CONTEÚDO

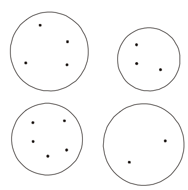
XXIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e Soluções da Primeira Fase

PROBLEMAS – NÍVEL 1

1. Considere dois números naturais, cada um deles com três algarismos diferentes. O maior deles só tem algarismos pares e o menor só tem algarismos ímpares. O menor valor possível para a diferença entre eles é:
A) 111 **B)** 49 **C)** 29 **D)** 69 **E)** 5

2. Na figura abaixo, temos 4 circunferências e alguns pontos destacados no interior dessas circunferências. Escolhendo exatamente um desses pontos dentro de cada uma das circunferências, e unindo-os por segmentos de reta que não se cruzam, formamos um quadrilátero. Quantos quadriláteros diferentes seremos capazes de desenhar nessas condições?



A) 4 **B)** 14 **C)** 60 **D)** 120 **E)** 24

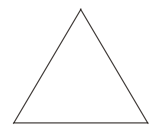
3. Joana escreve a seqüência de números naturais 1, 6, 11,..., onde cada número, com exceção do primeiro, é igual ao anterior mais cinco. Joana pára quando encontra o primeiro número de três algarismos. Esse número é:
A) 100 **B)** 104 **C)** 101 **D)** 103 **E)** 102

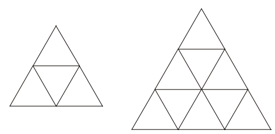
4. Quantos números de dois algarismos não são primos nem múltiplos de 2, 3 ou 5?
A) 1 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 4 **E)** mais de 4

5. No conjunto {101, 1 001, 10 001,..., 1 000 000 000 001} cada elemento é um número formado pelo algarismo 1 nas extremidades e por algarismos 0 entre eles. Alguns desses elementos são números primos e outros são compostos. Sobre a quantidade de números compostos podemos afirmar que:
A) é igual 11
B) é igual a 4
C) é menor do que 3
D) é maior do que 4 e menor do que 11
E) é 3

6. Uma pêra tem cerca de 90% de água e 10% de matéria sólida. Um produtor coloca 100 quilogramas de pêra para desidratar até o ponto em que a água represente 60% da massa total. Quantos litros de água serão evaporados? (lembre-se: 1 litro de água tem massa de 1 quilograma).
A) 15 litros **B)** 45 litros **C)** 75 litros **D)** 80 litros
E) 30 litros

7. O triângulo equilátero T à direita tem lado 1. Juntando triângulos congruentes a esse, podemos formar outros triângulos equiláteros maiores, conforme indicado no desenho abaixo.

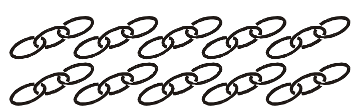




Qual é o lado do triângulo equilátero formado por 49 dos triângulos T?
A) 7 **B)** 49 **C)** 13 **D)** 21
E) é impossível formar um triângulo equilátero com esse número de triângulos T

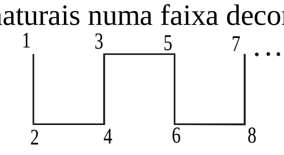
8. Os números inteiros positivos de 1 a 1000 são escritos lado a lado, em ordem crescente, formando a seqüência 123456789101112131415... 9991000. Nesta seqüência, quantas vezes aparece o grupo "89" ?
A) 98 **B)** 32 **C)** 22 **D)** 89 **E)** 21

9. Um serralheiro tem 10 pedaços de 3 elos de ferro cada um, mostrados abaixo.

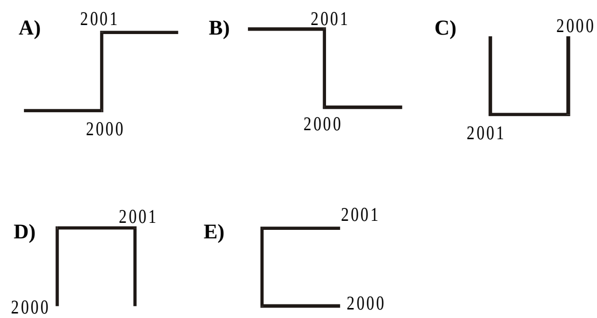


Ele quer fazer uma única corrente de 30 elos. Para abrir e depois soldar um elo o serralheiro leva 5 minutos. Quantos minutos **no mínimo** ele levará para fazer a corrente?
A) 30 **B)** 35 **C)** 40 **D)** 45 **E)** 50

10. Escrevem-se os números naturais numa faixa decorativa, da seguinte maneira:



Assinale a figura correta:



11. 2 melancias custam o mesmo que 9 laranjas mais 6 bananas; além disso, meia dúzia de bananas custa a metade de uma melancia. Portanto, o preço pago por uma dúzia de laranjas e uma dúzia de bananas é igual ao preço de:
A) 3 melancias **B)** 4 melancias **C)** 6 melancias **D)** 5 melancias
E) 2 melancias

12. Qual é o último algarismo da soma de 70 números inteiros positivos consecutivos?
A) 4 **B)** 0 **C)** 7 **D)** 5 **E)** Faltam dados

13. Em Tumbólia, um quilograma de moedas de 50 centavos equivale em dinheiro a dois quilogramas de moedas de 20 centavos. Sendo 8 gramas o peso de uma moeda de 20 centavos, uma moeda de 50 centavos pesará:
A) 15 gramas **B)** 10 gramas **C)** 12 gramas **D)** 20 gramas
E) 22 gramas

14. As medidas dos lados de um retângulo são números inteiros distintos. O perímetro e a área do retângulo se exprimem pelo mesmo número. Determine esse número.
A) 18 **B)** 12 **C)** 24 **D)** 9 **E)** 36

15. O número *N* de três algarismos multiplicado por 7 deu como resultado um número que termina em 171.
A soma dos algarismos de *N* é:
A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

16. Em um tabuleiro retangular com 6 linhas e 9 colunas, 32 casas estão ocupadas. Podemos afirmar que:

A) Todas as colunas têm pelo menos 3 casas ocupadas.
B) Nenhuma coluna tem mais de 3 casas ocupadas.
C) Alguma coluna não tem casas ocupadas.

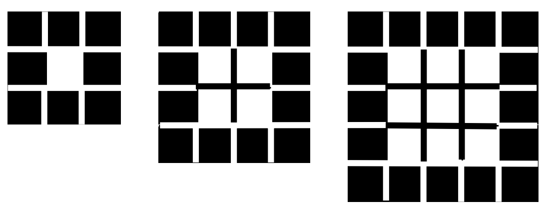
D) Alguma linha tem pelo menos 6 casas ocupadas.
E) Todas as linhas têm pelo menos 4 casas ocupadas.

17. Contando-se os alunos de uma classe de 4 em 4 sobram 2, e contando-se de 5 em 5 sobra 1. Sabendo-se que 15 alunos são meninas e que nesta classe o número de meninas é maior que o número de meninos, o número de meninos nesta classe é:
A) 7 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11

18. São escritos todos os números de 1 a 999 nos quais o algarismo 1 aparece exatamente 2 vezes (tais como, 11, 121, 411, etc). A soma de todos estes números é:
A) 6882 **B)** 5994 **C)** 4668 **D)** 7224 **E)** 3448

19. Cinco animais *A, B, C, D,* e *E,* são cães ou são lobos. Cães sempre contam a verdade e lobos sempre mentem. *A* diz que *B* é um cão. *B* diz que *C* é um lobo. *C* diz que *D* é um lobo. *D* diz que *B* e *E* são animais de espécies diferentes. *E* diz que *A* é um cão. Quantos lobos há entre os cinco animais?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

20. Com azulejos quadrados brancos e pretos todos do mesmo tamanho, construímos os seguintes mosaicos.

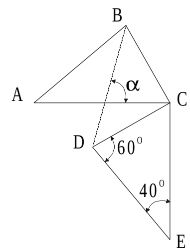


A regra para se construir estes mosaicos é a seguinte: inicialmente formamos um quadrado com 1 azulejo branco cercado por azulejos pretos; e em seguida, outro quadrado, este com 4 azulejos brancos, também cercado por azulejos pretos; e assim sucessivamente.
Com 80 azulejos pretos, quantos azulejos brancos serão necessários para se fazer uma seqüência de mosaicos como esta?
A) 55 **B)** 65 **C)** 75 **D)** 85 **E)** 100

PROBLEMAS – NÍVEL 2

1. **Veja o problema 4 do Nível 1.**

2. O triângulo *CDE* pode ser obtido pela rotação do triângulo *ABC* de 90º no sentido anti-horário ao redor de *C*, conforme mostrado no desenho abaixo. Podemos afirmar que α é igual a:



A) 75º **B)** 65º **C)** 70º **D)** 45º **E)** 55º

3. Veja o problema 5 do Nível 1.
4. Veja o problema 6 do Nível 1.
5. Veja o problema 8 do Nível 1.
6. Veja o problema 9 do Nível 1.
7. Veja o problema 11 do Nível 1.
8. Veja o problema 12 do Nível 1.
9. Veja o problema 14 do Nível 1.
10. Veja o problema 15 do Nível 1.

11. Os pontos P_1, P_2, P_3, … estão nesta ordem sobre uma circunferência e são tais que o arco que une cada ponto ao seguinte mede 35°. O menor valor de $n > 1$ tal que P_n coincide com P_1 é:
A) 37 **B)** 73 **C)** 109 **D)** 141 **E)** 361

12. Veja o problema 16 do Nível 1.

13. *ABCDE* é um pentágono regular e *ABF* é um triângulo equilátero interior. O ângulo *FCD* mede:
A) 38° **B)** 40° **C)** 42° **D)** 44° **E)** 46°

14. Veja o problema 19 do Nível 1.

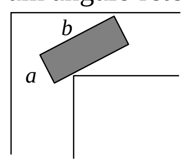
15. Um círculo é dividido, por $2n + 1$ raios, em $2n + 1$ setores congruentes. Qual é o número máximo de regiões do círculo determinadas por estes raios e por uma reta?
A) $3n$ **B)** $3n + 1$ **C)** $3n + 2$ **D)** $3n + 3$ **E)** $4n$

16. Paulo e Cezar têm algum dinheiro. Paulo dá a Cezar R\$5,00 e, em seguida, Cezar dá a Paulo $\frac{1}{3}$ do que possui. Assim, ambos ficam com R\$18,00. A diferença entre as quantias que cada um tinha inicialmente é:
A) R\$7,00 **B)** R\$8,00 **C)** R\$9,00 **D)** R\$10,00 **E)** R\$11,00

17. Um fazendeiro tinha 24 vacas e ração para alimentá-las por 60 dias. Entretanto, 10 dias depois, ele comprou mais 6 vacas e 10 dias depois dessa compra ele vendeu 20 vacas. Por mais quantos dias após esta última compra ele pode alimentar o gado com a ração restante?
A) 50 **B)** 60 **C)** 70 **D)** 80 **E)** 90

18. **Veja o problema 18 do Nível 1.**

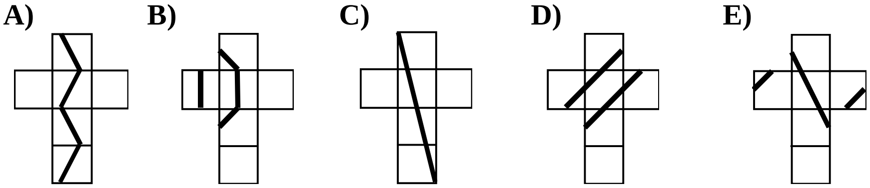
19. Uma mesa retangular, cujos pés têm rodas, deve ser empurrada por um corredor de largura constante, que forma um ângulo reto.



Se as dimensões da mesa são a e b (com $2a < b$), qual deve ser a largura mínima do corredor para que a mesa possa ser empurrada através dele?

A) $a + b$ **B)** $(a+b)\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **C)** $(a+b)\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ **D)** $(2a+b)\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ **E)** $(a+2b)\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

20. Somente uma das figuras a seguir representa a planificação de um cubo na qual está destacada a sua interseção com um plano. Qual?
A) **B)** **C)** **D)** **E)**



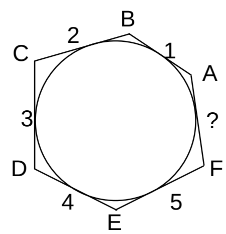
21. Quantos dígitos tem o menor quadrado perfeito cujos quatro últimos dígitos são 2001?
A) 9 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

22. Papa-Léguas participou de uma corrida (junto com o Ligeirinho e o Flash), que consistia em dar 100 voltas em um circuito. Como sempre, o Coiote queria pegar o Papa-Léguas e colocou um monte de alpiste no meio da pista. É claro que o Coiote não conseguiu pegar o Papa-Léguas, mas ele fez com que a velocidade média dele na primeira volta fosse de apenas 200 km/h. Sabendo disso, a velocidade média do Papa-Léguas na corrida:
A) Não ultrapassa 200 km/h.
B) Não ultrapassa 250 km/h, mas pode ultrapassar 200km/h.

C) Não ultrapassa 2000 km/h, mas pode ultrapassar 250km/h.
D) Não ultrapassa 20000 km/h, mas pode ultrapassar os 2000km/h.
E) Pode ultrapassar 20000 km/h.

23. **Veja o problema 20 do Nível 1.**
24. **Veja o problema 19 do Nível 1.**

25. O hexágono *ABCDEF* é circunscritível. Se *AB* = 1, *BC* = 2, *CD* = 3, *DE* = 4 e *EF* = 5, quanto mede *FA*?



A) 1 **B)** 3 **C)** 15/8 **D)** 6 **E)** 9

PROBLEMAS – NÍVEL 3

1. **Veja o problema 4 do Nível 1.**
2. **Veja o problema 2 do Nível 2.**
3. **Veja o problema 5 do Nível 1.**
4. **Veja o problema 6 do Nível 1.**
5. **Veja o problema 8 do Nível 1.**
6. **Veja o problema 9 do Nível 1.**
7. **Veja o problema 15 do Nível 1.**
8. **Veja o problema 11 do Nível 2.**
9. **Veja o problema 13 do Nível 2.**
10. **Veja o problema 15 do Nível 2.**
11. **Veja o problema 22 do Nível 2.**

12. O número de soluções inteiras distintas da equação $(-6x^2+12x-2)^{x^2-2x+2}=4$ é:
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

13. Uma rifa foi organizada entre os 30 alunos da turma do Pedro. Para tal, 30 bolinhas numeradas de 1 a 30 foram colocadas em uma urna. Uma delas foi, então, retirada da urna. No entanto, a bola caiu no chão e se perdeu e uma segunda bola teve que ser sorteada entre as 29 restantes. Qual a probabilidade de que o número de Pedro tenha sido o sorteado desta segunda vez?
A) 1/29 **B)** 1/30 **C)** 1/31 **D)** 1/60 **E)** 2/31

14. Cinco animais *A*, *B*, *C*, *D*, e *E*, são cães ou são lobos. Cães sempre contam a verdade e lobos sempre mentem. *A* diz que *B* é um cão. *B* diz que *C* é um lobo. *C* diz que *D* é um lobo. *D* diz que *B* e *E* são animais de espécies diferentes. *E* diz que *A* é um cão. Quantos lobos há entre os cinco animais?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

15. São escritos todos os números de 1 a 999 nos quais o algarismo 1 aparece exatamente 2 vezes (tais como, 11, 121, 411, etc). A soma de todos estes números é:

A) 6882 **B)** 5994 **C)** 4668 **D)** 7224 **E)** 3448

16. **Veja o problema 19 do Nível 2.**
17. **Veja o problema 20 do Nível 2.**

18. Seja $f(x) = x^2 - 3x + 4$. Quantas soluções reais tem a equação $f(f(f(...f(x)))) = 2$ (onde f é aplicada 2001 vezes)?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 2001 **E)** 2^{2001}

19. **Veja o problema 21 do Nível 2.**

20. Seja *ABCD* um trapézio retângulo cujos únicos ângulos retos são $\hat{A}$ e $\hat{B}$. *M* e *N* são os pontos médios de *AB* e *CD*, respectivamente. A respeito dos ângulos $\alpha = A\hat{N}B$ e $\beta = C\hat{M}D$, podemos dizer que:

A) $\alpha < \beta$
B) $\alpha > \beta$
C) $\alpha = \beta$
D) pode ocorrer qualquer uma das situações das alternativas A), B) e C).
E) o ângulo α é reto

21. A soma dos valores reais de x tais que $x^2 + x + 1 = 156/(x^2 + x)$ é:

A) 13 **B)** 6 **C)** –1 **D)** –2 **E)** –6

22. Para cada ponto pertencente ao interior e aos lados de um triângulo acutângulo *ABC*, considere a soma de suas distâncias aos três lados do triângulo. O valor máximo desta soma é igual

A) à média aritmética das 3 alturas do triângulo.
B) ao maior lado do triângulo.
C) à maior altura do triângulo
D) ao triplo do raio do círculo inscrito no triângulo.
E) ao diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo.

23. Seja f uma função de Z em Z definida como $f(x) = x/10$ se x é divisível por 10 e
$f(x) = x + 1$ caso contrário. Se $a_0 = 2001$ e $a_{n+1} = f(a_n)$, qual é o menor valor de n para o qual $a_n = 1$?

A) 20
B) 38
C) 93
D) 2000
E) a_n nunca é igual a 1

24. **Veja o problema 25 do Nível 2.**

25. No triângulo ABC, $AB = 5$ e $BC = 6$. Qual é a área do triângulo ABC, sabendo que o ângulo $\hat{C}$ tem a maior medida possível?

A) 15 **B)** $5\sqrt{7}$ **C)** $7\sqrt{7}/2$ **D)** $3\sqrt{11}$
E) $5\sqrt{11}/2$

GABARITO

NÍVEL 1 (5ª. e 6ª. séries)

1) E	6) C	11) A	16) D
2) D	7) A	12) D	17) E
3) C	8) B	13) B	18) A
4) B	9) B	14) A	19) D
5) D	10) D	15) C	20) A

NÍVEL 2 (7ª. e 8ª. séries)

1) B	6) B	11) B	16) B	21) B
2) E	7) A	12) D	17) E	22) D
3) D	8) D	13) C	18) A	23) A
4) C	9) Anulada	14) E	19) D	24) D
5) B	10) C	15) D	20) B	25) B

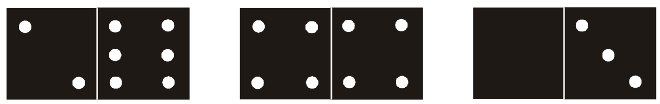
NÍVEL 3 (Ensino Médio)

1) B	6) B	11) D	16) D	21) C
2) E	7) C	12) D	17) B	22) C
3) D	8) B	13) B	18) C	23) B
4) C	9) C	14) D	19) B	24) B
5) B	10) D	15) A	20) A	25) E

XXIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Problemas e Soluções da Segunda Fase

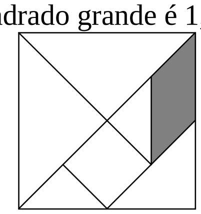
PROBLEMAS – NÍVEL 1

PROBLEMA 1
O jogo de dominó é formado por 28 peças retangulares distintas, cada uma com duas partes, com cada parte contendo de 0 a 6 pontinhos. Por exemplo, veja três dessas peças:



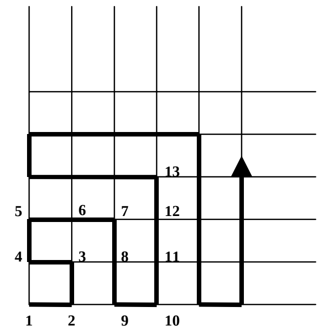
Qual é o número total de pontinhos de todas as peças?

PROBLEMA 2
As peças de um jogo chamado Tangram são construídas cortando-se um quadrado em sete partes, como mostra o desenho: dois triângulos retângulos grandes, um triângulo retângulo médio, dois triângulos retângulos pequenos, um quadrado e um paralelogramo. Se a área do quadrado grande é 1, qual é a área do paralelogramo?



PROBLEMA 3
Carlinhos faz um furo numa folha de papel retangular. Dobra a folha ao meio e fura o papel dobrado; em seguida, dobra e fura novamente o papel dobrado. Ele pode repetir esse procedimento quantas vezes quiser, evitando furar onde já havia furos. Ao desdobrar a folha, ele conta o número total de furos feitos. No mínimo, quantas dobras deverá fazer para obter mais de 100 furos na folha?

PROBLEMA 4
Os pontos da rede quadriculada abaixo são numerados a partir do vértice inferior esquerdo seguindo o caminho poligonal sugerido no desenho. Considere o ponto correspondente ao número 2001. Quais são os números dos pontos situados imediatamente abaixo e imediatamente à esquerda dele?



PROBLEMA 5

Apresente todos os números inteiros positivos menores do que 1000 que têm exatamente três divisores positivos. Por exemplo: o número 4 tem exatamente três divisores positivos: 1, 2 e 4.

PROBLEMA 6

Seja $\boldsymbol{N}$ o número inteiro positivo dado por $\boldsymbol{N} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + (196883)^2$. Qual é o algarismo das unidades de $\boldsymbol{N}$?

PROBLEMAS – NÍVEL 2

PROBLEMA 1: Veja o problema 2 do Nível 1.
PROBLEMA 2: Veja o problema 4 do Nível 1.

PROBLEMA 3

Se a n-ésima OBM é realizada em um ano que é divisível por n, dizemos que esse ano é *super-olímpico*. Por exemplo, o ano 2001, em que está sendo realizada a 23ª OBM, é super-olímpico pois 2001 = 87 · 23 é divisível por 23. Determine todos os anos super-olímpicos, sabendo que a OBM nunca deixou de ser realizada desde sua primeira edição, em 1979, e supondo que continuará sendo realizada todo ano.

PROBLEMA 4

As medidas dos ângulos do triângulo ABC são tais que $\hat{A} < \hat{B} < 90^\circ < \hat{C}$. As bissetrizes externas dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ cortam os prolongamentos dos lados opostos BC e AB nos pontos P e Q, respectivamente. Sabendo que $\overline{AP} = \overline{CQ} = \overline{AC}$, determine os ângulos de ABC.

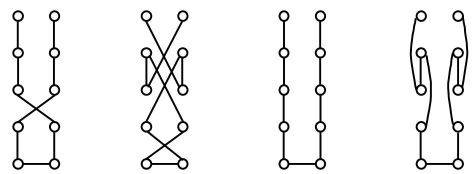
PROBLEMA 5

Dizemos que um conjunto A formado por 4 algarismos distintos e não nulos é *intercambiável* se podemos formar dois pares de números, cada um com 2

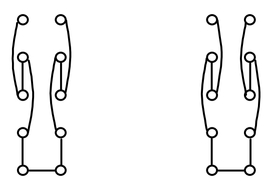
algarismos de *A*, de modo que o produto dos números de cada par seja o mesmo e que, em cada par, todos os dígitos de *A* sejam utilizados.
Por exemplo, o conjunto {1;2;3;6} é intercambiável pois $21 \cdot 36 = 12 \cdot 63$.
Determine todos os conjuntos intercambiáveis.

PROBLEMA 6
O matemático excêntrico Jones, especialista em Teoria dos Nós, tem uma bota com 5 pares de furos pelos quais o cadarço deve passar. Para não se aborrecer, ele gosta de diversificar as maneiras de passar o cadarço pelos furos, obedecendo sempre às seguintes regras:

- o cadarço deve formar um padrão simétrico em relação ao eixo vertical;
- o cadarço deve passar exatamente uma vez por cada furo, sendo indiferente se ele o faz por cima ou por baixo;
- o cadarço deve começar e terminar nos dois furos superiores e deve ligar diretamente (isto é, sem passar por outros furos) os dois furos inferiores.
  Representamos a seguir algumas possibilidades.



Qual é o número total de possibilidades que o matemático tem para amarrar seu cadarço, obedecendo às regras acima?
Observação: Maneiras como as exibidas a seguir devem ser consideradas iguais (isto é, deve ser levada em conta apenas a ordem na qual o cadarço passa pelos furos).



PROBLEMAS – NÍVEL 3

PROBLEMA 1: Veja o problema 3 do Nível 2.

PROBLEMA 2
No triângulo *ABC*, a mediana e a altura relativas ao vértice *A* dividem o ângulo $B\hat{A}C$ em três ângulos de mesma medida. Determine as medidas dos ângulos do triângulo *ABC*.

PROBLEMA 3

Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) = f(-x)$ e $f(x + y) = f(x) + f(y) + 8xy + 115$ para todos os reais x e y.

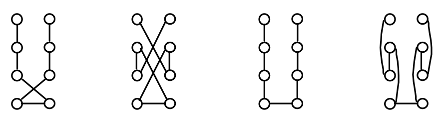
PROBLEMA 4: Veja o problema 5 do Nível 2.

PROBLEMA 5

O matemático excêntrico Jones, especialista em Teoria dos Nós, tem uma bota com n pares de furos pelos quais o cadarço deve passar. Para não se aborrecer, ele gosta de diversificar as maneiras de passar o cadarço pelos furos, obedecendo sempre às seguintes regras:

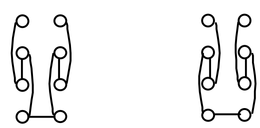
- o cadarço deve formar um padrão simétrico em relação ao eixo vertical;
- o cadarço deve passar exatamente uma vez por cada furo, sendo indiferente se ele o faz por cima ou por baixo;
- o cadarço deve começar e terminar nos dois furos superiores e deve ligar diretamente (isto é, sem passar por outros furos) os dois furos inferiores.

  Por exemplo, para $n = 4$, representamos a seguir algumas possibilidades.



Determine, em função de $n \geq 2$, o número total de maneiras de passar o cadarço pelos furos obedecendo às regras acima.

Observação: Maneiras como as exibidas a seguir devem ser consideradas iguais.



PROBLEMA 6

Seja $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$. Calcule

$$f\left(\frac{1}{1}\right) + f\left(\frac{2}{1}\right) + f\left(\frac{3}{1}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{1}\right)$$
$$+ f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{2}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$+ f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{3}{3}\right) + \ldots + f\left(\frac{n}{3}\right)$$
$$+ \ldots$$
$$+ f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n}{n}\right),$$

sendo n inteiro positivo.

SOLUÇÕES – NÍVEL 1

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

Cada tipo de pontuação aparece 8 vezes dentre as 28 peças do dominó. Portanto o número total de pontos é: 8.(0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 168.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:

Traçando a menor diagonal do paralelogramo, observamos que metade do mesmo equivale a um triângulo retângulo pequeno, cuja área é ¼ da área do triângulo retângulo grande, que, por sua vez, é ¼ da área do quadrado. Logo a área do paralelogramo é igual a $2 \times 1/16 = 1/8$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

Ao furar após a primeira dobra, Carlinhos faz 2 furos; após a segunda dobra, faz 4 furos, após a terceira dobra, faz 8 furos, etc. Assim, ao desdobrar a folha, ele irá contar $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$ furos. Notando que:

$1 + 2 = 2^2 - 1$ (após a primeira dobra)
$1 + 2 + 4 = 2^3 - 1$ (após a segunda dobra)
$1 + 2 + 4 + 8 = 2^4 - 1$ (após a terceira dobra), etc

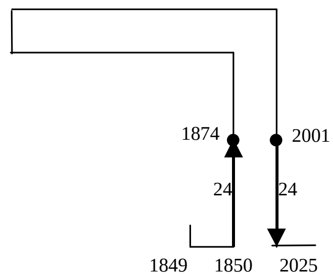
Basta encontrar o menor k tal que $2k - 1$ é maior ou igual a 100

$$2^k - 1 \geq 100 \Leftrightarrow k \geq 7$$

Assim, o menor k vale 7. Isso corresponde a 6 dobras.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:

Os pontos correspondentes aos quadrados perfeitos pares e ímpares estão sobre os lados vertical e horizontal do quadriculado, respectivamente. Os quadrados perfeitos mais próximos de 2001 são $1936 = 44^2$ e $2025 = 45^2$. Como 2001 está mais próximo de 2025, o ponto correspondente está no segmento vertical descendente que termina em 2025. Logo o ponto imediatamente abaixo dele corresponde ao número **2002**. Para achar o número do ponto imediatamente à esquerda, consideramos o quadrado perfeito ímpar anterior, que é $43^2 = 1849$. O ponto desejado está no segmento ascendente que começa em 1850 e situado à mesma distância que o ponto 2001 está de 2025. Logo o número correspondente é: 1850 + (2025–2001) = 1850 + 24 = **1874**.



SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5:

Sabemos que todos os números inteiros maiores do que 1 admitem pelo menos um divisor (ou fator) primo. Dessa forma,

- se n tem dois divisores primos p e q então 1, p, q e pq são divisores de n; logo n tem mais que três divisores;
- se n é primo, então tem somente dois divisores: 1 e n;
- se n é uma potência de um primo p, ou seja, é da forma p^s, então $1, p, p^2, ..., p^s$ são os divisores positivos de n. Para que n tenha três divisores s deverá ser igual a 2, isto é, $n = p^2$. Assim, os inteiros menores que 1000 com três divisores são: 4, 9, 25, 49, 121, 169, 289, 361, 529, 841, 961.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6:

Os algarismos das unidades dos quadrados dos números de 1 a 10 são, respectivamente, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1 e 0. Ora, a soma dos números formados por esses algarismos é 45. Portanto, a soma $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 10^2$ tem como algarismo das unidades o número 5. De 11 a 20, os algarismos das unidades dos números se repetem na mesma ordem; portanto, o algarismo das unidades da soma de seus quadrados também é 5. Conseqüentemente, a soma dos quadrados dos números de 1 a 20 tem 0 como algarismo das unidades. Logo a soma $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2$ tem zero como algarismo das unidades se N é múltiplo de 20. Como $N = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + 196883^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 196880^2 + 196881^2 + 196882^2 + 196883^2$, concluímos que o algarismo das unidades de N é o mesmo do número 0 + 1 + 4 + 9 = 14, ou seja, 4.

SOLUÇÕES – NÍVEL 2

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1: Veja a solução do problema 2 do Nível 1.
SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2: Veja a solução do problema 4 do Nível 1.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:
Observando que no ano n é realizada a (n – 1978)-ésima OBM, temos que o ano n é super-olímpico se, e somente se, n – 1978 divide n. Assim, n – 1978 divide n – (n – 1978) = 1978. Como os divisores positivos de 1978 são 1, 2, 23, 43, 46, 86, 989 e 1978, os anos super-olímpicos são 1979, 1980, 2001, 2021, 2024, 2064, 2967 e 3956.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:
Os triângulos *ACQ* e *PAC* são isósceles. No triângulo *ACQ*, temos: $C\hat{A}Q = A\hat{Q}C = \hat{A}$

$A\hat{C}Q = \hat{C} + (180° - \hat{C})/2 = 90° + \hat{C}/2$

Logo $2\hat{A} + (90° + \hat{C}/2) = 180°$ (1)

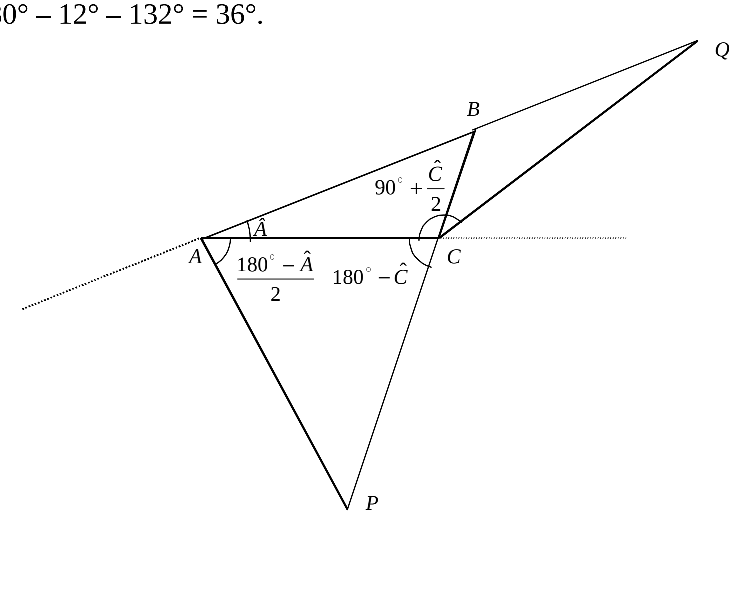
No triângulo *PAC*, temos:

$C\hat{A}P = (180° - \hat{A})/2$

$A\hat{C}P = A\hat{P}C = 180° - \hat{C}$

Logo $(180° - \hat{A})/2 + 2(180° - \hat{C}) = 180°$ (2)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (1) e (2), obtemos $\hat{A}$ = 12° e $\hat{C}$ = 132°; daí, $\hat{B}$ = 180° – 12° – 132° = 36°.



SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5:

Seja $A = \{x\,;y\,;t\,;z\}$ um conjunto intercambiável. Então podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$(10x + y)(10t + z) = (10y + x)(10z + t) \Leftrightarrow xt = yz \qquad (1)$$

Por (1), temos que 5 e 7 não podem aparecer em A. Se o maior dos elementos de A fosse menor ou igual a 4, teríamos $A = \{1;2;3;4\}$, que não é intercambiável. Logo A possui pelo menos um dos dígitos 6, 8 ou 9.

Se o maior elemento de A é 9, temos por (1) que 3 e 6 também pertencem a A. Neste caso temos o conjunto intercambiável $A = \{2;3;6;9\}$.

Se o maior elemento de A é 8, temos que 4 e outro algarismo par estão em A. Assim, temos $A = \{1;2;4;8\}$ ou $A = \{3;4;6;8\}$.

Se o maior elemento de A é 6, temos que 3 e outro algarismo par estão em A. Desta forma, $A = \{1;2;3;6\}$ ou $A = \{2;3;4;6\}$.

Assim, temos no total 5 conjuntos intercambiáveis: $\{2;3;6;9\}$, $\{1;2;4;8\}$, $\{3;4;6;8\}$, $\{1;2;3;6\}$ e $\{2;3;4;6\}$.

Obs. O enunciado não deixaria claro que as outras possibilidades, por exemplo: $(10x + y)\cdot(10t + z) = (10x + z)\cdot(10y + t)$, não deveriam ser consideradas. A análise dessas possibilidades torna o problema bem mais complicado, porém não acrescenta novos conjuntos intercambiáveis aos listados acima.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6:

Como o padrão deve ser simétrico, basta decidir os primeiros 5 furos pelos quais o cadarço deve passar. A partir daí, os furos ficam determinados pela simetria. Por exemplo, o 7° furo deve ser o outro furo da mesma linha visitada no 4° furo. Note, ainda, que a simetria implica em que as linhas visitadas nos 5 primeiros furos são todas distintas. Além disso, a primeira destas linhas é obrigatoriamente a de cima e a 5ª é obrigatoriamente a de baixo, já que os furos da linha de baixo são visitados consecutivamente.

Assim, para obter um padrão para o cadarço, podemos iniciar pelo furo da esquerda da linha superior e devemos decidir:

- em que ordem as 3 linhas intermediárias são visitadas
- de que lado queremos passar nestas 3 linhas e na linha de baixo.

Para escolher a ordem das 3 linhas, observamos que a primeira pode ser escolhida de 3 modos; a seguir, a segunda pode ser escolhida de 2 modos, ficando a terceira determinada. Logo há 6 possibilidades de escolha para a ordem das linhas.

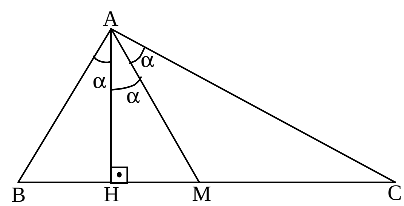
Para escolher o lado por onde passar nas 4 linhas, temos duas opções para cada uma delas, para um total de

$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ possibilidades. Logo o número total de modos de amarrar o cadarço é $6 \times 16 = 96$.

Outra solução:
Começando do lado esquerdo da linha superior, o segundo furo pode ser escolhido de 6 modos (qualquer um das linhas intermediárias); o terceiro de 4 modos (nas duas intermediárias restantes) e o quarto e quinto de 2 modos cada (suas linhas estão determinadas, bastando escolher o lado). Logo há um total de $6 \times 4 \times 2 \times 2 = 96$ possibilidades.

SOLUÇÕES – NÍVEL 3

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1: Veja a solução do problema 3 do nível 2.
SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:



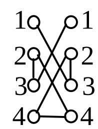
Seja M o ponto médio de BC e H o pé da altura relativa a A. Temos que AH é comum aos triângulos AHM e AHB, $A\hat{H}B \cong A\hat{H}M$ (retos) e $H\hat{A}M \cong H\hat{A}B$, logo, pelo caso ALA, os triângulos AHM e AHB são congruentes. Assim, $BH = HM = MC/2$, pois $MC = MB$. Como AM é bissetriz de $H\hat{A}C$, pelo teorema das bissetrizes $AH/AC = HM/MC \Leftrightarrow AH/AC = 1/2 \Leftrightarrow \cos 2\alpha = 1/2$. Como $0 < 2\alpha < 180^o$, $2\alpha = 60^o \Leftrightarrow \alpha = 30^o$. Portanto os ângulos do triângulo ABC são $m(B\hat{A}C) = 3\alpha = 90^o$, $m(A\hat{B}C) = 90^o - \alpha = 60^o$ e $m(A\hat{C}B) = 90^o - 2\alpha = 30^o$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:
Fazendo $y = -x$, temos $f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) + 8x(-x) + 115 \Leftrightarrow f(0) = 2f(x) - 8x^2 + 115 \Leftrightarrow f(x) = 4x^2 + (f(0) - 115)/2$. Fazendo $x = 0$ nesta última igualdade, temos $f(0) = 4 \cdot 0^2 + (f(0) - 115)/2 \Leftrightarrow f(0) = -115$. Logo $f(x) = 4x^2 + (f(0) - 115)/2 \Leftrightarrow f(x) = 4x^2 - 115$ e verificamos de fato que esta função satisfaz as condições do enunciado: $f(-x) = 4(-x)^2 - 115 = 4x^2 - 115 = f(x)$ e $f(x) + f(y) + 8xy + 115 = 4x^2 - 115 + 4y^2 - 115 + 8xy + 115 = 4(x + y)^2 - 115 = f(x + y)$. Assim, $f(x) = 4x^2 - 115$ é a única função que satisfaz todas as condições do enunciado.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4: Veja a solução do problema 5 do Nível 2.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5:
Numere os furos superiores com o número 1, os furos imediatamente abaixo com o número 2 e assim por diante, até os furos inferiores, que recebem o número n.

Observe que basta estabelecermos os primeiros n furos onde o cadarço irá passar (o padrão é simétrico). Uma maneira pode ser definida por uma seqüência indicando os números dos primeiros n furos onde o laço passa (observe que tal seqüência tem todos os números de 1 a n, começa com 1 e termina com n) e por uma outra seqüência de comprimento $n - 1$ cujo k-ésimo termo indica se o cadarço muda de lado ao passarmos do k-ésimo para o $(k + 1)$-ésimo termo da primeira seqüência. Por exemplo, (1, 3, 2, 4) e (muda, não muda, muda) representa



Assim, como há $(n - 2)!$ seqüências com os números de 1 a n começando com 1 e terminando com n e 2^{n-1} seqüências indicando se o cadarço muda de lado ou não, há $(n - 2)! \cdot 2^{n-1}$ maneiras.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6:

Seja S a soma pedida. Como $f(x) + f(1/x) = \dfrac{x^2}{1+x^2} + \dfrac{(1/x)^2}{1+(1/x)^2} = 1$, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
2S = {} & f\left(\frac{1}{1}\right)+f\left(\frac{2}{1}\right)+f\left(\frac{3}{1}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{1}\right)\\
& +f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{2}{2}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{2}\right)\\
& +\cdots\\
& +f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\\
& +f\left(\frac{1}{1}\right)+f\left(\frac{2}{1}\right)+f\left(\frac{3}{1}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{1}\right)\\
& +f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{2}{2}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{2}\right)\\
& +\cdots\\
& +f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\\
\Leftrightarrow 2S = {} & \left(f\left(\frac{1}{1}\right)+f\left(\frac{1}{1}\right)\right)+\left(f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{2}{1}\right)\right)+\left(f\left(\frac{3}{1}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)\right)\\
& +\cdots+\left(f\left(\frac{n}{n}\right)+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)(n^2 \text{ pares de parcelas})\\
\Leftrightarrow 2S = {} & n^2\\
\Leftrightarrow S = {} & \frac{n^2}{2}
\end{aligned}
$$

XXIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e Soluções da Terceira Fase

PROBLEMAS – NÍVEL 1

PROBLEMA 1:

Numa famosa joalheria estão armazenadas várias pedras preciosas dos seguintes tipos: esmeraldas; safiras e rubis. Todas as pedras do mesmo tipo têm o mesmo valor. Além disso, 24 esmeraldas valem tanto quanto 12 rubis e também valem tanto quanto 8 safiras.

Com R$350.000,00 um príncipe comprou um conjunto com 4 esmeraldas, 6 rubis e 4 safiras. Quanto custa cada tipo de pedra?

PROBLEMA 2:

Um cubinho foi colocado no canto de uma sala, conforme a Figura 1.

Empilharam-se outros cubinhos iguais ao primeiro, de forma a cobrir as faces visíveis do mesmo, usando-se o menor número possível de peças. Como se pode ver na Figura 2, após a colocação dos novos cubinhos, restam 9 faces visíveis desses cubinhos.

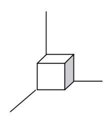


Figura 1

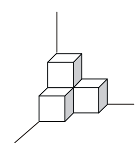


Figura 2

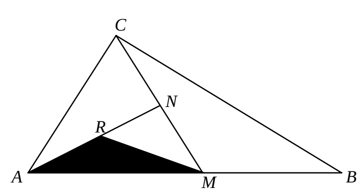
a) Quantos cubinhos iguais a esses, no mínimo, seria necessário empilhar, de forma a cobrir aquelas 9 faces visíveis?

b) Continua-se a fazer essa pilha, repetindo-se o procedimento descrito. Quando a pilha tiver um total de 56 cubinhos, quantas faces poderão ser vistas?

PROBLEMA 3:

No triângulo ABC tem-se que M é o ponto médio do lado AB (isto é, os segmentos AM e MB têm o mesmo comprimento). N é o ponto médio de MC e R é o ponto médio de NA.

O triângulo ABC tem área 2000. Determine a área do triângulo AMR.



PROBLEMA 4:

Dizemos que um número natural é *legal* quando for soma de dois naturais consecutivos e também for soma de três naturais consecutivos.

a) Mostre que 2001 é legal, mas 1999 e 2002 não são legais.

b) Mostre que 2001^{2001} é legal.

PROBLEMA 5:

As 42 crianças de uma escola infantil deram as mãos formando uma fila e cada uma delas recebeu um número da seguinte maneira: a primeira delas ficou com o número 1, a segunda ficou com o número 2 e, assim sucessivamente, até a última, que ficou com o número 42. Continuando de mãos dadas, foram para um pátio, onde cada uma delas ficou sobre uma lajota quadrada; duas crianças com números consecutivos ficaram em lajotas vizinhas com um lado comum (ou seja, do lado esquerdo, do lado direito, na frente ou atrás, mas nunca em diagonal).

Ao relatar esse fato para a diretora, a inspetora Maria fez o desenho à esquerda, mostrando a posição de três crianças sobre o retângulo formado pelas 42 lajotas, sobre as quais estavam as crianças. Num outro comunicado, a inspetora Célia fez outro desenho, mostrado à direita, com a posição das mesmas crianças sobre o mesmo retângulo. Ao receber os dois desenhos a diretora disse a uma das inspetoras: "O seu desenho está errado".

i) Com qual das duas inspetoras a diretora falou? Qual foi o raciocínio da diretora?

ii) Complete o desenho correto satisfazendo as condições do enunciado.

	11	20				
	31					

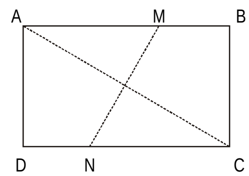
(Desenho de Maria)

	11	20				
	31					

(Desenho de Célia)

PROBLEMAS – NÍVEL 2

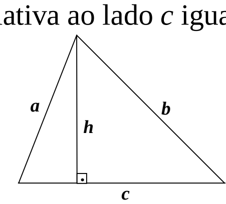
PROBLEMA 1:
Uma folha de papel retangular *ABCD*, de área 1, é dobrada em sua diagonal *AC* e, em seguida, desdobrada; depois é dobrada de forma que o vértice *A* coincida com o vértice *C* e, em seguida, desdobrada, deixando o vinco *MN*, conforme desenho abaixo.



a) Mostre que o quadrilátero *AMCN* é um losango.
b) Se a diagonal *AC* é o dobro da largura *AD*, qual é a área do losango *AMCN*?

PROBLEMA 2: Veja o problema 5 do Nível 2.

PROBLEMA 3:
Dado um inteiro positivo h demonstre que existe um número finito de triângulos de lados inteiros a, b, c e altura relativa ao lado c igual a h .



PROBLEMA 4:
Mostre que não existem dois números inteiros a e b tais que $(a + b)(a^2 + b^2) = 2001$.

PROBLEMA 5:
Sejam a, b e c números reais não nulos tais que $a + b + c = 0$.
Calcule os possíveis valores de $\dfrac{(a^3 + b^3 + c^3)^2 (a^4 + b^4 + c^4)}{(a^5 + b^5 + c^5)^2}$.

PROBLEMA 6:
Em um quadrilátero convexo, a *altura* em relação a um lado é definida como a perpendicular a esse lado passando pelo ponto médio do lado oposto. Prove que as quatro alturas têm um ponto comum se e somente se o quadrilátero é inscritível, isto é, se e somente se existe uma circunferência que contém seus quatro vértices.

PROBLEMAS – NÍVEL 3

PROBLEMA 1:

Prove que $(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$ para quaisquer números reais positivos *a, b* e *c*.

PROBLEMA 2:

Dado um inteiro $a_0 > 1$ definimos uma seqüência $(a_n)_{n\geq 0}$ da seguinte forma; para cada $k \geq 0$, a_{k+1} é o menor inteiro $a_{k+1} > a_k$ tal que *mdc* $(a_{k+1}, a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_k) = 1$. Diga para quais valores de a_0 temos que todos os termos a_k da seqüência são primos ou potências de primos.

PROBLEMA 3:

E e *F* são pontos do lado *AB*, do triângulo *ABC*, tais que *AE* = *EF* = *FB*. *D* é ponto da reta *BC* tal que *BC* é perpendicular a *ED*. *AD* é perpendicular a *CF*. Os ângulos *BDF* e *CFA* medem *x* e 3*x*, respectivamente. Calcule a razão (*DB*) / (*DC*).

PROBLEMA 4:

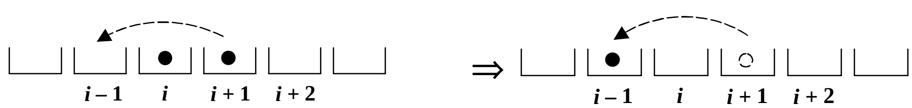
Uma calculadora tem o número 1 na tela. Devemos efetuar 2001 operações, cada uma das quais consistindo em pressionar a tecla *sen* ou a tecla *cos*. Essas operações calculam respectivamente o seno e o cosseno com argumentos em radianos. Qual é o maior resultado possível depois das 2001 operações?

PROBLEMA 5: Veja o problema 6 do Nível 2.

PROBLEMA 6:

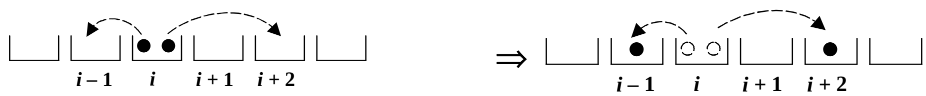
Temos uma fileira longa de copos e *n* pedras no copo central (copo 0). Os seguintes movimentos são permitidos:

Movimento tipo *A*



Se há pelo menos uma pedra no copo *i* e pelo menos uma no copo *i* + 1 podemos fazer uma pedra que está no copo *i* + 1 pular para o copo *i* – 1 eliminando uma pedra do copo *i*.

Movimento tipo *B*.



Se há pelo menos duas pedras no copo i podemos pular uma para o copo $i + 2$ e uma outra para o copo $i - 1$.
Demonstre o seguinte fato: fazendo os movimentos tipo A ou B durante um tempo suficientemente longo sempre chegaremos a uma configuração a partir da qual não é mais possível fazer nenhum desses dois tipos de movimento. Além disso essa configuração final não depende da escolha de movimentos durante o processo.

SOLUÇÕES – NÍVEL 1

PROBLEMA 1: SOLUÇÃO DE RAPHAEL RODRIGUES MATA (SALVADOR – BA)

Se 24 esmeraldas equivalem a 12 rubis, significa que 1 rubi equivale a duas esmeraldas, e se 24 esmeraldas equivalem a 8 safiras, uma safira equivale a 3 esmeraldas. Assim, se o príncipe comprar 6 rubis, é o mesmo que ele comprar 12 esmeraldas, e se ele comprar 4 safiras, é o mesmo que ele comprar 12 esmeraldas. Assim, o conjunto comprado pelo príncipe tem o mesmo valor de 28 esmeraldas (4 + 12 + 12 = 28).

Para se descobrir o valor de cada esmeralda, basta efetuar $\frac{350000}{28} = 12500$.

Sabemos que o rubi vale o dobro da esmeralda, assim, temos $12500 \times 2 = 25000$.
Por fim, sendo a safira o triplo do valor da esmeralda, temos $12500 \times 3 = 37500$.
Finalmente, descobrimos que a esmeralda custa R$12500,00; o rubi custa R$25000,00; e cada safira tem o valor de R$37500,00.

PROBLEMA 2: SOLUÇÃO DE EDUARDO FISCHER (ENCANTADO - RS)

a) São 6 cubos; chego a esta solução apenas olhando. Na fileira de baixo se acrescentam 3 cubos, na do meio 2 e na de cima 1 (a de cima antes estava vazia). Note que primeiro foi botado um cubo, depois 3, que é um mais dois, agora bota 6, que é 1 + 2 + 3. Depois acrescentarei 10 (1 + 2 + 3 + 4) e depois 15 (1 + 2 + 3 + 4 + 5). Isso se deve ao fato que, ao quadricular o chão, na figura 1 se acrescenta um cubo ao nada. Depois se acrescenta 2 cubos (no chão) e 1 em cima. Após termos 4 cubos, se acrescenta 3 (no chão), 2 para cobrir os 2 que antes estão no chão (os mais distantes da parede) e 1 para cobrir lá em cima. E assim segue.
b) Para chegar a 56, vou somando: 1, 3 = 1 + 2, 6 = 1 + 2 + 3, 10 = 1 + 2 + 3 + 4, 15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 e 21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6. A parede terá a altura de 6 cubos, quando isso acontecer. Vamos listar as faces e cubos à mostra:

No andar de cima há 1 cubo e 3 faces.
No segundo andar há 6 faces e 2 cubos.
No terceiro andar há 9 faces e 3 cubos.
No quarto andar há 12 faces e 4 cubos.
No quinto andar há 15 faces e 5 cubos.
No andar de baixo há 18 faces e 6 cubos.
Para cada cubo à mostra, há 3 faces vistas. São 21 cubos à mostra, 63 faces no total.

PROBLEMA 3: SOLUÇÃO DE FELIPE GONÇALVES ASSIS (CAMPINA GRANDE – PB)

O triângulo *ABC* tem área 2000. Ao ser cortado pelo segmento de reta *MC*, divide-se em outros 2 triângulos menores, de mesma área, *ACM* e *CMB*. Pode-se perceber que eles têm áreas iguais pois:

- A base de ambos tem o mesmo comprimento, pois *AM* = *MB*, já que *M* é o ponto médio de *AB*.
- A altura dos dois também é a mesma.
- Duas medidas que determinam a área de um triângulo são, justamente, base e altura. Assim descobrimos uma propriedade dos triângulos:

Se um triângulo for cortado por um segmento de reta que parte do ponto médio de um dos segmentos que o compõem até o vértice formado pelas outras duas retas, obter-se-ão 2 novos triângulos, de mesma área, correspondente a metade da área do primeiro triângulo.
Isto é o que ocorre com o triângulo *ABC* que forma os triângulos *ACM* e *CMB*, cada um com área 1000 (= 2000:2).
Ocorre isto também com *ACM*, cortado pelo segmento *AN*, ele forma *AMN* e *ACN*, ambos com área 500 (= 1000:2).
Acontece o mesmo com *AMN* que é cortado por *RM*, originando *AMR* e *RMN*, cada qual com área 250(= 500:2).
Resposta: A área de *AMR* é de 250.

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DE PAULO ANDRÉ CARVALHO DE MELO (RIO DE JANEIRO – RJ)

Para um número ser a soma de 2 naturais consecutivos ele tem que ser:
$x + x + 1 = 2x + 1$.
Ou seja, ímpar.
Para um número ser a soma de 3 naturais consecutivos ele tem que ser:
$x + x + 1 + x + 2 = 3x + 3$.
Ou seja, múltiplo de 3.
Portanto um número legal é aquele que é múltiplo de 3 e ímpar

a) O 2001 é múltiplo de 3 e é ímpar, mas o 2002 e o 1999 não são.

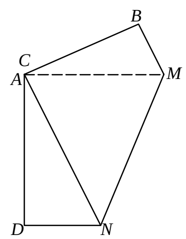
b) Já que 2001 é múltiplo de 3, 2001^{2001} terá 3^{2001} como um de seus fatores primos e será ímpar pois um número ímpar multiplicado por outro número ímpar é igual a número ímpar.
Portanto 2001^{2001} é legal, já que respeita as condições para um número ser legal.

PROBLEMA 5: Veja a solução do Problema 2 do Nível 2.

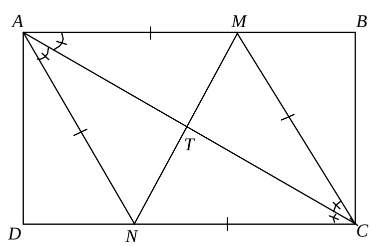
SOLUÇÕES – NÍVEL 2

PROBLEMA 1: a) SOLUÇÃO DE ELTON GOMES CORIOLANO (FORTALEZA – CE)

Se fizermos a segunda dobradura, teremos a seguinte figura:



Logo percebemos que $\overline{AN} = \overline{CN}$ e que $\overline{AM} = \overline{CM}$. Temos, então, dois triângulos isósceles: o triângulo *ANC* e o triângulo *AMC*. Então os ângulos $C\hat{A}N$ e $A\hat{C}N$ são congruentes e os ângulos $C\hat{A}M$ e $A\hat{C}M$ são congruentes também. Sabendo que *AM* é paralelo a *NC*, pode-se dizer que os ângulos $C\hat{A}M$ e $A\hat{C}N$ são congruentes, pois estes são ângulos alternos internos. Assim, $C\hat{A}N = A\hat{C}N = C\hat{A}M = A\hat{C}M$. Portanto, os ângulos $M\hat{A}N$ e $M\hat{C}N$ são congruentes. Logo, $A\hat{C}N$ é congruente a $A\hat{M}C$. Assim, *AMCN* é paralelogramo, pois seus ângulos opostos são congruentes. Por este motivo, os lados opostos também serão iguais, ou seja, *AM* = *CN* e *AN* = *CM*. Dessa forma, *AM* = *CN* = *AN* = *CM*. Logo, o quadrilátero *AMCN* é um paralelogramo com todos os lados iguais, ou seja, *AMCN* é um losango.

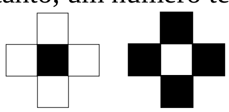


b) SOLUÇÃO DE THIAGO COSTA LEITE SANTOS (SÃO PAULO – SP)

Seja *T* o centro do retângulo. Como $\overline{AT}$ é metade de $\overline{AC}$, $\overline{AT} = \overline{AD}$, os triângulos *ATN* e *ADN* são retângulos, logo $\Delta\overline{ATN} \equiv \Delta\overline{ADN}$, pelo caso especial catetohipotenusa (a hipotenusa comum aos dois triângulos). Analogamente, temos $\Delta CBM \equiv \Delta CTM$ e portanto o retângulo $ABCD$ está dividido em 6 triângulos congruentes. Portanto a área de cada triângulo é igual a $\frac{(ABCD)}{6} = \frac{1}{6}$ e como o losango $AMCN$ possui 4 dos 6 triângulos, sua área será igual a $4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

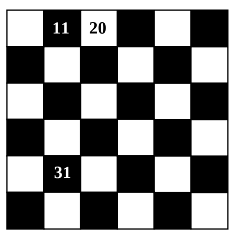
PROBLEMA 2: SOLUÇÃO DE RAFAEL DAIGO HIRAMA (CAMPINAS – SP)

i) Vamos pintar o retângulo igual a um tabuleiro de damas. Pelo enunciado o número anterior (e o posterior) de um número está acima, abaixo, a esquerda ou a direita. Portanto, um número tem sua cor diferente de seus dois vizinhos.

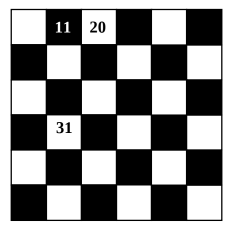


Então, se o primeiro não é pintado, o segundo é, o terceiro não é, o quarto é, etc.
Ou seja, os números pares tem uma cor e os impares outra.

Pintando os dois tabuleiros percebemos que no de Célia o 20 e o 31 estão da mesma cor. Logo o desenho de Célia está errado.



Desenho da Maria



ii) Para completar o desenho, vejamos que o 10 e o 12 devem estar no quadrado à esquerda e no abaixo do 11 pois este não tem mais vizinhos. Igualmente o 19 e o 21 estão à direita ou abaixo do 20.

O número 12 deve estar abaixo do 11 pois, se não o 9 teria que ficar no lugar marcado com um círculo, e não haveria lugar para o 8 (pois o único modo de conectar o 12 com o 20 seria como na figura).

12	11	20
13	10	19
14	9	18
15	16	17

Logo o 12 está abaixo do 11.

Vamos provar que o 19 está abaixo de 20. Se o 19 estivesse a direita de 20 travaria a saída para o 21 formando uma barreira sem saída. Logo o 19 está abaixo do 20.

Com isso, podemos montar algo obrigatório (tudo por falta de outras opções).

10	**11**	**20**	**21**		
9	**12**	**19**			
8	**13**				
7					
	31				

1) O 9 tem que estar abaixo do 10.
2) O 13 abaixo do 12.
3) O 8 abaixo do 9.
4) O 7 abaixo do 8.

Temos que o 21 deve alcançar o 31 em 9 espaços, o 13 alcançar o 19 em 5 espaços e temos mais 6 espaços para fazer do 6 ao 1.

Se colocarmos o 6 à direita do 7 teríamos problemas, pois o caminho entre o 21 e o 31 (o 30 não pode ficar embaixo pois senão isolaria o 31 de uma parte em branco pois o cordão 29 a 31 impediria e nenhuma parte do cordão pois senão também faria uma área sem alcance).

10	**11**	**20**	**21**	**22**	**23**
9	**12**	**19**			**24**
8	**13**				**25**
7	**6**				**26**
	31	**30**	**29**	**28**	**27**

Daria pouco espaço para 11 espaços (14 $\rightarrow$ 18 e 1 $\rightarrow$ 6) (O 30 deve ficar na direita do 31 neste caso pois abaixo e à esquerda ocorreria o espaço sem alcance), 8 no máximo.

Então o 6 é abaixo do 7, o 5 abaixo do 6, o 4 à direita do 5, o 3 à direita do 4 (estes 3 por falta de opção) e o 2 à direita do 3 (pois à esquerda do 31 tem o 6 e abaixo tem o 4 sobrando os outros dois (acima e à direita para o 30 e o 32).

Logo, teremos:

10	**11**	**20**	**21**	22	23	
9	**12**	**19**	22	23	24	
8	**13**	**28**	27	24	25	
7		29	26	25	26	
6	**31**	30	29	28	27	
5	**4**	**3**	**2**			

10	**11**	**20**	**21**	**22**	**23**	
9	**12**	**19**	**18**	**17**	**24**	
8	**13**	**14**	**15**	**16**	**25**	
7	**30**	**29**	**28**	**27**	**26**	
6	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	
5	**4**	**3**	**2**	**1**		

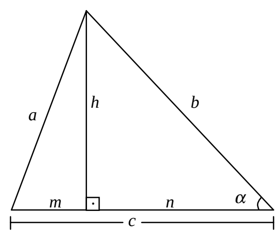
Agora, o cordão 21 $\rightarrow$ 31 deve ter o 30 acima do 31 pois senão forma a mesma área sem alcance como os exemplos. Então o 32 fica à direita do 31 e o 29 à direita do 30, o 14 à direita do 13, o 28 à direita do 29, o 33 à direita do 32, o 1 à direita do 2, o 34 à direita do 33, o 15 à direita do 14, o 18 à direita do 19, o 22, 17, 16, 27 à direita do 21, 18, 15 e 28 respectivamente. O 23, 26 e 35 devem ficar à direita do 22, 27 e 34, respectivamente. Como o 23 deve chegar ao 26 em 2 espaços, o 24 fica embaixo do 23 e o 25, embaixo do 24. Então é só completar com o 35 a 42 do único modo possível.

Respostas: i) A diretora falou com Célia. A direitora percebeu que o 20 e o 31 não poderiam estar na mesma cor se o tabuleiro fosse pintado como o de damas.
ii)

10	11	20	21	22	23	42
9	12	19	18	17	24	41
8	13	14	15	16	25	40
7	30	29	28	27	26	39
6	31	32	33	34	35	38
5	4	3	2	1	36	37

Obs. Estendendo-se esse raciocínio é possível demonstrar que esta é a única maneira de se completar o desenho.

PROBLEMA 3: SOLUÇÃO DE THIAGO COSTA LEITE SANTOS (SÃO PAULO – SP)



Temos $\left| \begin{array}{l} a^2 = h^2 + m^2 \\ b^2 = h^2 + n^2 \end{array} \right.$

Para uma equação Pitagórica:
$x^2 = y^2 + z^2$, resolvida em inteiros positivos, temos:

$$\left| \begin{array}{l} z^2 \geq 2y + 1 \text{ (pois senão } y^2 < x^2 < (y+1)^2) \\ y^2 \geq 2z + 1 \text{ (análoga a de cima)} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} z^2 \geq 2y + 1 \\ \dfrac{y^2 - 1}{2} \geq z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} z^2 \geq 2y + 1 \\ \left(\dfrac{y^2 - 1}{2} \right)^2 \geq z^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left(\dfrac{y^2 - 1}{2} \right)^2 \geq z^2 \geq 2y + 1$$

Mas se substituirmos y por h e z por m ou n, teremos que estes estarão limitados a certos valores, logo a, b, e c estão limitados a certos valores e, portanto acabou!!!
Mas supomos que m e n são inteiros positivos e eles poderiam ser irracionais e a soma de dois irracionais dar um inteiro.
Para isto podemos aplicar a lei dos cossenos.

$\cos\alpha = \dfrac{n}{b}; n = \sqrt{(b^2 - h^2)}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2c\cdot\sqrt{b^2 - h^2}$. Assim, se n é irracional, a^2 também será, absurdo. Portanto m e n são inteiros.

Obs.: m e n não poderiam ser fracionários, observando as equações iniciais, que mostram que m^2 e n^2 são inteiros. Note que se $n = p/q$ é um racional não inteiro, então $n^2 = p^2/q^2$ também não será inteiro, pois se q não divide p então q^2 não divide p^2.

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DE HENRY WEI CHENG HSU (SÃO PAULO – SP)

2001 = 3. 23 . 29

Temos que $a^2 + b^2$ é sempre ≥ 0, então, para o produto $(a + b)(a^2 + b^2)$ valer 2001, $a + b$ não pode ser negativo.

Como a e b são inteiros, $a^2 \geq a$ e $b^2 \geq b$, assim $a^2 + b^2 \geq a + b$ ($a^2 < a$ somente quando $0 < a < 1$)

Os valores possíveis para $(a + b)$ e $(a^2 + b^2)$ são:

1) $a + b = 1$ e $a^2 + b^2 = 2001$
2) $a + b = 3$ e $a^2 + b^2 = 667$
3) $a + b = 23$ e $a^2 + b^2 = 87$
4) $a + b = 29$ e $a^2 + b^2 = 69$

Vamos analisar os casos 2) e 3).

Em ambos temos $a + b \equiv 3 (\text{mod } 4)$ e $a^2 + b^2 \equiv 3 (\text{mod } 4)$

Para $a + b \equiv 3 (\text{mod } 4)$, podemos ter os seguintes casos:

$a \equiv 0$ e $b \equiv 3 \Rightarrow a^2 \equiv 0$ e $b^2 \equiv 1$

$a \equiv 1$ e $b \equiv 2 \Rightarrow a^2 \equiv 1$ e $b^2 \equiv 0$

$a \equiv 2$ e $b \equiv 1 \Rightarrow a^2 \equiv 0$ e $b^2 \equiv 1$

$a \equiv 3$ e $b \equiv 0 \Rightarrow a^2 \equiv 1$ e $b^2 \equiv 0$

Então, quando $a + b \equiv 3$ (mod 4), $a^2 + b^2$ será congruente a 1 (mod 4). Portanto os casos 2) e 3) não podem existir. Vamos analisar o caso 1)

Para $a = 1$ e $b = 0$ e $a = 0$ e $b = 1$, $a^2 + b^2$ sempre valerá 1.

Quando um dos dois for negativo: $a = n + 1$ e $b = -n$ ou vice-versa

$a + b = n + 1 - n = 1$

$a^2 + b^2 = n^2 + 2n + 1 + n^2 = 2n^2 + 2n + 1$

$a^2 + b^2 = 2001 \Leftrightarrow 2n^2 + 2n + 1 = 2001 \Leftrightarrow 2n^2 + 2n - 2000 = 0 \Leftrightarrow n^2 + n - 1000 = 0$

$n^2 + n - 1000 = 0$

$\Delta = 1 + 4000 = 4001$ como 4001 não é quadrado perfeito, n não é inteiro.

Outra maneira: $a + b = 1 \Leftrightarrow a = 1 - b$

$a^2 + b^2 = b^2 - 2b + 1 + b^2 = 2b^2 - 2b + 1$

$2b^2 - 2b + 1 = 2001 \Leftrightarrow 2b^2 - 2b - 2000 = 0 \Leftrightarrow b^2 - b - 1000 = 0$
$\Delta = 1 + 4000 = 4001$ (não é quadrado perfeito).
Assim, o caso 1) não existe. Vamos analisar o caso 4).
$a + b = 29 \Leftrightarrow b = 29 - a$
$a^2 + b^2 = a^2 + 841 - 58a + a^2 = 2a^2 - 58a + 841$
$a^2 + b^2 = 69 \Leftrightarrow 2a^2 - 58a + 772 = 0 \Leftrightarrow a^2 - 29a + 386 = 0$
$\Delta = 841 - 1544 < 0$
Como $\Delta < 0$, a não é inteiro. Assim, o caso 4) não pode ocorrer.
Como nenhum caso pode ocorrer, não existem dois números a e b tais que $(a + b)(a^2 + b^2) = 2001$.

PROBLEMA 5: SOLUÇÃO DE MARCELA SOBRINHO PEREIRA (FORTALEZA – CE)

Pelo enunciado, temos: $a + b + c = 0$
$a = -(b + c) \Rightarrow a^3 = -b^3 - c^3 - 3b^2c - 3bc^2 = -b^3 - c^3 - 3bc(b + c)$,
$a^4 = b^4 + c^4 + 4b^3c + 4c^3b + 6c^2b^2$ e $a^5 = -b^5 - c^5 - 5b^4c - 5c^4b - 10b^3c^2 - 10c^3b^2$.
Substituindo na expressão, temos:

$$\frac{(-3bc(b+c))^2(2b^4 + 2c^4 + 4b^3c + 4bc^3 + 6c^2b^2)}{(5bc(b^3 + c^3 + 2b^2c + 2bc^2))^2} =$$

$$\frac{9b^2c^2(b+c)^2(2b^4 + 2c^4 + 4b^3c + 4bc^3 + 6c^2b^2)}{25b^2c^2(b^3 + c^3 + 2b^2c + 2bc^2)^2} =$$

$$\frac{9}{25}\cdot\frac{2(b^6 + c^6 + 8b^2c^4 + 4b^5c + 10b^3c^3 + 8b^4c^2 + 4bc^5)}{(b^6 + c^6 + 8b^2c^4 + 4b^5c + 10b^3c^3 + 8b^4c^2 + 4bc^5)} = \frac{18}{25}.$$

PROBLEMA 6: Veja a solução do problema 5 do nível 3.

SOLUÇÕES – NÍVEL 3

PROBLEMA 1: SOLUÇÃO DE CARLOS STEIN NAVES DE BRITO (GOIÂNIA - GO)

Seja $a + b = x$, $a + c = y$ e $b + c = z$. $(x, y, z > 0)$
Temos um sistema linear de variáveis a, b e c e

Resolvendo $\begin{cases} a + b = x \\ a + c = y \\ b + c = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = x \\ -b + c = y - x \\ b + c = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = x \rightarrow a = \dfrac{x + y - z}{2} \\ -b + c = y - x \rightarrow b = \dfrac{x + z - y}{2} \\ c = \dfrac{z + y - x}{2} \end{cases}$

Chamando $x + y + z = 2p$. Temos $a = p – z$, $b = p – y$ e $c = p – x$.
Logo a desigualdade vira:
$(a + b)(a + c) \geq \sqrt{abc(a+b+c)} \Leftrightarrow$

$$\Big(\underbrace{p-z+p-y}_{x}\Big)\Big(\underbrace{p-z+p-x}_{y}\Big) \geq 2\sqrt{(p-z)(p-y)(p-x)(\underbrace{p-x+p-y}_{z}+p-z)} \Leftrightarrow$$

$x \cdot y \geq 2\sqrt{(p-z)(p-y)(p-x)p}$. Basta provar isso.
Temos que:

$$x+y>z \begin{pmatrix} (a+b)+(a+c)>b+c \Leftrightarrow \\ 2a>0 \Leftrightarrow \\ a>0 \end{pmatrix};\ y+z>x \begin{pmatrix} (a+c)+(b+c)>(a+b) \Leftrightarrow \\ 2c>0 \Leftrightarrow \\ c>0 \end{pmatrix}$$

$$\text{e } x+z>y \begin{pmatrix} (a+b)+(b+c)>(a+c) \Leftrightarrow \\ 2b>0 \Leftrightarrow \\ b>0 \end{pmatrix}.$$

Assim x, y e z podem ser lados de um triângulo, sendo p o semiperímetro.
Assim seja α o ângulo desse triângulo entre x e y.
Logo a área A dele é: $A = \dfrac{x \cdot y sen\alpha}{2}$; como $sen\alpha \leq 1$, temos $\dfrac{x \cdot y \cdot 1}{2} \geq \dfrac{x \cdot y sen\alpha}{2} = A$
Mas A em função dos lados é $\sqrt{(p-z)(p-y)(p-x)p}$, logo
$\dfrac{xy}{2} \geq A = \sqrt{(p-z)(p-y)(p-x)p} \Leftrightarrow$ s $xy \geq 2\sqrt{(p-z)(p-y)(p-x)p}$, cqd.

PROBLEMA 2: SOLUÇÃO DE DAVI MÁXIMO ALEXANDRINO NOGUEIRA (FORTALEZA - CE)
Notação: *mdc* $(x, y) = (x, y)$.
Já que a_0 faz parte de $(a_n)_{n \geq 0}$, o próprio deve ser potência de primo.
Suponha $a_0 = p^m$ (p primo). Considere primeiro $p = 2$: $a_0 = 2^m$.
a_1 é o menor inteiro que satisfaz $a_1 > a_0$ e $(a_1, a_0) = 1$. Portanto, temos
$a_1 = a_0 + 1 = 2^m + 1$. Se m for ímpar, $a_1 = 2^m + 1 \equiv 0 \pmod 3$
$\Rightarrow 3|a_1 \Rightarrow a_1 = 3^n$, pois todo termo de $(a_n)_{n \geq 0}$ deve ser potência de primo.
Logo $2^m + 1 = 3^n$.
Se $m = 1$, $3 = 3^n \Rightarrow n = 1$, $a_1 = 3$ e $a_0 = 2$ (I)
Se $m \geq 2$, segue que $4|2^m$, e $2^m + 1 \equiv 3^n \pmod 4 \Rightarrow 1 \equiv (–1)^n \pmod 4 \Rightarrow n$ par, digamos $n = 2n_0$. Logo, ficamos com:

$$2^m+1=3^{2n_0}\Rightarrow 2^m=(3^{n_0}-1)(3^{n_0}+1)\Rightarrow\begin{cases}3^{n_0}-1=2^{\alpha}\\3^{n_0}+1=2^{\beta}\end{cases}\Rightarrow 2=2^{\beta}-2^{\alpha}\Rightarrow 2=2^{\alpha}(2^{\beta-\alpha}-1)\Rightarrow\alpha=1$$

e $\beta=\alpha+1=2\Rightarrow m=3$ e $n = 2$ $\Rightarrow a_0=8\ \ a_1=9$ (II)

Agora observemos:

(I) $a_0=2\ \ a_1=3$

Então, $a_2=5$, $a_3=7$, $a_4=11.$ Provaremos por indução:

$a_i = (i + 1)$-ésimo primo

Supondo a hipótese válida para j, olhemos o passo indutivo $j\rightarrow j+1$:

$a_{j+1}>a_j;(a_{j+1},a_0a_1...a_j)=1$. Seja p o $(j + 2)$-ésimo primo.

Por hipótese, $a_i = (i + 1)$-ésimo primo. Seja $x\in\{a_j+1,a_j+2,...,p-1\}\Rightarrow x>a_j$ porém, $(x,a_0a_1...a_j)\neq 1$ pois os fatores primos de x pertencem ao produto $a_0a_1...a_j$ logo, $a_{j+1}=p$ pois p é o menor inteiro tal que $p > a_j$ e $(p, a_0\ldots a_j) = 1$ e o resultado segue.

(II): $a_0 = 8$ $a_1 = 9 \Rightarrow a_2 = 11$, $a_3 = 13$, $a_4 = 17$, $a_5 = 19$, $a_6 = 23$, $a_7 = 25 = 5^2$, $a_8 = 29$, $a_9 = 31$, $a_{10} = 37$, $a_{11} = 41$, $a_{12} = 43$, $a_{13} = 47$, $a_{14} = 49 = 7^2$, $a_{15} = 53$.

Prova analogamente por indução ("mesmo" passo indutivo anterior) que a partir de $i \geq 15$, $a_i = (i + 1)$-ésimo primo (indução feita no anexo).

Sendo assim, suponha $a_0 = 2^m$ com m par $(m > 0)$. Temos:

$a_0 = 2^m \Rightarrow a_1 = 2^m + 1 \Rightarrow a_2 = 2^m + 3$ (pois, $(a_2, a_1) = (a_2, a_0) = 1$) $\Rightarrow a_3 = 2^m + 5$.

Porém, como m é par, $a_3 \equiv 2^m + 5 \equiv (-1)^m + 5 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow 2^m + 5 = 3^n$

Resolvamos então $2^m + 5 = 3^n$.

Como $2^m = a_0 > 1 \Rightarrow m > 0$. Mas como estamos supondo m par $\Rightarrow m \geq 2 \Rightarrow 4\mid 2^m$. Logo,

$2^m + 5 = 3^n \Rightarrow 2^m + 5 \equiv 3^n \pmod 4 \Rightarrow 3^n \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow n$ par, digamos $n = 2n_0$. Logo,

$$2^{2m_0}+5=3^{2n_0}\Rightarrow 3^{2n_0}-2^{2m_0}=5\Rightarrow(3^{n_0}-2^{m_0})(3^{n_0}+2^{m_0})=5\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3^{n_0}-2^{m_0}=1\\3^{n_0}+2^{m_0}=5\end{cases}(\text{pois } 3^{n_0}-2^{m_0}<3^{n_0}+2^{m_0})$$

$$\Rightarrow 2^{m_0+1}=4\Rightarrow m_0=1\Rightarrow m=n=2\Rightarrow a_0=4$$

$$\Rightarrow a_1=5,\ \ a_2=7,\ \ a_3=9$$

Prova-se novamente por indução (mesmo passo indutivo da anterior) que para todo $i\geq 4$, $a_i = (i + 1)$-ésimo primo.

Agora, suponha $a_0 = p^m, p \neq 2. \Rightarrow a_1 = p^m + 1 = 2^n$ pois $2 \mid p^m + 1$. Se n for par, digamos $n = 2n_0$, veja (mod 3):

$p^m + 1 \equiv 2^{2n_0} (\text{mod}\, 3) \Rightarrow p^m + 1 \equiv 1 (\text{mod}\, 3) \Rightarrow p = 3$

sendo assim; resolvemos

$3^m + 1 = 2^{2n_0}$

$$\Rightarrow 3^m = (2^{n_0} - 1)(2^{n_0} + 1) \Rightarrow \begin{cases} 2^{n_0} + 1 = 3^\alpha \\ 2^{n_0} - 1 = 3^\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3^\alpha - 3^\beta = 2 \Rightarrow 2 = 3^\beta (3^{\alpha - \beta} - 1) \Rightarrow \beta = 0, \alpha = 1 \Rightarrow m = 1$$

e $n = 2 \Rightarrow a_0 = 3, a_1 = 4 \Rightarrow a_2 = 5$ e para $i \geq 2 \Rightarrow a_i = (i+1)$-ésimo primo (pelo mesmo argumento indutivo).

Sendo assim, suponha n ímpar: $a_0 = p^m, a_1 = p^m + 1 = 2^n$ e $a_2 = p^m + 2 = 2^n + 1$ (já que $(p^m, p^m + 2) = (p^m + 2, p^m + 1) = 1) \Rightarrow 3 \mid a_2$ (já que n é ímpar) $\Rightarrow a_2 = 3^t$ logo,

$3^t - 2^n = 1$ (*)

mas já é sabido nosso que as soluções de (*) se dão para:

$t = 1$ e $n = 1 \Rightarrow a_2 = 3$ e $a_1 = 2 \Rightarrow a_0 = 1$ (Absurdo!)

$t = 2$ e $n = 3 \Rightarrow a_2 = 9$ e $a_1 = 8 \Rightarrow a_0 = 7$ (III)

(III): $a_0 = 7$, $a_1 = 8$, $a_2 = 9$, $a_3 = 11$, $a_4 = 13$, $a_5 = 17$, $a_6 = 19$, $a_7 = 23$, $a_8 = 25 = 5^2$, $a_9 = 29$ e, para $i \geq 9$, $a_i = (i + 1)$-ésimo primo (como antes).

Resposta: a_0 pode ser 2, 3, 4, 7 ou 8.

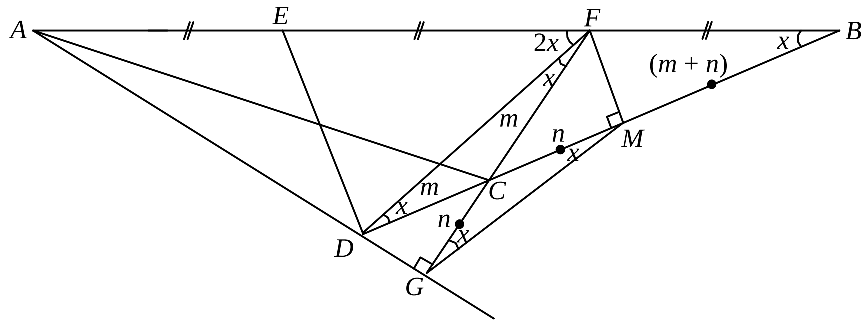
Anexo:

Para um $j > 1$, suponha $a_0, a_1, \ldots, a_j$ definidos como disse e a hipótese valendo. Basta ver que no conjunto $\{a_0, a_1, \ldots, a_j\}$ aparecem todos os $j + 1$ primeiros fatores primos. Chame $p = (j + 2)$-ésimo primo. Os candidatos a a_{j+1} antes de p seriam $a_j + 1, a_j + 2, \ldots, p - 1$. Porém, os fatores primos de qualquer um desses caras aparecem no produto $a_0 a_1, \ldots, a_j \Rightarrow$ se $x \in \{a_j + 1, \ldots, p - 1\}$,

mdc $(x, a_0 a_1, \ldots, a_j) \neq 1$. Logo, $x = p$ (veja que $p > a_j$ e *mdc* $(p, a_0 a_1, \ldots, a_j) = 1$).

Os outros passos de indução são totalmente análogos.

PROBLEMA 3: SOLUÇÃO DE LARISSA CAVALCANTE QUEIROZ DE LIMA (FORTALEZA - CE)



$ED \perp BC \Rightarrow \Delta\, EDB$ é um triângulo retângulo.
Como $EF = FB$, F é ponto médio de $EB \Rightarrow EF = FB = DF$
$\Rightarrow$ Se $F\hat{D}B = x$, temos $F\hat{B}D = x \Rightarrow D\hat{F}E = F\hat{D}B + D\hat{B}F = x + x = 2x < 3x = C\hat{F}A$ portanto D não está dentro do segmento $BC \Rightarrow H$, pé da altura relativa ao lado BC está fora do segmento BC (pois $AH \,//\, ED$ e H, D, B estão na reta nessa ordem $\Rightarrow H \notin \overline{DB}$ e como $D \notin \overline{CB}$, temos $H \notin \overline{CB}$) $\Rightarrow A\hat{C}B$ é um ângulo obtuso.
* $C\hat{F}D = C\hat{F}A - D\hat{F}A = 3x - 2x = x \Rightarrow C\hat{F}D = F\hat{D}C \Rightarrow \Delta CFD$ é isósceles com $CD = CF = m$.
Seja M o ponto médio de $DB \Rightarrow MF$ é base média de $\Delta BDE \Rightarrow MF \,//\, ED \Rightarrow F\hat{M}B = E\hat{D}B = 90°$ ($D\hat{G}F = 90°$ pois $AD \perp CF$ e $G = AD \cap CF$)
$\Rightarrow DGMF$ é um quadrilátero inscritível $\Rightarrow F\hat{D}M = F\hat{G}M = x$ e $D\hat{F}G = D\hat{M}G = x$
$\Rightarrow C\hat{G}M = C\hat{M}G = x \Rightarrow \Delta CMG$ é isósceles com $CM = CG = n$
$DM = MB \Rightarrow MB = DC + CM = m + n$ e $DB = DM + MB = 2(m + n)$
$GF = GC + CF = m + n$
Menelaus $\Delta\, FCB$ e reta $\overleftrightarrow{ADG} \Rightarrow$

$$\frac{AF}{AB}\cdot\frac{DB}{DC}\cdot\frac{GC}{GF} = 1 \Rightarrow \frac{2}{3}\cdot\frac{2(m+n)}{m}\cdot\frac{n}{m+n} = 1 \Rightarrow 4n = 3m$$

$$\frac{DB}{DC} = \frac{2(m+n)}{m} = \frac{2m+2n}{m} = \frac{2m+\frac{3m}{2}}{m} = \frac{\frac{4m+3m}{2}}{m} = \frac{m\cdot\frac{7}{2}}{m} = \frac{7}{2}$$

$$\therefore \frac{DB}{DC} = \frac{7}{2}.$$

Obs. $\hat{C}$ não obtuso $\Rightarrow H \in \overline{CB}$ e portanto

$$D \in \overline{CB} \Rightarrow \left.\begin{cases} A\hat{F}D = A\hat{F}C + C\hat{F}D = 3x + y = 2x \Rightarrow y = -x < 0 \\ C\hat{F}D \geq 0. \end{cases}\right\} \text{contradição.}$$

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DE ALEX CORRÊA ABREU (NITERÓI - RJ)

Definimos as seqüências (x_k), (y_k) como sendo respectivamente o máximo e o mínimo depois da operação feita k vezes $\Rightarrow x_{k+1} = senx_k$ ou $\cos y_k$ pois a função seno é crescente e a co-seno decrescente no intervalo considerado e $y_{k+1} = seny_k$ ou $\cos x_k$, mas $senx > \cos y \Leftrightarrow senx > sen\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \Leftrightarrow x + y > \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

se $x_k + y_k > \frac{\pi}{2}$, temos $x_{k+1} = senx_k$ e $y_{k+1} = \cos x_k$. Analogamente, se

$x_k + y_k < \frac{\pi}{2}$, temos $x_{k+1} = \cos y_k$ e $y_{k+1} = seny_k \Rightarrow x_k^2 + y_k^2 = 1, \forall k \geq 1.$ mas

$(x_k + y_k)^2 = (x_k^2 + y_k^2 + 2x_k y_k) \leq 2(x_k^2 + y_k^2) = 2 \Rightarrow x_k + y_k \leq \sqrt{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$x_{k+1} = \cos y_k$ e $y_{k+1} = seny_k$. Assim, temos

$x_{2001} = \cos y_{2000} = \cos seny_{1999} = \cos sensen...seny_1 = \cos\underbrace{sensen...sen}_{1999\ vezes}\cos 1$ já que

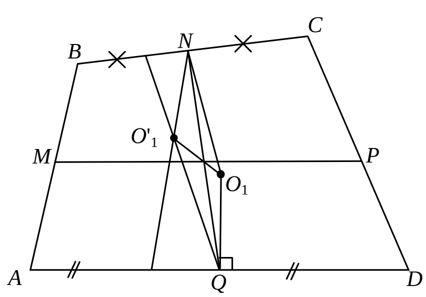
$\cos 1 < sen 1$, pois $\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{2}$.

PROBLEMA 5: SOLUÇÃO DE EINSTEIN DO NASCIMENTO JUNIOR (FORTALEZA - CE)

Lema 1: Sabemos que um quadrilátero é inscritível se e somente se as mediatrizes dos lados desse quadrilátero são concorrentes.

Lema 2: Os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer, convexo ou não, formam um paralelogramo.

Tome agora um quadrilátero convexo *ABCD*, com lados opostos não paralelos.



Sejam *M*, *N*, *P*, *Q* os pontos médios de *AB*, *BC*, *CD*, *DA*.

Trace agora as mediatrizes de *BC* e *AD*, que se encontram em O_1.

Chame $\overline{NQ} \cap \overline{MP} = E$.

Provaremos que as alturas relativas a *BC* e a *AD* se encontram no ponto simétrico a O_1 em relação a *E*.

Chame O'_1 o simétrico de O_1 em relação a *E*.

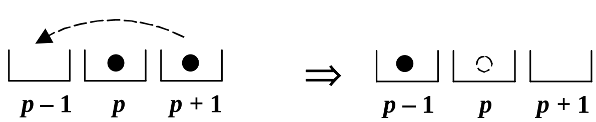
Pelo Lema 2, E é ponto médio de NQ e E é ponto médio de MP e além disso por definição de O'_1, E é ponto médio de O'_1O_1.
Então temos que $NO_1QO'_1$ é um paralelogramo!
Daí: $NO'_1 \parallel O_1Q \Rightarrow NO'_1 \perp AD \Rightarrow NO'_1$ é a altura em relação a AD.
$QO'_1 \parallel NO_1 \Rightarrow QO'_1 \perp BC \Rightarrow QO'_1$ é a altura em relação a BC.
Logo O'_1 é o encontro das alturas relativas a BC e AD.
Fazendo o mesmo para os lados AB e CD podemos concluir que:
O simétrico em relação a E do encontro de mediatrizes de lados opostos é igual à interseção das alturas destes lados opostos.
Chame O_2 o encontro das mediatrizes de AB e CD.
O'_2 será o simétrico em relação a E de O_2 e consequentemente o encontro das alturas relativas a AB e CD.
Note que: $O'_1 \equiv O'_2 \Leftrightarrow O_1 \equiv O_2$.
Então: $O'_1 \equiv O'_2 \Leftrightarrow O_1 \equiv O_2 \Leftrightarrow ABCD$ é inscritível.
Segue que $O'_1 \equiv O'_2 \Leftrightarrow ABCD$ é inscritível.
Logo as 4 alturas tem um ponto em comum se e somente se o quadrado for inscritível.

PROBLEMA 6: SOLUÇÃO DE HUMBERTO SILVA NAVES (SÃO PAULO - SP)

Vamos introduzir o conceito de energia para as pedras:

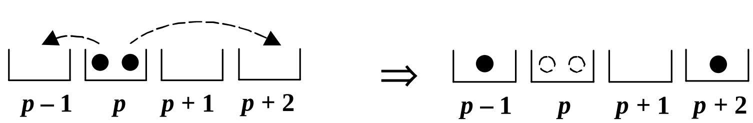
$$E = \sum_x \left(\frac{3}{4}\right)^{pos(x)}$$, onde pos(x) é a posição de x.

O que acontece se realizarmos um movimento? Vamos mostrar que a energia sempre diminui a cada momento:
Movimento tipo A:



$$E' = E - \left(\frac{3}{4}\right)^p - \left(\frac{3}{4}\right)^{p+1} + \left(\frac{3}{4}\right)^{p-1} = E \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^p - \left[\frac{5}{12}\right] < E$$

Movimento tipo B:



$$E' = E - 2\left(\frac{3}{4}\right)^p + \left(\frac{3}{4}\right)^{p-1} + \left(\frac{3}{4}\right)^{p+2} = E - \left(\frac{3}{4}\right)^p \cdot \left[\frac{5}{48}\right] < E$$

Obs. O número $\frac{3}{4}$ não foi escolhido ao acaso, foi escolhido um número q tal que:

$$1 < q + q^2 \text{ e } 1 + q^3 < 2q$$

Considere um copo de posição p, onde p é tal que

$$\left(\frac{3}{4}\right)^p > E_0 \text{, onde } E_0 \text{ é a energia inicial do sistema.}$$

Como a energia, a cada movimento, sempre diminui, qualquer que sejam os movimentos que se faça, nenhuma pedra ficará numa posição menor ou igual a p. Ou seja, existe uma "barreira" à esquerda para as pedras.

Estamos agora capazes de resolver o problema (a primeira parte):

* Dada uma configuração inicial das *"n"* pedras, é impossível realizar uma seqüência infinita de movimentos.

Demonstração: Vamos demonstrar (*) por indução:

Base: Para $n = 1$ é verdadeiro!

Passo indutivo: Suponha, por absurdo, que seja possível realizar uma seqüência infinita de movimentos. Sabemos que a posição da pedra mais à esquerda não aumenta a cada movimento e como existe uma barreira à esquerda, então a partir de um certo ponto a pedra mais a esquerda não mais será movimentada, e só com os restantes (o número de pedras restantes é no máximo $n - 1$) é impossível realizar uma seqüência infinita de movimentos, o que é um absurdo!

Logo por indução, (*) é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Vamos resolver a segunda parte do problema:

Sabemos que dada uma configuração inicial, independente das escolhas dos movimentos sempre chegamos a uma configuração onde é impossível mover (configuração parada). Suponha por absurdo que a partir de uma configuração inicial se chegue a duas configurações paradas distintas A e B.

Seja k' a posição da pedra mais à direita das configurações A e B e $k = k' + 2$.

Considere o seguinte invariante: (não varia a cada movimento)

$$I = \sum_x F_{k-pos(x)} \text{, onde } F_n \text{ é o } n\text{-ésimo número de Fibonacci.}$$

Lembramos que $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para todo $n \geq 1$)

Sabemos que $I_A = I_B$, pois I é invariante, isto é, permanece o mesmo depois de cada movimento.

De fato, $F_{k-(p-1)} = F_{k-p+1} = F_{k-p} + F_{k-p-1} = F_{k-p} + F_{k-(p+1)}$, donde I não muda após um movimento do tipo A, e $F_{k-(p-1)} + F_{k-(p+2)} = F_{k-p} + F_{k-p-1} + F_{k-p-2} =$

$= 2F_{k-p}$, donde I não muda após um movimento do tipo B.

Algoritmo:

1- Seja x a pedra mais à esquerda de A e y a pedra mais à esquerda de B.

Devemos ter pos(x) = pos(y), pois se fosse pos(x) ≠ pos(y) (assumimos sem perda de generalidade que pos(x) > pos(y)), teríamos:

$$I_A = \sum_{t \in A} F_{k-pos(t)} \le F_{k-pos(x)} + F_{k-pos(x)-2} + F_{k-pos(x)-4} + \ldots + F_2$$

se $k - pos(x)$ for par e

$$I_A = \sum_{t \in A} F_{k-pos(t)} \le F_{k-pos(x)} + F_{k-pos(x)-2} + \ldots + F_3 \text{ caso contrário:}$$

Mas $F_2 + \ldots + F_{2k} = F_{2k+1} - 1 < F_{2k+1}$ e $F_3 + \ldots + F_{2k+1} = F_{2k+2} - 1 < F_{2k+2}$ (como se prova facilmente por indução).

logo $I_A \le F_{k-pos(x)+1} - 1 < F_{k-pos(x)+1} \le F_{k-pos(y)} \le I_B$, um absurdo!

2- Seja A: = A – {x} e B: = {y}.

3- Vá para o 1.

Pronto! Demonstramos que A e B são a mesma configuração, o que é um absurdo! A configuração final independe da escolha dos movimentos.

XXIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e Soluções da Primeira Fase – Nível Universitário

PROBLEMA 1

Seja $f(x) = e^{-x}$ sen x. Calcule $f^{(2001)}(0)$. (Denotamos por $f^{(n)}(x)$ a derivada de ordem n no ponto x; assim, $f^{(2)}(x) = f''(x)$.)

PROBLEMA 2

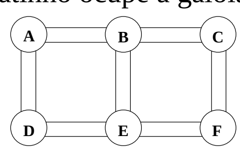
Seja $s(n)$ a soma dos algarismos de n. Assim, por exemplo, $s(77) = 14$ e $s(2001) = 3$. Diga se existe um inteiro positivo n com $s(n) = 10$ e $s(n^2) = 100$. Se não existir, demonstre este fato. Se existir, dê um exemplo.

PROBLEMA 3

O centro de massa de uma lata cilíndrica de refrigerante tem a mesma posição quando a lata está vazia ou cheia. Se a massa da lata vazia é m e a massa do refrigerante dentro da lata cheia é M, determine a fração de refrigerante que deve ser deixado na lata para que seu centro de massa fique o mais baixo possível.

PROBLEMA 4

Um ratinho ocupa inicialmente a gaiola A e é treinado para mudar da gaiola atravessando um túnel sempre que soa um alarme. Cada vez que soa o alarme o ratinho escolhe qualquer um dos túneis incidentes a sua gaiola com igual probabilidade e sem ser afetado por escolhas anteriores. Qual a probabilidade de que após o alarme soar 23 vezes o ratinho ocupe a gaiola B?



PROBLEMA 5

Seja A uma matriz $n \times n$ com $a_{1,j} = a_{i,1} = 1$ (para quaisquer i e j, $1 \le i, j \le n$) e $a_{i+1,j+1} = a_{i,j} + a_{i+1,j} + a_{i,j+1}$ (para quaisquer i e j, $1 \le i, j < n$). Assim,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 3 & 5 & 7 & \cdots \\ 1 & 5 & 13 & 25 & \cdots \\ 1 & 7 & 25 & 63 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$ Calcule $\det(A)$.

PROBLEMA 6

Seja x_n uma seqüência de números reais definida por $x_{n+1} = x_n^2 - \dfrac{x_n}{2}$, $n \ge 0$.

Para quais valores de x_0 a seqüência converge? Para que valor?

SOLUÇÕES – NÍVEL UNIVERSITÁRIO

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1

$$f'(x) = -e^{-x}(sen x - \cos x) = -\sqrt{2}e^{-x} sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Em geral, se $u = x + a$, onde a é uma constante, a derivada de $e^{-x}\, sen\, u$ é igual a $-\sqrt{2}e^{-x} sen\left(u - \frac{\pi}{4}\right)$.

Logo $f''(x) = (-\sqrt{2})^2 e^{-x} sen\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = 2e^{-x} sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Se $f^{(k)}(x) = (-\sqrt{2})^k e^{-x} sen\left(x - \frac{k\pi}{4}\right)$, para $k \in \mathbb{N}$, teremos

$$f^{(k+1)} = (-\sqrt{2})^k \cdot \left(-\sqrt{2}e^{-x} sen\left(x - \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)\right) = (-\sqrt{2})^{k+1} e^{-x} sen\left(x - \frac{(k+1)\pi}{4}\right).$$

Logo, por indução, $f^{(n)}(x) = (-\sqrt{2})^n e^{-x} sen\left(x - \frac{n\pi}{4}\right)$ $(n \in \mathbb{N})$ e

$$f^{(2001)}(x) = (-\sqrt{2})^{2001} e^{-x} sen\left(x - \frac{2001\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\, 2^{1000} e^{-x} sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2^{1000} e^{-x}(\cos x - sen\, x).$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2

Existem muitos inteiros n com as propriedades pedidas. A menor solução é 1101111211. Algumas outras são 10111111111, 11011111111, 200220000202 e

$$n = \sum_{j=0}^{9} 10^{2^j}.$$

A única condição necessária é que, ao calcular n^2 pelo algoritmo usual não deve ocorrer nenhum 'vai um'. Mais precisamente, se a expansão decimal de n é $n = p(10),\ p(x) = a_k x^k + \ldots + a_0$ com $0 \le a_i < 10$ então temos $p(1) = s(n) = 10$.

Temos $q(x) = (p(x))^2 = b_{2k} x^{2k} + \ldots + b_0$ com

$b_j = a_j a_0 + a_{j-1} a_1 + \ldots + a_0 a_j,\ q(10) = n^2$ e $q(1) = 100$.

Para que $s(n^2) = q(1)$ precisamos apenas que cada b_j seja menor do que 10.

Exemplos de soluções podem ser facilmente obtidos tomando os algarismos de n pequenos e espalhados.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3

Se há fração λ de refrigerante na lata, $\lambda \in [0,1]$, a massa total de refrigerante será λM e o centro de massa do refrigerante (sem contar a lata) tem altura $\frac{\lambda}{2}h$, onde *h* é a altura total da lata. Como o centro de massa da lata vazia tem altura $\frac{h}{2}$, a altura do centro de massa é $f(\lambda) = \left(\lambda M \cdot \frac{\lambda h}{2} + m \cdot \frac{h}{2}\right) / (\lambda M + m)$.

Temos

$$f'(\lambda) = \frac{h}{2(\lambda M + m)^2}((\lambda M + m) \cdot 2\lambda M - (\lambda^2 M + m)M)$$
$$= \frac{h}{2(\lambda M + m)^2}(\lambda^2 M^2 + 2\lambda Mm - mM).$$

As raízes de $\lambda^2 M^2 + 2\lambda Mm - mM$ são $\lambda_1 = \frac{-Mm - \sqrt{M^2m^2 + M^3m}}{M^2} < 0$ e

$\lambda_2 = \frac{-Mm + \sqrt{M^2m^2 + M^3m}}{M^2} = \frac{\sqrt{m^2 + Mm} - m}{M} = \frac{m}{m + \sqrt{m^2 + Mm}} < 1.$ Assim, $f'(\lambda) < 0$ para $0 \le \lambda < \lambda_2$ e $f'(\lambda) > 0$ para $\lambda_2 < \lambda \le 1$, e portanto $f(\lambda)$ é mínimo para $\lambda = \lambda_2 = \frac{\sqrt{m^2 + Mm} - m}{M}$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4

Seja a_n a probabilidade de que após *n* apitos o ratinho esteja na coluna central (*B* ou *E*). Temos $a_0 = 0$ (o ratinho não começa na coluna central). Claramente após o apito soar um número par de vezes o ratinho estará em *A*, *C* ou *E* e após um número ímpar de vezes em *B*, *D* ou *F*. Assim, queremos calcular a_{23}.

Se, antes de soar o alarme, o ratinho está na coluna central ele tem 1/3 de probabilidade de permanecer lá (independentemente da gaiola onde o ratinho estava ser *B* ou *E*). Por outro lado, se ele não está na coluna central ele tem probabilidade 1/2 de ir para lá (novamente independentemente da gaiola onde o ratinho começou). Assim,

$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}(1 - a_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}a_n$ ou $a_{n+1} - \frac{3}{7} = -\frac{1}{6}(a_n - \frac{3}{7})$.

A seqüência $b_n = a_n - \frac{3}{7}$ é portanto uma progressão geométrica de razão $-\frac{1}{6}$ com $b_0 = -\frac{3}{7}$. Assim $b_{23} = \frac{3}{7 \cdot 6^{23}}$ e $a_{23} = \frac{3}{7} + \frac{3}{7 \cdot 6^{23}} = \frac{3(6^{23}+1)}{7 \cdot 6^{23}}$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5

Fazendo operações em linhas (subtraindo a primeira linha da segunda, a segunda da terceira e assim por diante) temos

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 0 & 2 & 4 & 6 & \cdots \\ 0 & 2 & 8 & 18 & \cdots \\ 0 & 2 & 12 & 38 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Fazendo agora operações em colunas (subtraindo a primeira coluna da segunda, a segunda da terceira e assim por diante) temos

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2 & 2 & 2 & \cdots \\ 0 & 2 & 6 & 10 & \cdots \\ 0 & 2 & 10 & 26 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = 2^{n-1} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 3 & 5 & \cdots \\ 1 & 5 & 13 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Esta última matriz é a versão $(n-1) \times (n-1)$ de A. De fato, sua entrada (i, j) é

$$\frac{1}{2}((a_{i+1,j+1} - a_{i+1,j}) - (a_{i,j+1} - a_{i,j})) = a_{i,j}.$$

Chamando o valor de $\det(A)$ para matrizes $n \times n$ de b_n temos portanto

$$b_1 = 1, \quad b_{n+1} = 2^n b_n \text{ donde } b_n = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6

Seja $f(x) = x^2 - \frac{x}{2}$. Temos $f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{3}{2}$. Para $x > \frac{3}{2}$ temos $f(x) > x$. Assim, se $x_0 > \frac{3}{2}$ temos $x_n \ge x_0 > \frac{3}{2}$ para todo n e, por indução, $x_{n+1} = f(x_n) > x_n$ para todo n. Assim, nesse caso, (x_n) é crescente, e portanto $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ para algum $L \in \mathbb{R}$ ou $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$. No primeiro caso, teríamos

$L = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(L)$, mas $L = \lim x_n \geq x_0 > \frac{3}{2}$, donde $f(L) > L$, absurdo. Assim, se $x_0 > \frac{3}{2}, \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$

Se $x_0 < -1, x_1 = f(x_0) > \frac{3}{2}$, donde também temos $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$

Se $-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$, com $x \neq 0$, temos $|f(x)| < |x|$. Por outro lado, para todo $n \geq 1, x_n = f(x_{n-1}) = (x_{n-1} - \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16} \geq -\frac{1}{16} > -\frac{1}{2}$. Assim, se $-1 < x_0 < \frac{3}{2}, |x_{n+1}| = |f(x_n)| \leq |x_n|$ para todo $n \geq 1.$ Portanto, existe $c = \lim_{n\to\infty} |x_n| < \frac{3}{2}.$ Temos portanto $0 \leq c = \lim_{n\to\infty} |x_{n+1}| = \lim_{n\to\infty} |f(x_n)| \in \{|f(c)|, |f(-c)|\}$. Temos que $|f(-c)| = c$, com $c > 0$, implica $c = \frac{1}{2}$, e, como $x_n \geq -\frac{1}{16}$ para todo $n \geq 1$, se $\lim_{n\to\infty} |x_n| = \frac{1}{2}$ teríamos $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$, donde $\frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, absurdo. Como $|f(c)| < c$ se $0 < c < \frac{3}{2}$, temos necessariamente $c = 0$, o portanto $\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$

Se $x_0 = -1$ ou $x_0 = \frac{3}{2}$ temos $x_n = \frac{3}{2}$ para todo $n \geq 1$, donde $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{3}{2}$.

Assim, x_n converge se $-1 < x_0 < \frac{3}{2}$, quando $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ e se $x_0 \in \left\{-1, \frac{3}{2}\right\}$, quando $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{3}{2}$. Em qualquer outro caso, $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$

XXIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e Soluções da Segunda Fase – Nível Universitário

PROBLEMA 1:

São dados um ponto O e uma reta r no plano. Para cada ponto P de r, seja r_p a reta perpendicular a OP passando por P. Prove que o conjunto $\{r_p \mid P \in r\}$ é o conjunto de todas as retas tangentes a uma parábola.

PROBLEMA 2:

Seja ε um número real positivo arbitrário. Com centro em todos os pontos do plano com coordenadas inteiras, traça-se um círculo de raio ε. Prove que toda reta passando pela origem intercepta uma infinidade desses círculos.

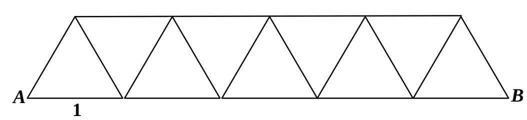
PROBLEMA 3:

Definimos $SL(2, \mathbb{Z})$ como o conjunto das matrizes 2×2 com coeficientes inteiros e determinante 1. Seja $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ uma matriz tal que existe $n > 0$ inteiro com $A^n = I$. Prove que existe $X \in SL(2, \mathbb{Z})$ tal que $X^{-1}AX$ é igual a uma das matrizes:

$$\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \pm\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};\ \pm\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ \pm\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

PROBLEMA 4:

Caminhando sobre os segmentos unitários da figura abaixo, determine quantos percursos distintos existem de A até B sem passar duas vezes por um mesmo ponto.



PROBLEMA 5:

Para todo real u, seja $I(u) = \int_0^\pi \ln\,(1 - 2u\cos x + u^2)dx.$

a) Prove que $I(u) = I(-u) = \dfrac{1}{2}I(u^2).$ b) Calcule $I(u)$ para todo $u \in \mathbb{R}$.

PROBLEMA 6:

Seja D o conjunto dos pontos p em $\mathbb{R}^2$ com $|p| \le 1$. Seja $f : D \to D$ uma função sobrejetora satisfazendo $|f(p) - f(q)| \le |p - q|$ para quaisquer $p, q \in D$. Prove que f é uma isometria, isto é, que $|f(p) - f(q)| = |p - q|$ para quaisquer $p, q \in D$.

(Observação: $|(x, y)|$ denota $\sqrt{x^2 + y^2}$.)

SOLUÇÕES – NÍVEL UNIVERSITÁRIO

PROBLEMA 1: SOLUÇÃO DE EMANUEL DE SOUZA CARNEIRO (FORTALEZA - CE)

Suponha, sem perda de generalidade, que o ponto O seja (0,1) e a reta r seja o eixo x.
Seja P um ponto sobre r, $P(p, 0)$, logo:
$(x, y) \in r_p \Leftrightarrow (x - p, y) \cdot (p, -1) = 0 \Leftrightarrow xp - p^2 - y = 0$ (Equação da reta r_p).
Buscamos agora uma parábola do tipo $y = ax^2 + bx + c$, de modo que estas retas r_p sejam tangentes a ela.
Derivando, obtemos a equação da reta tangente a essa parábola no ponto (x_0, y_0).

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = 2ax_0 + b$$

ou seja: $y - (ax_0^2 + bx_0 + c) = (x - x_0)(2ax_0 + b)$

$\Leftrightarrow x(2ax_0 + b) - ax_0^2 + c - y = 0$

tome $a = 1/4$, $b = c = 0$, daí teremos: $x\left(\frac{1}{2}x_0\right) - \frac{1}{4}x_0^2 - y = 0.$

Esta será uma idéia: em $\{r_p \mid P \in r\}$ basta tomar $p = x_0/2$.

Reciprocamente, cada $r_p \in \{r_p \mid P \in r\}$ é tangente à parábola $y = \frac{1}{4}x^2$ no ponto $(2p, p^2)$, pois a equação da reta tangente a essa parábola nesse ponto é:

$\frac{y - p^2}{x - 2p} = f'(2p) = p \Leftrightarrow xp - p^2 - y = 0$, que é a equação da reta r_p.

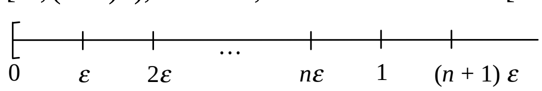
Logo o conjunto$\{r_p \mid P \in r\}$ é o conjunto das retas tangentes à parábola $y = \frac{x^2}{4}$.

PROBLEMA 2: SOLUÇÃO DE EMANUEL DE SOUZA CARNEIRO (FORTALEZA - CE)

Para provar a questão, mostraremos uma lema equivalente ao lema de Kronecker.

Lema: Seja δ um número irracional. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $a \in \mathbb{Z}^*$ tal que $\{a\delta\} < \varepsilon$, onde $\{x\} = x - [x]$ indica a parte fracionária de x.

Prova: Seja $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n\varepsilon < 1 \le (n+1)\varepsilon$. Divida o intervalo [0, 1) em $(n + 1)$ intervalos do tipo $[i\varepsilon, (i+1)\varepsilon)$, $0 \le i \le n$; o último intervalo é $[n\varepsilon, 1)$.



Observe agora os números δ, 2δ, 3δ,…;$(n + 2)\delta$. Como a função parte fracionária vai dos reais em [0,1), pelo princípio da casa dos pombos, dois dentre os $(n + 2)$ números $\{\delta\}$, $\{2\delta\}$, $\{3\delta\}$,…,$\{(n+2)\delta\}$, cairão num mesmo intervalo $[i\varepsilon, (i + 1)\varepsilon)$.

Sejam j, ℓ os dois números tais que:
$\{j\delta\}, \{\ell\delta\} \in [i\varepsilon, (i+1)\varepsilon)$.
Suponha, sem perda de generalidade, que $\{j\delta\} \geq \{\ell\delta\}$
Assim:

$$\left| \begin{array}{l} j\delta = [j\delta] + \{j\delta\} \\ \ell\delta = [\ell\delta] + \{\ell\delta\} \end{array} \right. \Rightarrow (j-\ell)\delta = \underbrace{[j\delta]-[\ell\delta]}_{\text{inteiro}} + (\{j\delta\}-\{\ell\delta\})$$

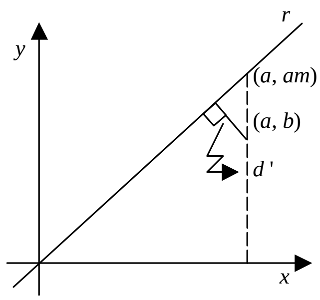
Logo $\{(j-\ell)\delta\} = \{j\delta\} - \{\ell\delta\} < (i+1)\varepsilon - i\varepsilon = \varepsilon$ e $j-\ell$ é o inteiro procurado

Obs: Não podemos ter $\{k\delta\} = 0$, $k \in \mathbb{Z}^*$, pois isso implicaria $k\delta = n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \delta = n/k \in \mathbb{Q}$, absurdo!
Vamos agora resolver o problema.
Seja dado $\varepsilon > 0$. Uma reta passando pela origem tem a forma $y = mx$

Primeiro caso: Se $m \in \mathbb{Q}$, nesse caso a reta passa por infinitos "Lattice points" (pontos de coordenadas inteiras), pois se $m = p/q$ os pontos da forma $(x, y) = (kq, kq\,.\,p/q) = (kq, kp)$, $k = 1, 2, 3\ldots$ estão todos na reta, então ela interceptará todos os círculos que têm centros nesses pontos.

Segundo caso: Se m for irracional.
Os pontos da reta são da forma (x, mx), logo, pela observação feita após o lema, esta reta não contém nenhum ponto de coordenadas inteiras.

Suponha que ela intersecte somente uma quantidade finita de círculos, digamos C_1, $C_2, \ldots, C_n$ de centros $P_1, P_2, \ldots, P_n$
Observe que para qualquer outro ponto no "Lattice" P (fora os centros) teremos: $d(P, r) > \varepsilon$.
Seja d a menor das distâncias, $d_1(P_1, r), d_2(P_2, r), \ldots, d_n(P_n, r)$
onde $d_i(P_i, r)$ é a distância do centro P_i à reta r.
(Note que $d_i(P_i, r) > 0 \Rightarrow d > 0$).
Logo teríamos dentro todos os pontos de coordenadas inteiras no plano, um deles P_i que **minimizaria** a distância à reta r, com $d(P_i, r) = d > 0$.
Isso contradiz o lema, vejamos:
Pelo lema existe um inteiro a, de modo que $\{am\} < d/2$.
Seja $b = [am]$, o ponto $Q = (a, am) \in r$ e sua distância a (a, b) é menor ou igual que a distância de (a, b) a r.



Logo $d' \leq d((a,\ b),\ (a;\ am)) = |am - b| = \{am\} < d/2$.
Absurdo, pois d era a distância mínima $\Rightarrow$ a reta corta uma infinidade de círculos.

PROBLEMA 3: SOLUÇÃO DE CARLOS YUZO SHINE (SÃO PAULO – SP)

Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ uma matriz de $SL(2,\mathbb{Z})$ tal que $A^n = I$ para algum inteiro positivo n.

Seja m o menor inteiro positivo tal que $A^m = I$. Sejam λ_1 e λ_2 os autovalores de A, ou seja, as raízes da equação $\det(A - xI) = 0 \Leftrightarrow x^2 - (a+d)x + 1 = 0$. (I)

Se $\lambda_1 = \lambda_2$, temos que o discriminante da equação (I) é nulo, logo $a + d = 2$ ou $a + d = -2$.

Se $a + d = 2$, temos

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - 1 & 2b \\ 2c & 2d - 1 \end{pmatrix} = 2A - I$$

Por indução, pode-se mostrar que $A^k = kA - (k-1)I$.

Desta forma, $A^m = I \Leftrightarrow mA - (m-1)I = I \Leftrightarrow A = I$.

Se $a + d = -2$, temos, analogamente, que $A^k = (-1)^{k+1}(kA + (k-1)I)$ e portanto $A^m = I \Leftrightarrow (-1)^{m+1}(mA + (m-1)I) = I \Leftrightarrow A = -I$ e m é par (na verdade, $m = 2$).

Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então a matriz A é diagonalizável em $\mathbb{C}$, ou seja, existe uma matriz P tal que $A = PDP^{-1}$, sendo $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Neste caso, temos que $A^k = PD^kP^{-1}$, com $D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix}$.

Assim, $A^m = I \Leftrightarrow PD^mP^{-1} = I \Leftrightarrow D^m = I \Leftrightarrow \lambda_1^m = \lambda_2^m = 1$, ou seja, λ_1 e λ_2 são raízes m-ésimas da unidade. Assim, como $a + d = \lambda_1 + \lambda_2$, $-1 \leq a + d \leq 1$. Como $a + d$ é inteiro, temos os seguintes casos:

(i) $a + d = -1$. Neste caso, (I) $\Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$ e portanto λ_1 e λ_2 são raízes cúbicas da unidade. Portanto $m = 3$.

(ii) $a + d = 0$. Neste caso, (I) $\Leftrightarrow x^2 + 1 = 0$ e portanto λ_1 e λ_2 são raízes quartas da unidade. Portanto $m = 4$.

(iii) $a + d = 1$. Neste caso, (I) $\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$ e portanto λ_1 e λ_2 são raízes sextas da unidade. Portanto $m = 6$.

Observando as matrizes dadas, temos

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^3 = I; \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^4 = I; \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^6 = I$$

Assim, basta provarmos que existem inteiros x, y, z e w com $xw - yz = 1$ e

$$A = \pm \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} w & -y \\ -z & x \end{pmatrix},$$

sendo W uma das três matrizes acima. Note que

$$\begin{pmatrix} w & -y \\ -z & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \cdot I$$

***Caso* (i)** Tomamos $W = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Assim $A = \pm \begin{pmatrix} yw + xz + yz & -x^2 - y^2 - xy \\ z^2 + w^2 + zw & -yw - xz - xw \end{pmatrix}$.

Veja que $a + d = -1$ é equivalente a $xw - yz = 1$. A condição $\det A = 1$ é equivalente a $ad - bc = 1 \Leftrightarrow a(-1 - a) - bc = 1 \Leftrightarrow bc = -(a^2 + a + 1)$. Assim, devemos ter

$$\left| \begin{array}{l} a = \pm(yw + xz + yz) \\ b = \pm(-x^2 - y^2 - xy) \quad \text{(II)} \\ c = \pm(z^2 + w^2 + zw) \end{array} \right.$$

Isso pode ser verificado fatorando $a^2 + a + 1 = (a - \omega)(a - \overline{\omega})$ em inteiros de Eisenstein. Considere um fator $x - y\omega$ de $a - \omega$ e seja $z - w\omega$ o fator de $a - \omega$ tal que $(x - y\omega)(z - w\omega) = a - \omega$. Note que $(x - y\overline{\omega})(z - w\overline{\omega}) = a - \overline{\omega}$. As normas dos fatores são $x^2 + y^2 + xy$ e $z^2 + w^2 + zw$ e portanto sempre existem x, y, z e w tais que $|b| = x^2 + y^2 + xy$ e $|c| = z^2 + w^2 + zw$. Substituindo o valor de a de (II) na equação original verifica-se que de fato $bc = -(a^2 + a + 1)$. Reciprocamente, a outra raiz desta última equação é $-1 - a = d = -xz - yw - xw$. Mas para resolver isso basta trocar x e y por z e w, respectivamente, e trocar o sinal.

Obs. Usamos implicitamente a existência e unicidade da fatoração para inteiros de Eisenstein para obter x, y, z, w como acima.

***Caso* (ii)** Agora tomamos $W = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, com $A = \pm\begin{pmatrix} yw + xz & -x^2 - y^2 \\ z^2 + w^2 & -yw - xz \end{pmatrix}$.

Novamente, é óbvio que a condição $a + d = 0$ é satisfeita. A condição det $A = 1$ é equivalente a $ad - bc = 1 \Leftrightarrow bc = -(a^2 + 1)$. O sistema correspondente agora é

$$\left|\begin{array}{l} a = \pm(yw + xz) \\ b = \pm(-x^2 - y^2) \\ c = \pm(z^2 + w^2) \end{array}\right. \quad \text{(III)}$$

Agora usamos inteiros de Gauss! Considere a fatoração $a^2 + 1 = (a + i)(a - i)$ e sejam $x + yi$ e $z + wi$ fatores de $a + i$ com $(x + yi)(z + wi) = a + i$. Note que $(x - yi)(z - wi) = a - i$. Então existem sempre x, y, z e w tais que $|b| = x^2 + y^2$ e $|c| = z^2 + w^2$. Novamente, substituindo o valor de a de (III) na equação original vemos que de fato $bc = -(a^2 + 1)$. A outra raiz é oposta ao valor de a de (III), mas é só trocar o sinal.

Obs. Aqui usamos implicitamente a existência e unicidade de fatoração para inteiros de Gauss para obter x, y, z, w como acima.

***Caso* (iii)** Tomamos dessa vez $W = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Temos nesse caso

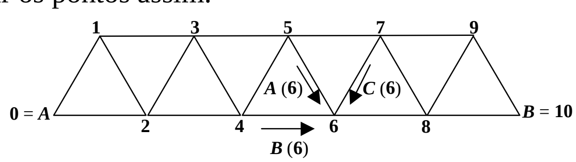
$A = \pm\begin{pmatrix} yw + xz - yz & -x^2 - y^2 + xy \\ z^2 + w^2 - zw & -yw - xz + xw \end{pmatrix}$. Mas esse caso é análogo ao caso (i)!

Tome $y = -y'$ e $w = -w'$ e obtemos a mesma matriz do caso (i).

Logo existe sempre uma matriz X tal que $A = XWX^{-1}$, onde W é uma das matrizes dadas no enunciado.

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DE JULIANA ABRANTES FREIRE (RIO DE JANEIRO – RJ)

Vamos numerar os pontos assim:



$F(n)$ = O número de percursos que chegam em n, sem passar por $n + 2$.
$A(n)$ = O número de percursos que chegam em n vindos de $n - 1$.
$B(n)$ = O número de percursos que chegam em n vindos de $n - 2$.
$C(n)$ = O número de percursos que chegam em n vindos de $n + 1$.
$A(6)$, $B(6)$ e $C(6)$ estão ilustrados na figura acima.

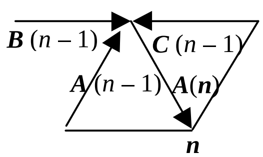
Note que não há mais caminhos relevantes para o problema além destes: Qualquer caminho indo a 6 vindo de 8, passou obrigatoriamente por 6 ou 7 ou ambos. Se passou por 6, este caminho não pode porque passaria por 6 duas vezes. Mesmo se não passou por 6, este caminho não pode: 7 e 8 já foram usados, então este caminho não pode chegar até B.

Então $F(n) = A(n) + B(n) + C(n)$.

$B(n) = F(n-2)$, porque nenhum caminho chegando a $n-2$ passou por n, como no exemplo descrito anteriormente. Então

$B(n) = A(n-2) + B(n-2) + C(n-2)$.

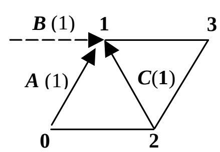
$A(n) = B(n-1) + A(n-1)$:



Porque todos os $C(n-1)$ passaram por n (mais que isto, eles são os caminhos que vieram para $n-1$ diretamente de n) e nenhum $A(n-1)$ ou $B(n-1)$ passou por n porque eles não teriam como passar por n e voltar para $n-2$ e $n-3$, respectivamente, sem repetir pontos e mantendo a possibilidade do caminho chegar a B.

$C(n) = B(n-1) + A(n-1)$, porque estes são os caminhos que chegam a $n+1$ sem passar por n: eles vão direto de $n-1$ para $n+1$.

Para chegar ao ponto 1:

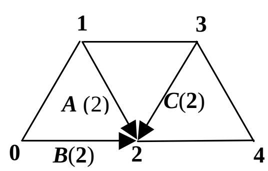


$B(n) = 0$, não existe caminho.

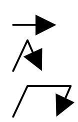
$A(1) = 1$ (caminho direto)

$C(1) = 1$ (caminho).

Para chegar ao ponto 2:



Os caminhos possíveis são:



Ou seja $A(2) = B(2) = C(2) = 1$.

$A(3) = A(2) + B(2) = 2$
$B(3) = A(1) + B(1) + C(1) = 2$
$C(3) = A(2) + B(2) = 2$

$A(4) = A(3) + B(3) = 4$
$B(4) = A(2) + B(2) + C(2) = 3$
$C(4) = A(3) + B(3) = 4$

$A(5) = A(4) + B(4) = 7$
$B(5) = A(3) + B(3) + C(3) = 6$
$C(5) = A(4) + B(4) = 7$

$A(6) = A(5) + B(5) = 13$
$B(6) = A(4) + B(4) + C(4) = 11$
$C(6) = A(5) + B(5) = 13$

$A(7) = A(6) + B(6) = 24$
$B(7) = A(5) + B(5) + C(5) = 20$
$C(7) = A(6) + B(6) = 24$

$A(8) = A(7) + B(7) = 44$
$B(8) = A(6) + B(6) + C(6) = 37$
$C(8) = A(7) + B(7) = 44$

$A(9) = A(8) + B(8) = 81$
$B(9) = A(7) + B(7) + C(7) = 68$
$C(9) = A(8) + B(8) = 81$

$C(10) = 0$ porque não existe ponto 11.
Mas ainda vale
$A(10) = A(9) + B(9) = 149$
$B(10) = A(8) + B(8) + C(8) = 125$
$F(10) = A(10) + B(10) + C(10) = 149 + 125 + 0 = 274.$

PROBLEMA 5: SOLUÇÃO DE MARCIO ASSAD COHEN (RIO DE JANEIRO – RJ)

$$I(u)=\int_0^{\pi}\ln(1-2u\cos x+u^2)dx$$

a) fazendo $t=\pi-x$; $dt=-dx$:

$$I(u)=\int_{\pi}^{0}-\ln(1-2u\cos(\pi-t)+u^2)dt=\int_0^{\pi}\ln(1+2u\cos t+u^2)dt=\int_0^{\pi}\ln(1-2(-u)\cos x+(-u)^2)dx=$$

$I(-u)$. Logo, $I(u) = I(-u)$.

Note agora que, como $cosx = 2cos^2x/2 - 1$:

$$1-2u^2\cos x+u^4=1+2u^2+u^4-4u^2\cos^2 x/2=(1+u^2)^2-4u^2\cos^2 x/2=$$

$$(1+2u\cos x/2+u^2)(1-2u\cos x/2+u^2)$$

Logo, $I(u^2)=\int_0^{\pi}\ln(1+2u\cos x/2+u^2)dx+\int_0^{\pi}\ln(1-2u\cos x/2+u^2)dx$

Fazendo $t = x/2$ nessas últimas integrais vem:

$$I(u^2)=2\left[\int_0^{\pi/2}\ln(1+2u\cos t+u^2)dt+\int_0^{\pi/2}\ln(1-2u\cos t+u^2)dt\right]. \qquad \text{(II)}$$

Agora, note que $\int_{\pi/2}^{\pi}\ln(1+2u\cos t+u^2)dt \underset{x=t-\pi}{=} \int_{-\pi/2}^{0}\ln(1-2u\cos x+u^2)dx=$

$$\underset{t=-x}{=}-\int_{\pi/2}^{0}\ln(1-2u\cos x+u^2)dx=\int_0^{\pi/2}\ln(1-2u\cos x+u^2)dx \qquad \text{(III)}$$

De (II) e (III) vem

$$I(u^2)=2\left[\int_0^{\pi/2}\ln(1+2u\cos x+u^2)dx+\int_{\pi/2}^{\pi}\ln(1+2u\cos x+u^2)dx\right]=2I(u)$$

Logo, $I(u) = \dfrac{1}{2}I(u^2)$.

b) Fazendo $u = 1$, vem $I(1) = 2I(1) \therefore I(1) = 0$. Em geral, $I(u) = \frac{1}{2^k}\cdot I(u^{2^k}), \forall x:$

$I(u) = \frac{1}{2}I(u^2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}I(u^4) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}I(u^8)\ldots$ (é uma indução simples).

Supondo $0 \le u \le 1$ inicialmente:

$$|\cos x| \le 1 \Rightarrow |I(u)| = \left|\int_0^\pi \ln(1-2u\cos x + u^2)dx\right| \le \int_0^\pi \left|\ln(1+u)^2\right| dx = 2\pi|\ln(1+u)|$$

Logo, $|I(u)| \le \frac{2\pi\left|\ln(1+u^{2^k})\right|}{2^k}, \forall x$ pois $\frac{1}{2^k}I(u^{2^k}) \le \frac{1}{2^k}\cdot 2\pi\left|\ln(1+u^{2^k})\right|$.

Fazendo $k \to \infty$ e substituindo $t = 2^k$, deve-se ter $|I(u)| \le \left(\lim\limits_{t\to\infty}\frac{2\pi\left|\ln(1+u^t)\right|}{t}\right) = 0.$

Logo, $I(u) = 0$ se $u \in [-1, 1]$ (lembrando já que $I(u) = I(-u)$).

Se $|u| > 1$, faço a substituição $u = \frac{1}{\omega}$: Então $(|\omega| < 1)$:

$$I\left(\frac{1}{\omega}\right) = \int_0^\pi \ln\left(1 - \frac{2\cos x}{\omega} + \frac{1}{\omega^2}\right)dx = \int_0^\pi \ln\left(\frac{\omega^2 - 2\omega\cos x + 1}{\omega^2}\right)dx =$$

$$I\left(\frac{1}{\omega}\right) = \int_0^\pi \ln(1-2\omega\cos x + \omega^2)dx - \int_0^\pi \ln(\omega^2)dx = I(\omega) - 2\pi\ln|\omega| = -2\pi\ln|\omega|.$$

Logo, se $|u| > 1$, temos: $I(u) = -2\pi\ln\frac{1}{|u|} \therefore I(u) = 2\pi\ln|u|$

Concluindo: $I(u) = \begin{cases}\text{zero, se } |u| \le 1\\ 2\pi\ln|u|, \text{ se } |u| > 1.\end{cases}$

PROBLEMA 6: SOLUÇÃO DE BRUNO FERNANDES CERQUEIRA LEITE (SÃO PAULO – SP)

Fato 1: Seja $0 = (0, 0)$. Então $f(0) = 0$.

Prova: $\forall x \in D$, temos $|x - 0| \le 1$. Logo devemos ter $|f(x) - f(0)| \le 1, \forall x \in D$! Como a função é sobrejetora, $\forall y \in D$ $\exists x_0 \in D$ com $f(x_0) = y$. Logo, $\forall y \in D$, $|y - f(0)| \le 1$, ou seja, $f(0)$ dista no máximo 1 de qualquer ponto do disco D. Logo $f(0) = 0$.

Fato 2: Sejam $B_r = \{(x,y) | x^2 + y^2 < r\}$, $\overline{B_r} = \{(x,y) | x^2 + y^2 \le r\}$. Então, se $p \in B_r$, $f(p) \in B_r$. Se $p \in \overline{B_r}$, $f(p) \in \overline{B_r}$.

Prova: $p \in B_r \left[\in \overline{B_r}\right] \Leftrightarrow |p-0| < r[\leq r]$. Mas $|f(p)-f(0)| = |f(p)-0| \leq |p-0| < r[\leq r]$.

Logo $f(p) \in B_r (\in \overline{B_r})$.

Fato 3: Se $f(p)$ está no bordo de D ($|f(p) - 0| = 1$) então p está no bordo de D.

Prova: $f(p)$ e $-f(p)$ são diametralmente opostos, logo $|f(p)-(-f(p))| = 2.$ Se p não estivesse no bordo de D, $\forall q \in D, |p-q| < 2,$ absurdo pois deveríamos ter $|f(p)-f(q)| \leq |p-q|, \forall p, q \in D.$

Fato 4: Se $f(p)$ e $f(q)$ são diametralmente opostos, então p e q também são.

Prova: Se p e q não fossem diametralmente opostos, $|p-q| < 2 = |f(p)-f(q)|,$ absurdo.

Fato 5: Se p e q são opostos tais que $f(p)$ e $f(q)$ são diametralmente opostos, e se x está entre p e q então $f(x)$ está entre $f(p)$ e $f(q)$. Além disso, nesse caso $\overline{f(x)f(q)} = \overline{xq},$ $\overline{f(x)f(p)} = \overline{xp}$ e $\overline{f(x)f(0)} = \overline{x0}$

Se A, B, C são pontos distintos, dizemos que B está entre A e C (e denotamos $A \to B \to C$) se $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$) (onde $\overline{AB} = |A-B|$).

Prova: Sabemos, pelo fato 4, que p e q são diametralmente opostos. Se $x = 0$, $f(x) = 0$ e o lema fica trivial. Suponhamos, sem perda de generalidade, $x \neq 0$ e $p \to x \to 0$. Então $\overline{px} + \overline{x0} = \overline{p0}.$ Como $\overline{f(p)f(x)} \leq \overline{px}$ e $\overline{f(x)f(0)} \leq \overline{x0},$ $\overline{f(p)f(x)} + \overline{f(x)f(0)} \leq \overline{px} + \overline{x0} = 1$, por outro lado, pela desigualdade triangular, $\overline{f(p)f(x)} + \overline{f(x)f(0)} \geq \overline{f(p)f(0)} = 1.$ Logo $f(x)$ está entre $f(p)$ e 0 e portanto está entre $f(p)$ e $f(q)$, e temos $\overline{f(p)f(x)} = \overline{px},$ $\overline{f(0)f(x)} = \overline{0x}$ e $\overline{f(q)f(x)} = \overline{qx}.$

Fato 6: Se p está no bordo de D ($|p - 0| = 1$) então $f(p)$ está no bordo de D (o bordo de D é $\hat{B}$, só para facilitar a notação). Além disso, a restrição de f a $\hat{B}$ (que tem imagem $\hat{B}$) é uma composição de rotação com espelhamento.

Prova: Seja $p \in D$ tal que $f(p) = (1, 0)$. Pelo fato 3, $p \in \hat{B}$. A imagem inversa de $(-1, 0)$, pelo fato 4, é $-p$, isto é, $f(-p) = (-1, 0)$. ($-p \in \overline{B}$). Sejam q e $-q$ as imagens inversas de $(0, 1)$ e $(-1, 0)$.

Então q e $-q \in \hat{B}$ e é bem fácil ver que $p, q, -p$ e $-q$ formam um quadrado (ou não teríamos $|f(m)-f(n)| \leq |m-n|, \forall m, n \in D$).

Seja $\tilde{f}: D \to D$ a composição de rotação com espelhamento que coincide com f nos pontos $p, q, -p$ e $-q$. Vamos mostrar que $f(x) = \tilde{f}(x), \forall x \in \hat{D}.$

Note que $\tilde{f}$ é uma bijeção, e que $\tilde{f}^{-1}: \hat{D} \to \hat{D}$ também é uma composição de rotação com espelhamento.

Sejam $m, -m \in \hat{D}$. Existem $n, -n \in \hat{B}$ tais que $f(n) = m$ e $f(-n) = -m$. Devemos ter $|m-(1,0)| = |f(n) - f(p)| \le |n-p|$, $|m-(-1,0)| = |f(n) - f(-p)| \le |n+p|$. Isso já implica que $n = \tilde{f}^{-1}(m)$ ou $n = -\tilde{f}^{-1}(m)$, pois $\{x \in \hat{D} \mid |x-p| \ge |m-(1,0)|$ e $|x+p| \ge |m-(-1,0)|\} = \{\tilde{f}^{-1}(m), -\tilde{f}^{-1}(m)\}$ (de fato $|\tilde{f}(m) - p| = |m - \tilde{f}(p)| = |m-(1,0)|$ e $|\tilde{f}^{-1}(m) + p| = |m - \tilde{f}(-p)| = |m-(-1,0)|$. Como, além disso, $|m-(0,1)| = |f(n) - f(q)| \le |n-q|$ e $|m-(0,-1)| = |f(n) - f(-q)| \le |n+q|$, sobra apenas a possibilidade $n = \tilde{f}^{-1}(m)$. Como $\tilde{f}^{-1}$ é sobrejetiva, dado $x \in \hat{D}$ existe $m \in \hat{D}$ tal que $x = \tilde{f}^{-1}(m)$, e portanto teremos $f(x) = m = \tilde{f}(x)$.

Agora estamos em condições de terminar a prova: de fato segue dos fatos 5 e 6 que $f = \tilde{f}$ e logo é uma composição de rotação com espelhamento, e portanto preserva distâncias. Com efeito, $f = \tilde{f}$ em $\tilde{D}$, e f leva diâmetros $\overline{pq}$ com $q = -p \in \hat{D}$ em diâmetros $\tilde{f}(p)\tilde{f}(q)$ (e $\tilde{f}(p), \tilde{f}(q) \in \hat{D}$), e tanto f quanto $\tilde{f}$ restritos ao diâmetro $\overline{pq}$ preservam as distâncias aos extremos, e portanto preservam distâncias, logo coincidem.

XXIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Resultado – Nível 1 (5ª. e 6ª. Séries)

NOME	CIDADE – ESTADO	PRÊMIO
Eduardo Fischer	Encantado – RS	**Ouro**
Raphael Rodrigues Mata	Salvador – BA	**Ouro**
Guilherme R. Nogueira de Souza	São Paulo – SP	**Ouro**
André Linhares Rodrigues	Fortaleza – CE	**Ouro**
André Martins Costa Aranha	Rio de Janeiro – RJ	**Ouro**
Luiz Müller	Vitória – ES	**Ouro**
Rafael Bandeira Lages	Teresina – PI	**Prata**
Felipe Gonçalves Assis	Campina Grande – PB	**Prata**
Renato Rebouças de Medeiros	Fortaleza – CE	**Prata**
Thaís Viveiro	São Paulo – SP	**Prata**
Adriano Jorge Braun Vieira Neto	Fortaleza – CE	**Prata**
Jaques Deivinson da Silva Castello	Serra – ES	**Prata**
Enzo Haruo Hiraoka Moriyama	São Paulo – SP	**Prata**
Priscilla Yu Chen Kashiwakura	São Paulo – SP	**Prata**
Jefferson Quesado Neto	Fortaleza – CE	**Prata**
William Vasconcelos de Morais	Fortaleza – CE	**Prata**
Sophia Cherem Lopes	Belo Horizonte – MG	**Bronze**
Arthur Rodrigues de Oliveira Sobral	S. J. dos Campos – SP	**Bronze**
Pedro Paulo Gondim Cardoso	Salvador – BA	**Bronze**
Regina Reis da Costa Alves	Rio de Janeiro – RJ	**Bronze**
Weslen Costa Timóteo	Paulista – PE	**Bronze**
André Rodrigues Salerno	Goiânia – GO	**Bronze**
Caroline Goulart Campos	Rio de Janeiro – RJ	**Bronze**
Edson Augusto Bezerra Lopes	Fortaleza – CE	**Bronze**
Luiz Felipe Bruzzi Curi	Belo Horizonte – MG	**Bronze**
Bernardo de Oliveira Veiga	Rio de Janeiro – RJ	**Bronze**
Felipe Alves Tomé	Fortaleza – CE	**Bronze**
Luiza Cristina Maia e Silva	Recife – PE	**Bronze**
Igor Ribeiro Azevedo	Belo Horizonte – MG	**Bronze**
Mariana Nasser Brolezzi	Santo André – SP	**Menção Honrosa**
Paulo Alexandre Pavoni	Curitiba – PR	**Menção Honrosa**
Paulo André Carvalho de Melo	Rio de Janeiro – RJ	**Menção Honrosa**
Guilherme Pereira Barbosa	Belo Horizonte – MG	**Menção Honrosa**
Gustavo Sampaio Sousa	Fortaleza – CE	**Menção Honrosa**
Dennis G. de Macedo Bragagnolo	Curitiba – PR	**Menção Honrosa**
Pedro Nogueira Machado	Rio de Janeiro – RJ	**Menção Honrosa**
Yuriy Thallickson Bincovski	Curitiba – PR	**Menção Honrosa**
Gil Henriques	Vassouras – RJ	**Menção Honrosa**
Cássio Kendi Takamori	S. J. dos Campos – SP	**Menção Honrosa**
Iuri Lima Ribeiro	Fortaleza – CE	**Menção Honrosa**
Franco Veronez Ribeiro	Vitória – ES	**Menção Honrosa**
Mateos Kruchelski Tschá	Curitiba – PR	**Menção Honrosa**
Kleber Varela dos Santos	Jaboatão dos Guararapes – PE	**Menção Honrosa**
Núbia Martins Domingues	Belo Horizonte – MG	**Menção Honrosa**
Eduardo Tadafumi Sato	Mogi das Cruzes – SP	**Menção Honrosa**
Marco Aurélio Buono Carone	Belo Horizonte – MG	**Menção Honrosa**
Thalles Melo de Oliveira Lopes	Goiânia – GO	**Menção Honrosa**
Michel Ricardo Nigri	Rio de Janeiro – RJ	**Menção Honrosa**
Raquel Pereira Martins	Rio de Janeiro – RJ	**Menção Honrosa**

Resultado – Nível 2 (7a. e 8a. Séries)

NOME	CIDADE – ESTADO	PRÊMIO
Thiago Costa Leite Santos	São Paulo – SP	**Ouro**
Henry Wei Cheng Hsu	São Paulo – SP	**Ouro**
Rafael Daigo Hirama	Campinas – SP	**Ouro**
Rodrigo Aguiar Pinheiro	Fortaleza – CE	**Ouro**
Marcus Edson Barreto Brito	Fortaleza – CE	**Prata**
Daniela Satie Kondo	São Paulo – SP	**Prata**
Telmo Luis Correa Junior	Santo André – SP	**Prata**
Alan Hideki Uchida	São Paulo – SP	**Prata**
Felipe Rodrigues Nogueira de Souza	São Paulo – SP	**Prata**
Diogo dos Santos Suyama	Belo Horizonte – MG	**Prata**
Ricardo Mizoguchi Gorgoll	São Paulo – SP	**Prata**
Karoline Matias Morais	Fortaleza – CE	**Prata**
Paulo Roberto Sampaio Santiago	Salvador – BA	**Prata**
Marcela Sobrinho Pereira	Fortaleza – CE	**Prata**
Thomás Yoiti Sasaki Hoshina	Rio de Janeiro – RJ	**Prata**
Guilherme Rodrigues Salerno	Goiânia – GO	**Bronze**
Hector Kenzo Horiuti Kitahara	São Paulo – SP	**Bronze**
Mauro Cardoso Lopes	São Paulo – SP	**Bronze**
André Lucas Ribeiro dos Santos	Pindamonhangaba – SP	**Bronze**
Renata Sayuri Takehara	S. J. dos Campos – SP	**Bronze**
Henrique Castro Noronha	Valinhos – SP	**Bronze**
Matheus Migliolo Coelho	Limeira – SP	**Bronze**
Lucas de Freitas Frenay	Santo André – SP	**Bronze**
Rafael Marini Silva	Vila Velha – ES	**Bronze**
André Slepetys	São Paulo – SP	**Bronze**
Luiza Fontana Barbosa	Curitiba – PR	**Bronze**
Jefferson Fonlin Tsai	São Paulo – SP	**Bronze**
Deborah Regina Fujisawa Okuno	São Paulo – SP	**Bronze**
Felipe Paupitz Schlichting	Florianópolis – SC	**Bronze**
Elton Gomes Coriolano	Fortaleza – CE	**Bronze**
Álison Santos Xavier	Fortaleza – CE	**Menção Honrosa**
Marcus Vinícius Martins da Costa	Belo Horizonte – MG	**Menção Honrosa**
Rodrigo Viana Soares	Fortaleza – CE	**Menção Honrosa**
Lucas M. Pereira Castello Branco	Fortaleza – CE	**Menção Honrosa**
Larissa Rodrigues Ribeiro	Fortaleza – CE	**Menção Honrosa**
Thiago Jorge Marinho Vieira	Fortaleza – CE	**Menção Honrosa**
Cincinato Furtado Leite Neto	Fortaleza – CE	**Menção Honrosa**
Rafael Kitayama Shiraiwa	São Paulo – SP	**Menção Honrosa**
Anderson Hoshiko Aiziro	São Paulo – SP	**Menção Honrosa**
Guilherme Alonso Daud Patavino	Santos – SP	**Menção Honrosa**
Vitor Humia Fontoura	Salvador – BA	**Menção Honrosa**
André Schultz	Santa Bárbara D'Oeste – SP	**Menção Honrosa**
Gabriel Tavares Bujokas	São Paulo – SP	**Menção Honrosa**
Francisco Bruno de Lima Holanda	Fortaleza – CE	**Menção Honrosa**
Gustavo Eufrásio Farias	Fortaleza – CE	**Menção Honrosa**
Katja Stephanie Ried	Valinhos – SP	**Menção Honrosa**
Raul Máximo Alexandrino Nogueira	Fortaleza – CE	**Menção Honrosa**
Marcos Vainer Loeff	São Paulo – SP	**Menção Honrosa**
Antonia Taline de Souza Mendonça	Fortaleza – CE	**Menção Honrosa**
Júlio Vitório dos Santos Ferreira	Rio de Janeiro – RJ	**Menção Honrosa**

Resultado – Nível 3 (Ensino Médio)

NOME	CIDADE – ESTADO	PRÊMIO
Humberto Silva Naves	São José dos Campos – SP	**Ouro**
Davi Máximo Alexandrino Nogueira	Fortaleza – CE	**Ouro**
Larissa Cavalcante Queiroz de Lima	Fortaleza – CE	**Ouro**
Carlos Stein Naves de Brito	Goiânia – GO	**Ouro**
Alex Corrêa Abreu	Niterói – RJ	**Ouro**
Daniel Pinheiro Sobreira	Fortaleza – CE	**Prata**
Einstein do Nascimento Júnior	Fortaleza – CE	**Prata**
Guilherme Fujiwara	São Paulo – SP	**Prata**
Thiago Barros Rodrigues Costa	Fortaleza – CE	**Prata**
Rafael Tajra Fonteles	Teresina – PI	**Prata**
Eduardo Famini Silva	Salvador – BA	**Prata**
Rodrigo Roque Dias	São Paulo – SP	**Prata**
Fábio Dias Moreira	Rio de Janeiro – RJ	**Prata**
Daniel Pessôa Martins Cunha	Fortaleza – CE	**Bronze**
Yuri Gomes Lima	Fortaleza – CE	**Bronze**
Paulo Ribeiro de Almeida Neto	Ananindeua – PA	**Bronze**
Thiago da Silva Sobral	Fortaleza – CE	**Bronze**
Germanna de Oliveira Queiroz	Fortaleza – CE	**Bronze**
Bernardo Freitas Paulo da Costa	Rio de Janeiro – RJ	**Bronze**
Samuel Barbosa Feitosa	Fortaleza – CE	**Bronze**
Isaac Newton Ferreira Santa Rita	Nova Iguaçu – RJ	**Bronze**
José Luiz Gomes Junior	Belém – PA	**Bronze**
Ayran Ayres Barbosa Loriato	Vitória – ES	**Bronze**
Fernanda Maria de Oliveira Nicacio	Fortaleza – CE	**Bronze**
Henrique Chociay	Pinhais – PR	**Bronze**
João Alfredo Castellani Fajardo Freire	Salvador – BA	**Bronze**
Rafael da Silva Faria	Rio de Janeiro – RJ	**Bronze**
Israel Franklim Dourado Carrah	Fortaleza – CE	**Menção Honrosa**
Artur Duarte Nehmi	São Paulo – SP	**Menção Honrosa**
Lucas de Melo Pontes e Silva	Fortaleza – CE	**Menção Honrosa**
Diogo Luiz Duarte	Rio de Janeiro – RJ	**Menção Honrosa**
Estillac B. Filho	Belém – PA	**Menção Honrosa**
Alex Cardoso Lopes	São Paulo – SP	**Menção Honrosa**
Arthur M. Rocha de Azevedo Scalercio	Belém – PA	**Menção Honrosa**
Diego Silva Dias	Belém – PA	**Menção Honrosa**
Martha Priscilla Araújo de Moraes	Fortaleza – CE	**Menção Honrosa**
Ricardo Monteiro da Silva Lanna	Belo Horizonte – MG	**Menção Honrosa**
Fernando Souza Martins	S. J. dos Campos – SP	**Menção Honrosa**
Maurício Richartz	Curitiba – PR	**Menção Honrosa**
Léo Tsukui	Belém – PA	**Menção Honrosa**
Vitor Gabriel Kleine	Mogi das Cruzes – SP	**Menção Honrosa**

Resultado – Nível Universitário

NOME	CIDADE – ESTADO	PRÊMIO
Emanuel Augusto de Souza Carneiro	Fortaleza – CE	**Ouro**
Carlos Yuzo Shine	São Paulo – SP	**Ouro**
Daniel Massaki Yamamoto	São Paulo – SP	**Ouro**
Fabrício Siqueira Benevides	Fortaleza – CE	**Prata**
Diêgo Veloso Uchôa	Teresina – PI	**Prata**
Frederico Vale Girão	Fortaleza – CE	**Prata**
Bruno Fernandes Cerqueira Leite	São Paulo – SP	**Prata**
Marcio Afonso Assad Cohen	Rio de Janeiro – RJ	**Prata**
Lucas Heitzmann Gabrielli	São Paulo – SP	**Prata**
Christian Iveson	São Paulo – SP	**Bronze**
Daniel Nobuo Uno	São Paulo – SP	**Bronze**
Giuliano Boava	Florianópolis – SC	**Bronze**
Vinícius José Fortuna	Campinas – SP	**Bronze**
Leonardo Augusto Zão	Nilópolis – RJ	**Bronze**
Leandro de Mattos Ferreira	Rio de Janeiro – RJ	**Bronze**
Rodrigo Villard Milet	Rio de Janeiro – RJ	**Bronze**
Tertuliano Franco Santos Franco	Salvador – BA	**Bronze**
Aleksander Medella Campos da Silva	Rio de Janeiro – RJ	**Bronze**
Arnaldo João do Nascimento Junior	Duque de Caxias – RJ	**Bronze**
Artur Radoman de Oliveira	Rio de Janeiro – RJ	**Bronze**
Bruno Germano Borics	Rio de Janeiro – RJ	**Bronze**
Thiago Afonso de André	São Paulo – SP	**Bronze**
Juliana Abrantes Freire	Rio de Janeiro – RJ	**Bronze**
Felipe Duarte Cardozo de Pina	Rio de Janeiro – RJ	**Bronze**
Fernando Prado Rocha	Goiânia – GO	**Menção Honrosa**
Camilo Marcantonio Junior	Rio de Janeiro – RJ	**Menção Honrosa**
Dúlio Matos Leite de Carvalho e Silva	Rio de Janeiro – RJ	**Menção Honrosa**
Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva	Campina Grande – PB	**Menção Honrosa**
Ilan Lobel	Rio de Janeiro – RJ	**Menção Honrosa**
Rafael Pellizzer Soares	Jundiaí – SP	**Menção Honrosa**
Anderson Rodrigues Ferreira	Rio de Janeiro – RJ	**Menção Honrosa**
Rafael de Freitas Lemos	S. J. dos Campos – SP	**Menção Honrosa**
Bruno Martins Reboredo	Rio de Janeiro – RJ	**Menção Honrosa**
Daniele Véras de Andrade	Rio de Janeiro – RJ	**Menção Honrosa**

AGENDA OLÍMPICA

XXIV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

NÍVEIS 1, 2 e 3
Primeira Fase – Sábado, 8 de junho de 2002
Segunda Fase – Sábado, 14 de setembro de 2002
Terceira Fase – Sábado, 19 de outubro de 2002 (níveis 1, 2 e 3)
Domingo, 20 de outubro de 2002 (níveis 2 e 3 - segundo dia de prova).

NÍVEL UNIVERSITÁRIO
Primeira Fase – Sábado, 14 de setembro de 2002
Segunda Fase – Sábado, 19 e Domingo, 20 de outubro de 2002

♦

VIII OLIMPÍADA DE MAIO
maio de 2002

♦

XIII OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL
22 a 28 de junho de 2002
Fortaleza – CE, Brasil

♦

XLIII OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA
18 a 31 de julho de 2002
Glasgow, Reino Unido

♦

XVII OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA
30 de setembro a 5 de outubro de 2002
El Salvador

♦

V OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
outubro de 2002

♦ ♦ ♦

COORDENADORES REGIONAIS

Amarísio da Silva Araújo	(UFV)	Viçosa – MG
Alberto Hassen Raad	(UFJF)	Juiz de Fora – MG
Benedito Tadeu Vasconcelos Freire	(UFRN)	Natal – RN
Carlos Frederico Borges Palmeira	(PUC-Rio)	Rio de Janeiro – RJ
Claudio Arconcher	(Colégio Leonardo da Vinci)	Jundiaí – SP
Claus Haetinger	(UNIVATES)	Lajeado – RS
Cleonor Crescêncio das Neves	(UTAM)	Manaus – AM
Élio Mega	(Colégio Etapa)	São Paulo – SP
Rosângela Souza	(Colégio Singular)	Santo André – SP
Florêncio Ferreira Guimarães Filho	(UFES)	Vitória – ES
Gisele de Araújo Prateado Gusmão	(UFGO)	Goiânia – GO
Ivanilde Fernandes Saad	(UC. Dom Bosco)	Campo Grande– MS
Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia	(UFPB)	João Pessoa – PB
João Benício de Melo Neto	(UFPI)	Teresina – PI
João Francisco Melo Libonati	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Irene Nakaoka	(UEM)	Maringá – PR
José Carlos Pinto Leivas	(UFRG)	Rio Grande – RS
José Cloves Saraiva	(UFMA)	São Luis – MA
José Gaspar Ruas Filho	(ICMC-USP)	São Carlos – SP
José Luiz Rosas Pinho	(UFSC)	Florianópolis – SC
José Vieira Alves	(UFPB)	Campina Grande – PB
Marcelo Rufino de Oliveira	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Licio Hernandes Bezerra	(UFSC)	Florianópolis – SC
Luzinalva Miranda de Amorim	(UFBA)	Salvador – BA
Marcondes Cavalcante França	(UFC)	Fortaleza – CE
Pablo Rodrigo Ganassim	(Liceu Terras do Engenho)	Piracicaba – SP
Reinaldo Gen Ichiro Arakaki	(INPE)	SJ dos Campos – SP
Ricardo Amorim	(Centro Educacional Logos)	Nova Iguaçu – RJ
Roberto Vizeu Barros	(Colégio Acae)	Volta Redonda – RJ
Sérgio Cláudio Ramos	(IM-UFRGS)	Porto Alegre – RS
Silvio de Barros Melo	(UFPE)	Recife – PE
Tadeu Ferreira Gomes	(UEBA)	Juazeiro – BA
Tomás Menéndez Rodrigues	(U. Federal de Rondônia)	Porto Velho – RO
Valdenberg Araújo da Silva	(U. Federal de Sergipe)	São Cristovão – SE
Wagner Pereira Lopes	(Escola Técnica Federal de Goiás)	Jataí – GO