CONTEÚDO

AOS LEITORES

Nesta última edição de 2001 publicamos soluções dos problemas da Olimpíada Internacional e da Olimpíada Iberoamericana deste ano, nas quais o Brasil obteve ótimos resultados, que deixaram toda a nossa comunidade olímpica muito contente.

Por falar na comunidade olímpica, lembramos que neste ano foi criado o nível universitário da OBM, cujas provas e soluções serão publicadas no próximo número da Eureka!. Aproveitamos para saudar os novos (e antigos) olímpicos universitários.

Mais uma vez agradecemos o grande número de soluções e problemas propostos que são enviados pelos leitores, e que nos ajudam a fazer a Eureka!. Como um estímulo adicional a nossos colaboradores, vamos dar um reconhecimento especial aos leitores que resolverem mais problemas propostos,ou aqueles problemas propostos que considerarmos mais difíceis, ou que estiverem há bastante tempo sem solução. Aguardem e continuem colaborando!

Finalmente, agradecemos a colaboração de Carlos Yuzo Shine, Eduardo Tengan e Pablo Ganassim, que ajudaram na revisão deste número, e desejamos um ótimo 2002 a todos.

Os editores.

XLII OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

Problemas e Soluções

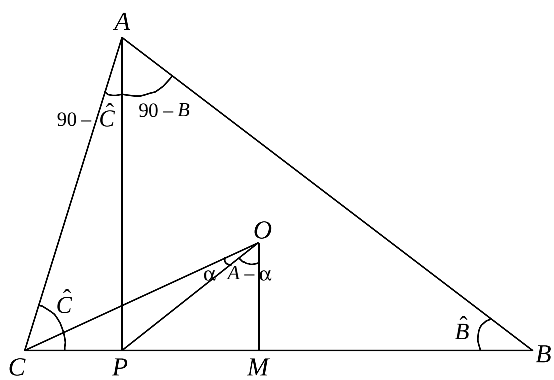
PROBLEMA 1

Seja ABC um triângulo acutângulo com circuncentro O. Seja PA uma altura do triângulo com P no lado BC.

Considere que $B\hat{C}A \ge A\hat{B}C + 30°$.

Prove que $C\hat{A}B + C\hat{O}P < 90°$.

SOLUÇÃO DE ALEX CORRÊA ABREU (NITERÓI – RJ):



Sejam $A\hat{C}B = C$, $A\hat{B}C = B$, $C\hat{A}O = A$ e $C\hat{O}P = \alpha \Rightarrow CP = b\cos C$. Seja M o ponto médio de BC.

Como $C\hat{O}M = \hat{A}$ e $C\hat{O}P = \alpha \Rightarrow P\hat{O}M = A - \alpha \Rightarrow tg\ \hat{A} = \dfrac{\overline{CM}}{\overline{OM}} = \dfrac{a}{2\overline{OM}}$ e

$tg(\hat{A} - \alpha) = \dfrac{\overline{PM}}{\overline{OM}}$ onde $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ e $R = \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} \Rightarrow$

$$tg\alpha = tg\left(\hat{A} - \left(\hat{A} - \alpha\right)\right) = \frac{tg\hat{A} - tg\left(\hat{A} - \alpha\right)}{1 + tg\hat{A}\cdot tg\left(\hat{A} - \alpha\right)} = \frac{\dfrac{\overline{CM} - \overline{PM}}{\overline{OM}}}{1 + \dfrac{\overline{CM}\cdot\overline{PM}}{\overline{OM}^2}} = \frac{\overline{CP}\cdot\overline{OM}}{\overline{OM}^2 + \overline{CM}\cdot\overline{PM}} =$$

$$= \frac{b\cos\hat{C}\cdot R\cos\hat{A}}{R^2\cos^2\hat{A} + \dfrac{a^2}{4} - \dfrac{ab}{2}\cos\hat{C}}$$ já que $\overline{CP} = b\cos\hat{C}$ $\overline{OM} = R\cos\hat{A}$,

$\overline{PM} = \frac{a}{2} - \overline{CP} = \frac{a}{2} - b\cos\hat{C}$ e $CM = \frac{a}{2}$ e, pela lei dos senos no triângulo $ABC \Rightarrow b = 2Rsen\hat{B}$ e $a = 2Rsen\hat{A} \Rightarrow$

$$\Rightarrow tg\alpha = \frac{2R^2 sen\hat{B}\cos\hat{C}\cos\hat{A}}{R^2\cos^2\hat{A} + R^2 sen^2\hat{A} - 2R^2 sen\hat{A}sen\hat{B}\cos\hat{C}} = \frac{2sen\hat{B}\cos\hat{C}\cos\hat{A}}{1 - 2sen\hat{A}sen\hat{B}\cos\hat{C}},$$ mas

como $tg\alpha > 0 \Rightarrow 1 - 2sen\hat{A}sen\hat{B}\cos\hat{C} > 0 \Rightarrow tg\alpha \cdot tg\hat{A} = \frac{2sen\hat{B}\cos\hat{C}\cos\hat{A}}{1 - 2sen\hat{A}sen\hat{B}\cos\hat{C}} \cdot \frac{sen\hat{A}}{\cos\hat{A}} =$

$= \frac{2sen\hat{B}sen\hat{A}\cos\hat{C}}{1 - 2sen\hat{B}sen\hat{A}\cos\hat{C}}$ e como $2x^2 - x - 1 < 0,\ \forall x \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \Rightarrow 2sen^2\hat{A} - sen\hat{A} < 1$ $\forall \hat{A} \in (0, 90°)$, mas $sen\left(\hat{C} - \hat{B}\right) \ge \frac{1}{2}$ pois $90° > \hat{C} - \hat{B} \ge 30°$ e a função seno é crescente no intervalo $(0, 90°) \Rightarrow sen\hat{A} \cdot sen\left(\hat{C} - \hat{B}\right) \ge \frac{sen\hat{A}}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -sen\hat{A} \ge -2sen\hat{A}sen\left(\hat{C} - \hat{B}\right) \Rightarrow 2sen\hat{A} - 2sen\hat{A}sen\left(\hat{C} - \hat{B}\right) \le 2sen^2\hat{A} - sen\hat{A} < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2sen\hat{A}\left(sen\hat{A} - sen\left(\hat{C} - \hat{B}\right)\right) < 1 \Rightarrow 2sen\hat{A}\left(sen\left(\hat{B} + \hat{C}\right) + sen\left(\hat{B} - \hat{C}\right)\right) < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4sen\hat{A}sen\hat{B}\cos\hat{C} < 1 \Rightarrow \frac{2sen\hat{A}sen\hat{B}\cos\hat{C}}{1 - 2sen\hat{A}sen\hat{B}\cos\hat{C}}$$ pois

$1 - 2sen\hat{A}sen\hat{B}\cos\hat{C} > 0 \Rightarrow tg\hat{A} \cdot tg\alpha < 1 \Rightarrow tg\left(\hat{A} + \alpha\right) = tg\alpha + tg\hat{A} > 0 \Rightarrow \hat{A} + \alpha < 90°.$

PROBLEMA 2

Prove que

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \ge 1$$

para quaisquer números reais positivos a, b, e c.

SOLUÇÃO DE ALEX CORRÊA ABREU (NITERÓI – RJ):

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ba}} \ge 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2(b^2 + 8ca)(c^2 + 8ba)} + \sqrt{b^2(a^2 + 8cb)(c^2 + 8ba)} +$$
$$\sqrt{c^2(b^2 + 8ca)(a^2 + 8bc)} \ge \sqrt{513a^2b^2c^2 + 8(a^3b^3 + a^3c^3 + c^3b^3) + 64abc(a^3 + b^3 + c^3)}$$

Elevando ao quadrado, obtemos

(I)

$$2\sqrt{513a^2b^2c^2 + 8(a^3b^3 + a^3c^3 + c^3b^3) + 64abc(a^3 + b^3 + c^3)}\cdot$$

$$\cdot(ab\sqrt{c^2 + 8ab} + ac\sqrt{b^2 + 8ac} + bc\sqrt{a^2 + 8bc}) \ge 510a^2b^2c^2 - 8(a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3)$$

mas pela desigualdade das médias vale:

(II) $8(a^3b^3 + a^3c^3 + c^3b^3) \ge 24a^2b^2c^2$ e $64abc(a^3 + b^3 + c^3) \ge 192a^2b^2c^2$

donde:

(III) $2\sqrt{513a^2b^2c^2 + 8(a^3b^3 + a^3c^3 + c^3b^3) + 64abc(a^3 + b^3 + c^3)} \ge 27abc$

portanto basta mostrar que:

(IV) $(ab\sqrt{c^2 + 8ab} + ac\sqrt{b^2 + 8ac} + bc\sqrt{a^2 + 8bc}) \ge 9abc$. É fácil ver que (II), (III) e (IV) implicam (I).

Dividindo (IV) por *abc*, obtemos $\sqrt{8\frac{ab}{c^2}+1} + \sqrt{8\frac{ac}{b^2}+1} + \sqrt{8\frac{bc}{a^2}+1} \ge 9$, e fazendo $\frac{ab}{c^2} = u, \frac{ac}{b^2} = v, \frac{bc}{a^2} = w$ temos que provar que: $\sqrt{8u+1} + \sqrt{8v+1} + \sqrt{8w+1} \ge 9$, dado que $uvw = 1$.

Usando várias vezes a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, obtemos

$$\sqrt{8u+1} + \sqrt{8v+1} + \sqrt{8w+1} \ge 3\cdot\sqrt[6]{512uvw + 64(uv+uw+vw) + 8(u+v+w) + 1} \ge$$

$\ge 3\cdot\sqrt[6]{512uvw + 192\sqrt[3]{u^2v^2w^2} + 24\sqrt[3]{uvw} + 1} = 3\cdot\sqrt[6]{729} = 9$, o que prova (IV), e de (II), (III) e (IV) obtemos (I), c.q.d..

PROBLEMA 3

Vinte e uma meninas e vinte e um meninos participaram numa competição matemática.

- Cada participante resolveu no máximo seis problemas.
- Para cada menina e cada menino, existe pelo menos um problema que foi resolvido por ambos.

Prove que existe um problema que foi resolvido por pelo menos três meninas e pelo menos três meninos.

SOLUÇÃO DE CARLOS STEIN NAVES DE BRITO (GOIÂNIA – GO):

Considere a tabela:

$A \backslash O$	O_1	O_2	O_3	. . .	O_{21}
A_1	$X_{1,1}$	$X_{1,2}$	$X_{1,3}$		$X_{1,21}$
A_2	$X_{2,1}$	$X_{2,2}$	$X_{2,3}$		$X_{2,21}$
A_3	$X_{3,1}$	$X_{3,2}$	$X_{3,3}$		$X_{3,21}$
$\vdots$					$\vdots$
A_{21}	$X_{21,1}$	$X_{21,2}$	$X_{21,3}$	. . .	$X_{21,21}$

Cada intersecção $X_{i,j}$ é a questão que a menina A_i e o menino O_j fizeram em comum (se fizeram mais de uma em comum, escolha uma delas qualquer)

Lema: em cada linha i da tabela temos pelo menos 11 $X_{i,k}$'s com a propriedade (I): esse $X_{i,k}$ aparece pelo menos 3 vezes nesta linha (contando ele mesmo).

Prova: Se por absurdo há menos de 11, então há pelo menos 11 que não têm essa propriedade (são 21 no total). Então cada um desses se refere a uma questão que aparece no máximo 2 vezes na linha.

Mas se há pelo menos 11 $X_{i,k}$'s e para cada questão no máximo dois $X_{i,k}$'s se referem a ela, então há no mínimo 6 questões referidas nesse grupo.

Mas uma linha só tem no máximo 6 questões referidas, pois a menina i fez no máximo 6 questões. Assim todas 6 questões feitas pela menina aparecem no máximo 2 vezes. Absurdo, pois $6 \times 2 = 12$, mas na linha aparecem 21 $(21 > 12)$ questões. Assim o lema é verdadeiro.

Há o lema análogo de que em cada coluna j há pelo menos 11 X_{kj}'s com a propriedade (II): cada um se refere a uma questão que aparece pelo menos 3 vezes na coluna. A prova é análoga.

Contando os $X_{i,j}$'s com a propriedade (I) temos pelo menos 11×21 (21 linhas).

Analogamente pelo menos 11×21 com a propriedade (II).

Se não houvesse nenhum $X_{i,j}$ que tem ambas propriedades, teríamos pelo menos 11×21 com propriedade (I), outros 11×21 com propriedade (II), somando 22×21 $X_{i,j}$'s, absurdo, pois há só 21×21 $X_{i,j}$'s. Assim há um $X_{i,j}$ que tem ambas propriedades. Assim ele se refere a uma questão y que aparece 3 vezes em sua coluna e 3 vezes em sua linha. Como aparece 3 vezes em sua coluna (em 3 linhas distintas), as 3 meninas relativas a essas 3 linhas fizeram a questão y (pois tem ela em comum).

Analogamente 3 meninos fizeram a questão y, analisando as 3 colunas distintas. Assim 3 meninos e 3 meninas fizeram a questão y, o que sempre ocorre para certa questão y.

SEGUNDO DIA

DURAÇÃO: 4 horas e meia.

PROBLEMA 4

Seja n um inteiro ímpar maior do que 1 e sejam $k_1, k_2, ..., k_n$ inteiros dados. Para cada uma das n! permutações $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ de $\{1,2,...,n\}$, defina

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i .$$

Prove que existem duas permutações b e c, $b \neq c$, tais que n! é um divisor de $S(b) - S(c)$.

SOLUÇÃO DE CARLOS STEIN NAVES DE BRITO (GOIÂNIA – GO):

Se não há $S(b)$ – $S(c)$ tal que $n! \mid S(b) - S(c)$, e há n! permutações, cada permutação é de uma classe módulo n!. Se não,existem b e c tais que
$S(b) \equiv S(c) (\text{mod}\, n) \Rightarrow S(b) - S(c) \equiv 0 (\text{mod}\, n).$ Absurdo.

Seja $\sum S(a_i),$ o somatório de todas n! permutações possíveis.

Cálculo de $\sum S(a_i)$:

Cada k_i aparece em (n – 1)! permutações multiplicando cada coeficiente (de 1 a n). Logo no total temos $(n-1)!(1 + 2 + ... + n)$ de cada k_i. Assim,

$$* \sum S(a_i) = (n-1)! \frac{(n+1)n}{2} \cdot \sum k_i = \frac{(n+1)}{2} \cdot n! \cdot \sum k_i \equiv 0 (\text{mod}\, n!)$$

(pois n é ímpar).Temos também que cada permutação é de uma classe, logo

$$\sum S(a_i) \equiv 1 + 2 + ... + n! \equiv \frac{n!(n!+1)}{2} (\text{mod}\, n!).$$

Como $n > 1,\ 2 \mid n!$, e

$$** \sum S(a_i) \equiv \frac{n!(n!+1)}{2} \equiv \left(\frac{n!}{2}\right) \cdot n! + \frac{n!}{2} \equiv \frac{n!}{2} (\text{mod}\, n!) .$$

De * e ** temos que $0 \equiv \dfrac{n!}{2} (\text{mod}\, n!)$, absurdo.

Logo há $S(b)$ e $S(c)$ tais que $S(b) \equiv S(c) \pmod{n!} \Rightarrow n! \mid S(b) - S(c)$.

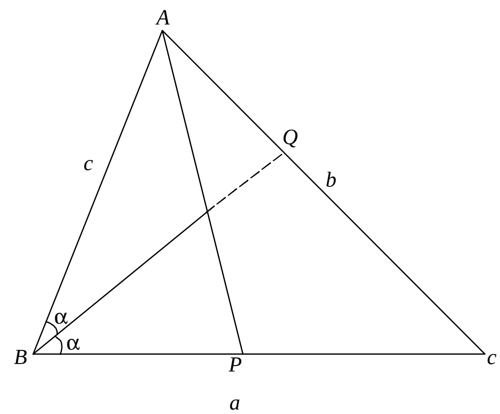
PROBLEMA 5

Num triângulo *ABC*, seja *AP* a bissectriz de $B\hat{A}C$ com *P* no lado *BC*, e seja *BQ* a bissectriz de $A\hat{B}C$ com *Q* no lado *CA*.

Sabemos que $B\hat{A}C = 60°$ e que *AB* + *BP* = *AQ* + *QB*.

Quais são os possíveis valores dos ângulos do triângulo *ABC*?

SOLUÇÃO DE THIAGO BARROS RODRIGUES COSTA (FORTALEZA – CE):



Nomenclatura:
$a = BC$
$b = AC$
$c = AB$
$\alpha = A\hat{B}Q = C\hat{B}Q$

Lema 1: $BQ = \dfrac{2ac\cos\alpha}{(a+c)}$

Prova: note que a área do triângulo *ABC* é igual a soma das áreas dos triângulos *ABQ* e *BQC*. Logo

$$\frac{a \cdot c \cdot sen2\alpha}{2} = \frac{c \cdot BQ \cdot sen\alpha}{2} + \frac{a \cdot BQ \cdot sen\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$a \cdot c \cdot 2sen\alpha \cdot \cos\alpha = (a+c)BQ \cdot sen\alpha \Rightarrow$$

$$BQ = \frac{2ac\cos\alpha}{(a+c)}$$

Lema 2: $AQ = \dfrac{bc}{(a+c)}$

Prova: Pelo teorema das bissetrizes internas temos que:

$$\frac{CQ}{AQ} = \frac{a}{c} \Rightarrow \frac{CQ + AQ}{AQ} = \frac{(a+c)}{c} \Rightarrow \frac{b}{AQ} = \frac{(a+c)}{c} \Rightarrow AQ = \frac{bc}{(a+c)}.$$

Lema 3: $BP = \dfrac{ac}{(b+c)}$

Prova: análogo ao lema 2.

Do problema, temos que $AB + BP = AQ + QB$. Então, pelos lemas:

$$\frac{ac}{b+c} + c = \frac{bc}{a+c} + \frac{2ac\cos\alpha}{a+c} \Rightarrow \frac{a+b+c}{b+c} = \frac{b+2a\cos\alpha}{a+c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+c)(a+b+c) = (b+c)(b+2a\cos\alpha) \Rightarrow$$

$$a^2 + c^2 + 2ac + ab + bc = b^2 + bc + 2a(b+c)\cos\alpha \Rightarrow$$

$$a^2 + c^2 - b^2 + 2ac + ab = 2a(b+c)\cos\alpha. \text{(I)}$$

Agora, pela lei dos cossenos no ΔABC:

$$a^2 + c^2 - 2ac\cos 2\alpha = b^2 \Rightarrow a^2 + c^2 - b^2 = 2ac\cos 2\alpha$$

Assim, de (I):

$$2ac\cos 2\alpha + 2ac + ab = 2a(b+c)\cos\alpha \Rightarrow$$

$$2c(\cos 2\alpha + 1) + b = 2(b+c)\cos\alpha \Rightarrow$$

$$2c\left(\cos^2\alpha - sen^2\alpha + \cos^2\alpha + sen^2\alpha\right) + b = 2(b+c)\cos\alpha \Rightarrow$$

$$4c\cos^2\alpha - 2(b+c)\cos\alpha + b = 0.$$

Resolvendo a equação:

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \text{ ou } \cos\alpha = \frac{b}{2c}.$$

Se $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$, o único valor que ele poderia assumir era 60°, nesse caso $A\hat{B}C = 2\alpha = 120° = 180° - 60° = 180° = B\hat{A}C$, absurdo.

Então $\cos\alpha = \dfrac{b}{2c}$. Pela lei dos senos no triângulo

$ABC: \dfrac{b}{c} = \dfrac{sen2\alpha}{sen(120° - 2\alpha)} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{sen2\alpha}{2sen(120° - 2\alpha)} = \dfrac{2sen\alpha\cos\alpha}{2sen(120° - 2\alpha)} \Rightarrow$

$sen(120° - 2\alpha) = sen\alpha$ (note que $\cos\alpha \neq 0$) $\Rightarrow$

Veja que α deve pertencer ao intervalo (0, 60°) para que o triângulo possa existir. Assim, o único valor possível para α seria fazendo $\alpha = 120° - 2\alpha \Rightarrow \alpha = 40° \Rightarrow$
$ABC = 80° \Rightarrow BCA = 40°$
Logo os ângulos do triângulo são:
$A\hat{B}C = 80°, B\hat{C}A = 40°$ e $B\hat{A}C = 60°$.

PROBLEMA 6

Sejam a, b, c, d inteiros com $a > b > c > d > 0$. Considere que

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c).$$

Prove que $ab + cd$ é um número primo.

SOLUÇÃO DE ANTONIO CAMINHA MUNIZ NETO (FORTALEZA – CE):

Simplificando a condição do enunciado obtemos $a^2 + c^2 - ac = b^2 + d^2 + bd$, ou ainda $(2a - c)^2 + 3c^2 = (b + 2d)^2 + 3b^2$ (*). Suponha, por contradição, que $ab + cd = p$, p primo. A condição $a > b > c > d > 0$ garante que $p = ab + cd \geq 4\times3 + 2\times1 = 14$, de modo que $p \geq 17$. Por outro lado,

$$2p = 2ab + 2cd = (2a - c)b + (b + 2d)c,$$

de modo que $mdc(2a - c, b + 2d)$ divide $2p$. Para $mdc(2a - c, b + 2d)$ ser par, deveríamos ter b e c pares, donde $p = ab + cd$ seria par, o que é um absurdo. Logo,

$$mdc(2a - c, b + 2d) = 1 \text{ ou } p$$

<u>Afirmação:</u> $mdc(2a - c, b + 2d) = 1$:

Suponha que $mdc(2a - c, b + 2d) = p$. Então (*) nos daria que $p^2 \mid 3(b^2 - c^2)$, e daí $p^2 \mid (b^2 - c^2)$, uma vez que $p \neq 3$. Porém, $p = ab + cd > b$, de modo que

$$0 < b^2 - c^2 < p^2,$$

um absurdo.

Agora, sejam $x = 2a - c$, $y = b + 2d$. Então $mdc(x, y) = 1$ e segue de (*) que $x^2 - y^2 = 3(b^2 - c^2)$, ou ainda

$$(x - y)(x + y) = 3(b - c)(b + c)$$

Consideraremos dois casos separadamente:

i. $b \not\equiv c \pmod 2$: o fato de ser $p = ab + cd$ garante que $mdc(b, c) = 1$. Como $b + c$ e $b - c$ são ímpares, isto implica em $mdc(b + c, b - c) = 1$. Um argumento análogo implica em $mdc(x + y, x - y) = 1$ também. Se $3 \mid (x + y)$ então

$$x - y = mdc(x - y, (b + c)(b - c)) = mdc(x - y, b + c)\, mdc(x - y, b - c)$$

e

$$x + y = 3mdc(x + y, (b + c)(b - c)) = 3mdc(x + y, b + c)\, mdc(x + y, b - c)$$

Escrevendo $\alpha = mdc(x - y, b - c)$, $\beta = mdc(x - y, b + c)$, $\gamma = mdc(x + y, b - c)$ e finalmente $\delta = mdc(x + y, b + c)$, temos $x - y = \alpha\beta$ e $x + y = 3\gamma\delta$. Por outro lado,

$$b - c = mdc(b - c, x - y) mdc(b - c, x + y) = \alpha\gamma \quad \text{e} \quad b + c = \beta\delta,$$

analogamente. Resolvendo para a, b, c e d obtemos $4a = \alpha\beta + \beta\delta + 3\gamma\delta - \alpha\gamma$, $2b = \alpha\gamma + \beta\delta$, $2c = -\alpha\gamma + \beta\delta$ e $4d = -\alpha\beta - \beta\delta + 3\gamma\delta - \alpha\gamma$. Daí

$$4p = 4(ab + cd) = \beta\gamma\,(\alpha^2 + 3\delta^2)$$

Mas $b \not\equiv c \pmod 2$ implica em $b + c$ e $b - c$ ímpares, de modo que α, β, γ e δ são ímpares. Assim, temos os seguintes casos:

a) $\beta\gamma = p$: nesse caso, $\alpha^2 + 3\delta^2 = 4$ e daí $\alpha = \delta = 1$. Portanto, $a = b$, um absurdo.

b) $\beta\gamma = 1$: neste caso, $\beta = \gamma = 1$ e daí $c = d$, um novo absurdo.

ii. $b \equiv c \pmod 2$: Nesse caso b e c devem ser ímpares, pois do contrário 2 dividiria $ab + cd = p$. Assim, nas notações acima, temos x e y também ímpares. Segue que

$$mdc(b + c, b - c) = mdc(x + y, x - y) = 2$$

(pois já temos $mdc(x, y) = 1$). Se $3 \mid (x + y)$ (o outro caso é novamente análogo), escrevendo

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right) = 3\left(\frac{b-c}{2}\right)\left(\frac{b+c}{2}\right)$$

e pondo

$$\alpha = mdc\left(\frac{x-y}{2}, \frac{b-c}{2}\right),\ \beta = mdc\left(\frac{x-y}{2}, \frac{b+c}{2}\right),$$

$$\gamma = mdc\left(\frac{x+y}{2}, \frac{b-c}{2}\right),\ \delta = mdc\left(\frac{x+y}{2}, \frac{b+c}{2}\right)$$

chegamos, como acima, a $2a = \alpha\beta + \beta\delta + 3\gamma\delta - \alpha\gamma$, $b = \alpha\gamma + \beta\delta$, $c = -\alpha\gamma + \beta\delta$ e $2d = -\alpha\beta - \beta\delta + 3\gamma\delta - \alpha\gamma$. Daí,

$$p = ab + cd = \beta\gamma(\alpha^2 + 3\delta^2)$$

Nem β nem γ são iguais a p, pois do contrário teríamos $b > p$, o que contradiz $ab + cd = p$. Logo $\beta = \gamma = 1$ e daí $c = d$, um novo absurdo.

XVI OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA

Enunciados e Resultado Brasileiro

A XVI Olimpíada Iberoamericana de Matemática foi realizada na cidade de Minas, Uruguai no período de 24 a 29 de setembro de 2001.

A equipe brasileira foi liderada pelos professores Carlos Gustavo Tamm de Araujo Moreira, do Rio de Janeiro – RJ e Pablo Rodrigo Ganassim, de São Paulo – SP.

O Resultado da Equipe Brasileira

BRA 1	**Carlos Stein Naves de Brito**	**Ouro**
BRA 2	**Daniel Massaki Yamamoto**	**Prata**
BRA 3	**Daniel Pinheiro Sobreira**	**Ouro**
BRA 4	**Thiago Barros Rodrigues Costa**	**Prata**

PRIMEIRO DIA

DURAÇÃO: 4 horas e meia.

PROBLEMA 1

Dizemos que um número natural n é "charrua" se satisfaz simultaneamente as seguintes condições:

- Todos os algarismos de n são maiores que 1
- Sempre que se multiplicam quatro algarismos de n, obtém-se um divisor de n.

Demonstrar que para cada número natural k existe um número "charrua" com mais de k algarismos.

SOLUÇÃO DE DANIEL MASSAKI YAMAMOTO (SÃO PAULO – SP):

Vou construir números “charruas” (o que, afinal, significa isso?), utilizando os algarismos 2 e 3.

Multiplicando-se 4 algarismos, obtemos um número da forma $d = 3^{\alpha} \cdot 2^{4-\alpha}$, onde $0 \le \alpha \le 4$.

Vou fixar o final do número em “3232” e completar o resto apenas com 2’s.

Então $0 \le \alpha \le 2$.

Para que $d \mid n$, basta garantirmos que: $\begin{cases} 3^2 \mid n & \text{(I)} \\ 2^4 \mid n & \text{(II)} \end{cases}$

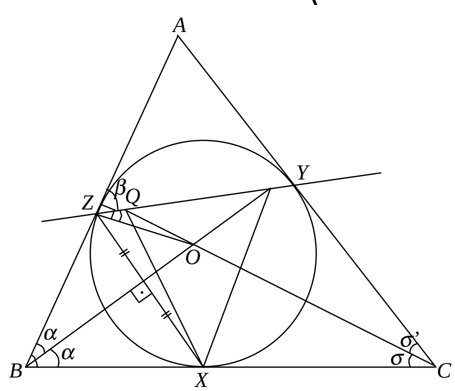
É fácil ver que $2^4 \left| 3232 \Rightarrow 2^4 \right| M \cdot 10^4 + 3232, \forall M \in \mathbb{N} \Rightarrow 2^4 | n$, logo (II) está satisfeito.
Para garantirmos a divisibilidade por 9 , basta que a soma dos algarismos seja divisível por 9.
Pegue n_0 = 22223232 . Note que $9 \mid 22223232$.
Podemos colocar blocos de nove 2's à esquerda de n_0 que não afetará a divisibilidade por 9.
Adicionando $\left\lceil \frac{k}{9} \right\rceil$ blocos, o número terá mais de $9 \cdot \left\lceil \frac{k}{9} \right\rceil + 8 > k$ dígitos.

PROBLEMA 2

A circunferência inscrita no triângulo *ABC* tem o centro *O* e é tangente aos lados *BC*, *AC* e *AB* nos pontos *X*, *Y* e *Z*, respectivamente. As rectas *BO* e *CO* intersectam a recta *YZ* nos pontos *P* e *Q*, respectivamente.

Demonstrar que se os segmentos *XP* e *XQ* têm o mesmo comprimento, então o triângulo *ABC* é isósceles.

SOLUÇÃO DE THIAGO BARROS RODRIGUES COSTA (FORTALEZA – CE):



Pelo teorema do bico, o triângulo *BXZ* é isósceles. Como $\overleftrightarrow{OB}$ é bissetriz do ângulo B , OB é mediatriz do segmento $\overline{XZ}$.
Considere o triângulo *ZXP*. O ponto *P* pertence a mediatriz de $\overline{XZ}$. Assim, a altura relativa ao vértice *P* e a mediana relativa ao mesmo são iguais $\Rightarrow \Delta XZP$ é isósceles $\Rightarrow XP = PZ$. (*)
De maneira análoga, $XQ = QY.(**)$.
Suponha agora que $XP = XQ$.

Então, por (*) e (**), $QY = PZ(***)$.
Seja $\beta = A\hat{Z}Y = A\hat{Y}Z$ (O ΔAZY é isósceles, pelo teorema do bico).
Como O é incentro $OZ \perp AZ \Rightarrow Y\hat{Z}O = 90 - \beta$.
Da mesma forma, $OY \perp AY \Rightarrow O\hat{Y}Z = 90 - \beta \Rightarrow$
$O\hat{Y}Z = Y\hat{Z}O$. (1)
Note que OZ e OY são raios $\Rightarrow OZ = OY$. (2)
Por (***), (1) e (2) temos que os triângulos OZP e OYQ são congruentes $\Rightarrow$
$O\hat{Q}Y = O\hat{P}Z$. (3)
Se $\alpha = O\hat{B}Z$ e $\sigma = O\hat{C}Y$, temos que (no ΔZPB)
$\alpha + Z\hat{P}O = \beta = \sigma + O\hat{Q}Y$ mas, por (3), $O\hat{Q}Y = O\hat{P}Z \Rightarrow$
$\alpha = \sigma$, mas $A\hat{B}C = 2\alpha = 2\sigma = A\hat{C}B \Rightarrow \Delta ABC$ é isosceles.

PROBLEMA 3

Sejam S um conjunto de n elementos e $S_1, S_2, \ldots, S_k$ subconjuntos de $S (k \ge 2)$, cada um deles com pelo menos r elementos.

Demonstrar que existem i e j, com $1 \le i < j \le k$, tais que o número de elementos comuns a S_i e S_j é maior ou igual a $r - \dfrac{nk}{4(k-1)}$.

SOLUÇÃO DE CARLOS STEIN NAVES DE BRITO (GOIÂNIA – GO):

Chamaremos os n elementos de S de $b_1, b_2, \ldots, b_n$ .Se o número de subconjuntos S_i que contêm $\{b_i\}$ é a_i, $\binom{a_i}{2}$ é o número de pares de subconjuntos que compartilham b_i.

Temos que $\sum_{i=1}^{n} a_i \ge kr$, pois é a soma de quantos elementos há em cada um dos subconjuntos S_i.

Temos que, para $k \ge 1, \binom{x+k}{2} + \binom{x}{2} \ge \binom{x+k-1}{2} + \binom{x+1}{2}$, pois:

$$\left(x^2 + 2xk + k^2 - k - x\right) + \left(x^2 - x\right) \ge \left(x^2 + k^2 + 1 + 2kx - 2x - 2k - x - k + 1\right) + \left(x^2 + x\right) \Leftrightarrow k \ge 1.$$

Logo em $\sum_{i=1}^{n}\binom{a_i}{2}$ você pode ir reduzindo a diferença entre os a_i's que a soma só diminui até que você tenha número com diferença máxima, dois a dois, de um.
Seja $kr = yn + q,\ \ 0 \le q \le n-1.$ Assim teremos no fim q a_i's sendo $(y + 1)$ e $(n - q)$ a_i's sendo y (para minimizar $\sum_{i=1}^{n}\binom{a_i}{2}$).

Temos então: $\sum\binom{a_i}{2} \ge q\binom{y+1}{2} + (n-q)\binom{y}{2} = qy + n\binom{y}{2}.$

Vamos mostrar que

$$qy + n\binom{y}{2} \ge \frac{kr\left(\frac{kr}{n}-1\right)}{2} \Leftrightarrow \frac{2qy + ny^2 - ny}{2} \ge \frac{(yn+q)\left(y+\frac{q}{n}-1\right)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2qy + ny^2 - ny \ge ny^2 + \frac{q^2}{n} + 2yq - ny - q \Leftrightarrow q \ge \frac{q^2}{n}$$, o que segue de $n \ge q$.

Logo temos:

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{a_i}{2} \ge \frac{kr\left(\frac{kr}{n}-1\right)}{2}.$$

Note agora que $\sum\binom{a_i}{2}$ conta com multiplicidade o número de subconjuntos S_i com algum elemento em comum. Dividindo por $\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$, que é o número de pares de subconjuntos S_i , obtemos o tamanho médio das interseções de dois desses subconjuntos, que é portanto maior ou igual a $\frac{kr\left(\frac{kr}{n}-1\right)}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k-1}.$

Basta mostrar que esse mínimo para esse certo subconjunto é maior ou igual a $r - \frac{nk}{4(k-1)}$ e acaba o problema.Para isso,note que

$$\frac{r\left(\frac{kr}{n}-1\right)}{k-1} \ge r - \frac{nk}{4(k-1)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{r\left(\frac{kr}{n}-1\right)}{k-1} \geq \frac{4r(k-1)-nk}{4(k-1)} \Leftrightarrow$$

$$4r^2k - 4n \geq 4nrk - 4rn - n^2k \Leftrightarrow$$

$$4r^2k \geq 4nrk - n^2k \Leftrightarrow 4r^2 \geq 4nr - n^2 \Leftrightarrow n^2 - 4nr + 4r^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n-2r)^2 \geq 0 \text{ (sempre verdade).}$$

SEGUNDO DIA

DURAÇÃO: 4 horas e meia.

PROBLEMA 4

Determinar o número máximo de progressões aritméticas crescente de três termos que pode ter uma sucessão $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ de $n \geq 3$ números reais.

Nota: *três termos* a_i, a_j, a_k *de uma sucessão de números reais formam uma progressão aritmética crescente se* $a_i < a_j < a_k$ e $a_j - a_i = a_k - a_j$.

SOLUÇÃO DE DANIEL PINHEIRO SOBREIRA (FORTALEZA – CE):

Primeiro vejamos que cada P.A. tem um termo central, pois são formadas de três termos. Vamos estimar o número máximo de posibilidades para o termo central.

Lema: Se em uma seqüência temos um termo a_k, e temos x números menores que a_k e y números maiores que a_k, vamos ver que a_k é termo central de no máximo $\min\{x, y\}$ P.A.'s.

Para cada P.A. onde a_k é o termo central, um dos outros termos é maior e o outro menor, logo devo ter a mesma quantidade de termos maiores e menores que a_k que participam das P.A.'s de que a_k é termo central.

Então se a_k for termo central de $j > \min\{x, y\}$ P.A.'s teríamos que ter no mínimo j números menores que a_k e no mínimo j números maiores que a_k, ou seja, $x \geq j$ e $y \geq j$, logo $\min\{x, y\} \geq j$. Então o número de P.A.'s com a_k como termo central é no máximo $\min\{x, y\}$.

Agora vamos dividir em 2 casos:

Caso 1: n ímpar. Temos:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{\frac{n+1}{2}} < a_{\frac{n+3}{2}} < \ldots < a_{n-1} < a_n$$

É lógico que a_1 e a_n não podem ser termos centrais.

Se pegarmos o número a_j, temos $(j-1)$ números menores que ele $(a_1, a_2, ..., a_{j-1})$ e $(n-j)$ números maiores que ele $(a_{j+1}, a_{j+2}, ...a_n)$.
Logo a_j é termo central de no máximo $\min\{j-1, n-j\}$ P.A.'s.

Então temos que o número de P.A.'s é menor ou igual a $\sum_{j=2}^{n-1} \min\{j-1, n-j\}$.

Mas para $2 \le j < \frac{n+1}{2}$ temos $j-1 < n-j \Rightarrow 2j < n+1$.

Para $j = \frac{n+1}{2}$ temos $j-1 = n-j$ e para $\frac{n+1}{2} < j \le n-1$ temos $j-1 > n-j$.
Portanto, o número de P.A.'s é menor ou igual a

$$\sum_{j=2}^{\frac{n-1}{2}} (j-1) + \frac{n-1}{2} + \sum_{j=\frac{n+3}{2}}^{n-1} (n-j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}} i + \frac{n-1}{2} + \sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}} i = 2\left(1 + 2 + ... + \frac{n-3}{2}\right) + \frac{n-1}{2} =$$

$$= 2\left(\frac{\left(1 + \frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)}{2}\right) + \frac{n-1}{2} = \left(\frac{2+n-3}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right) + \frac{n-1}{2} =$$

$$= \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right) + \left(\frac{n-1}{2}\right) = \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2} + 1\right) = \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right) = \left(\frac{n-1}{2}\right)^2.$$

É fácil ver que a seqüência (1, 2, 3,..., n) tem $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ P.A.'s, pois acontece justamente o que queremos: 2 é termo central de uma P.A. o 3 de duas P.A.'s e assim é exatamente como ocorre a igualdade.

Caso 2: n par. Temos:

$$a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_{\frac{n}{2}} < a_{\frac{n}{2}+1} < ... < a_{n-1} < a_n$$

Da mesma forma a_1 e a_n não podem ser termos centrais.

Se pegarmos o número a_j, temos $(j-1)$ números menores que ele $(a_1, a_2, ..., a_{j-1})$ e $(n-j)$ números maiores que ele $(a_{j+1}, a_{j+2}, ...a_n)$.
Logo a_j é termo central de no máximo $\min\{j-1, n-j\}$ P.A.'s.

Mas para $2 \le j \le \frac{n}{2}$, temos $j-1 < n-j$ e para $\frac{n}{2}+1 \le j \le n-1$, temos $j-1 > n-j$, logo o número de P.A.'s é menor ou igual a

$$\sum_{j=2}^{n-1} \min\{j-1, n-j\} = \sum_{j=2}^{\frac{n}{2}} (j-1) + \sum_{j=\frac{n}{2}+1}^{n-1} (n-j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} i + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} (i) = 2\left(1+2+...+\left(\frac{n}{2}-1\right)\right) =$$

$$= 2\left(\frac{\left(\frac{n}{2}-1+1\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2}-1\right) = \frac{n(n-2)}{4}.$$

Mas é fácil ver que a seqüência (1, 2, ..., n) tem $\frac{n(n-2)}{4}$ P.A.'s, porque ela satisfaz todas as igualdades.
Logo o número máximo de P.A.'s é:
Para n ímpar: $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$
Para n par: $\frac{n(n-2)}{4}$.

PROBLEMA 5
Num tabuleiro de 2000×2001 as casas têm coordenadas (x, y) com x, y inteiros, $0 \le x \le 1999$ e $0 \le y \le 2000$. Uma nave no tabuleiro move-se da seguinte maneira:
antes de cada movimento, a nave está numa posição (x, y) e tem uma velocidade (h, v) onde h e v são inteiros. A nave escolhe uma nova velocidade (h', v') de forma que $h' - h$ seja igual a –1, 0 ou 1 e $v' - v$ seja igual a –1, 0 ou 1. A nova posição da nave será (x', y') onde x' é o resto da divisão de $x + h'$ por 2000 e y' é o resto da divisão de $y + v'$ por 2001.

Há duas naves no tabuleiro: a marciana e a terrestre que quer capturar a marciana. Inicialmente cada nave está numa casa do tabuleiro e tem velocidade (0, 0). Move-se primeiro a nave terrestre e continuam movendo-se alternadamente.
Existe uma estratégia que permita sempre à nave terrestre capturar a nave marciana, quaisquer que sejam as posições inicias?
Nota: a nave terrestre, que sempre vê a marciana, captura a marciana se depois de um movimento seu cai na mesma posição da marciana.

SOLUÇÃO DE CARLOS STEIN NAVES DE BRITO (GOIÂNIA – GO):
A estratégia existe!
A nave terrestre deve fazer uma estratégia para ficar na mesma coordenada *x*, independente do movimento da nave marciana e também na mesma coordenada *y*, até que isso ocorra simultaneamente e a terrestre pegue a nave marciana.
Para ficar no mesmo $x: \left(x_m^i, y_m^i\right)$ é a coordenada depois de *i* rodadas da nave marciana e $\left(x_t^i, y_t^i\right)$ é a coordenada da terrestre.
Seja $0 \leq p \leq 1999,\ p \equiv x_m^0 - x_t^0 \pmod{2000}$.
Se o primeiro *h*' escolhido for 1, x_t^0 aumenta 1 $\pmod{2000}$.

A partir daí se a nave marciana fizer sua *h*' tal que $h_m^{'} - h_m = a, \quad |a| \leq 1,$ a nave terrestre fará o mesmo: $h_t^{'} - h_t = a.$
A partir daí temos $h_t - h_m = 1$ (h_t e h_m são as velocidades momentâneas da nave terrestre e marciana, respectivamente), isso porque a terrestre já tem $h_t = 1$ por causa da primeira jogada. Esse $h_t - h_m = 1$, se manterá sempre depois da jogada terrestre, pois se $n_m^{'} - n_m = a$ e
$h_t^{'} - h_t = a;\ h_t - h_m = 1 \Rightarrow (h_t^{'} - a) - (h_m^{'} - a) = 1 \Rightarrow h_t^{'} - h_m^{'} = 1,$ logo a indução é óbvia. Assim a cada rodada a nave marciana "anda" h_m e a terrestre $h_m + 1$. Logo a cada rodada da nave terrestre temos (tudo mod 2000):

$$x_m^0 - x_t^0 = p; \left(\underbrace{x_m^0 + h_m^1}_{x_m^1}\right) - \left(\underbrace{x_t^0 + \left(h_m^{'} + 1\right)}_{x_t^1}\right) \equiv \left(x_m^0 - x_1^0\right) - 1 \equiv p - 1;$$

$$x_m^2 - x_t^2 \equiv \left(x_m^{'} + n_m^2\right) - \left(x_t^{'} + \left(n_m^2 + 1\right)\right) \equiv x_m^{'} - x_t^{'} - 1 \equiv (p-1) - 1 \equiv p - 2,$$

Assim por indução finita: $\left(\text{se} \quad x_m^{k-1} - x_t^{k-1} \equiv p - (k-1)\right)$

$$x_m^k - x_t^k \equiv \left(x_m^{k-1} + h_m^k\right) - \left(x_t^{k-1} + h_m^k + 1\right) \equiv \left(x_m^{k-1} - x_t^{k-1}\right) - 1 \equiv p - k.$$

Logo depois k jogadas terrestres a diferença entre as coordenadas x_m e x_t é $p-k(\mathrm{mod}\,2000)$, assim para $k^x = 2000a + p$, para qualquer inteiro $a \geq 0$, $p-k \equiv 0(\mathrm{mod}\,2000)$, assim estarão na mesma coordenada x.

O estudo para as coordenadas y_m e y_t é análogo, como a nave terráquea tendo $v^1 = 1$, e depois alternando sua velocidade igual à marciana, mas agora tudo módulo 2001, logo se a diferença inicial $x_m^0 - y_t^0 = q$ temos que depois de *k*' jogadas a diferença será. $q-k'(\mathrm{mod}\,2001)$, logo, para $k^y = 2001b + q$, estarão no mesmo *y*.

Então a terrestre capturará a marciana quando está no mesmo *x* e no mesmo *y*, o que acontece quando o número de rodadas *k* satisfaz k^x e k^y :

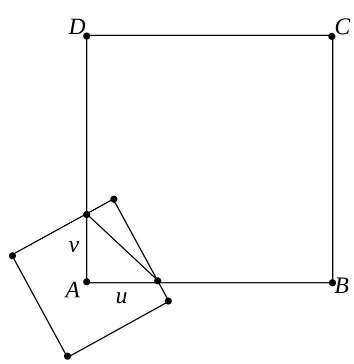
$$k = k^x = k^y \Rightarrow 2000a + p = 2001b + q, a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow 2001b - 2000a = p - q.$$

Achar solução para isso é fácil: é só adotar $a = b = p - q$, que é obviamente solução da equação e se $p - q < 0$, é só pegar $b = p - q + 2000 \geq 0$ e $a = p - q + 2001 \geq 0$, que também são soluções e agora positivas. Logo na jogada terrestre de número $k = 2001p - 2000q + 2000 \cdot 2001$, ela terá o mesmo *x* e *y* da marciana, capturando-a.

PROBLEMA 6

Demonstrar que é impossível cobrir um quadrado de lado 1 com cinco quadrados iguais de lado menor que $\frac{1}{2}$.

SOLUÇÃO OFICIAL:



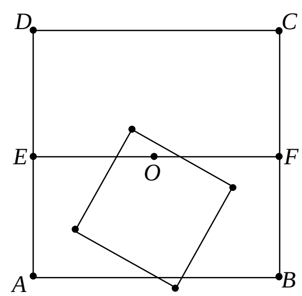
Seja *ABCD* um quadrado unitário e suponhamos que é possível cobri-lo utilizando cinco quadrados iguais de lado $a < \frac{1}{2}.$ Então, como o diâmetro de cada um dos quadrados pequenos é $a\sqrt{2} < \frac{\sqrt{2}}{2},$ ou seja, menor que a metade da diagonal de *ABCD*, os vértices *A*, *B*, *C*, *D* e o centro *O* de *ABCD* devem pertencer a quadrados distintos. Chamaremos de Q_A, Q_B, Q_C, Q_D e Q_O estes quadrados.

Para obter uma contradição, demonstraremos primeiro que a parte do perímetro que cobre cada um dos quadrados Q_A, Q_B, Q_C, Q_D tem comprimento menor ou igual a $2a$.

Consideremos, por exemplo, Q_A; como contém a *A*, o quadrado intersecta *ABCD* tal como mostra a figura.

Sejam *u, v* as porções dos lados *AB*, *AD*, contidas em Q_A. Então $u + v \le \sqrt{2(u^2 + v^2)}$ e $\sqrt{u^2 + v^2}$ é a hipotenusa de um triângulo retângulo contido em Q_A. Logo, $\sqrt{u^2 + v^2} \le a\sqrt{2}$ e, em conseqüência, $u + v \le \sqrt{2}.a\sqrt{2} = 2a$.

Segue que Q_A, Q_B, Q_C, Q_D em conjunto cobrem uma porção do perímetro de *ABCD* de comprimento total menor ou igual a $8a < 4$. Então, o quinto quadrado, Q_O, deve ter interseção não vazia com o perímetro de *ABCD*. Digamos, por exemplo, que intersecte *AB*.



Vamos ver que os cinco quadrados em conjunto não podem cobrir simultaneamente os segmentos *AB*, *CD*, e *EF*, onde *E* e *F* são os pontos médios de *AD* e *BC*.

A demonstração se apoia no lema a seguir:

Dadas duas retas paralelas l e m a distância $\frac{1}{2}$ *e um quadrado de lado* $a < \frac{1}{2}$ *que tem interseção não vazia com cada uma das retas l e m, a soma dos* *comprimentos dos segmentos da interseção do quadrado com as retas é menor que a.*

Antes de demonstrar o lema, vejamos que é suficiente para completar a solução. De fato, do lema se conclui que ao menos $k \geq 2$ dos quadrados Q_A, Q_B, Q_C, Q_D devem ter interseção com *EF* (um destes quadrados mais Q_O cobrirão em conjunto uma porção menor que $2a < 1$ do comprimento do segmento *EF*). Então, novamente pelo lema, esses *k* quadrados e Q_O cobrem uma porção do comprimento menor que $(k+1)a$ dos segmentos *AB, CD,* e *EF*.

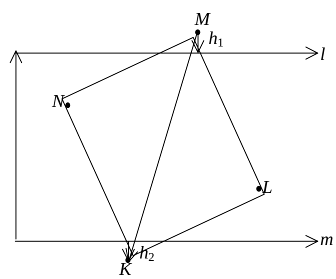
Os restantes (4 – *k*) quadrados intersectam exatamente um dos segmentos *AB* e *CD*, e cada um deles pode cobrir uma porção de comprimento no máximo $a\sqrt{2}$ do segmento correspondente. Assim, a porção de *AB*, *CD* e *EF* coberta pelos cinco quadrados é menor que:

$$(k+1)a + (4-k)a\sqrt{2} = ka(1-\sqrt{2}) + a(1+4\sqrt{2}).$$

Como $1-\sqrt{2} < 0, k \geq 2$ e $a < \frac{1}{2}$, observamos que

$$ka\left(1-\sqrt{2}\right) + a\left(1+4\sqrt{2}\right) \leq 2a\left(1-\sqrt{2}\right) + a\left(1+4\sqrt{2}\right) = a\left(3+2\sqrt{2}\right) < \frac{3+2\sqrt{2}}{2} < 3$$

o que contradiz que *AB*, *CD* e *EF* estão cobertos.



Falta demonstrar o lema. Se o quadrado *KLMN* de lado $a < \frac{1}{2}$ intersecta as retas paralelas *l* e *m* que estão a distância $\frac{1}{2}$, então dois vértices de *KLMN* devem estar em lados distintos da banda determinada por *l* e *m* (também podem estar em *l* e *m*). A condição $a < \frac{1}{2}$ implica que esses dois vértices de *KLMN* são opostos, digamos *K* e *M*.

Então, pela mesma condição, os restantes dois vértices do quadrado devem estar contidos na faixa comprendida entre *l* e *m*. Sejam h_1 e h_2 as alturas correspondentes às hipotenusas dos triângulos retângulos semelhantes que são as duas porções do quadrado que estão fora da faixa comprendida entre *l* e *m*, e denotamos φ ao menor dos ângulos agudos dos triângulos. Então, o ângulo comprendido entre *KM* e qualquer reta perpendicular a *l* e *m* é $45° - \varphi$ e a projeção de *KLMN* sobre uma reta mede $a\sqrt{2}\cos(45° - \varphi).$ Logo,

$$h_1 + h_2 = a\sqrt{2}\cos(45° - \varphi) - \frac{1}{2} = a(sen\varphi + \cos\varphi) - \frac{1}{2}.$$

A soma das hipotenusas consideradas é:

$$S = (h_1 tg\varphi + h_1 \cot\varphi) + (h_2 tg\varphi + h_2 \cot\varphi) = \frac{h_1 + h_2}{sen\varphi\cos\varphi} = \frac{a(sen\varphi + \cos\varphi) - \frac{1}{2}}{sen\varphi\cos\varphi}.$$

Como $sen\varphi + \cos\varphi < 1 + sen\varphi\cos\varphi$ equivale à desigualdade evidente

$(1 - sen\varphi)(1 - \cos\varphi) > 0$ e $a < \frac{1}{2}$, obtemos

$$S = \frac{a(sen\varphi + \cos\varphi) - \frac{1}{2}}{sen\varphi\cos\varphi} < \frac{a(1 + sen\varphi\cos\varphi) - \frac{1}{2}}{sen\varphi\cos\varphi} = a + \frac{a - \frac{1}{2}}{sen\varphi\cos\varphi} < a.$$

A demonstração está completa.

COMO FERMAT E BÉZOUT PODEM SALVAR O DIA

Antonio Caminha Muniz Neto, Fortaleza - CE

♦ Nível Avançado.

Certamente você, leitor, tem alguma familiaridade com os fatos mais básicos da teoria elementar dos números. Portanto, não objetivo desenvolvê-los aqui de modo sistemático. Para isso você pode consultar [1], [2] ou [3] nas referências. O que vou fazer é mostrar como dois resultados particulares, os teoremas de Bézout e Fermat, podem ser usados para abordar com sucesso alguns problemas interessantes. Para facilitar a leitura, vamos relembrar alguns conceitos e provar os resultados mais centrais para nós.

Definição 1: Dados dois inteiros não nulos a e b, definimos o *máximo divisor comum* (*mdc*) como o maior inteiro d que divide ambos a e b.

A definição acima certamente faz sentido, uma vez que a e b têm divisores comuns (1, por exemplo) e qualquer inteiro que divida a e b deve ser, em particular, menor ou igual a a. Assim, realmente existe um maior inteiro que divide a e b. Caso esse maior inteiro seja igual a 1, dizemos que a e b são *primos entre si*, ou ainda *relativamente primos*. Para nossos propósitos, o seguinte resultado sobre o *mdc* de dois inteiros será suficiente:

Teorema 1 (Bézout): Sejam a e b inteiros não nulos dados e d seu *mdc*. Então existem inteiros x e y tais que $d = ax_0 + by_0$. Mais ainda, se a e b são positivos, podemos escolher $x_0 > 0$ e $y_0 < 0$, ou vice-versa.

Prova: Seja S o conjunto dos inteiros da forma $ax + by$, com x e y inteiros. Escrevendo $|a| = a\times(\pm1) + b\times0$, concluímos que $|a| \in S$, e portanto S contém inteiros positivos. Podemos então escolher o menor inteiro positivo pertencente a S, o qual vamos denotar por d. Afirmamos que tal menor elemento positivo d é o *mdc* de a e b.

Desde que d está em S, devem existir inteiros x_0 e y_0 tais que $d = ax_0 + by_0$. Para provar que d divide a, dividamos a por d: $a = dq + r$, com $0 \le r < d$.

$$r = a - dq = a - (ax_0 + by_0)q = a(1 - x_0q) + b(- y_0q),$$

que por definição está em S. O fato de ser d o menor inteiro *positivo* em S, juntamente com $0 \le r < d$, implica que $r = 0$, e assim d divide a. Analogamente mostramos que d divide b. Por outro lado, se d' for qualquer outro divisor comum de a e b, segue que d' divide $ax + by$, quaisquer que sejam os inteiros x e y. Em

particular, d' divide $d = ax_0 + by_0$, de modo que $d' \leq d$. Isso prova ser d o *mdc* de a e b.
Para o que falta, analisemos somente o caso em que a, $b > 0$ (a análise dos demais casos é totalmente análoga). Como $d = ax_0 + by_0 = a(x_0 + tb) + b(y_0 - ta)$, escolhendo $t > -\frac{x_0}{b}, \frac{y_0}{a}$ obtemos $x_0 + tb > 0 > y_0 - ta$.

Corolário 1.1: Dois inteiros não nulos a e b são primos entre si se e só se existirem inteiros x e y tais que $ax + by = 1$.

O outro resultado que usaremos nos problemas a seguir é o pequeno teorema de Fermat. Recordemos seu enunciado e prova:

Teorema 2 (Fermat): Dados inteiros $a > 1$ e p primo, tem-se $a^p \equiv a \pmod p$.

Prova: Se a for múltiplo de p nada há a fazer. Senão, como p é primo temos que a e p são primos entre si.
Considere agora os números $a, 2a, 3a, \ldots, (p-1)a$. Dados $1 \leq i < j \leq p - 1$, como $ja - ia = (j - i)a$ é um produto de dois números não divisíveis por p, temos que $ja - ia$ não é divisível por p. Em linguagem de congruências isso é o mesmo que $ja \not\equiv ia \pmod p$. Também, nenhum dos números ja é múltiplo de p, e portanto os restos dos números $a, 2a, 3a, \ldots, (p-1)a$ na divisão por p formam uma permutação de $1, 2, 3, \ldots, p - 1$. Voltando às congruências, isso implica que

$$a\times 2a\times 3a\times \ldots \times(p-1)a \equiv 1\times 2\times 3\times \ldots \times(p-1) \pmod p,$$

ou ainda

$$(p-1)!a^{p-1} \equiv (p-1)! \pmod p$$

Mas $(p - 1)!$ é relativamente primo com p, e portanto pode ser cancelado em ambos os membros da última congruência acima, dando o resultado desejado.

Após essa breve revisão(?), vamos aos problemas!

PROBLEMAS RESOLVIDOS

Problema 1: Sejam a e b inteiros positivos primos entre si. Então todo inteiro c maior ou igual que o número $(a - 1)(b - 1)$ pode ser escrito da forma $c = ar + bs$, com $r, s \geq 0$. Mais ainda, o menor inteiro com essa propriedade é $(a - 1)(b - 1)$.

Solução: Dado c inteiro, o fato de serem a e b primos entre si garante que existem inteiros x e y tais que $c = ax + by$ (você entendeu por quê?). Seja agora $y = da +$

s, onde $0 \leq s < a$. Temos $c = ax + b(da + s) = a(x + bd) + bs$. Seja $r = x + bd$. Se $c \geq (a-1)(b-1)$ então $(a-1)(b-1) \leq c = ar + bs \leq ar + b(a-1)$, de modo que $ar \geq -(a-1)$, e portanto $r \geq 0$.

Resta mostrarmos que $(a-1)(b-1) - 1 = ab - a - b$ não pode ser escrito da forma $ar + bs$, com $r, s \geq 0$. Supondo o contrário, seja $ab - a - b = ar + bs$, onde $r, s \geq 0$. Então temos $a(b - 1 - r) = b(s + 1)$. Como a e b são primos entre si, segue que a divide $s + 1$ e b divide $b - 1 - r$. Como $b - 1 - r < b$, deve ser $b - 1 - r \leq 0$, ou ainda $r \geq b - 1$. Também, como $s + 1 > 0$ e a divide $s + 1$, deve ser $s + 1 \geq a$, ou $s \geq a - 1$. Mas aí, $ar + bs \geq a(b-1) + b(a-1) = 2ab - a - b > ab - a - b = (a-1)(b-1) - 1$, uma contradição.

Problema 2: (*Seleção da Romênia para IMO*) Prove que não existe um inteiro $n > 1$ tal que n divida $3^n - 2^n$.

Prova: Suponha o contrário, isto é, que para algum inteiro $n > 1$ tenhamos $3^n - 2^n \equiv 0 \pmod{n}$. Obviamente 2 e 3 não dividem n. Seja agora p o menor fator primo de n e $n = pm$ (aqui é que usamos ser $n > 1$, para garantir que n tem fator primo). Nossa hipótese, juntamente com o pequeno teorema de Fermat, nos dão:

$$3^n \equiv 2^n \pmod{n} \Rightarrow 3^{mp} \equiv 2^{mp} \pmod{p} \Rightarrow 3^m \equiv 2^m \pmod{p} \quad (*)$$

Se $d = mdc(m, p-1)$, temos em particular que d divide n. Portanto, o fato de ser p o menor divisor primo de n implica que $d = 1$. Tome então inteiros positivos x e y satisfazendo $mx = (p-1)y + 1$. O pequeno teorema de Fermat de novo, juntamente com (*), nos dão

$$3 \equiv 3^{(p-1)y+1} = 3^{mx} \equiv 2^{mx} = 2^{(p-1)y+1} \equiv 2 \pmod{p},$$

o que é um absurdo.

Problema 3: Sejam m e n inteiros positivos. Determine o polinômio mônico p, de maior grau possível, que divide simultaneamente os polinômios $x^m - 1$ e $x^n - 1$.

Solução: Primeiro, não é difícil vermos que, sendo d o mdc de m e n, então $x^d - 1$ divide ambos $x^m - 1$ e $x^n - 1$. De fato, seja por exemplo $m = dk$, com $k > 0$ inteiro. Então

$$x^m - 1 = (x^d)^k - 1 = (x^d - 1)(x^{d(k-1)} + x^{d(k-2)} + ... + x^d + 1)$$

Mostrar que $x^d - 1$ divide $x^n - 1$ é análogo. A parte mais difícil é mostrar que $x^d - 1$ é o polinômio mônico p de maior grau que divide ambos $x^m - 1$ e $x^n - 1$, e é para isso que precisamos de Bézout. Seja p um polinômio mônico que divide ambos $x^m - 1$ e $x^n - 1$ e z uma raiz complexa de p. Como p divide $x^m - 1$ e $x^n - 1$, temos que z é raiz de ambos esses polinômios. Em outras palavras, $z^m = z^n = 1$. Mas o teorema de Bézout garante que existem inteiros u e v tais que $mu + nv = 1$. Isso nos dá

$$z^d = z^{mu+nv} = (z^m)^u \times (z^n)^v = 1^u \times 1^v = 1,$$

e assim z é raiz de $x^d - 1$. Como toda raiz de p é também raiz de $x^d - 1$ e como $x^d - 1$ só tem raízes simples, segue que p divide $x^d - 1$. Portanto, $x^d - 1$ é o polinômio mônico de maior grau que divide ambos $x^m - 1$ e $x^n - 1$.

Problema 4: (*The William Lowell Putnam Competition*) Sejam m e n inteiros positivos, com $m \geq n$. Prove que $\frac{mdc(m,n)}{m}\binom{m}{n}$ é inteiro.

Prova: Para esse problema usamos o teorema de Bézout de um modo bastante elegante. Seja S o conjunto dos inteiros x tais que $\frac{x}{m}\binom{m}{n}$ seja inteiro. Veja que m está em S já que números binomiais são inteiros. Também n está em S, pois

$$\frac{n}{m}\binom{m}{n} = \frac{n}{m}\frac{m!}{(m-n)!n!} = \binom{m-1}{n-1}$$

Por outro lado note que, se x e y estiverem em S, então $ux + vy$ também estará em S, quaisquer que sejam u e v inteiros. De fato,

$$\frac{ux+vy}{m}\binom{m}{n} = u \times \frac{x}{m}\binom{m}{n} + v \times \frac{y}{m}\binom{m}{n},$$

que é um inteiro. Como o mdc de m e n pode ser escrito da forma $mu + nv$, para algum par de inteiros u e v, segue que $mdc(m, n)$ está em S.

Problema 5: (*Seleção do Brasil para a IMO*) Determine todas as funções $f: \mathbb{Q}_+^* \to \mathbb{Z}$ satisfazendo as seguintes condições:

i. $f(1999) = 1$.
ii. $f(ab) = f(a) + f(b)$, para todos os racionais positivos a, b.
iii. $f(a + b) \geq \min\{f(a), f(b)\}$, para todos os racionais positivos a, b.

Solução: Fazendo $a = b = 1$ em ii. Vem que $f(1) = 2f(1)$, donde $f(1) = 0$. Daí, dados inteiros positivos m e n, temos

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m) + f\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{e} \quad f\left(\frac{1}{n}\right) + f(n) = f(1) = 0,$$

donde

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\,(m) - f\,(n)$$

Assim, basta calcularmos os valores de $f\,(n)$, com n inteiro positivo. Seja $n = p_1^{a_1} \ldots\, p_k^{a_k}$ a decomposição de n em fatores primos. Usando ii. várias vezes, vem que $f\,(n) = a_1 f\,(p_1) + \ldots + a_k f\,(p_k)$, de modo que basta calcularmos $f\,(p)$, com p primo. Afirmamos que $f\,(n) \geq 0$ para todo inteiro positivo n. Para provar esse fato, façamos indução sobre n. Já vimos que $f\,(1) = 0$. Suponhamos agora que $f\,(n) \geq 0$ para algum inteiro positivo n. Então $f\,(n + 1) \geq \min\,\{f\,(n), f\,(1)\} \geq 0$, e isso termina nossa indução. Afirmamos agora que $f\,(2) = 0$ ou $f\,(3) = 0$. De fato, como $1999 = 3\times 9 + 493\times 4$, temos que

$$1 = f\,(1999) \geq \min\,\{f\,(3) + f\,(9), f\,(493) + f\,(4)\} \geq$$

$$\geq \min\,\{3f\,(3), 2f\,(2)\},$$

e daí segue o afirmado. Suponhamos que $f\,(2) = 0$ ($f\,(3) = 0$ é análogo), e seja p um primo diferente de 2 e de 1999. Tomando k inteiro suficientemente grande, o problema 1 garante a existência de inteiros positivos x e y tais que $px + 1999y = 2^k$. Então

$$0 = f\,(2^k) \geq \min\,\{\, f\,(p) + f\,(x), f\,(1999) + f\,(y)\}$$

Como $f\,(1999) + f\,(y) \geq 1$, segue que $f\,(p) = 0$. Então, sendo $n = 1999^a m$, com *1999* e m primos entre si, segue que $f\,(n) = a$. Mas é imediato verificar que tal função satisfaz as condições impostas no enunciado.

PROBLEMAS PROPOSTOS

Problema 6: Generalizando a teoria desenvolvida acima e o problema 1, sejam a_1, a_2, ..., a_n ($n \geq 2$) inteiros positivos tais que $mdc(a_1, a_2, \ldots, a_n) = d$ (a definição de *mdc* que demos no início se aplica nesse caso *ipsis literis*). Prove que:

i. Existem inteiros $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tais que $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = d$.
ii. Se $d = 1$, mostre que existe um inteiro positivo m_0 tal que todo inteiro $m \geq m_0$ pode ser escrito da forma $a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots + a_ny_n$, com $y_1, y_2, \ldots, y_n \geq 0$.
(sugestão: para o item i. imite a prova do texto acima. Para ii., que tal usar indução sobre $n > 1$? Para uma cota mais precisa para m_0, veja [2]).

Problema 7: Considere duas progressões aritméticas infinitas e não constantes de inteiros positivos. Prove que existem infinitos naturais termos de ambas as

seqüências se e só se o *mdc* de suas razões dividir a diferença entre seus termos iniciais.
(sugestão: use Bézout. É fácil!).

Problema 8: (The William Lowell Putnam Competition) Prove que não existe inteiro $n > 1$ tal que n divida $2^n - 1$.

(sugestão: use as idéias que apareceram na prova do problema 2).

Problema 9: (Olimpíada Búlgara) Determine todos os primos p, q tais que pq divida o número $(5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$
(sugestão: se q dividir $5^p - 2^p$ e $p \geq q$, então $mdc(p, q - 1) = 1$. Como antes, use Bézout e Fermat).

Problema 10: (Seleção da Romênia para IMO) Sejam p, q números primos. Se q dividir $2^p + 3^p$, prove que $q > p$ ou $q = 5$.
(sugestão: se $p > 3$ e $q \leq p$, então $q - 1 < p$, donde $q - 1$ e p são primos entre si. Mais uma vez use Bézout e Fermat).

REFERÊNCIAS

[1] Introdução à Teoria dos Números. Antônio Plínio dos Santos. IMPA. Rio de Janeiro, 1998.

[2] Olimpíadas de Matemática, um Curso de Introdução, vol. 2. Antonio Caminha. Editora Ipiranga. Fortaleza, 2001 (a ser publicado).

[3] Divisibilidade,Congrências e Aritmética módulo n. Carlos Gustavo Moreira, Eureka! no.2 (1998),pp. 41-52.

GRAFOS E CONTAGEM DUPLA

Carlos Yuzo Shine, Colégio Etapa

♦ Nível Intermediário.

1. GRAFOS

1.1 O que são e para que servem grafos?

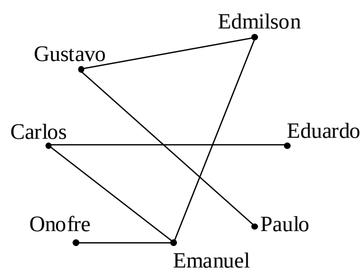
Define-se grafo como o par (V, A) onde $V = \{v_1, v_2,...,v_n\}$ é um conjunto de vértices e $A \subset \{\{v_i, v_j\}$t.q. $v_i, v_j \in V, i \neq j\}$ é um conjunto de arestas (na verdade, uma aresta é um par não-orientado de vértices).

A representação mais comum de grafos é associar os vértices a pontos e as arestas a linhas que ligam os pares de vértices que as formam.

Mas o mais importante é que os grafos podem representar inúmeras situações. Por exemplo, quando você brinca de ligar os pontos, no fundo você está traçando arestas em um grafo onde os vértices são dados (em vez de "ligue os pontos", poderíamos escrever "areste o grafo"...).

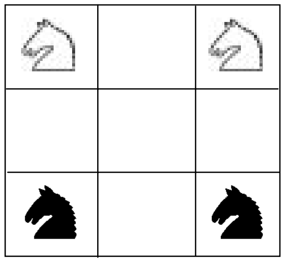
Embora pareçam simples, os grafos têm muito mais utilidades, como veremos. Na verdade, a *Teoria dos Grafos* é uma das partes mais importantes da Matemática, e é muito utilizada principalmente em computação.

Exemplo 1.1
Podemos construir um grafo que represente pessoas apertando mãos. Os vértices seriam as pessoas. Ligamos dois vértices (formando assim uma aresta) se duas pessoas se cumprimentaram.

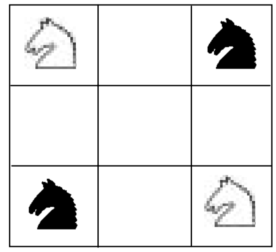


Exemplo 1.2

É possível que os cavalos do tabuleiro (I) fiquem na posição do tabuleiro (II) ?

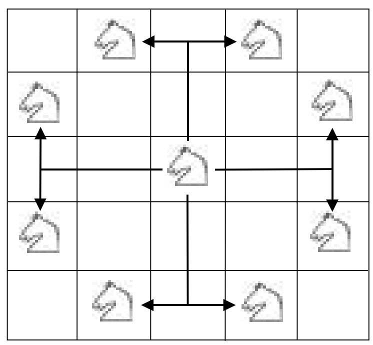


(I)



(II)

Observação: um cavalo, no xadrez, se movimenta da seguinte forma: ele se move duas casas na vertical ou horizontal e depois se move uma casa na direção perpendicular à direção em que havia se movimentado antes.

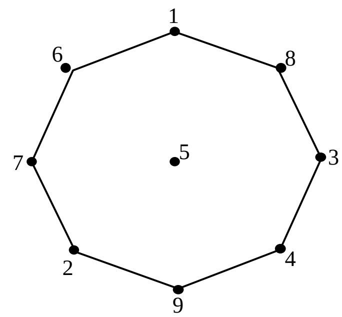


Resolução

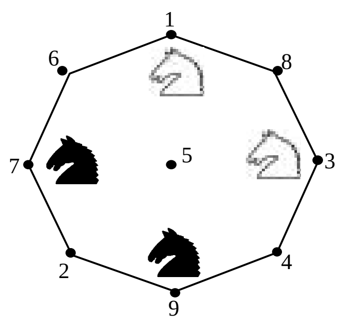
Vamos numerar as casas do tabuleiro da seguinte forma:

1	**2**	**3**
4	**5**	**6**
7	**8**	**9**

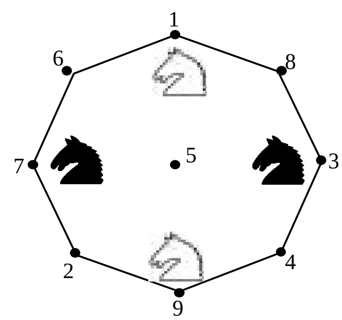
Vamos construir um grafo onde os vértices são as casas do tabuleiro. Ligaremos dois vértices *i* e *j* se é possível um cavalo ir da casa *i* à casa *j*. Temos então o seguinte grafo (verifique!).



Coloquemos agora os cavalos nas situações inicial e final, respectivamente:



Inicial



Final

Observe que não podemos ter dois cavalos na mesma casa, assim os cavalos devem sempre estar na mesma ordem no ciclo. Logo não é possível chegar na posição final.

Exercícios

01. (IMO) Considere um inteiro positivo r e um retângulo de dimensões $|AB| = 20,\ |BC| = 12.$ O retângulo é dividido em uma grade de 20×12 quadrados unitarios. Uma moeda pode ser movida de um quadrado a outro se, e somente se, a distância entre os centros dos quadrados é $\sqrt{r}$. A tarefa é encontrar uma seqüência de movimentos que levem uma moeda do quadrado que tem A como vértice ao quadrado que tem B como vértice.

a) Mostre que a tarefa não pode ser feita se r é divisível por 2 ou 3.
b) Prove que a tarefa pode ser feita se $r = 73$.
c) Pode a tarefa ser feita quando $r = 97$?

Dicas: Para o item a), use o fato de que um quadrado perfeiro pode deixar somente os restos 0 ou 1 quando divididos por 3 ou 4. Para os itens b) e c), construa dois grafos: um que considera a posição da moeda na horizontal e outro na vertical.

1.2. Grau de vértice

Definimos *grau de vértice* v_i como o número de arestas que contêm v_i e denotamos $d(v_i)$. No último exemplo, o grau de um vértice seria o número de apertos de mão que a pessoa correspondente deu.

Exemplo 1.3.

Na cidade de Micrópolis, há 7 telefones. Um candidato a prefeito prometeu que ampliaria a rede de telefonia de modo que cada um dos 7 telefones esteja conectado diretamente a exatamente 5 outros telefones. É possível que ele cumpra sua promessa?

Resolução

Se imaginarmos um grafo onde os vértices são os telefones e as arestas, as conexões, teríamos que o grau de cada vértice seria 5.

Vamos contar o número de conexões entre dois telefones (ou seja, o número de arestas do grafo). Como de cada telefone sairiam 5 conexões, teríamos a princípio 5.7 = 35 conexões; mas contamos cada conexão duas vezes, uma vez em cada um dos dois telefones a que ele está conectado. Assim, deveríamos ter na verdade 35/2 conexões, o que seria um absurdo. Assim, o candidato a prefeito não pode cumprir sua promessa (não votem nele!!).

Este exemplo mostra

1.3. Um teorema importante

Teorema. *Em um grafo, a soma dos graus de todos os vértices é igual ao dobro do número de arestas. Em símbolos: no grafo* (V, A),

$$\sum_{v_i \in V} d(v_i) = 2|A|$$

($|X|$ *denota o número de elementos do conjunto X.*)

Demonstração

De cada vértice v saem $d(v)$ arestas. Assim, se somarmos os graus de todos os vértices, obtemos o número de arestas multiplicado por dois, pois contamos cada aresta duas vezes (lembre-se de que cada aresta está associada a dois vértices).

2. Contagem Dupla

O que acabamos de fazer foi contar algo de duas maneiras diferentes, no caso o número de arestas (na verdade, o seu dobro). Esta idéia de contar duas vezes é às vezes muito útil para demonstrar algumas relações.

Exemplo 2.1.

(Combinações) De quantos modos podemos escolher k elementos dentre n disponíveis?

Importante: Tal número é representado por $\binom{n}{k}$ – lê-se n escolhe k ou combinação de n k a k.

Resolução

Vamos contar de duas maneiras o número de **filas** com os k elementos escolhidos. Podemos (i) primeiro escolher os k elementos e colocá-los em filas ou (ii) escolher diretamente os elementos e irmos colocando na fila.

Fazendo como em (i), temos $\binom{n}{k}$ maneiras de escolhermos os elementos; podemos escolher o primeiro da fila de k maneiras, o segundo de k – 1 maneiras, e assim por diante. Assim temos

$$\binom{n}{k}\cdot k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 1=\binom{n}{k}\cdot k!$$

maneiras de formar a fila. (*lembrete:* $k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 1=k!$ – lê-se k *fatorial*).

Por outro lado, fazendo como em (ii), temos n maneiras de escolher o primeiro da fila, n – 1 maneiras de escolher o segundo e assim por diante, até o último, que pode ser escolhido de n – k + 1 maneiras. Assim, temos $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$ maneiras de formar a fila. Logo, de (i) e (ii), concluímos que

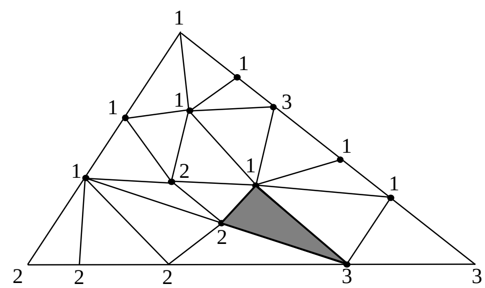
$$\binom{n}{k}\cdot k!=\text{número de filas}=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$$

$$\Rightarrow\binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{(n-k)!}{(n-k)!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemplo 2.2.

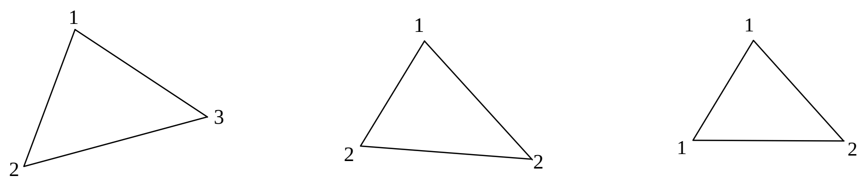
(Lema de Sperner) Dividimos um triângulo grande 123 em triângulos menores de modo que quaisquer dois dentre os triângulos menores ou não têm ponto em comum, ou têm um vértice em comum ou tem um lado (completo) em comum.

Os vértices dos triângulos são numerados: 1, 2 ou 3. A numeração é arbitrária, exceto que os vértices sobre os vértices do triângulo maior oposto ao vértice *i* não podem receber o número *i*. Mostre que entre os triângulos menores existe um com os vértices 1, 2, 3.



Resolução

Contaremos o número de segmentos $\overline{12}$ (com algumas repetições). Eles aparecem nos triângulos



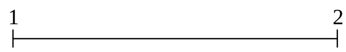
Digamos que há x triângulos 123, y triângulos 122 e z triângulos 112. Observe que os segmentos $\overline{12}$ internos ao triângulo grande são contados duas vezes (eles são comuns a dois triângulos) e os segmentos do lado do triângulo grande, somente uma vez. Notemos também que os segmentos $\overline{12}$ aparecem duas vezes nos triângulos 122 e 112 e uma vez nos triângulos 123. Assim,

2 segmentos interiores + segmentos nos lados = número de segmentos = $x + 2y + 2z$

Mostraremos um fato mais forte que o lema: provaremos que x é ímpar e portanto não pode ser zero.

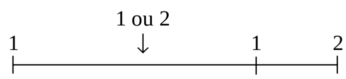
Observando a equação acima, vemos que basta provarmos que o número de segmentos $\overline{12}$ sobre os lados do triângulo grande é ímpar.

Como não podemos ter pontos 1 no lado $\overline{23}$ nem pontos 2 no lado $\overline{13}$, todos os segmentos $\overline{12}$ estão sobre o lado $\overline{12}$ do triângulo grande. Provemos que o número de segmentos sobre o lado é ímpar. Para isso, vamos "colocar" vértices 1 ou 2 no lado $\overline{12}$. Assim, no começo, temos somente o lado $\overline{12}$:



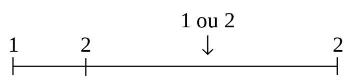
Na hora de colocar vértices, considere o menor segmento em cujo interior colocaremos o vértice. Poderemos estar em uma das seguintes situações:

- Este segmento é do tipo $\overline{11}$:



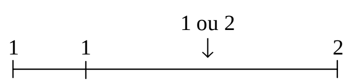
Se colocarmos 1, o número de segmentos $\overline{12}$ não muda; se colocarmos 2, aumenta de 2. De qualquer forma, a paridade do número de segmentos $\overline{12}$ não muda.

- Este segmento é do tipo $\overline{22}$:



Se colocarmos 1, o número de segmentos $\overline{12}$ aumenta de 2; se colocarmos 2, não muda. De qualquer forma a paridade do número de segmentos $\overline{12}$ não muda.

- Este segmento é do tipo $\overline{12}$:



Se colocarmos 1 ou 2, o número de segmentos $\overline{12}$ não muda e é claro que a paridade desse número não muda também.

Logo a paridade do número de segmentos $\overline{12}$ nunca muda (ou seja, é invariante). Como no começo temos um segmento $\overline{12}$ (o próprio lado $\overline{12}$), temos que o número de segmentos $\overline{12}$ no lado do triângulo grande é sempre ímpar, o que completa nossa demonstração.

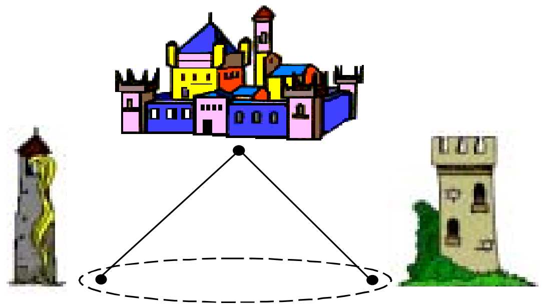
Contar algo de duas maneiras também nos ajuda a demonstrar desigualdades.

Exemplo 2.3.

Na terra de Oz há n castelos e várias estradas, sendo que cada uma liga dois castelos e não há mais do que uma estrada ligando diretamente dois castelos. Diz a lenda que se houver quatro castelos ligados em ciclo (ou seja, se existirem quatro castelos A, B, C e D tais que A e B, B e C, C e D e D e A estão ligados), um dragão aparecerá do centro dos castelos e destruirá a Terra de Oz. Mostre que para esta desgraça não acontecer o número de estradas deve ser menor ou igual a $\left(1+\sqrt{4n-3}\right)n/4$.

Resolução

Considere um castelo ligado a outros dois.



Para cada castelo v do conjunto V dos castelos temos $\binom{d(v)}{2}$ pares de estradas.

Para a desgraça não ocorrer, observemos que devemos Ter no máximo um par de estradas asociado a um mesmo par de castelos. Assim, a quantidade de pares de estradas é menor ou igual à quantidade de pares de castelos. Logo

$$\sum_{v\in V}\binom{d(v)}{2} = \text{pares de estradas} \le \text{pares de castelos} = \binom{n}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{v\in V}\left((d(v))^2 - d(v)\right) \le n^2 - n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{v\in V}(d(v))^2 - \sum_{v\in V} d(v) \le n^2 - n \qquad (*)$$

Sabemos que a soma $\sum_{v\in V} d(v)$ é igual ao dobro do número de estradas $2|A|$. Além disso, pode-se mostrar (usando a desigualdade entre as médias quadrática e aritmética, ou mesmo Cauchy-Schwarz) que

$$\sum_{v\in V}(d(v))^2 \ge \frac{\left(\sum_{v\in V} d(v)\right)^2}{n} = \frac{4|A|^2}{n}$$

Assim

$$(*) \quad \Rightarrow \frac{4|A|^2}{n} - 2|A| \le n^2 - n \Leftrightarrow 4|A|^2 - 2n|A| - n\left(n^2 - n\right) \le 0 \quad (**)$$

Resolvendo (**) em $|A|$, obtemos

$$\frac{n - n\sqrt{4n-3}}{4} \le |A| \le \frac{n + n\sqrt{4n-3}}{4} \Rightarrow |A| \le \left(1 + \sqrt{4n-3}\right)\frac{n}{4}.$$

Exercícios

02. Dizemos que dois poliedros P e Q são *equidecomponíveis* se é possível cortar o poliedro P em vários poliedros menores e montar, sem deixar espaços vazios e sem sobrar poliedros, o poliedro Q. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ os ângulos diédricos (ângulos entre faces adjacentes) de P e $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ os ângulos diédricos de Q. Mostre que se P e Q são equidecomponíveis então existem números inteiros positivos $a_1, a_2, ..., a_m, b_1, b_2, ..., b_n$ e um número inteiro k tais que

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_m\alpha_m - (b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + ... + b_n\beta_m) = k\pi$$

A partir desta relação podemos mostrar (isto é um pouco mais difícil!!) que um cubo e um tetraedro de mesmo volume não são equidecomponíveis.

03. Dado n inteiro, seja $d(n)$ o número de divisores de n. Seja $\overline{d}(n)$ o número médio de divisores dos números entre 1 e n, ou seja,

$$\overline{d}(n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} d(j)$$

Mostre que

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i} \le \overline{d}(n) \le \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$$

Esta desigualdade nos mostra que $\overline{d}(n) \cong \ln n$, e que a diferença $\left|\overline{d}(n) - \ln n\right|$ é no máximo 1.

04. (IMO) Num concurso, há m candidatos e n juízes, onde $n \ge 3$ é ímpar. Cada candidato é avaliado por cada juiz, podendo ser aprovado ou reprovado. Sabe-se que os julgamentos de cada par de juízes coincidem em no máximo k candidatos. Prove que

$$\frac{k}{m} \ge \frac{n-1}{2n}$$

Referências Bibliográficas

A parte de grafos foi baseada em um dos capítulos do livro *Mathematical Circles – A Russian Experience*, que aborda o treinamento russo para as olimpíadas.

Muitos dos exercícios de contagem dupla foram extraídos do livro *Proofs From The Book*, que contém as demonstrações consideradas pelos autores (e também por muitos leitores!) as mais elegantes.

OLIMPÍADAS AO REDOR DO MUNDO

O comitê editorial de EUREKA! agradece aos leitores o crescente envio de soluções e aos inúmeros elogios para a seção **OLIMPÍADAS AO REDOR DO MUNDO**.

Continuamos salientando que estamos à disposição na OBM para aqueles que estiverem interessados na solução de algum problema particular. Para tanto, basta contactar a OBM, através de carta ou e-mail.

Antonio Luiz Santos

Primeiramente vamos aos problemas propostos deste número

121. (Rússia-2001) Os valores da função quadrática $f(x) = x^2 + ax + b$ para dois inteiros consecutivos são os quadrados de dois inteiros também consecutivos. Mostre que os valores da função quadrática são quadrados perfeitos para todos os inteiros.

122. (Rússia-2001) Determine todos os números inteiros positivos que podem ser representados de maneira única sob a forma $\dfrac{x^2 + y}{xy + 1}$ onde x e y são inteiros positivos.

123. (Rússia-2001) Os *senos* dos ângulos de um triângulo são números racionais. Mostre que os seus *cossenos* são tambem racionais.

124. (Rússia-2001) Dois círculos s_1 e s_2 de centros O_1 e O_2 intersectam-se nos pontos A e B. Seja M um ponto qualquer do círculo s_1 tal que MA intersecta s_2 no ponto P e MB intersecta s_2 no ponto Q. Mostre que se o quadrilátero AO_1BO_2 é *cíclico* (inscritível) então AQ e BP intersectam-se em s_1.

125. (Rússia-2001) Eliminando-se o 2000º. algarismo da expansão decimal da fração $\dfrac{1}{p}$ (onde p é um número primo maior que 5) obtemos a fração irredutível $\dfrac{a}{b}$. Mostre que b é divisível por p.

126. (Rússia-2001) *Cinco* números, um dos quais é 2000, são escritos em um quadro negro. É permitido apagar qualquer um destes números e o substituirmos pelo número $a+b-c$, onde a, b e c são três quaisquer dos números restantes. É possível com estas operações obter *cinco* números iguais a 2000?

127. (Estônia-2001) Quantos números inteiros positivos menores que 20002001 não contém outros algarismos distintos de 0 e 2?

128. (Estônia-2001) Em um triângulo ABC, as medidas dos seus lados são inteiros consecutivos e a mediana relativa ao lado BC é perpendicular à bissetriz interna do ângulo $\angle ABC$. Determine as medidas dos lados do triângulo ABC.

129. (Estônia-2001) Considere todos os produtos por 2, 4, 6,...,2000 dos elementos do conjunto $A=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...,\frac{1}{2000},\frac{1}{2001}\right\}$. Determine a soma de todos estes produtos.

130. (Eslovênia-2001) Para os inteiros positivos x e y é verdadeira a igualdade $3x^2+x=4y^2+y$. Mostre que $x-y$ é um quadrado perfeito.

131. (Eslovênia-2001) Determine todos os números primos da forma 101010...101.

132. (Eslovênia-2001) Gustavo tentou escrever alguns números utilizando somente o algarismo 1 e o sinal de "mais". Ele percebeu , por exemplo, que existem apenas dois inteiros positivos n (13 e 4) para os quais o número 13 pode ser escrito utilizando n 1's e o sinal de "mais". De fato, o número 13 pode ser escrito como a soma de 13 1's ou 11 + 1 + 1 onde 4 1's foram utilizados. Determine quntos são os inteiros positivos n tais que o número 125 seja escrito utilizando-se n 1's e o sinal de "mais".

133. (Eslovênia-2001) Seja ABC um triângulo retângulo de hipotenusa AC. Sabendo que sobre o lado BC existem pontos D e E tais que $\angle BAD=\angle DAE=\angle EAC$ e $EC=2\cdot BD$. Determine os ângulos do triângulo.

134. (Croácia-2001) Determine todas as funções $f:\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}\to\mathbb{R}$ que satisfazem à equação :

$$f\left(\frac{x-3}{x+1}\right)+f\left(\frac{3+x}{1-x}\right)=x$$

135. (Croácia-2001) Se $x+y+z=0$, simplifique

$$\frac{x^7+y^7+z^7}{xyz\left(x^4+y^4+z^4\right)}$$

Sugestão : calcule $(x+y)^4$ e $(x+y)^6$

136. (Croácia-2001). Dado o número $n=p_1p_2p_3p_4$ onde p_1, p_2, p_3 e p_4 são quatro números primos distintos. Sejam

$$d_1=1<d_2<d_3<\cdots<d_{15}<d_{16}=n$$

os divisores positivos de n. Determine todos os $n<2001$ tais que $d_9-d_8=22$.

137. (Albânia-2001) Mostre as igualdades:

(i) $\left(\cos^2\frac{3\pi}{11}-sen^2\frac{2\pi}{11}\right)\cdot sen\frac{6\pi}{11}=\frac{1}{4}\cdot sen\frac{2\pi}{11}$

(ii) $tg\frac{3\pi}{11}+4\cdot sen\frac{2\pi}{11}=\sqrt{11}$

138. (Bielorússia-2001) Em um triângulo isósceles ABC, no qual $AB=AC$ e $\angle BAC=30^\circ$, marcam-se os pontos Q e P sobre o lado AB e sobre a mediana AD respectivamente, de modo que $PC=PQ$ ($Q\neq B$). Determine a medida do ângulo $\angle PQC$.

139. (Bielorússia-2001) Eduardo escreveu todos os *produtos*, todas as *somas* e todos os *valores absolutos* das diferenças dos inteiros positivos $a_1,a_2,...,a_{100}$ tomados dois a dois. Qual o maior número de inteiros ímpares obtidos por Eduardo?

140. (Bielorússia-2001). Um inteiro positivo k é chamado *bom* se existe um inteiro positivo N com k algarismos em sua representação decimal e tal que o $i-ésimo$ algarismo da esquerda para a direita do número $3N$ é igual ao

$(k-i+1)-\acute{e}simo$ algarismo da direita para a esquerda do número 2*N*, $1 \le i \le k$. Determine a soma de todos os números *bons* existentes entre 1 e 100.

141. (Bielorússia-2001) Mostre que

$$a^n + \frac{1}{a^n} - 2 \ge n^2\left(a + \frac{1}{a} - 2\right)$$

para todo inteiro positivo n e todo real positivo a.

142. (Finlândia-2001) Determine $n \in \mathrm{N}$ tais que $n^2 + 2$ divida $2 + 2001n$.

143. (Itália-2001) Em um hexágono equiângulo, as medidas de quatro lados consecutivos são, nesta ordem, 5, 3, 6 e 7. Determine as medidas dos outros dois lados.

144. (Itália-2001) Dada a equação $x^{2001} = y^x$,

(i) determine todos os pares de soluções (*x*, *y*) tais que *x* seja um número primo e *y* um inteiro positivo.

(ii) determine todos os pares de soluções (*x*, *y*) tais que *x* e *y* são inteiros positivos.

145. (Israel-2001) As medidas dos lados de um triângulo *ABC* são 4, 5 e 6. Por um ponto *D* qualquer de um de seus lados, traçamos as perpendiculares *DP* e *DQ* sobre os outros lados. Determine o valor *mínimo* de *PQ*.

146. (Israel-2001) Dados 2001 números reais $x_1, x_2, ..., x_{2001}$ tais que $0 \le x_n \le 1$ para cada $n = 1,2,...,2001$ determine o valor *máximo* de

$$\left(\frac{1}{2001}\sum_{n=1}^{2001} x_n^2\right) - \left(\frac{1}{2001}\sum_{n=1}^{2001} x_n\right)^2$$

e onde este máximo é atingido.

147. (Grécia-2000) Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(1) = 3$ e

$$f(m+n) + f(m-n) - m + n - 1 = \frac{f(2m) + f(2n)}{2}$$

para todos os inteiros não negativos m e n com $m \ge n$. Determine a expressão de *f*(*m*).

148. (Grécia-2001) Fatore a expressão

$$A = x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2$$

e mostre que a equação A = 2000 não possui solução no conjunto dos números inteiros.

149. (Hungria-2000) O produto de 2001 inteiros positivos distintos possui exatamente 2000 divisores primos distintos. Mostre que podemos escolher alguns destes 2001 números de modo que seu produto seja um *quadrado perfeito*.

150. (Hungria-2000) Seja S o número de subconjuntos com 77 *elementos* de H = {1, 2, 3,...2000, 2001} para os quais a soma dos elementos de cada subconjunto seja *par* e seja N o número de subconjuntos com 77 *elementos* de H para os quais a soma dos elementos de cada subconjunto seja *ímpar*. Determine qual dos dois S ou N é *maior* e o quanto?

Agora vamos aos comentários e soluções dos leitores para alguns dos problemas apresentados em nossa seção nos números anteriores de **EUREKA!**.

9. (Irlanda-1998) Um triângulo ABC possui medidas dos lados expressas por números inteiros, $\angle A = 2\cdot\angle B$ e $\angle C > 90^\circ$. Determine o valor mínimo do perímetro deste triângulo.

SOLUÇÃO DE EINSTEIN DO NASCIMENTO JÚNIOR (FORTALEZA – CE) (com adaptações):

A resposta é 77. De fato, fazendo-se $\angle B = x$ temos $\angle A = 2x$, sejam a, b e c as medidas dos lados opostos aos ângulos $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$ respectivamente. Prolongando-se o lado CA no sentido de C para A até o ponto D de um comprimento igual a c, vemos que o triângulo BCD é semelhante ao triângulo ABC logo,

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b+c} \text{ ou } a^2 = b(b+c)$$

Como estamos procurando um triângulo com o menor perímetro possível, podemos supor que a, b e c não possuem fatores primos comuns pois, de outra forma um outro exemplo menor haveria. De fato, b e c devem ser primos entre si porque qualquer fator primo comum a b e c seria também um fator de a. Alem disso, como o produto $b(b + c)$ é um quadrado perfeito que é igual ao produto de dois números primos entre si tanto b quanto $b + c$ devem eles mesmos serem quadrados perfeitos. Deste modo, para m e n inteiros positivos quaisquer primos entre si temos $b = m^2$, $b + c = n^2$, $a = mn$ e daí

$$\frac{n}{m} = \frac{a}{b} = 2\cos\angle B \quad \text{(pela lei dos senos)}$$

O ângulo $\angle C = \pi - 3\cdot\angle B$ é obtuso assim, $0 < \angle B < \frac{\pi}{6}$ o que implica em $\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos\angle B < 1$ e portanto, $\sqrt{3} < \frac{n}{m} < 2$. É facil ver que esta desigualdade não possui soluções inteiras com $m = 1, 2$ ou 3 daí $m \ge 4$, $n \ge 7$ e

$$a + b + c = mn + n^2 \ge 4\cdot 7 + 7^2 = 77$$

De fato, o par $(m, n) = (4, 7)$ gera o triângulo $(a, b, c) = (28, 16, 33)$ que satisfaz todas as condições do problema.

10. **(Canadá-1998)** Em um triângulo ABC tem-se que $\angle BAC = 40^{\circ}$ e $\angle ABC = 60^{\circ}$. Sejam D e E pontos sobre os lados AC e AB respectivamente tais que $\angle CBD = 40^{\circ}$ e $\angle BCE = 70^{\circ}$. Seja F o ponto de interseção de BD e CE. Mostre que a reta que que contém AF é perpendicular à que contém BC.

SOLUÇÃO DE LUCAS DE MELO PONTES E SILVA (FORTALEZA – CE):

Sejam X o ponto de interseção de AF com BC e H o pé da altura que parte de A. Então pela lei dos senos temos nos triângulos CBD e BDA :

$$\frac{CD}{sen 40^{\circ}} = \frac{BD}{sen 80^{\circ}} \text{ e } \frac{DA}{sen 20^{\circ}} = \frac{BD}{sen 40^{\circ}}$$

ou $\frac{CD}{DA} = \frac{sen 40^{\circ}\cdot sen 40^{\circ}}{sen 80^{\circ}\cdot sen 20^{\circ}}$.

Analogamente $\frac{EA}{EB} = \frac{sen 60^{\circ}\cdot sen 10^{\circ}}{sen 70^{\circ}\cdot sen 40^{\circ}}$. Pelo Teorema de Ceva, se AX, BD e CE são cevianas concorrentes no triângulo ABC tem-se que:

$$\frac{CD}{DA}\cdot\frac{EA}{EB}\cdot\frac{BX}{XC} = 1 \Rightarrow \frac{sen 40^{\circ}\cdot sen 40^{\circ}\cdot sen 60^{\circ}\cdot sen 10^{\circ}}{sen 20^{\circ}\cdot sen 80^{\circ}\cdot sen 70^{\circ}\cdot sen 40^{\circ}}\cdot\frac{BX}{XC} = 1 \text{ ou}$$

$$\frac{XC}{BX} = \frac{2 sen 20^{\circ}\cdot\cos 20^{\circ}\cdot sen 60^{\circ}\cdot\cos 80^{\circ}}{sen 20^{\circ}\cdot sen 80^{\circ}\cdot\cos 20^{\circ}} = \frac{sen 60^{\circ}}{\frac{1}{2}\cdot tg 80^{\circ}} = \frac{tg 60^{\circ}}{tg 80^{\circ}}$$

Como AH temos nos triângulos AHB e AHC respectivamente:

$$tg60^o = \frac{AH}{HB} \text{ e } tg80^o = \frac{AH}{HC} \text{ logo } \frac{tg60^o}{tg80^o} = \frac{HC}{HB}$$

Logo $\frac{HC}{HB} = \frac{XC}{XB} \Rightarrow \frac{HC + HB}{HB} = \frac{XC + XB}{XB}$ e como $\angle BAC$ é agudo então H está entre B e C e portanto,

$$\frac{BC}{HB} = \frac{BC}{XB} \Rightarrow XB = HB \Rightarrow X \text{ coincide com } H.$$

13. **(Irlanda-1999)**. Uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfaz às seguintes condições:

(i) $f(ab) = f(a) \cdot f(b)$ se o máximo divisor comum de a e b é 1.

(ii) $f(p+q) = f(p) + f(q)$ para todos os números primos p e q.

Mostre que $f(2) = 2$, $f(3) = 3$ e $f(1999) = 1999$.

SOLUÇÃO DE MARCÍLIO MIRANDA DE CARVALHO (TERESINA – PI):

Seja p um número primo ímpar. Então,

$$f(2p) = f(p+p) = f(p) + f(p) = 2 \cdot f(p)$$

enquanto que

$$f(2p) = f(2) \cdot f(p)$$

e daí, $f(2) = 2$.

Agora, $f(4) = f(2) + f(2) = 4 \Rightarrow f(12) = 4 \cdot f(3)$. Por outro lado, $f(12) = f(7) + f(5) \Rightarrow f(12) = 2 \cdot f(2) + f(3) + f(2) + f(3)$

$\Rightarrow f(3) = 3$.

Finalmente,

$$f(5) = f(2) + f(3) = 5 \Rightarrow f(15) = 15 \Rightarrow f(13) = 13$$
$$\Rightarrow f(26) = 26 \Rightarrow f(23) = 23.$$

Por outro lado,

$$f(13) = 13 \Rightarrow f(11) = 11 \Rightarrow f(33) = 33 \Rightarrow f(31) = 31$$
$$\Rightarrow f(29) = 29.$$

Logo,

$$f(2001) = f(3) \cdot f(23) \cdot f(29) = 2001 \Rightarrow f(1999) = 1999$$

16. **(Estônia-1999)** Mostre que o segmento que une o ortocentro e o baricentro de um triângulo acutângulo ABC é paralelo ao lado AB se, e somente se, $tg\angle A \cdot tg\angle B = 3$.

SOLUÇÃO DE GERALDO PERLINO JÚNIOR (SÃO PAULO – SP) (com adaptações):
Sejam D e E os pés das alturas traçadas dos vértices A e C respectivamente. Se H é o ortocentro do triângulo, observe que H pertence à uma reta paralela a AB e passando pelo baricentro se, e só se $\frac{CE}{EH} = 3$. Deste modo, basta mostrar que $\frac{CE}{EH} = tg\angle A \cdot tg\angle B$. Como $\angle AHE = \angle CHD$ temos também que $\angle EAH = \angle BCE$, isto é os triângulos retângulos CEB e AEH são semelhantes e $tg\angle B = \frac{CE}{EB} = \frac{AE}{EH}$. Observando que $tg\angle A = \frac{CE}{AE}$, obtemos a relação necessária.

23. **(Rússia-1999)** A soma dos algarismos de um inteiro positivo n escrito no sistema de numeração decimal é igual a 100 e a soma dos algarismos do número $44n$ é 800. Determine a soma dos algarismos do número $3n$.

SOLUÇÃO DE MARCÍLIO MIRANDA DE CARVALHO (TERESINA – PI):
Sejam $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ os algarismos de n e $S(n)$ a soma de seus algarismos. Então,

$$44n = 40(a_1a_2\ldots a_k) + 4(a_1a_2\ldots a_k) = 4(a_1a_2\ldots a_k)\cdot(10+1)$$

Logo, se os algarismos de $44n$ forem :

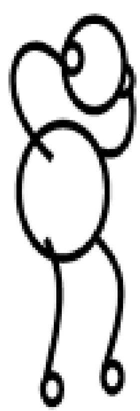
$$4a_1,\ (4a_2 + 4a_1),\ (4a_3 + 4a_2),\ \ldots,\ (4a_k + 4a_{k-1})\ \text{e}\ 4a_k$$

teríamos $S(44n) = 8\cdot(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) = 800$. Assim, se houvesse algum "vai-um", a soma dos algarismos de $44n$ cairia . Deste modo, todos os algarismos de n são menores ou iguais a 2 donde os algarismos de $3n$ são $3a_1, 3a_2, 3a_3, \ldots, 3a_k$. Assim,

$$S(3n) = 3a_1 + 3a_2 + 3a_3 + \ldots + 3a_k = 3.S(n) = 300.$$

Acusamos o recebimento de soluções de problemas anteriores dos seguintes leitores de **EUREKA!**:

Anderson Torres	São Paulo – SP	Prob.16, 52, 67, 69, 70, 76, 102, 105, 118, 120.
Geraldo Perlino	Itapec. da Serra – SP	Prob. 115.
Ioziel Matos Corrêa Júnior	Rio de Janeiro – RJ	Prob. 52, 62, 71, 74, 76, 78.
Jorge Silva Júnior	Cachoeiro do Itapemirim – ES	Prob. 96, 98, 99, 101, 103, 110.
Marcelo R. De Souza	Rio de Janeiro – RJ	Prob. 95, 115.
Marcelo Rufino de Oliveira	Belém – PA	Prob. 91, 92, 93, 95, 97, 98, 99, 101, 102, 104, 107, 109, 110, 111, 112, 114, 115, 118.
Mauro Félix de Souza	Cordovil – RJ	Prob. 98.
Osvaldo Mello Sponquiado	Olímpia – SP	Prob. 29, 30, 38, 56, 57, 59, 63, 66, 67, 69, 74, 98, 107, 114, 118.
Paulo Alexandre Araújo Sousa	Teresina – PI	Prob. 62, 78, 82, 88, 76, 70.
Renato Francisco Lopes Mello	Jaboatão dos Guararapes – PE	Prob. 98, 99, 101, 109, 117.
Wallace Rodrigues de Holanda Miranda	Teresina – PI	Prob. 97, 98, 99, 101, 102, 104, 106, 109, 112, 114, 116, 117, 120.
Wilson Carlos de Silva Ramos	Belém – PA	Prob. 43, 68, 74, 82.



Você sabia…

Que foi descoberto um novo primo de Mersenne em 14/11/2001 ? É o número $2^{13466917}-1$, que tem 4053946 dígitos e é, ao lado de $2^{6972593}-1$, um dos dois primos conhecidos com mais de um milhão de dígitos. O descobridor, Michael Cameron, de 20 anos, é um participante do GIMPS (um projeto cooperativo para procurar primos de Mersenne).
Consulte na internet a página:

http://www.mersenne.org/prime.htm

SOLUÇÕES DE PROBLEMAS PROPOSTOS

Publicamos aqui algumas das respostas enviadas por nossos leitores.

56) Para cada número n, seja $f(n)$ a quantidade de maneiras que se pode expressar n como a soma de números iguais a 1, 3 ou 4.
Por exemplo, $f(4) = 4$, pois todas as maneiras possíveis são $4 = 1 + 1 + 1 + 1$, $4 = 1 + 3$, $4 = 3 + 1$, $4 = 4$. Demonstrar que se n é par, $f(n)$ é um quadrado perfeito.

SOLUÇÃO DE MÁRCIO ASSAD COHEN (RIO DE JANEIRO – RJ):
O coeficiente de x^n em $(x + x^3 + x^4)^k$ conta exatamente uma vez cada modo de representar o número n na forma $\alpha + 3\beta + 4\gamma$ com $\alpha + \beta + \gamma = k$, ou seja, conta os modos de representar n utilizando 1's, 3's e 4's com um total de k números. Variando k, segue que $f(n)$ é o coeficiente de x^n na série formal

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x + x^3 + x^4)^k \ .$$

Somando a PG, fatorando, e decompondo em frações parciais tem-se:

$$g(x) = \frac{1}{1 - x - x^3 - x^4}$$

$$g(x) = \frac{1}{(1 + x^2)(1 - x - x^2)} = \frac{1}{5} \cdot \frac{x + 2}{1 + x^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{x + 3}{1 - x - x^2}$$

Utilizando respectivamente soma de PG e o método desenvolvido para séries formais no artigo da Revista Eureka! N°. 11 tem-se:

$$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$$

$$\frac{1}{1 - x - x^2} = F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + F_3 x^3 + \ldots$$

onde F_n é o n-ésimo número de Fibonacci, com $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
Se n é par, $n = 2t$, o coeficiente de x^n no desenvolvimento de $g(x)$ será então:

$$[x^n]g(x) = \frac{2 \cdot (-1)^t + F_{2t-1} + 3F_{2t}}{5}$$

Utilizando que $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}\right)$, onde $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$:

$$\begin{aligned}
&2\cdot(-1)^t + F_{2t-1} + 3F_{2t} = \\
&2\cdot(-1)^t + [(F_{2t-1} + F_{2t}) + F_{2t}] + F_{2t} = \\
&2\cdot(-1)^t + F_{2t+2} + F_{2t} = \\
&2\cdot(-1)^t + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{2t+3} - \beta^{2t+3}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{2t+1} - \beta^{2t+1}\right) = \\
&2\cdot(-1)^t + \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\alpha + \alpha^{-1}\right)\alpha^{2t+2} - \left(\beta + \beta^{-1}\right)\beta^{2t+2}\right]
\end{aligned}$$

Notando que $\alpha\cdot\beta = -1$:

$$\alpha + \alpha^{-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$
$$\beta + \beta^{-1} = -\alpha^{-1} - \alpha = -\sqrt{5}$$

Juntando tudo:

$$\left[x^n\right]g(x) = \frac{1}{5}\left[2\cdot(-1)^t + \alpha^{2t+2} + \beta^{2t+2}\right] =$$
$$\frac{\alpha^{2t+2} + \beta^{2t+2} - 2\cdot(\alpha\cdot\beta)^{t+1}}{5} = \left(\frac{\alpha^{t+1} - \beta^{t+1}}{\sqrt{5}}\right)^2 = F_t^{\,2}$$

E, em particular, $f(n)$ é quadrado perfeito sempre que n é par.

58) Determine todos os primos p para os quais o número $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ é o quadrado de um inteiro.

SOLUÇÃO DE RODRIGO VILLARD MILET (RIO DE JANEIRO – RJ):

Resposta: $p = 3$ ou $p = 7$.

Primeiramente, note que $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ é inteiro, para $p > 2$ (pelo pequeno Teorema de Fermat), e $p = 2$ não serve. Daí, como p é ímpar, $2^{p-1}-1 \equiv 0 (\text{mod}\, 3)$. Se $p = 3$, $\frac{2^{3-1}-1}{3}=1$ que é quadrado. Se $p = 3$, como $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ é quadrado, $9 \mid 2^{p-1}-1 \Leftrightarrow 2^{p-1} \equiv 1 (\text{mod } 9) \Leftrightarrow ord_9 2 = 6 \mid p-1 \Rightarrow p \equiv 1 (\text{mod } 6)$.

$$\therefore \exists\, k \in \mathbb{N};\, p = 1+6k \Rightarrow \frac{2^{p-1}-1}{p} = \frac{2^{6k}-1}{p} = \frac{(2^{3k}-1)(2^{3k}+1)}{p}$$

$mdc\{2^{3k}-1,\ 2^{3k}+1\} = mdc\{2,\ 2^{3k}+1\} = 1$ como p é primo $(p > 3)$, $p \mid 2^{3k}-1$ ou $p \mid 2^{3k}+1$.

(i) $p \mid 2^{3k}-1$.

Daí, como $2^{3k}-1$ e $2^{3k}+1$ não tem fatores em comum, $2^{3k}+1$ é quadrado $\therefore \exists\, q \in N; 2^{3k}+1 = q^2 \Leftrightarrow 2^{3k} = (q-1)(q+1) \Rightarrow q = 3$ e $k = 1$ (de fato, q-1 e q+1 devem ser potências de 2,o que só é possível se forem 2 e 4). Nesse caso, $\frac{2^{7-1}-1}{7} = 9$ que é quadrado.

(ii) $p \mid 2^{3k}+1$. (Assuma $k > 1$, pois $k = 1$ já é solução)

Daí, $2^{3k}-1$ é quadrado $\therefore \exists\, m \in N; 2^{3k}-1 = m^2 \Leftrightarrow (2^k-1)(2^{2k}+2^k+1) = m^2$. Seja $d = mdc\{2^k-1,\ 2^{2k}+2^k+1\}$. $d \mid 2^k-1 \Rightarrow d \mid (2^k-1)^2 = (2^{2k}-2\cdot 2^k+1)$, mas $d \mid 2^{2k}+2^k+1$, logo $d \mid 3.2^k$. Como $d \mid 2^k-1$, d não divide $2^k \Rightarrow d \mid 3 \Rightarrow d = 1$ ou 3.

• $d = 1 \Rightarrow 2^{2k}+2^k+1$ é quadrado. No entanto, temos $(2^k)^2 < 2^{2k}+2^k+1 < (2^k+1)^2$, então não é possível $2^{2k}+2^k+1$ ser quadrado.

• $d = 3 \Rightarrow \frac{2^k - 1}{3}$ é quadrado.

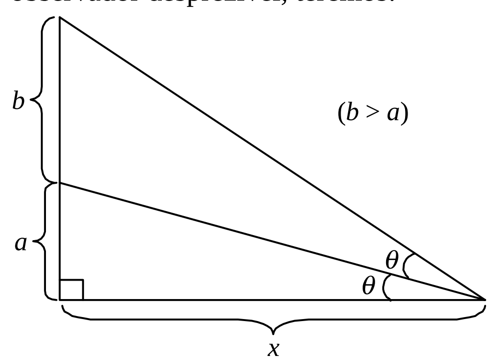
Como $\frac{2^k - 1}{3}$ é ímpar,

$\frac{2^k - 1}{3} \equiv 1 (\text{mod } 8) \Rightarrow 2^k \equiv 4 \text{ mod } 8 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow p = 13$, que não é solução.

59) Um pedestal de altura *a* sustenta uma coluna de altura *b* (*b* > *a*). A que distância do monumento se deve colocar um observador para ver o pedestal e a coluna sob ângulos iguais?

SOLUÇÃO DE CARLOS ALBERTO DA SILVA VÍCTOR (NILÓPOLIS – RJ):

Supondo a altura do observador desprezível, teremos:



$$tg\theta = \frac{a}{x} \; ; \; tg2\theta = \frac{a+b}{x}$$

$$\frac{2tg\theta}{1 - tg^2\theta} = \frac{a+b}{x} \; \therefore \; \frac{2.a/x}{1 - \frac{a^2}{x^2}} = \frac{a+b}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2a.x^2}{x(a^2 - a^2)} = \frac{a+b}{x} \Rightarrow 2ax^2 = (a+b)x^2 - a^2(a+b) \Rightarrow (b-a)x^2 = a^2(a+b),$$

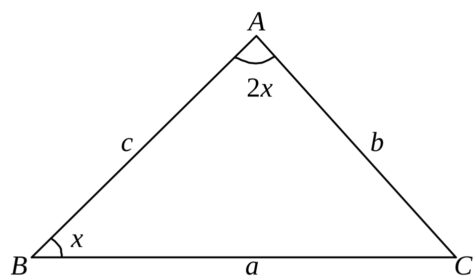
logo

$$x = a.\sqrt{\frac{a+b}{b-a}} \, .$$

60) Se num triângulo ABC, $A = 2B$, provar que $a^2 = b(b + c)$.

Obs.: a, b e c são, respectivamente, os lados opostos aos ângulos A, B e C.

SOLUÇÃO DE MARCELO RIBEIRO DE SOUZA (RIO DE JANEIRO – RJ):



Pela lei dos senos, temos:

I) $\dfrac{senx}{b} = \dfrac{sen2x}{a}$

$\dfrac{senx}{b} = \dfrac{2senx \cdot \cos x}{a}$, obviamente $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$a = 2b \cdot \cos x \quad (1)$

II) Usando lei dos cossenos: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos x$

$2ac \cdot \cos x = a^2 + c^2 - b^2$

$\cos x = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad (2)$

III) Substituindo (2) em (1): $a = 2b \cdot \left(\dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \right)$

$\Leftrightarrow a^2c = a^2b + bc^2 - b^3$

$\Leftrightarrow a^2(c - b) = b(c^2 - b^2)$

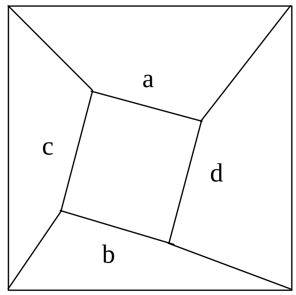
$\Leftrightarrow a^2(c - b) = b(c - b)(c + b).$

Se $b \neq c$, temos $a^2 = b(b + c)$.

Se b=c, temos b=c=x, donde $4x = \pi \Rightarrow x = \pi / 4$ e

$a = b\sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 2b^2 = b(b + c).$

61) Na figura abaixo um quadrado *EFGH* foi colocado no interior do quadrado *ABCD*, determinando 4 quadriláteros. Se a, b, c, e d denotam os medidas das áreas dos quadriláteros, mostre que $a + b = c + d$.



SOLUÇÃO DE MÁRCIO ASSAD COHEN (RIO DE JANEIRO – RJ):

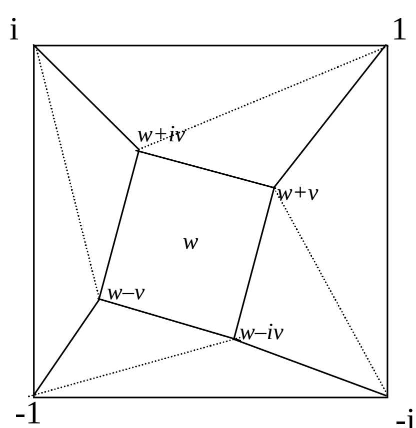
Lema: A área de um triângulo cujos vértices no plano complexo são z_1, z_2, z_3 (sentido horário) é dada por $S = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\{(z_2 - z_1)\overline{(z_3 - z_1)}\}$.

Prova: Se $z_2 - z_1 = a \cdot cis\theta_1;\ z_3 - z_1 = b \cdot cis\theta_2$:

$$\frac{1}{2}\operatorname{Im}\{(z_2 - z_1)\overline{(z_3 - z_1)}\} = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\{a \cdot cis\,\theta_1 b \cdot cis\,(-\theta_2)\} =$$

$$\frac{ab}{2}\operatorname{Im}\{cis\,(\theta_1 - \theta_2)\} = \frac{absen\ \theta}{2} = S$$

Problema:



Coloque os eixos de modo que os vértices do quadrado maior sejam 1, i, –1, – i (basta adotar uma unidade de medida tal que 2u.m = diagonal).
Seja w o centro do quadrado menor, e $w + v$ um de seus vértices. Então, os outros vértices do quadrado menor serão $w + iv$, $w - i$, $w - iv$ (pois rodar 90^o é multiplicar por i).
Dividindo cada quadrilátero em triângulos como mostra a figura temos:

$$a = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left\{(w + iv - 1)\overline{(i-1)} + (1 - w - iv)\overline{v(1-i)}\right\}$$

$$c = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left\{(w - iv - 1)\overline{(-i+1)} + (-1 - w + iv)\overline{v(i-1)}\right\}$$

$$a + c = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left\{(1+i)\left[(-w - iv + 1) + \bar{v}(1 - w - iv) + (w - iv + 1) + \bar{v}(1 + w - iv)\right]\right\}$$

Note que w é cancelado e $a + c$ independe do centro do quadrado menor:

$$a + c = \operatorname{Im}\left\{(1+i)(1-iv)(1+\bar{v})\right\}$$

Da mesma forma, obtemos:

$$b + d = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left\{(w+v+i)\overline{(1+i)} + (-i - w - v)\overline{v(-i-1)} + (w - v - i)\overline{(-1-i)} + (1 - w + v)\overline{v(1+i)}\right\} =$$

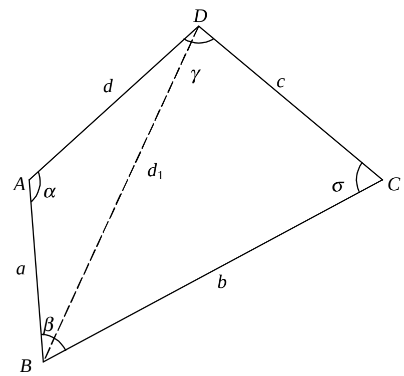
$$\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left\{(1-i)\left[(w+v+i) + (i + w + v)\bar{v} + (-w + v + i) + (-w + v + i)\bar{v}\right]\right\} =$$

$$\operatorname{Im}\left\{(1-i)(i+v)(\bar{v}+1)\right\}$$

Fatorando, obtemos

$$b + d = \operatorname{Im}\left\{-i(i+1)(i+v)(\bar{v}+1)\right\} = \operatorname{Im}\left\{(i+1)(1-iv)(\bar{v}+1)\right\} = a + c\,.$$

62) Se $ABCD$ é um quadrilátero convexo tal que os lados $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ e $\overline{DA}$ medem respectivamente a, b, c e d e que α, β, σ e γ são as medidas dos seus ângulos internos, mostre que a medida da área desse quadrilátero, denotada por ($ABCD$), é dada por:



$(ABCD) = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\delta}$ onde:

$p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$

$\delta = \dfrac{\alpha+\sigma}{2}$ (a fórmula também vale se fizermos $\delta = \dfrac{\beta+\gamma}{2}$) .

SOLUÇÃO DE WALLACE RODRIGUES DE HOLANDA MIRANDA (TERESINA – PI):

Antes da resolução do problema precisa-se ressaltar algumas noções fundamentais:

1) $\cos(\alpha+\sigma) = \cos\alpha\cdot\cos\sigma - sen\alpha\cdot sen\sigma$

$\cos(2\delta) = \cos\alpha\cdot\cos\sigma - sen\alpha\cdot sen\sigma$

$\cos^2\delta - sen^2\delta = \cos\alpha\cdot\cos\sigma - sen\alpha\cdot sen\sigma$

$\cos^2\delta - (1-\cos^2\delta) = \cos\alpha\cdot\cos\sigma - sen\alpha\cdot sen\sigma$

$sen\alpha\cdot sen\sigma = \cos\alpha\cdot\cos\sigma - 2\cos^2\delta + 1$

2) $(ABD) = \dfrac{1}{2}\cdot a\cdot d\cdot sen\alpha$ $\qquad (BCD) = \dfrac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot sen\sigma$

3) Pela lei dos cossenos nos triângulos *ABD* e *BCD*:

$$a^2 + d^2 - 2ad\cdot\cos\alpha = d_1^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\sigma$$

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2ad\cdot\cos\alpha - 2bc\cdot\cos\sigma$$

Agora vamos à resolução do problema:

(*ABCD*) = (*ABD*) + (*BCD*)

$$(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot d \cdot sen\alpha + \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot sen\sigma$$

$$2(ABCD) = a \cdot d \cdot sen\alpha + b \cdot c \cdot sen\sigma$$

$$(2(ABCD))^2 = (a \cdot d \cdot sen\alpha + b \cdot c \cdot sen\sigma)^2$$

$$4(ABCD)^2 = a^2 \cdot d^2 \cdot sen^2\alpha + 2abcd \cdot sen\alpha \cdot sen\sigma + b^2 \cdot c^2 \cdot sen^2\sigma$$

Substituindo (sen^2) por $(1 - \cos^2)$ e $(sen\alpha \cdot sen\sigma)$ por $(\cos\alpha \cdot \cos\sigma - 2\cos^2\delta + 1)$ de 1) fica:

$$4(ABCD)^2 = a^2 \cdot d^2 \cdot (1 - \cos^2\alpha) + 2abcd \cdot (1 + \cos\alpha \cdot \cos\sigma - 2\cos^2\delta) +$$
$$+ b^2 \cdot c^2 \cdot (1 - \cos^2\sigma)$$

$$4(ABCD)^2 = a^2 \cdot d^2 \cdot (1 - \cos^2\alpha) + abcd \cdot (2 + 2\cos\alpha \cdot \cos\sigma) +$$
$$+ b^2 \cdot c^2 (1 - \cos^2\sigma) - 4abcd \cdot \cos^2\delta$$

$$4(ABCD)^2 = a^2 \cdot d^2 \cdot (1 - \cos^2\alpha) + abcd\,(1 - \cos\alpha - \cos\sigma + \cos\alpha \cdot \cos\sigma + 1 +$$
$$+ \cos\alpha + \cos\sigma + \cos\alpha \cdot \cos\sigma) + b^2c^2(1 - \cos^2\sigma) - 4abcd \cdot \cos^2\delta$$

$$4(ABCD)^2 = a^2 \cdot d^2 (1 - \cos^2\alpha) + abcd[(1 - \cos\alpha)(1 - \cos\sigma) + (1 + \cos\alpha)(1 + \cos\sigma)] +$$
$$b^2c^2(1 - \cos^2\sigma) - 4abcd \cdot \cos^2\delta$$

$$4(ABCD)^2 = ad(1 + \cos\alpha)ad(1 - \cos\alpha) + ad(1 - \cos\alpha)bc(1 - \cos\sigma) +$$
$$+ ad(1 + \cos\alpha)bc(1 + \cos\sigma) + bc(1 + \cos\sigma)bc(1 - \cos\sigma) - 4abcd \cdot \cos^2\delta$$

$$4(ABCD)^2 = ad(1 + \cos\alpha)[ad(1 - \cos\alpha) + bc(1 + \cos\sigma)] + bc(1 - \cos\sigma)[ad(1 - \cos\alpha) +$$
$$+ bc(1 + \cos\sigma)] - 4abcd \cdot \cos^2\delta$$

$$4(ABCD)^2 = [ad(1 - \cos\alpha) + bc(1 + \cos\sigma)][ad(1 + \cos\alpha) + bc(1 - \cos\sigma)] - 4abcd \cdot \cos^2\delta$$

$$16(ABCD)^2 = 2(ad - ad \cdot \cos\alpha + bc + bc \cdot \cos\sigma) \cdot 2 \cdot (ad + ad \cdot \cos\alpha + bc - bc \cdot \cos\sigma)$$
$$- 16abcd \cdot \cos^2\delta$$

$$16(ABCD)^2 = -(2ad \cdot \cos\alpha - 2bc \cdot \cos\sigma - 2ad - 2bc)(2ad \cdot \cos\alpha - 2bc \cdot \cos\sigma +$$
$$+ 2ad + 2bc) - 16abcd \cdot \cos^2\delta$$

Substituindo $(2ad \cdot \cos\alpha - 2bc \cdot \cos\sigma)$ por $(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)$ de 3) fica:

$$16(ABCD)^2 = -(a^2 - 2ad + d^2 - b^2 - 2bc - c^2)(a^2 + 2ad + d^2 - b^2 + 2bc - c^2)$$
$$- 16abcd \cdot \cos^2\delta$$

$$16(ABCD)^2 = -[(a - d)^2 - (b + c)^2][(a + d) - (b - c)^2] - 16abcd \cdot \cos^2\delta$$

$$16(ABCD)^2 = -(a-d+b+c)(a-d-b-c)(a+d-b+c)(a+d+b-c) - 16abcd \cdot \cos^2 \delta$$
$$16(ABCD)^2 = (a+b+c-d)(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d) - 16abcd \cdot \cos^2 \delta$$
$$16(ABCD)^2 = (-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d) - 16abcd \cdot \cos^2 \delta$$
$$(ABCD)^2 = \frac{(-a+b+c+d)}{2} \cdot \frac{(a-b+c+d)}{2} \cdot \frac{(a+b-c+d)}{2} \cdot \frac{(a+b+c-d)}{2} - abcd \cdot \cos^2 \delta$$
$$(ABCD)^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cdot \cos^2 \delta$$
$$(ABCD) = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cdot \cos^2 \delta}\ .$$

Agradecemos também o envio das soluções e a colaboração de:

Bruno de Souza Ramos	**Realengo – RJ**
Everaldo de Melo Bonotto	**Guararapes – SP**
Fernando Carvalho Ramos	**Santa María – RS**
Geraldo Perlino	**Itapecerica da Serra – SP**
Jorge Silva Junior	**Cachoeiro de Itapemerim – ES**
Marcelo Ribeiro	**Rio de Janeiro – RJ**
Marcelo Rufino de Oliveira	**Belém – PA**
Marcílio Miranda de Carvalho	**Teresina – PI**
Mateus Queiroz Guilherme de Oliveira	**Fortaleza – CE**
Oswaldo Melo Sponquiado	**Olímpia – SP**

Seguimos aguardando o envio de soluções do problema proposto Nº. 57 publicado na revista Eureka! Nº. 11.

PROBLEMAS PROPOSTOS

✉ *Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e sugestões de novos problemas para os próximos números.*

63) Prove que existem infinitos números naturais múltiplos de 5^{1000} sem nenhum 0 na representação decimal.

64) Iniciando de um certo inteiro positivo, é permitido fazer apenas uma operação: o dígito das unidades é separado e multiplicado por 4, e então este valor é somado ao restante do número. Por exemplo, o número 1997 é transformado para 7.4 + 199 = 227. A operação é feita repetidamente. Prove que se a seqüência de números obtida contém 1001, então nenhum dos números na seqüência pode ser um número primo.

65) Determine todos os inteiros N tais que, em base 10, os dígitos de $9N$ são os mesmos dígitos de N na ordem inversa, e N possui no máximo um dígito igual a 0.

66) Prove que, dados um inteiro $n \geq 1$ e um conjunto $A \subset \mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z}$ com n elementos existe $B \subset \mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z}$ com n elementos tal que $A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\} \subset \mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z}$ tem mais de $n^2/2$ elementos.

67) Seja *ABCD* um quadrilátero tal que os círculos circunscritos aos triângulos *ABC* e *BCD* são ortogonais.Prove que os círculos circunscritos aos triângulos *BCD* e *DAB* também são ortogonais.

Problema 63 proposto por Wallace Rodrigues de Holanda Miranda (Teresina – PI); Problemas 64 e 65 propostos por Marcelo Rufino de Oliveira (Belém – PA); Problema 67 proposto por Luciano Castro (Rio de Janeiro – RJ).

AGENDA OLÍMPICA

XXIV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

NÍVEIS 1, 2 e 3
Primeira Fase – Sábado, 8 de junho de 2002
Segunda Fase – Sábado, 14 de setembro de 2002
Terceira Fase – Sábado, 19 de outubro de 2002 (níveis 1, 2 e 3)
Domingo, 20 de outubro de 2002 (níveis 2 e 3 - segundo dia de prova).

NÍVEL UNIVERSITÁRIO
Primeira Fase – Sábado, 14 de setembro de 2002
Segunda Fase – Sábado, 19 e Domingo, 20 de outubro de 2002

♦

VIII OLIMPÍADA DE MAIO
maio de 2002

♦

XIII OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL
junho de 2002
Fortaleza – CE, Brasil

♦

XLIII OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA
julho de 2002
Glasgow, Reino Unido

♦

XVII OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA
setembro de 2002
El Salvador

♦

V OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
outubro de 2002

♦ ♦ ♦

COORDENADORES REGIONAIS

Amarísio da Silva Araújo	(UFV)	Viçosa – MG
Alberto Hassen Raad	(UFJF)	Juiz de Fora – MG
Angela Camargo	(Centro de Educação de Adultos – CEA)	Blumenau – SC
Benedito Tadeu Vasconcelos Freire	(UFRN)	Natal – RN
Carlos Frederico Borges Palmeira	(PUC-Rio)	Rio de Janeiro – RJ
Claudio Arconcher	(Colégio Leonardo da Vinci)	Jundiaí – SP
Claus Haetinger	(UNIVATES)	Lajeado – RS
Cleonor Crescêncio das Neves	(UTAM)	Manaus – AM
Élio Mega	(Colégio Etapa)	São Paulo – SP
Rosângela Souza	(Colégio Singular)	Santo André – SP
Florêncio Ferreira Guimarães Filho	(UFES)	Vitória – ES
Gisele de Araújo Prateado Gusmão	(UFGO)	Goiânia – GO
Ivanilde Fernandes Saad	(UC. Dom Bosco)	Campo Grande– MS
Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia	(UFPB)	João Pessoa – PB
João Benício de Melo Neto	(UFPI)	Teresina – PI
João Francisco Melo Libonati	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Irene Nakaoka	(UEM)	Maringá – PR
José Carlos Pinto Leivas	(UFRG)	Rio Grande – RS
José Cloves Saraiva	(UFMA)	São Luis – MA
José Gaspar Ruas Filho	(ICMC-USP)	São Carlos – SP
José Luiz Rosas Pinho	(UFSC)	Florianópolis – SC
José Vieira Alves	(UFPB)	Campina Grande – PB
Marcelo Rufino de Oliveira	(Sistema Titular de Ensino)	Belém – PA
Licio Hernandes Bezerra	(UFSC)	Florianópolis – SC
Luzinalva Miranda de Amorim	(UFBA)	Salvador – BA
Marcondes Cavalcante França	(UFC)	Fortaleza – CE
Pablo Rodrigo Ganassim	(Liceu Terras do Engenho)	Piracicaba – SP
Paulo Henrique Cruz Neiva de Lima Jr.	(Escola Técnica Everardo Passos)	SJ dos Campos – SP
Reinaldo Gen Ichiro Arakaki	(INPE)	SJ dos Campos – SP
Ricardo Amorim	(Centro Educacional Logos)	Nova Iguaçu – RJ
Roberto Vizeu Barros	(Colégio Acae)	Volta Redonda – RJ
Sérgio Cláudio Ramos	(IM-UFRGS)	Porto Alegre – RS
Silvio de Barros Melo	(UFPE)	Recife – PE
Tadeu Ferreira Gomes	(UEBA)	Juazeiro – BA
Tomás Menéndez Rodrigues	(U. Federal de Rondônia)	Porto Velho – RO
Valdenberg Araújo da Silva	(U. Federal de Sergipe)	São Cristovão – SE
Wagner Pereira Lopes	(Escola Técnica Federal de Goiás)	Jataí – GO