_{n-1}}{q^{n+1}} - \frac{a_n}{q^n} \Rightarrow a_{n+2} =$ $= 2qa_{n+1} - q^2a_n$. Os polinômios característicos dessas recorrências são respectivamente $x^2 - (q+1)x + q = (x-q)(x-1)$ e $x^2 - 2qx + q^2 = (x-q)^2$.

Referência:

[1] Héctor Soza Pollman, Equações de Recorrência, Eureka! N°. 9, pp. 33-40.
[2] Carlos Yuzo Shine, A torre de Hanói, Eureka! N°. 11, pp. 17-23.

O PRINCÍPIO DA INVARIÂNCIA

Marcelo Rufino de Oliveira, Belém – PA

Artigo baseado em aula ministrada no II Teorema, Fortaleza – CE

♦ Nível Intermediário.

Uma das principais estratégias para resolução de problemas de olimpíadas é a procura por invariantes. O fundamento do Princípio da Invariância é simples: busca pelo que se mantém constante quando uma operação permitida é realizada. Entre as principais formas de invariantes destacam-se três, que serão apresentadas a seguir através de exemplos resolvidos.

1. Expressões ou Valores Numéricos Invariantes

Exemplo 1.1: Começando com o conjunto {3, 4, 12}, é permitido apagar dois números a e b e escrever em seus lugares $0{,}6.a - 0{,}8.b$ e $0{,}8.a + 0{,}6.b$. É possível chegar ao conjunto {4, 6, 12}?

Resolução:
Repare que $(0{,}6.a - 0{,}8.b)^2 + (0{,}8.a + 0{,}6.b)^2 = a^2 + b^2$, implicando que a soma dos quadrados dos números dos conjuntos obtidos é invariante. Como $3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$ e $4^2 + 6^2 + 12^2 = 14^2$ então não é possível chegar ao conjunto {4, 6, 12}.

Exemplo 1.2: (Maio-99) Em cada um dos 10 degraus de uma escada existe uma rã. Cada rã pode, de um pulo, colocar-se em outro degrau, mas quando uma rã faz isso, ao mesmo tempo, uma outra rã pulará a mesma quantidade de degraus em sentido contrário: uma sobe e outra desce. Conseguirão as rãs colocar-se todas juntas num mesmo degrau?

Resolução:
Numeremos os degraus de 1 a 10 e associemos a cada rã o número do degrau que ocupam. O somatório inicial destes valores é $S = 1 + 2 + \ldots + 10 = 55$.
Perceba agora que este somatório é invariante, pois quando uma rã sobe uma certa quantidade x de degraus, temos outra rã que desce x, fazendo com que a soma das numerações destas duas rãs não se altere. Caso todas as rãs ocupem um mesmo degrau (digamos y), então todas as suas numerações são iguais a deste degrau, ou seja, teremos $10y = 55$, que não possui solução inteira. Deste modo, é impossível que todas as rãs ocupem um mesmo degrau.

Exemplo 1.3: As seguintes operações são permitidas com a equação quadrática $ax^2 + bx + c$: a) trocar a e c; b) trocar x por $x + t$, onde t é um número real. Repetindo estas transformações é possível transformar $x^2 - x - 2$ em $x^2 - x - 1$?

Resolução:
Mostraremos que é invariante o valor do discriminante de todas as equações obtidas pela aplicação das operações permitidas.
Inicialmente temos $\Delta_0 = b^2 - 4ac$.
Aplicando a primeira operação: $ax^2 + bx + c \rightarrow cx^2 + bx + a$ (1)
Para esta equação temos $\Delta_1 = b^2 - 4ca = \Delta_0$
Aplicando a segunda operação:
$ax^2 + bx + c \rightarrow a(x + t)^2 + b(x + t) + c = ax^2 + (b + 2at)x + at^2 + bt + c$ (2)
$\Delta_2 = (b + 2at)^2 - 4a(at^2 + bt + c) = b^2 + 4abt + 4a^2t^2 - 4a^2t^2 - 4abt - 4ac \Rightarrow$
$\Delta_2 = b^2 - 4ac = \Delta_0 = \Delta_1$
Como o discriminante de $x^2 - x - 2$ é 9 e o discriminante de $x^2 - x - 1$ é 5, a transformação é impossível.

2. Restos de Divisões Invariantes

Exemplo 2.1: (Torneio das Cidades-85) Todo membro de uma seqüência, iniciando do segundo, é igual a soma entre o termo precedente e a soma dos seus dígitos. O primeiro número é 1. É possível que 123456 pertença à seqüência?

Resolução:
Perceba que: $a_2 = 2 = 3.0 + 2$ $a_3 = 4 = 3.1 + 1$ $a_4 = 8 = 3.2 + 2$
$a_5 = 16 = 3.5 + 1$ $a_6 = 23 = 3.7 + 2$ $a_7 = 28 = 3.9 + 1$ ...
Aparentemente os restos da divisão por 3 dos termos são alternadamente 1 e 2. Vamos demonstrar isto. Seja $S(n)$ a soma dos dígitos de n. Sabemos que n e $S(n)$ deixam o mesmo resto na divisão por 3:
i) Se $a_n = 3k_1 + 1 \Rightarrow a_{n+1} = a_n + S(a_n) = 3k_1 + 1 + 3k_2 + 1 = 3k_3 + 2$.
ii) Se $a_n = 3k_1 + 2 \Rightarrow a_{n+1} = a_n + \mathrm{S}(a_n) = 3k_1 + 2 + 3k_2 + 2 = 3k_3 + 1$.
Deste modo, se n é par então $a_n = 3k + 2$ e se n é ímpar então $a_n = 3k + 1$ (invariante). Como 123456 é divisível por 3 então não pertence à seqüência.

Exemplo 2.2: (Leningrado-85) Três cangurus estão alinhados em uma estrada. A cada segundo um dos cangurus salta. É permitido que um canguru salte por cima de um outro canguru, mas não de dois cangurus de uma só vez. Prove que depois de 1985 segundos, os cangurus não podem voltar a ocupar a posição relativa inicial.

Resolução:

Existem seis posições para os cangurus: **123** 132 **312** 321 **231** 213

Note que as posições sublinhadas somente podem ser alcançadas através de um posição anterior em **negrito** e vice-versa (invariante). Assim, depois de um número ímpar de pulos somente as posições sublinhadas (132, 321 e 213) podem ser alcançadas, fazendo com que depois de 1985 pulos não seja possível que os cangurus voltem a ocupar a posição inicial (**123**).

Exemplo 2.3: (Pará-2001) Um tabuleiro 4x4 possui, inicialmente, todas as casas pintadas de branco. Uma operação permitida é escolher um retângulo consistindo de 3 casas e pintar cada uma das casas da seguinte forma:

– se a casa é branca então pinta-se de preto;

– se a casa é preta então pinta-se de branco.

Prove que, aplicando várias vezes a operação permitida, é impossível conseguirmos que todo o tabuleiro fique pintado de preto.

Resolução:

Distribuimos as letras a, b e c no tabuleiro da seguinte forma:

a	***b***	***c***	***a***
c	***a***	***b***	***c***
b	***c***	***a***	***b***
a	***b***	***c***	***a***

Note que as letras estão alternadas tanto nas linhas quanto nas colunas. Esta alternância faz com que toda vez que um retângulo com 3 casas seja selecionado, então exatamente uma letra a, uma letra b e uma letra c são selecionadas.

Sejam: A a quantidade de casas brancas com a letra a, B a quantidade de casas brancas com a letra b e C a quantidade de casas brancas com a letra c. No início temos: $A = 6$ $B = 5$ $C = 5$. Toda vez que selecionamos um retângulo formado de três casas, estamos somando a cada valor de A, B e C os valores + 1 ou – 1. Perceba que se todas casas ficarem pretas, então teremos $A = 0$, $B = 0$ e $C = 0$. Entretanto, note que iniciando de $A = 6$, $B = 5$ e $C = 5$, e alterando simultaneamente por + 1 ou – 1 estes valores, sempre teremos entre os valores de A, B e C dois números ímpares e um par ou dois pares e um ímpar (invariante), fazendo com que a situação $A = 0$, $B = 0$ e $C = 0$ seja impossível.

Exemplo 2.4: (OBM Jr.-95) Temos um tabuleiro 1995×1995. A cada uma de suas 1995^2 casas associamos um dos números + 1 ou – 1. Em seguida, associamos a cada

linha o produto dos números das casas desta linha, e a cada coluna o produto dos números das casas de cada coluna.
i) Se T é a soma dos números associados às linhas, colunas e casas, prove que T é diferente de 0.
ii) Se S é a soma dos números associados às linhas e às colunas, prove que S é diferente de 0.

Resolução:
i) Como temos 1995 colunas e 1995 linhas, então as somas dos números associados às linhas e colunas são números ímpares, pois são soma ou subtração de 1995 números ímpares. Em relação às casas temos o mesmo raciocínio, pois são ao todo 1995^2 casas, cujo valor de cada casa pode ser igual a 1 ou – 1. Somando todos estes valores teremos também um valor ímpar. Assim, T é a soma de três valores ímpares, sendo também ímpar, nunca podendo assumir o valor zero.
ii) Inicialmente notemos que qualquer disposição no tabuleiro pode ser alcançada partindo de uma configuração inicial na qual todas as casas possuem valor 1 e alterando-se os sinais desejados. Com o tabuleiro contendo somente 1's, temos que as somas das linhas e colunas é 1995, fazendo uma soma total de 3990, que obviamente é o maior valor possível. Quando trocamos um 1 por um – 1, notamos que as somas das linhas e colunas passam a ser 1993, fazendo $S = 3986$. Assim, fica evidente que uma alteração de um sinal em uma casa do tabuleiro altera o valor da soma da linha e da coluna a qual pertence esta casa em ± 2, e por conseqüência altera a soma total em 0 ou ± 4 (invariante).
Deste modo, a soma total pode ser escrita da forma $S = 3990 - 4k$.
Caso $S = 0$, teríamos $4k = 3990$, que não possui solução inteira, absurdo.

Exemplo 2.5: (Hong Kong-97) Cinco números 1, 2, 3, 4, 5 estão escritos em um quadro negro. Um estudante pode apagar dois dos números a e b no quadro e escrever os números $a + b$ e ab nos seus lugares. Se esta operação é repetida indefinidamente, podem os números 21, 27, 64, 180, 540 aparecer no quadro negro ao mesmo tempo?

Resolução:
Não é possível. Note que no início existe somente um número divisível por 3 e no final existem quatro números divisíveis por 3. Observemos o que acontece com os restos da divisão por 3 dos números no quadro quando fazemos uma operação:
i) se $a = 3x$ e $b = 3y \Rightarrow a + b = 3z$ e $ab = 3w$
ii) se $a = 3x + 1$ e $b = 3y \Rightarrow a + b = 3z + 1$ e $ab = 3w$
iii) se $a = 3x + 2$ e $b = 3y \Rightarrow a + b = 3z + 2$ e $ab = 3w$
iv) se $a = 3x + 1$ e $b = 3y + 1 \Rightarrow a + b = 3z + 2$ e $ab = 3w + 1$

v) se $a = 3x + 1$ e $b = 3y + 2 \Rightarrow a + b = 3z$ e $ab = 3w + 2$
vi) se $a = 3x + 2$ e $b = 3y + 2 \Rightarrow a + b = 3z + 1$ e $ab = 3w + 1$
Portanto, a única forma de aumentar os divisíveis por 3 é escolher $a = 3x + 1$ e $b = 3y + 2$. Consequentemente também acrescentamos um número da forma $3k + 2$. Por outro lado, na situação final o único número que não é divisível por 3 é 64, que é da forma $3k + 1$, contradição, pois este número deveria ser da forma $3k + 2$ (O caso *iii*) mostra que sempre haverá um número da forma $3k + 2$ após termos 4 deles da forma $3k$).

3. Tendências de Crescimento ou Decrescimento Invariantes

Exemplo 3.1: Um total de 2000 pessoas estão divididas entre os 115 quartos de uma mansão. A cada minuto, até que todas não estejam em um mesmo quarto, uma pessoa anda para um quarto com um número igual ou maior de pessoas do que o quarto que ocupava. Prove que eventualmente todas as pessoas vão estar em um mesmo quarto.

Resolução:
Seja a_i a quantidade de pessoas no quarto i, $1 \le i \le 115$.
Considere a expressão $I = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{115}^2$.
Digamos que uma pessoa sai de um quarto que possui n pessoas e vai para um quarto que possui m pessoas ($m \ge n$). A variação de I é:
$\Delta I = ((m + 1)^2 + (n - 1)^2) - (m^2 + n^2) = 2(m - n + 1) > 0$
Assim, toda vez que uma pessoa troca de quarto o valor de I cresce (tendência de crescimento invariante). Entretanto note que o valor de I não pode crescer indefinidamente, uma vez que o número total de pessoas é finito, implicando que uma hora todas as pessoas estarão em um mesmo quarto.

Exemplo 3.2: (2^a Lista de Preparação para a Cone Sul-2001) Existem inicialmente n números 1 em um quadro negro. Em cada passo é permitido apagar quaisquer dois números a e b e escrever o número $\dfrac{ab\sqrt{2}}{a+b}$. Esta operação é feita $n - 1$ vezes. Prove que o último número não é menor que $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Resolução:
Suponha que depois de k operações temos os seguintes números escritos no quadro: $a_1, a_2, \ldots, a_{n-k}$. Considere a expressão $I_k = \dfrac{1}{a_1^2} + \dfrac{1}{a_2^2} + \ldots + \dfrac{1}{a_{n-k}^2}$.

Depois de uma operação a variação de I vale:

$$\Delta I = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2ab}}\right)^2 - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \quad \Rightarrow \quad \Delta \mathrm{I} = \frac{1}{ab} - \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2b^2}$$

Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica:

$$\frac{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{a^2}\frac{1}{b^2}} = \frac{1}{ab} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{ab} - \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2b^2} \leq 0$$

Desta forma $\Delta I \leq 0$, ou seja, I nunca cresce.

Como $I_0 = n$ e $I_{n-1} = \dfrac{1}{a_1^2}$ então $I_{n-1} \leq I_0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{a_1^2} \leq n \quad \Rightarrow \quad a_1 \geq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Exemplo 3.3: (St. Petersburg-96) Vários inteiros positivos distintos estão escritos em um quadro negro. Uma operação permitida é apagar dois inteiros distintos e escrever em seus lugares o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum destes números. Prove que, depois da aplicação de operações permitidas várias vezes, os números eventualmente vão parar de mudar.

Resolução:

Suponha que a e b ($a > b$) são dois números escritos no quadro. Sejam

D = mdc (a, b) e L = mmc (a, b). Consequentemente: $D < a$, $D \leq b$, $L \geq a$, $L > b$.

Como $ab = DL \quad \Rightarrow \quad ab + b^2 = DL + b^2 \quad (1)$

Como $(L - b)(D - b) \leq 0 \ \Rightarrow \ DL - Lb - bD + b^2 \leq 0 \ \Rightarrow$

$DL + b^2 \leq bL + bD \quad (2)$

Aplicando (2) em (1): $ab + b^2 \leq bL + bD \quad \Rightarrow \quad a + b \leq D + L \quad (3)$

Assim, a soma S dos números escritos no quadro nunca decresce. Repare também que a igualdade em (3) implica $(L - b)(D - b) = 0$, ou seja, $D = b \quad \Rightarrow \quad L = a$.

Por outro lado, como mdc $(x_1, x_2, ..., x_m) \leq$ mmc $(x_1, x_2, ..., x_m) \leq x_1x_2...x_m$, então, depois de um número qualquer de operações realizadas, cada número no quadro é menor ou igual que o produto de todos os números inicialmente escritos. Portanto, S é menor ou igual a n vezes o produto dos números inicialmente escritos. Como pode-se fazer um número infinito de operações e S possui ao mesmo tempo as propriedades de ser limitada e nunca decrescer, então a partir de um certo momento S fica constante, fazendo com que $D = b$ e $L = a$, implicando que eventualmente os números vão parar de mudar.

Exercícios:

01. Um círculo é dividido em seis setores. Os números 1, 0, 1, 0, 0, 0 são escritos em sentido horário. É permitido aumentar em 1 dois números vizinhos. É possível que em algum momento todos os números sejam iguais?

02. Divide-se um círculo em 10 setores e coloca-se uma ficha em cada setor. Um movimento consiste em selecionar duas fichas e mover cada uma para um setor adjacente. Prove que, depois de uma seqüência arbitrária de movimentos, é impossível que todas as fichas localizem-se em um mesmo setor.

03. (Rio Grande do Norte-99) A professora desafia André e Thiago com o seguinte jogo, em que eles jogam alternadamente. Ela escreve no quadro-negro os inteiros de 1 a 50. Uma jogada consiste em escolher dois dos números escritos, apagar esses números, substituindo-os pela soma (Por exemplo, se André escolheu 8 e 23, apaga-os e escreve 31). Depois de algum tempo, vai restar no quadro negro um único número. Se esse número é par, o ganhador é André, caso contrário, o ganhador é Thiago. Quem vence o jogo: André ou Thiago?

04. (Torneio das Cidades-93) Três pilhas de caroços são dadas sobre uma mesa. É permitido adicionar ou remover de uma pilha um número de caroços que é igual a soma do número de caroços das outras duas pilhas. Por exemplo [12, 3, 5] pode tornar-se [12, 20, 5] pela adição de 17 = 12 + 5 para a pilha de 3 ou tornar-se [4, 3, 5] pela remoção de 8 = 3 + 5 caroços da pilha com 12. É possível, iniciando com pilhas possuindo 1993, 199 e 19 caroços, conseguir uma pilha vazia depois de uma seqüência de operações permitidas?

05. (Torneio das Cidades-85) Na ilha de Camelot vivem 13 camaleões roxos, 15 verdes e 17 amarelos. Quando dois de cores distintas se encontram, mudam simultaneamente para a terceira cor. Poderia dar-se a situação na qual todos tenham a mesma cor?

06. (Rússia-78) São dadas 3 máquinas que produzem cartões com pares de números naturais. A primeira, sendo dado o cartão com (a, b), produz um novo cartão com $(a + 1, b + 1)$; a segunda, sendo dado o cartão com (a, b), produz novo cartão com $(a/2, b/2)$, se ambos a e b são pares e nada no caso oposto e a terceira máquina, sendo dados os cartões (a, b) e (b, c), produz um novo cartão com (a, c). Todas as máquinas retornam também os cartões iniciais. Suponha que foi dado o cartão inicial (5, 19). É possível obter:
a) (1, 50)?

b) (1, 100)?
c) Suponha que foi dado o cartão inicial (a, b) ($a < b$). Nós queremos obter o cartão (1, n). Para quais n isto é possível?

07. Em um quadro negro estão escritos n números. A cada minuto apaga-se dois números a e b e escreve-se o número $(a + b)/4$. Repetindo esta operação n – 1 vezes, existirá somente um número no final. Prove que se inicialmente existirem n 1's no quadro, então o último número não é menor que 1/n.

08. (Leningrado-89) Vários (mas não menos que 2) números não nulos são escritos em um quadro negro. É possível apagar dois dos números, A e B, e então escrever nos seus lugares os números $A + B/2$ e $B – A/2$. Prove que o conjunto de números no quadro negro, depois de um número qualquer de operações, não pode coincidir com o conjunto inicial.

09. (2ª Lista de Preparação para a Cone Sul-96) 119 anões vivem em uma aldeia com 120 pequenas casas. Uma casa é dita super-habitada se 15 anões ou mais vivem lá. Todo dia, os anões de uma casa super-habitada têm uma discussão e se mudam para outras (distintas) casas da aldeia. Algum dia, necessariamente, esse processo se encerrará?

Bibliografia:

[1] A. Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer-Verlag, 1998.
[2] P. J. Taylor, *Tournament of the Towns 1984-1989*, Australian International Centre for Mathematics Enrichment, 1992.
[3] D. Fomin, A. Kirichenko, *Leningrad Mathematical Olympiads 1987-1991*, MathPro Press, 1994.

XXII TORNEIO DAS CIDADES
Primavera 2001 – Nível O – Júnior

PROBLEMA 1
O número natural n pode ser trocado por ab se $a + b = n$, onde a e b também são números naturais. O número 2001 pode ser obtido a partir de 22 através destas trocas?

PROBLEMA 2
Um dos segmentos que liga os pontos médios dos lados de um triângulo é maior que uma das medianas do triângulo. Prove que o triângulo é obtusângulo.

PROBLEMA 3
Vinte quilogramas de queijo estão à venda em uma mercearia e os fregueses estão em fila para comprar esse queijo. Após algum tempo, tendo acabado de atender um dos fregueses, a vendedora calcula (corretamente) a quantidade total de queijo já vendida e anuncia o número de fregueses para os quais há queijo, na quantia exata, se cada freguês comprar uma porção cuja massa é exatamente igual a quantidade média comprada pelos anteriores.
Pode ocorrer de a vendedora poder declarar, após cada um dos 10 primeiros fregueses ter feito sua compra, que há queijo na quantia exata para os próximos 10? Se isso puder ocorrer, quanto queijo haverá ainda na mercearia após os primeiros 10 fregueses terem feito suas compras?
(A quantidade média de uma seqüência de compras é a massa total de queijo vendida dividida pelo número de vendas.)

PROBLEMA 4
a) Há 5 triângulos de papel idênticos sobre uma mesa. Cada um pode ser transladado em qualquer direção. É verdade, então, que qualquer um deles pode ser coberto pelos outros 4?
b) Há 5 triângulos equiláteros de papel idênticos sobre uma mesa. Cada um pode ser transladado em qualquer direção. Prove que, então, qualquer um deles pode ser coberto pelos outros 4.

PROBLEMA 5
Sobre um tabuleiro 15×15 são colocados quinze cavalos de modo que em cada fileira (linha ou coluna) do tabuleiro haja exatamente um cavalo. Então, simultaneamente, cada cavalo faz um movimento segundo as regras do xadrez.
Prove que após os movimentos haverá dois cavalos em uma mesma fileira do tabuleiro.

Primavera 2001 – Nível O – Sênior

PROBLEMA 1

Um ônibus que percorre um trajeto de 100 km é equipado com um computador, que prevê quanto tempo falta para chegar ao destino final. Esta previsão é feita assumindo que a velocidade média do ônibus na parte restante do trajeto será a mesma da parte já percorrida. Quarenta minutos após a partida do ônibus, o computador previu que o tempo restante de viagem seria de uma hora. E este tempo previsto permaneceu inalterado pelas próximas 5 horas.

Isso pode de fato ocorrer? Caso possa, quantos quilômetros o ônibus percorreu nestas 5 horas?
(A velocidade média do ônibus é o número de quilômetros percorridos dividido pelo tempo gasto para percorrê-los.)

PROBLEMA 2

A representação decimal do número natural a consiste de n dígitos, enquanto que a representação decimal de a^3 consiste de m dígitos. Pode $n + m$ ser igual a 2001?

PROBLEMA 3

No triângulo ABC o ponto X está sobre o lado AB, enquanto o ponto Y está sobre o lado BC. Os segmentos AY e CX interceptam-se no ponto Z. Sabe-se que $AY = YC$ e $AB = ZC$. Prove que os pontos B, X, Z e Y estão sobre uma circunferência.

PROBLEMA 4

Duas pessoas jogam sobre um tabuleiro 3×100. Elas jogam alternadamente: a primeira coloca dominós 1×2 sobre o tabuleiro, a segunda coloca dominós 2×1. A perdedora é aquela que, na sua vez, não puder colocar dominó.
Qual dos dois jogadores têm estratégia vencedora? Descreva-a.

PROBLEMA 5

Nove pontos são desenhados sobre a superfície de um tetraedro regular de aresta 1 cm. Prove que entre estes pontos existem dois cuja distância (no espaço) é menor ou igual a 0.5 cm.

XXIII TORNEIO DAS CIDADES
Outono 2002 – Nível O – Júnior

PROBLEMA 1
É dado um número suficientemente grande de cartões retangulares a cm $\times$ b cm, onde a e b são inteiros positivos e a é menor do que b. Sabe-se que com esses cartões podemos montar (sem sobrepor cartões e sem buracos) um retângulo 49 cm $\times$ 51 cm e um 99 cm $\times$ 101 cm.
Os valores de a e b estão determinados unicamente a partir desses dados?

PROBLEMA 2
Dado um triângulo qualquer, é possível cortá-lo em quatro conjuntos convexos: um triângulo, um quadrilátero, um pentágono e um hexágono?

PROBLEMA 3
O número $x^2 + xy + y^2$, no qual x e y são inteiros positivos, escrito na notação decimal termina em zero. Prove que ele termina em pelo menos dois zeros.

PROBLEMA 4
Os lados AB, BC, CD e DA do quadrilátero $ABCD$ são tangentes a uma circunferência nos pontos K, L, M e N, respectivamente; S é o ponto de intersecção dos segmentos KM e LN. Sabe-se que o quadrilátero $SKLB$ é inscritível.
Prove que o quadrilátero $SNDM$ também é inscritível.

PROBLEMA 5
a) São dadas 128 moedas de duas massas distintas, 64 de cada tipo. Como obter duas moedas de massas distintas fazendo não mais de 7 pesagens um uma balança com dois braços (e sem pesos auxiliares)?

b) São dadas oito moedas de duas massas distintas, 4 de cada tipo. Como obter duas moedas de massas distintas fazendo não mais de duas pesagens em uma balança com dois braços (e sem pesos auxiliares)?

Outono 2002 – Nível A – Júnior

PROBLEMA 1
Sejam *a*, *b*, e *c* as medidas dos lados de um triângulo. Prove a desigualdade

$$a^3 + b^3 + 3abc > c^3$$

PROBLEMA 2
Quatro peças (duas brancas e duas pretas) são colocadas em um tabuleiro quadriculado 23×23: as peças brancas são colocadas no canto superior esquerdo e no canto inferior direito; as peças pretas são colocadas no canto inferior esquerdo e no canto superior direito. As brancas e pretas se movem alternadamente, sendo que as brancas começam. Em cada movimento, uma peça é movida para qualquer casa vizinha (isto é, que tem uma lado em comum) que não tenha peça. O objetivo das peças brancas é ocupar duas casas vizinhas. As pretas podem evitar que isso aconteça?

PROBLEMA 3
Sejam E e F os pontos médios dos lados BC e CD, respectivamente, do quadrilátero convexo $ABCD$. Os segmentos AE, AF e EF dividem o quadrilátero em 4 triângulos cujas áreas (em alguma ordem) são inteiros positivos consecutivos.
Qual é a maior área que o triângulo ABC pode ter?

PROBLEMA 4
N lâmpadas estão enfileiradas. Inicialmente, algumas delas estão acesas. A cada minuto, todas as lâmpadas acesas são apagadas e acendemos cada lâmpada apagada que for vizinha a exatamente uma lâmpada que estava acesa. Para que valores de n é possível escolher uma configuração inicial de lâmpadas de modo que em qualquer momento pelo menos uma lâmpada esteja acessa?

PROBLEMA 5
Um triângulo acutângulo é cortado por uma reta em dois pedaços (não necessariamente triangulares). Em seguida, um dos pedaços é cortado por uma reta em dois pedaços, e assim por diante: a cada passo um dos pedaços obtido em qualquer passo anterior é escolhido e cortado por uma reta em dois novos pedaços. Após um certo número de passos, todos os pedaços são triangulares. É possível que todos tenham um ângulo obtuso?

PROBLEMA 6

Em uma seqüência crescente de inteiros positivos, cada termo, a partir do 2002-ésimo, divide a soma de todos os termos anteriores. Prove que cada termo da seqüência, a partir de um certo ponto, é igual à soma de todos os anteriores.

PROBLEMA 7

Dada uma cadeia de dominós, montada de acordo com as regras usuais, é permitida a seguinte operação: escolha uma subcadeia contida nela cujas extremidades são iguais (têm o mesmo número de pontos marcados), retire-a, inverta sua ordem e recoloque. Mostre que, dadas duas cadeias montadas a partir de um mesmo conjunto de dominós e com extremidades respectivamente iguais (isto é, os inícios são iguais entre si, bem como os finais), é possível transformar, através de uma seqüência de operações como a descrita, uma das cadeias na outra.

OLIMPÍADAS AO REDOR DO MUNDO

Como sempre acontece no período em que é realizada a maior parte das competições internacionais o comitê editorial da revista EUREKA! se preocupa em mostrar as resoluções das competições nacionais dos anos anteriores para o treinamento dos nossos atuais e futuros competidores. Por isto, estivemos ausentes da edição anterior.

Continuamos a disposição na OBM para aqueles que estiverem interessados na solução de algum problema particular. Para tanto, basta contactar a OBM, através de carta ou e-mail.

Antonio Luiz Santos

151. (Irlanda-2001) Seja ABC um triângulo de lados BC, CA, AB cujas medidas são respectivamente iguais a a, b, c. Se D e E são os pontos médios de AC e AB respectivamente, mostre que a mediana BD é perpendicular a CE se, e somente se, $b^2 + c^2 = 5a^2$.

152. (Irlanda-2001) Mostre que se um número primo ímpar p pode ser colocado sob a forma $x^5 - y^5$ para alguns inteiros x e y então

$$\sqrt{\frac{4p+1}{5}} = \frac{v^2+1}{2}$$

para algum inteiro ímpar v.

153. (Irlanda-2001) Determine os números reais x não negativos para os quais

$$\sqrt[3]{13+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{13-\sqrt{x}}$$

é um número inteiro.

154. (Irlanda-2001) Determine todas as funções $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que satisfazem

$$f(x + f(y)) = f(x) + y, \forall x, y \in \mathrm{N}.$$

155. (Rússia-2001) Os números de 1 a 999 999 são divididos em dois grupos: no primeiro, cada número nele colocado é tal que o quadrado perfeito mais próximo dele é o quadrado de um número ímpar. No segundo, os números estão mais próximos de quadrados perfeitos de números pares. Determine em qual dos grupos a soma dos números a ele pertencentes é maior.

156. (Rússia-2001) Sobre o maior lado AC de um triângulo ABC, toma-se um ponto N de modo que as mediatrizes dos segmentos AN e NC intersectam os lados AB e BC nos pontos K e M, respectivamente. Prove que o circuncentro O do triângulo ABC pertence ao círculo circunscrito ao triângulo KBM.

157. (Rússia-2001) Dois círculos são tangentes internamente no ponto N. Uma tangente traçada de um ponto K do círculo interno intersecta o círculo externo nos pontos A e B. Se M é o ponto médio do arco AB que não contém o ponto N, mostre que o raio do círculo circunscrito ao triângulo BMK não depende da escolha do ponto K do círculo interior.

158. (Rússia-2001) A seqüência (x_n) é tal que $x_1 = 1$, $x_{n+1} = n \cdot sen\, x_n + 1$. Mostre que esta seqüência não é periódica.

159. (Eslovênia-2001) Sejam a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 números reais distintos. Denotando por m o número de valores distintos das somas $a_i + a_j$, onde $1 \le i \le j \le 5$, determine o menor valor possível de m.

160. (Eslovênia-2001) Sejam a, b, c, d, e e f números reais positivos tais que a seqüência (a, b, c, d) seja aritmética e a seqüência (a, e, f, d) seja geométrica. Mostre que $bc \ge ef$.

161. (Eslovênia-2001) Seja D o pé da altura relativa ao lado BC do triângulo ABC. Sabendo que a bissetriz interna do ângulo $\angle C$ intersecta o lado oposto no ponto E e que $\angle CEA = \dfrac{\pi}{4}$, determine a medida do ângulo $\angle EDB$.

162. (Eslovênia-2001) (a) Mostre que a desigualdade

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

é verdadeira para todo inteiro positivo n.

(b) Mostre que a parte inteira da expressão

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{m^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{m^2}}$$

onde m é um inteiro positivo é igual a $2m-2$ ou $2m-1$.

163. (Croácia-2001) Resolva a inequação

$$x^{1+\log_a x} > a^2 x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

164. (Croácia-2001) A partir dos pontos médios dos lados de um triângulo acutângulo são traçadas perpendiculares aos outros dois lados. Mostre que a área do hexágono definido por esses segmentos é igual à metade da área do triângulo.

165. (Croácia-2001) Determine todos os pares ordenados de números reais x, y que satisfazem à equação

$$\log_2\left[2\cos^2(xy) + \frac{1}{2\cos^2(xy)}\right] - 1 = -\left(y - \frac{1}{2}\right)^2$$

166. (Croácia-2001) Quatro esferas de raios iguais a R são mutuamente tangentes entre si. Determine o raio r da maior esfera que pode ser inserida entre elas.

167. (Bielorússia-2001) No gráfico da parábola $y = x^2$ no plano cartesiano marcamos os pontos A, B e C (com A entre B e C). No segmento BC marca-se o ponto N de modo que AN seja paralelo ao eixo das ordenadas. Se S_1 e S_2 são as áreas dos triângulos ABN e ACN, respectivamente, determine a medida do segmento *AN*.

168. (Bielorússia-2001) A comissão organizadora da *OBM* preparou algumas variantes de uma competição com 4 *problemas* cada uma. Duas variantes distintas podem conter um mesmo problema mas não mais do que um. Qual o menor número de problemas necessários para que a comissão organizadora prepare 10 variantes da competição?

169. (Bielorússia-2001) O quadrilátero $ABCD$ está inscrito num círculo S_1; um outro círculo S_2 passa pelo ponto D, pelo ponto O, de interseção das diagonais do quadrilátero, e intersecta AD e CD em M e N, respectivamente. Sabendo que OM e AB intersectam-se em R enquanto que ON e BC intersectam-se em T (R, T e A pertencem ao mesmo semiplano em relação a BC), mostre que O, R, T e B pertencem ao mesmo círculo.

170. (Bielorússia-2001) Determine o resto da divisão de

$$1!\cdot 5+2!\cdot 11+\cdots+k!\cdot\left(k^2+3k+1\right)+\cdots+200!\cdot 40601$$

por 2004.

171. (Inglaterra-2001) Determine todos os números naturais N de dois algarismos para os quais a soma dos algarismos de 10^N-N é divisível por 170.

172. (Inglaterra-2001) Um círculo S é interior a um círculo T e o tangencia no ponto A. De um ponto $P\neq A$ sobre T, traçam-se as cordas PQ e PT de T que tangenciam S em X e Y, respectivamente. Mostre que $\angle QAR=2\angle XAY$.

173. (Inglaterra-2001) Uma seqüência (a_n) é tal que $a_n=n+\left\langle\sqrt{n}\right\rangle$, onde n é um inteiro positivo e $\langle x\rangle$ é o inteiro mais próximo a x, sendo as metades arredondadas para cima se for necessário. Determine o menor inteiro k para os quais os termos $a_k, a_{k+1},\ldots,a_{k+2000}$ formam uma seqüência de 2001 inteiros consecutivos.

174. (Inglaterra-2001) As medidas dos lados de um triângulo são a,b,c e a medida do raio do círculo circunscrito ao triângulo é R. Mostre que o triângulo é retângulo se, e somente se, $a^2+b^2+c^2=8R^2$.

175. (Torneio das Cidades-2001) Diga se existem inteiros positivos $a_1<a_2<\ldots<a_{100}$ tais que para todo k, $2\le k<100$, o mínimo múltiplo comum de a_{k-1} e a_k é maior que o mínimo múltiplo comum de a_k e a_{k+1}.

176. (Torneio das Cidades-2001) Os vértices de um triângulo têm coordenadas (x_1,y_1), (x_2,y_2) e (x_3,y_3). Para quaisquer inteiros h e k, o triângulo cujos vértices têm coordenadas (x_1+h,y_1+k), (x_2+h,y_2+k) e (x_3+h,y_3+k) é disjunto do triângulo original.

(i) É possível que a área deste triângulo seja maior que $\dfrac{1}{2}$?

(ii) Qual a área máxima deste triângulo?

177. (Torneio das Cidades-2001) Sejam a e d inteiros positivos tais que, para qualquer inteiro positivo n, a expansão decimal de $a + nd$ contém um bloco de algarismos consecutivos igual à expansão decimal de n. Prove que d é uma potência de 10.

178. (Áustria-Polônia-2001) Determine o número de inteiros positivos a para os quais existem inteiros não negativos $x_0, x_1, ..., x_{2001}$ que satisfazem a

$$a^{x_0} = \sum_{k=1}^{2001} a^{x_k}$$

179. (Estônia-2001) Os ângulos de um $n - ágono$ convexo são $\alpha, 2\alpha, \dots, n\alpha$. Determine todos os valores possíveis de n e os valores correspondentes de α.

180. (Estônia-2000) Mostre que para todo inteiro $a > 1$, existe um número primo p tal que $1 + a + a^2 + \cdots + a^{p-1}$ é composto.

Acusamos o recebimento de soluções de problemas anteriores dos seguintes leitores de **EUREKA!**:. *No próximo número publicaremos algumas delas.*

Alessandra A. da Gama Gomes de A.	Rio de Janeiro – RJ	Prob. 119.
Anderson Torres	São Paulo – SP	Prob. 4, 16, 28, 31, 36, 46, 47, 53, 57, 59, 65,66, 68, 78, 80, 85, 88, 89, 95, 104, 109, 121, 123, 130,135,137, 145.
Bruno Borges de Souza Lima	Goiânia – GO	Prob. 102, 107, 147.
Bruno de Souza Ramos	Rio de Janeiro – RJ	Prob. 127, 128, 131, 132, 134, 138, 139, 143, 144.
Carlos José Amorim da Silva	Rio de Janeiro – RJ	Prob. 133, 138, 143.
Diego Alonso Teixeira	Santos – SP	Prob. 121.
Evandro Makiyama de Melo	São Paulo – SP	Prob. 51, 121, 123, 128, 131, 133, 135, 142, 147.
Filipe Rodrigues de Souza Moreira	Rio de Janeiro – RJ	Prob. 64, 121, 128, 131, 133, 135, 138, 145, 147.
Geraldo Perlino Jr.	Cotia – SP	Prob. 121, 122, 125 a 139, 141 a 144, 146 a 148.
Gibran Medeiros de Souza	Natal – RN	Prob. 138.
Helainy Ignácio de Almeida Torres	Rio de Janeiro – RJ	Prob. 135, 137, 147.
Helder Oliveira de Castro	Mogi das Cruzes – SP	Prob. 32, 57, 68, 69, 76, 87, 98, 121,127, 132, 138, 139.
Karla Detagne Santos	Rio de Janeiro – RJ	Prob. 128, 138.
Leonardo Freitas de Lima	Rio de Janeiro – RJ	Prob. 138.
Luiz Sérgio Carvalho de Mello	Rio de Janeiro – RJ	Prob. 8, 47, 69, 127, 128, 132, 143.
Marcelo Ribeiro de Souza	Rio de Janeiro – RJ	Prob. 121, 122, 124, 126, 127, 128, 130, 132, 133, 134, 138, 143, 147.
Marcelo Rufino de Oliveira	Belém – PA	Prob. 121 a 150.
Marcílio Miranda de Carvalho	Teresina – PI	Prob. 66, 87, 106.
Mauro Félix de Souza	Rio de Janeiro – RJ	Prob. 121, 128, 134.
Okakamo Matsubachi	São Paulo – SP	Prob. 130.
Raquel Teresa de Souza Gomes	Rio de Janeiro – RJ	Prob. 128, 133, 143.
Renato Francisco Lopes Mello	J. dos Guararapes – PE	Prob. 127, 132, 143.
Wallace Alves Martins	Rio de Janeiro – RJ	Prob. 121, 128, 130, 133, 138.

SOLUÇÕES DE PROBLEMAS PROPOSTOS

Publicamos aqui algumas das respostas enviadas por nossos leitores.

57) Dado n números reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfazendo as condições $x_1 + \ldots + x_n = 0$ e $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$, prove que existem i e j tais que $x_i x_j \le -\frac{1}{n}$.

SOLUÇÃO DE ZOROASTRO AZAMBUJA NETO (RIO DE JANEIRO – RJ):

Podemos supor que $x_1, \ldots, x_k \ge 0,\ x_{k+1}, \ldots, x_n < 0$.

Temos $\sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \sum_{j=k+1}^{n} x_j^2 = 1 = \frac{n-k}{n} + \frac{k}{n}$.

Assim, $\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \ge \frac{n-k}{n}$ ou $\sum_{j=k+1}^{n} x_j^2 \ge \frac{k}{n}$. Supomos sem perda de generalidade que $\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \ge \frac{n-k}{n}$ (o outro caso é análogo). Assim, se $x_i \le \varepsilon$ para $1 \le i \le k$, temos $\sum_{i=1}^{k} x_i \ge \frac{n-k}{\varepsilon n}$, pois $\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \le \varepsilon \sum_{i=1}^{k} x_i$. Como $\sum_{j=k+1}^{n} (-x_j) = \sum_{i=1}^{k} x_i$, temos $\sum_{j=k+1}^{n} (-x_j) \ge \frac{n-k}{\varepsilon n}$, donde existe $k+1 \le j_0 \le n$ com $-x_{j_0} \ge \frac{1}{\varepsilon n}$. Tomando $\varepsilon = \max_{1 \le i \le k} x_i$, temos que existe $i_0 \le k$ com $x_{i_0} = \varepsilon$, donde $-x_{i_0} x_{j_0} = \varepsilon(-x_{j_0}) \ge \frac{1}{n}$, e logo $x_{i_0} x_{j_0} \le -\frac{1}{n}$.

63) Prove que existem infinitos números naturais múltiplos de 5^{1000} sem nenhum 0 na representação decimal.

SOLUÇÃO DE EDUARDO CASAGRANDE STABEL (PORTO ALEGRE – RS):

Provaremos por indução que existe um número de k algarismos, todos diferentes de 0 (zero), divisível por 5^k. Para $k = 1$, tome $a_1 = 5$; para $k = 2$, tome $a_2a_1 = 25$. Agora suponhamos que seja $n = a_{k-1}a_{k-2}\ldots a_2a_1$ divisível por 5^{k-1}.

Temos $\dfrac{a_k a_{k-1}...a_2 a_1}{5^{k-1}} = \dfrac{a_k 10^{k-1} + a_{k-1}...a_2 a_1}{5^{k-1}} = a_k 2^{k-1} + \dfrac{n}{5^{k-1}}$. É preciso que $a_k 2^{k-1} + \dfrac{n}{5^{k-1}} \equiv 0$ módulo 5 para que $a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1$ seja múltiplo de 5^k. A equação é equivalente a $a_k \equiv a_k 2^{k-1} 3^{k-1} \equiv -\dfrac{n}{5^{k-1}} 3^{k-1}$ módulo 5.

Podemos escolher um tal a_k no conjunto {1, 2, 3, 4, 5}, pois aí temos um conjunto de restos da divisão por 5. Para concluir, basta tomar $k = 1000, 1001, 1002, \ldots$

64) Iniciando de um certo inteiro positivo, é permitido fazer apenas uma operação: o dígito das unidades é separado e multiplicado por 4, e então este valor é somado ao restante do número. Por exemplo, o número 1997 é transformado para 7.4 + 199 = 227. A operação é feita repetidamente. Prove que se a seqüência de números obtida contém 1001, então nenhum dos números na seqüência pode ser um número primo.

ADAPTAÇÃO DA SOLUÇÃO DE MARCELO RIBEIRO DE SOUZA (RIO DE JANEIRO – RJ):

Vamos ver que todos os termos da seqüência são múltiplos de 13, caso a seqüência contenha 1001 (que é múltiplo de 13). De fato, se $b_n = 10k_n + r_n$, com $0 \le r_n \le 9$, o próximo termo será $b_{n+1} = k_n + 4r_n$, ou seja, $b_n = 10(b_{n+1} - 4r_n) + r_n = 10b_{n+1} - 39r_n$. Assim, b_n é múltiplo de 13 $\Leftrightarrow$ b_{n+1} é múltiplo de 13, ou nenhum deles é. Como os termos antes de 1001 são maiores que 1001 e, partindo de 1001, obtemos a seqüência $1001 \to 104 \to 26 \to 26 \to \ldots$, todos os termos da seqüência são múltiplos de 13, mas nenhum é igual a 13, donde nenhum é primo.

65) Determine todos os inteiros N tais que, em base 10, os dígitos de $9N$ são os mesmos dígitos de N na ordem inversa, e N possui no máximo um dígito igual a 0.

SOLUÇÃO DE DANIEL DE SOUZA RAMOS (PIRASSUNUNGA – SP):

Seja N um número de n dígitos na base 10, com no máximo um dígito igual a 0.

Sabemos pelo enunciado definição do problema que $9N$ tem n dígitos. Daí temos que ao multiplicarmos N por 9, $9N$ só terá n dígitos se o primeiro dígito de N for 1.

Isto implica que o último dígito de $9N$ é 1. Mas tal fato só será possível se o último dígito de N for 9. Assim $N = 1\ldots9$ e $9N = 9\ldots1$.

Imaginemos a multiplicação por 9. Para que o primeiro algarismo de $9N$ seja 9 é necessário que o dígito anterior ao dígito 1 de N seja 0 ou 1, uma vez que qualquer dígito maior do que 1, em tal posição, fará com que $9N$ tenha um número de dígitos diferente do de N.

Analisemos então os 2 casos:

1º. Caso) $N = 11\ldots9$ ($9N = 9\ldots11$); $0 \le k \le 9$, $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{r} 11\ldots\overset{8}{k}9 \\ \times 9 \\ \hline 9k\ldots11 \end{array} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 9k+8\equiv 1(\text{mod}\,10) \\ k\equiv 7(\text{mod}\,10) \quad \Rightarrow k=7 \\ \\ \end{array}\right.$$

Daí: $N = 11\ldots79$($9N = 97\ldots11$), $0 \le k', k'' \le 9$, $k', k'' \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{r} \overset{k''}{1}\ \overset{k'}{1}\ldots\overset{8}{7}\ 9 \\ \times 9 \\ \hline 9\ 7\ldots1\ 1 \end{array} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 9\cdot 1+k'\equiv 7(\text{mod}\,10) \\ k'\equiv -2\equiv 8(\text{mod}\,10) \quad \Rightarrow k'=8 \Rightarrow k''=1 \\ \\ \end{array}\right.$$

Porém com $k'' = 1$ não será possível que $9N$ seja da forma $97\ldots11$. Portanto o caso $N = 11\ldots9$ não satisfaz.

2º. Caso) $N = 10\ldots9$ ($9N = 9\ldots01$); $0 \le k \le 9$, $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{r} 10\ldots\overset{8}{k}9 \\ \times 9 \\ \hline 9k\ldots01 \end{array} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 9k+8\equiv 0(\text{mod}\,10) \\ \quad k\equiv 8(\text{mod}\,10) \quad \Rightarrow k=8 \\ \\ \end{array}\right.$$

Daí: $N = 10\ldots89$($9N = 98\ldots01$), $0 \le k', k'' \le 9$, $k', k'' \in \mathbb{N}$ (4)

$$\begin{array}{r} 1\overset{8*}{0}k\ldots\overset{8}{k'}\ \overset{8}{8}\ 9 \\ \times\ 9 \\ \hline 9\ 8\ k'\ldots k\ 0\ 1 \end{array} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{Para que esta situação aconteça, } k=8 \\ \text{ou } k=9 \text{ (pois apenas } 9\cdot 8 \text{ pode, somado a 8 chegar a 80,} \\ \text{e } 9\cdot 9=81). \\ \\ \end{array}\right.$$

Para o caso $k = 8$ [$k = 8 \Rightarrow k' = 0$ pois $9k' + 8 \equiv 8 \pmod{10}$ $\therefore$ $k' \equiv 0 \pmod{10}$]

$$\begin{array}{r} 1\overset{8}{0}\overset{8}{8}\ldots\overset{8}{0}\ \overset{8}{8}\ 9 \\ \times\ 9 \\ \hline 9\ 8\ 0\ldots8\ 0\ 1 \end{array} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{Neste caso o número } N \text{ possuiria mais de um dígito} \\ \text{0, não condizendo com a situação proposta.} \\ \\ \end{array}\right.$$

Para o caso $k = 9$:

$$\begin{array}{r} 1\overset{8}{0}9\ldots\overset{8}{k'}\,\overset{8}{8}\,9 \\ \times\ 9 \\ \hline 9\,8\,k'\ldots9\,0\,1 \end{array} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 9k'+8\equiv 9(\operatorname{mod}10) \\ \quad k'\equiv 9(\operatorname{mod}10)\Rightarrow k'=9 \end{array}\right.$$

Temos agora que N = 1 0 9…9 8 9. Desenvolvendo:

$$\begin{array}{r} 1\overset{8}{0}\overset{8}{9}k\ldots k'\overset{8}{9}\,\overset{8}{8}\,9 \\ \times\ 9 \\ \hline 9\,8\,0k'\ldots k9\,0\,1 \end{array} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{Para que esta situação aconteça} \\ k=8 \text{ ou } k=9 \end{array}\right.$$

Para o caso k = 8.

$$\begin{array}{r} 1098\ldots\overset{8}{k'}\overset{8}{9}\,\overset{8}{8}\,9 \\ \times\ 9 \\ \hline 9\,8\,9k'\ldots8\,9\,0\,1 \end{array} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 9k'+8\equiv 8(\operatorname{mod}10) \\ \quad k'\equiv 0(\operatorname{mod}10)\Rightarrow k'=0 \end{array}\right.$$

Não satisfaz o problema pois possui mais de um dígito 0.

Para o caso k = 9.

$$\begin{array}{r} 1\overset{8}{0}\overset{8}{9}9\ldots\overset{8}{k'}\overset{8}{9}\,\overset{8}{8}\,9 \\ \times\ 9 \\ \hline 9\,8\,9k'\ldots9\,9\,0\,1 \end{array} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 9k'+8\equiv 9(\operatorname{mod}10) \\ \quad k'\equiv 9(\operatorname{mod}10)\Rightarrow k'=9 \end{array}\right.$$

Temos agora que N = 1 0 9 9 … 9 9 8 9. Desenvolvendo:

$$\begin{array}{r} 1\overset{8}{0}\overset{8}{9}\overset{8}{9}k\ldots\overset{8}{k'}\overset{8}{9}\,\overset{8}{9}\,\overset{8}{8}\,9 \\ \times\ 9 \\ \hline 9989k'\ldots k9\,9\,0\,1 \end{array}$$

Procedendo de forma análoga ao momento em que sabia-se que N = 1 0 9 … 9 8 9, teremos N = 1 0 9 9 9… 9 9 9 8 9.

Conclui-se então que todos os inteiros N que satisfazem a condição do problema são da forma:

$$N=10\underbrace{9\ldots9}_{(n-4)\,dígitos}89,\ n\in\mathbb{N}\wedge n\geq 4\,.$$

67) Este problema saiu com o enunciado errado, devido a um erro tipográfico, como observaram Rodrigo Villard Milet, Anderson Torres e Carlos da Silva Victor, que enviaram versões corrigidas, com soluções. Pedimos desculpas aos leitores pelo erro e publicamos as versões corrigidas a seguir:

VERSÃO DE RODRIGO VILLARD MILET (RIO DE JANEIRO – RJ) e ANDERSON TORRES (SÃO PAULO – SP):

Seja *ABCD* um quadrilátero tal que os círculos circunscritos aos triângulos *ABC* e *BCD* são ortogonais. Prove que os círculos circunscritos aos triângulos *ACD* e *ABD* também são ortogonais.

SOLUÇÃO:

Vamos denotar por (XYZ) o círculo que passa por X, Y e Z e por $\vartheta(w_1, w_2)$ e ângulo entre as curvas w_1 e w_2.

Considere uma inversão ψ com centro em B e de razão k. Como (ABC) e (BCD) passam por B, $\psi((ABC)) = A'\,C'$ e $\psi((BCD)) = C'D'$. Como $\vartheta((ABC), (BCD)) = 90^\circ$, segue que $\angle A'C'D' = 90^\circ$.

Temos $\psi((ACD)) = (A'C'D')$. Daí, $A'D'$ é diâmetro de $(A'C'D')$, pois $\angle A'C'D' = 90^\circ$. E assim, $\vartheta((A'C'D'), A'D') = 90^\circ$, logo $\vartheta(\psi((A'C'D')), \psi(A'D')) = \vartheta((ACD), (ABD)) = 90^\circ$, pois $\psi(A'D') = (ABD)$($A'D'$ não passa por B). Então os círculos (ACD) e (ABD) são ortogonais.

VERSÃO DE CARLOS ALBERTO DA SILVA VICTOR (NILÓPOLIS – RJ):

Seja *ABCD* um quadrilátero tal que os círculos circunscritos aos triângulos *ABC* e *ACD* são ortogonais. Prove que os círculos circunscritos aos triângulos *BCD* e *DAB* também são ortogonais.

SOLUÇÃO:

Sejam O_1, O_2, O_3 e O_4 os centros dos círculos circunscritos aos triângulos *ABC*, *ADC*, *ADB* e *BDC* respectivamente.

Sejam: $\angle O_1CB = a$; $\angle O_2CD = b$; $\angle O_1CA = \theta$; $\angle DBC = e$; $\angle DBA = d$; $\angle BDA = c$ e $\angle BDC = f$. Note que, pela hipótese do problema, $\angle O_2AC = \angle O_2CA = 90^\circ - \theta$. Podemos concluir que

$$\hat{C} = \angle O_1CB + \angle O_1CA + \angle O_2CA + O_2CD = a + \theta + 90^\circ - \theta_1 b = a + b + 90^\circ.$$

Além disso, é fácil ver que $\angle O_1AB = 90^\circ - a \cdot \theta$ e $\angle O_2AD = \theta - b$, portanto $\angle O_1AB + \angle O_1AC + \angle O_2AC + \angle O_2AD = (90^\circ - a - \theta) + \theta + (90^\circ - \theta) + \theta - b =$ $= 180^\circ - a - b$. Veja também que $\angle DO_4O_3 = e + f$ e $\angle DO_3O_4 = c + d$. Observe agora no triângulo DO_3O_4 em que $e + f + c + d = 180^\circ - \angle O_3DO_4$ e, pelo quadrilátero *ABCD* temos $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360°$, ou seja $e + f + c + d = 360° -$ $(\hat{C}+\hat{A}) =$ $360° - [90° + a + b + 180° - a - b]$ $\therefore$ $e + f + c + d = 360° - 270° = 90°$.

Conclusão: $\angle O_3DO_4 = 180° - \angle DO_4O_3 - \angle DO_3O_4 = 180° - (e+f+c+d) = 90°$

e os círculos circunscritos aos triângulos *BCD* e *DAB* também são ortogonais.

Agradecemos também o envio das soluções e a colaboração de:

Fábio Nunes Ribeiro Maia	Rio de Janeiro – RJ
Anderson Torres	São Paulo – SP
Fábio Dias Moreira	Rio de Janeiro – RJ
Marcelo Rufino de Oliveira	Belém – PA
Helder Oliveira de Castro	Mogi das Cruzes – SP
Oswaldo Mello Sponquiado	Olimpia – SP
Renato Francisco Lopes Mello	Jaboatão dos Guararapes – PE
Marcílio Miranda de Carvalho	Teresina – PI
Evandro Makiyama de Melo	São Paulo – SP
Gibran Medeiros de Souza	Natal – RN
Carlos A. Gomes	Natal – RN
Jorge Silva Júnior	Cachoeiro de Itapemirim – ES

Seguimos aguardando o envio de soluções do problema proposto Nº. 66 publicado na revista Eureka! Nº. 12

Você sabia…

Considere um bilhão de números distintos escritos cada um em um de um bilhão de papeizinhos (haja papel!) em um chapéu. Você deve retirar um papel de cada vez. Você deve dizer que você encontrou o maior de todos os números, logo após retirá-lo. Não vale dizer que um outro número que você já tinha retirado antes é o maior!

A probabilidade de você acertar sua afirmativa parece muito pequena, não? Você sabia que você pode adotar uma estratégia de modo que a probabilidade de acertar seja maior que 1/3? Você deve descartar os primeiros s números, onde s é aproximadamente n /e (e = 2,71828… é a constante de Euler), e em seguida, escolher o próximo número que for maior que todos os anteriores. Você tem probabilidade muito próxima de $1/e$ de acertar!

Um problema semelhante foi proposto na lista de discussão da OBM:

Um inspetor sabe que o chefe de 5 bandidos é o mais baixinho de todos e que todas as alturas são diferentes. Sabe-se também que eles estarão presentes numa reunião em um edifício, num intervalo de 15 minutos. Como o inspetor não sabe qual dos bandidos é o mais baixo, decide deixar sair os dois primeiros bandidos e prender o primeiro dos seguintes que seja mais baixo de todos que saírem. Qual a probabilidade de o inspetor prender a pessoa certa?

A probabilidade de acertar é alta (maior que 30%!!). Calcule-a!

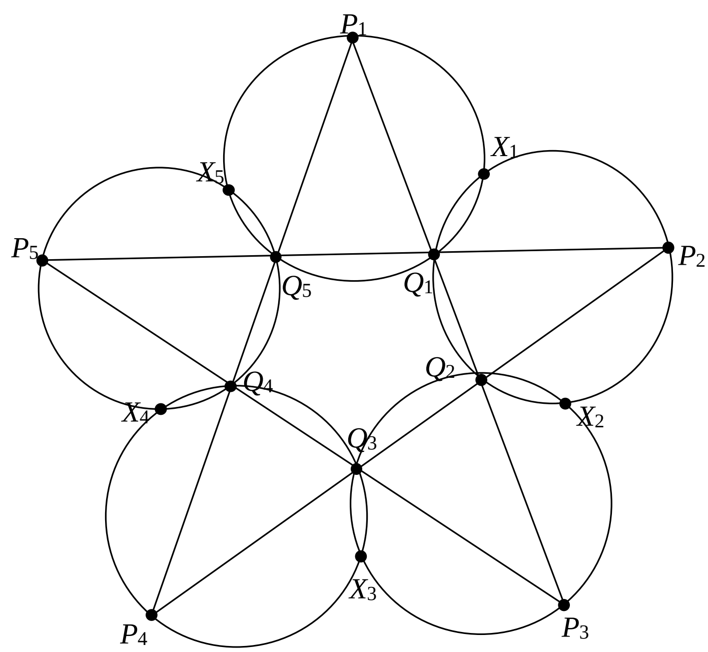
PROBLEMAS PROPOSTOS

✉ *Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e sugestões de novos problemas para os próximos números.*

68) Seja ABC um triângulo de lados inteiros e área racional. Prove que existem pontos X, Y, Z com coordenadas inteiras no plano $\mathbb{R}^2$ tais que o triângulo XYZ é congruente ao triângulo ABC.

69) Sejam a e b inteiros positivos tais que $a^n - 1$ divide $b^n - 1$ para todo inteiro positivo n.
Prove que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $b = a^k$.

70)



Na figura acima, para $1 \le j \le 5$, X_j é o ponto de interseção dos círculos circunscritos aos triângulos $Q_{j-1}P_jQ_j$ e $Q_j P_{j+1} Q_{j+1}$ distintos de Q_j (os índices são tomados módulo 5). Prove que o pentágono $X_1X_2X_3X_4X_5$ é inscritível.
Obs: O pentágono $P_1P_2P_3P_4P_5$ não é necessariamente regular.

71) Considere três circunferências, tangentes duas a duas. Prove que há apenas duas circunferências tangentes às três simultaneamente, e mostre como construí-las.

72) Ache todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x^4 + y) = x^3 f(x) + f(f(y))$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

73) Prove que, dado um inteiro positivo *n*, existe uma progressão aritmética crescente formada por *n* inteiros positivos cujas somas dos dígitos também formam uma progressão aritmética crescente, mas não existe uma progressão aritmética infinita de inteiros positivos cujas somas dos dígitos formem uma progressão aritmética crescente.

Problema 70 proposto por Jiang Zemin, presidente da China, a membros da direção da União Internacional de Matemática, durante uma reunião preparatória do Congresso Internacional de Matemática (ICM), realizado em agosto de 2002, em Beijing, China; Problema 71 proposto por Marcelo Ribeiro de Souza (Rio de Janeiro – RJ); Problema 72 adaptado da 14ª. Asian Pacific Mathematical Olympiad; Problema 73 adaptado do 17º.Torneio das Cidades, 1995.

AGENDA OLÍMPICA

XXIV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

NÍVEIS 1, 2 e 3
Primeira Fase – Sábado, 8 de junho de 2002
Segunda Fase – Sábado, 14 de setembro de 2002
Terceira Fase – Sábado, 19 de outubro de 2002 (níveis 1, 2 e 3)
Domingo, 20 de outubro de 2002 (níveis 2 e 3 - segundo dia de prova).

NÍVEL UNIVERSITÁRIO
Primeira Fase – Sábado, 14 de setembro de 2002
Segunda Fase – Sábado, 19 e Domingo, 20 de outubro de 2002

♦

VIII OLIMPÍADA DE MAIO
11 de maio de 2002

♦

XIII OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL
22 a 28 de junho de 2002
Fortaleza – CE, Brasil

♦

XLIII OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA
18 a 31 de julho de 2002
Glasgow, Reino Unido

♦

XVII OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA
30 de setembro a 5 de outubro de 2002
El Salvador

♦

V OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
9 de novembro de 2002

♦ ♦ ♦

COORDENADORES REGIONAIS

Alberto Hassen Raad	(UFJF)	Juiz de Fora – MG
Amarísio da Silva Araújo	(UFV)	Viçosa – MG
Benedito Tadeu Vasconcelos Freire	(UFRN)	Natal – RN
Carlos Frederico Borges Palmeira	(PUC-Rio)	Rio de Janeiro – RJ
Claudio Arconcher	(Colégio Leonardo da Vinci)	Jundiaí – SP
Claus Haetinger	(UNIVATES)	Lajeado – RS
Cleonor Crescêncio das Neves	(UTAM)	Manaus – AM
Élio Mega	(Colégio Etapa)	São Paulo – SP
Florêncio Ferreira Guimarães Filho	(UFES)	Vitória – ES
Gisele de Araújo Prateado Gusmão	(UFGO)	Goiânia – GO
Irene Nakaoka	(UEM)	Maringá – PR
Ivanilde Fernandes Saad	(UC. Dom Bosco)	Campo Grande– MS
Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia	(UFPB)	João Pessoa – PB
João Benício de Melo Neto	(UFPI)	Teresina – PI
João Francisco Melo Libonati	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
José Carlos Pinto Leivas	(UFRG)	Rio Grande – RS
José Cloves Saraiva	(UFMA)	São Luis – MA
José Gaspar Ruas Filho	(ICMC-USP)	São Carlos – SP
José Luiz Rosas Pinho	(UFSC)	Florianópolis – SC
José Vieira Alves	(UFPB)	Campina Grande – PB
Licio Hernandes Bezerra	(UFSC)	Florianópolis – SC
Luzinalva Miranda de Amorim	(UFBA)	Salvador – BA
Marcelo Rufino de Oliveira	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Marcondes Cavalcante França	(UFC)	Fortaleza – CE
Pablo Rodrigo Ganassim	(Liceu Terras do Engenho)	Piracicaba – SP
Ramón Mendoza	(UFPE)	Recife – PE
Reinaldo Gen Ichiro Arakaki	(INPE)	SJ dos Campos – SP
Ricardo Amorim	(Centro Educacional Logos)	Nova Iguaçu – RJ
Roberto Vizeu Barros	(Colégio Acae)	Volta Redonda – RJ
Rosângela Souza	(Colégio Singular)	Santo André – SP
Sérgio Cláudio Ramos	(IM-UFRGS)	Porto Alegre – RS
Tadeu Ferreira Gomes	(UEBA)	Juazeiro – BA
Tomás Menéndez Rodrigues	(U. Federal de Rondônia)	Porto Velho – RO
Valdenberg Araújo da Silva	(U. Federal de Sergipe)	São Cristovão – SE
Wagner Pereira Lopes	(CEFET – GO)	Jataí – GO