CONTEÚDO

AOS LEITORES

É com grande satisfação que informamos a excelente participação do Brasil na IMO. Pela primeira vez, os seis alunos da equipe ganharam medalhas, sendo 4 de prata e 2 de bronze. Na soma dos pontos, o Brasil ficou à frente de mais de 80% das nações representadas, incluindo muitos países de grande tradição olímpica. Veja a prova nesta edição e mais detalhes sobre a IMO no site

http://imo.wolfram.com/

Isso só nos estimula ainda mais a fazer uma Eureka cada vez melhor e que atinja um público cada vez maior. Gostaríamos de agradecer mais uma vez o envio de grande número de problemas e soluções pelos leitores, o que é importante para a Eureka!, e nos anima a continuar o trabalho de proporcionar diversão e material de treinamento à nossa comunidade olímpica. Gostaríamos ainda de dizer que continuamos contando com o envio de artigos pelos leitores. Artigos para iniciantes são prioritários. São também prioritários artigos sobre temas olímpicos que até hoje não apareceram na Eureka!, como Contagem, Grafos (nível avançado), Funções (nível intermediário), Trigonometria aplicada à Geometria (pode ser uma compilação de problemas). Traduções (devidamente autorizadas, é claro) de artigos de boas revistas (com o mesmo perfil, é claro) serão muito bem recebidas.

Finalmente agradecemos a valiosa ajuda dos professores Eduardo Tengan e Carlos Shine e dos estudantes Alex Cardoso Lopes, Guilherme I. C. Fujiwara e Rodrigo K. Yamashita na revisão da revista.

Os editores.

VII OLIMPÍADA DE MAIO
PRIMEIRO NÍVEL

PROBLEMA 1

Sara escreveu no quadro negro um número inteiro de menos de trinta algarismos e que termina em 2.
Célia apaga o 2 do fim e escreve-o no início.
O número que fica é igual ao dobro do número que tinha escrito Sara.
Qual é o número que Sara escreveu?

PROBLEMA 2

Vamos pegar um retângulo *ABCD* de papel; o lado *AB* mede 5 cm e o lado *BC* mede 9 cm.
Fazemos três dobras:

1- Levamos o lado *AB* sobre o lado *BC* e chamamos de *P* o ponto do lado *BC* que coincide com *A*. Forma-se então um trapézio retângulo *BCDQ*.
2- Dobramos de forma que *B* e *Q* coincidam. Forma-se um polígono de 5 lados *RPCDQ*.
3- Dobramos de novo fazendo coincidir *D* com *C* e *Q* com *P*. Forma-se um novo trapézio retângulo *RPCS*.

Após fazer estas dobras, fazemos um corte perpendicular a *SC* pelo seu ponto médio *T*, obtendo o trapézio retângulo *RUTS*.
Calcule a área da figura que aparece ao desdobrarmos o último trapézio *RUTS*.

PROBLEMA 3

Temos três caixas, uma azul, uma branca e uma vermelha, e 8 bolinhas. Cada bolinha tem um número de 1 a 8, sem repetições. Distribuímos as 8 bolinhas nas caixas, de maneira que há pelo menos duas bolinhas em cada caixa. Logo, em cada caixa, somam-se todos os números escritos nas bolinhas contidas na caixa. Os três resultados denominam-se soma azul, soma branca e soma vermelha, segundo a cor da caixa correspondente. Encontre todas as possíveis distribuições das bolinhas tais que a soma vermelha seja igual ao dobro da soma azul, e a soma vermelha menos a soma branca seja igual à soma branca menos a soma azul.

PROBLEMA 4

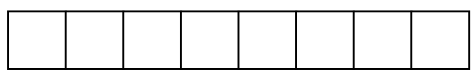
Utilizando exclusivamente números primos forma-se um conjunto com as seguintes condições:

1- Qualquer número primo de um algarismo pode estar no conjunto.
2- Para que um número primo de mais de um algarismo esteja no conjunto, devem estar no conjunto o número que se obtém ao suprimir-lhe só o

primeiro algarismo e também o número que se obtém ao suprimir-lhe só o último algarismo.

Determine, entre conjuntos que cumpram estas condições, aquele que tem maior quantidade de elementos. Justifique por que não pode haver um com mais elementos.
Lembre-se de que o número 1 não é primo.

PROBLEMA 5
Num tabuleiro de 8 casas, como na figura abaixo, há inicialmente uma ficha em cada casa.
Uma jogada consiste em escolher duas fichas e mover uma delas uma casa à direita e a outra, uma casa à esquerda.
Se depois de 4 jogadas as 8 fichas estão distribuídas somente em 2 casas, determine quais podem ser estas casas e quantas fichas há em cada uma delas.



SEGUNDO NÍVEL

PROBLEMA 1
Na minha calculadora, uma das teclas de 1 a 9 está com defeito: ao pressioná-la aparece na tela um dígito entre 1 e 9 que não é o correspondente.
Quando tentei escrever o número 987654321, apareceu na tela um número divisível por 11 e que deixa resto 3 ao ser dividido por 9.
Qual é a tecla defeituosa? Qual é o número que apareceu na tela?

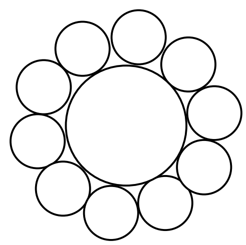
PROBLEMA 2
No trapézio $ABCD$, o lado DA é perpendicular às bases AB e CD. A base AB mede 45, a base CD mede 20 e o lado BC mede 65. Seja P no lado BC tal que BP mede 45 e seja M o ponto médio de DA.
Calcule a medida do segmento PM.

PROBLEMA 3
Num tabuleiro de 3 fileiras e 555 colunas, pintam-se de vermelho 3 casas, uma em cada uma das 3 fileiras.
Se escrevemos nas casas, ordenadamente por fileiras, da esquerda para a direita, os números de 1 a 1665 (na primeira fileira de 1 a 555, na segunda de 556 a 1110

e na terceira de 1111 a 1665) há 3 números que ficam escritos nas casas vermelhas.
Escrevemos nas casas, ordenadamente por colunas, de cima para baixo, os números de 1 a 1665 (na primeira coluna de 1 a 3, na segunda de 4 a 6, na terceira de 7 a 9,…, e na última de 1663 a 1665) há 3 números que ficam escritos nas casas vermelhas.
Chamamos números vermelhos aos que em alguma das duas distribuições ficam escritos nas casas vermelhas.
Diga quais são as 3 casas que devemos pintar de vermelho para que existam só 3 números vermelhos.
Mostre todas as possibilidades.

PROBLEMA 4

Em volta de um círculo situam-se dez moedas de 1 cm de raio como indicado na figura abaixo. Cada moeda é tangente ao círculo e às duas moedas vizinhas.
Demonstre que a soma das áreas das dez moedas é o dobro da área do círculo.



PROBLEMA 5

No quadro negro estão escritos os números naturais desde 1 até 2001, inclusive. Temos que apagar alguns números de modo que entre os que ficam sem apagar seja impossível escolher dois números distintos tais que o resultado de sua multiplicação seja igual a algum dos números que ficam sem apagar.
Qual é a quantidade mínima de números que devem ser apagados? Para esta quantidade, apresente um exemplo que mostre quais números são apagados. Justifique por que não obtemos a propriedade desejada se apagarmos menos números.

VII OLIMPÍADA DE MAIO

Resultado Brasileiro

PRIMEIRO NÍVEL

Ricardo de Rezende Souza	Medalha de Ouro	Goiânia - GO
Rodrigo Lúcio de Castro	Medalha de Prata	Goiânia - GO
Thiago de Paula Garcia Caixeta	Medalha de Prata	Colatina - ES
Rudá Moreira de Lima e Silva	Medalha de Bronze	Unaí - MG
Telmo Luis Correia Júnior	Medalha de Bronze	Santo André - SP
Raphael Rodrigues Mata	Medalha de Bronze	Salvador - BA
Thomás Hiyoshi Sasaki Hoshina	Medalha de Bronze	Rio de Janeiro - RJ
Rodolfo Santos Costa Maçaranduba	Menção Honrosa	Goiânia - GO
Lais Uyeda Aivazoglov	Menção Honrosa	São José dos Campos - SP
Felipe Gonçalves Assis	Menção Honrosa	Campina Grande - PB

SEGUNDO NÍVEL

Alex Corrêa Abreu	Medalha de Ouro	Niterói - RJ
Larissa Cavalcante Q. de Lima	Medalha de Prata	Fortaleza - CE
Guilherme Rodrigues Salermo	Medalha de Prata	Goiânia - GO
Otacílio Torres Vilas Boas	Medalha de Bronze	Salvador - BA
Israel Franklim Dourado	Medalha de Bronze	Fortaleza - CE
Luis Eduardo de Godoi	Medalha de Bronze	São José dos Campos - SP
Fábio Dias Moreira	Medalha de Bronze	Rio de Janeiro - RJ
Andréia Lúcio de Castro	Menção Honrosa	Goiânia - GO
Henry Wei Cheng Hsu	Menção Honrosa	São Paulo - SP
Dafne de Albuquerque Simão	Menção Honrosa	Fortaleza - CE

XII OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL

Enunciados e Resultado Brasileiro

A XII Olimpíada de Matemática do Cone Sul foi realizada na cidade de Santiago do Chile no período de 1 a 6 de julho de 2001. Dela participaram alunos de até 15 anos dos seguintes países: Argentina, Brasil, Chile, Equador, Peru e Uruguai.

A equipe brasileira foi selecionada através de provas realizadas em março e maio deste ano e foi liderada pelos professores Élio Mega e Carlos Yuzo Shine de São Paulo - SP.

O Resultado da Equipe Brasileira

BRA 1	Einstein do Nascimento Jr.	----------
BRA 2	Guilherme Fujiwara	PRATA
BRA 3	Larissa Cavalcante Queiroz de Lima	PRATA
BRA 4	Rafael Daigo Hirama	OURO

PRIMEIRO DIA

DURAÇÃO: 3 horas e meia.

PROBLEMA 1

Em cada casa de um tabuleiro quadriculado 2000×2000 deve-se escrever um dos três números: –1, 0 ou 1. Se, em seguida, somam-se os números escritos em cada linha e cada coluna, obtêm-se 4000 resultados. Mostre que é possível preencher o tabuleiro de modo que os 4000 resultados assim obtidos sejam todos distintos.

PROBLEMA 2

Tem-se uma sucessão a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... de números inteiros positivos, com as seguintes propriedades:

i) Todo número inteiro positivo aparece uma ou mais vezes na sucessão.

ii) $a_1 = 1$

iii) $a_{3n+1} = 2a_n + 1$

iv) $a_{n+1} \geq a_n$

v) $a_{2001} = 200$

Calcule o valor de a_{1000}.

Obs. O enunciado deste problema está incorreto, pois na verdade não existe tal sequência (tente demonstrar isto!). Entretanto, se suprimirmos a condição i) é possível resolver o problema (tente fazer isto também!).

PROBLEMA 3

Três triângulos acutângulos estão inscritos em uma mesma circunferência, de modo que seus vértices são nove pontos distintos. Demonstre que se pode escolher um vértice de cada triângulo de maneira que os três pontos escolhidos determinem um triângulo cujos ângulos sejam menores que ou iguais a 90^o.

SEGUNDO DIA

DURAÇÃO: 3 horas e meia.

PROBLEMA 4

Um polígono de área S está contido no interior de um quadrado de lado a. Demonstre que há pelo menos dois pontos do polígono que estão separados por uma distância maior que ou igual a $\frac{S}{a}$.

PROBLEMA 5

Ache todos os números inteiros positivos m tais que $m + 2001 \cdot S(m) = 2m$ onde $S(m)$ representa a soma dos algarismos de m.

PROBLEMA 6

Seja g uma função definida para todo inteiro positivo n, que satisfaz

i) $g(1) = 1$

ii) $g(n + 1) = g(n) + 1$ ou $g(n + 1) = g(n) - 1$ para todo $n \geq 1$

iii) $g(3n) = g(n)$ para todo $n \geq 1$

iv) $g(k) = 2001$ para algum inteiro positivo k.

Ache o menor valor possível de k entre todas as funções g que cumprem as condições anteriores e demonstre que é o menor.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1

Antes de procurarmos uma maneira de preencher um tabuleiro 2000×2000, vamos preencher um tabuleiro menor, digamos, 2×2.
Uma maneira de preenchê-lo é:

1	– 1	→ 1 soma: 0
1	0	→ 1 soma: 1
↓ soma: 2	↓ soma: – 1	

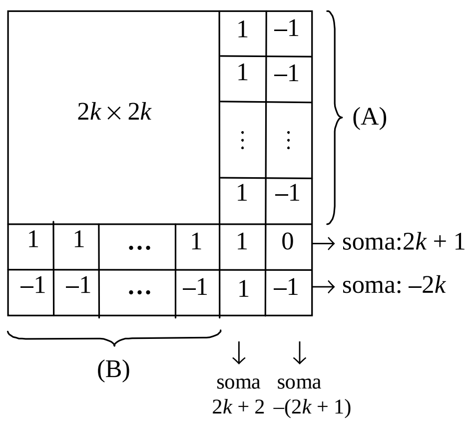
Vamos tentar preencher agora um tabuleiro 4×4. Para isso, aproveitamos o tabuleiro 2×2. Para que as somas obtidos continuem iguais, colocamos 1's e –1's desta forma:

1	–1	1	–1	→ soma: 0
1	0	1	– 1	→ soma: 1
1	1			
–1	–1			
↓ soma: 2	↓ soma: – 1			

Para completar o trabalho, basta preencher o subtabuleiro 2×2 do canto inferior direito:

1	–1	1	–1	→ soma: 0
1	0	1	– 1	→ soma: 1
1	1	1	0	→ soma: 3
–1	–1	1	– 1	→ soma: –2
↓ soma: 2	↓ soma: – 1	↓ soma: 4	↓ soma: – 3	

Observe que podemos preencher um tabuleiro $(2k + 2) \times (2k + 2)$ a partir de um tabuleiro $2k \times 2k$. Digamos que no tabuleiro $2k \times 2k$ as somas sejam iguais a $-(2k - 1), -(2k - 2), \ldots 2k$. Para preencher um tabuleiro $(2k + 2) \times (2k + 2)$, colocamos o tabuleiro $2k \times 2k$ no canto superior esquerdo, preenchemos as $2k$ primerias casas da $2k + 1$-ésima linha e da $2k + 1$-ésima coluna con 1's e as $2k$ primeiras casas da $2k$ +-ésima linha e da $2k + 2$-ésima coluna com –1's. No canto interior direito preenchemos da mesma forma que anteriormente:



Nas linhas e colunas em (A) e (B) temos as somas de $-(2k - 1)$ a $2k$

Assim, temos todas as somas de $(2k + 1)$ a $2k + 2$. Logo é possível preencher um tabuleiro $2n \times 2n$ para todo n natural não nulo; em particular, o tabuleiro 2000×2000.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2

O enunciado do problema está incorreto: Vamos mostrar que não existe uma tal sucessão.

Temos que $a_{n+1} = a_n$ ou $a_{n+1} = a_n + 1$ (observe que, se $a_{n+1} \geq a_n + 2$, o número inteiro positivo $a_n + 1$ não apareceria na sucessão).

O número da forma $3n + 1$ mais próximo de 2001 é $2002 = 3 \cdot 667 + 1$.

Além disso, $a_{2002} = a_{2001} = 200$ ou $a_{2002} = a_{2001} + 1 = 201$.

Sendo $a_{2002} = 2a_{667} + 1$, temos que a_{2002} é ímpar, logo $a_{2002} = 201$. Assim, $2a_{667} + 1 = 201 \Leftrightarrow a_{667} = 100$. Mas $667 = 3 \cdot 222 + 1$, e temos $2a_{222} + 1 = 100 \Leftrightarrow a_{222} = \frac{99}{2}$, que não é inteiro. Contradição.

Três alunos da delegação brasileira deram uma solução equivalente à anterior. Alguns alunos argentinos resolveram o problema ignorando a condição (i). Mostremos que é possível calcular a_{2000} sem utilizar a condição (i).

De (iv), indutivamente mostra-se que $a_m \geq a_n$ para $m \geq n$.
Aplicando (iii) temos:

$$a_4 = a_{3\cdot1+1} = 2a_1 + 1 = 2\cdot1 + 1 = 3$$
$$a_{13} = a_{3\cdot4+1} = 2a_3 + 1 = 2\cdot3 + 1 = 7$$
$$a_{40} = a_{3\cdot13+1} = 2a_{13} + 1 = 2\cdot7 + 1 = 15$$
$$a_{121} = a_{3\cdot40+1} = 2a_{40} + 1 = 2\cdot15 + 1 = 31$$
$$a_{364} = a_{3\cdot121+1} = 2a_{121} + 1 = 2\cdot31 + 1 = 63$$
$$a_{1093} = a_{3\cdot364+1} = 2a_{364} + 1 = 2\cdot63 + 1 = 127$$

Logo $a_{1000} \leq a_{1093} \Leftrightarrow a_{1000} \leq 127$ (I)

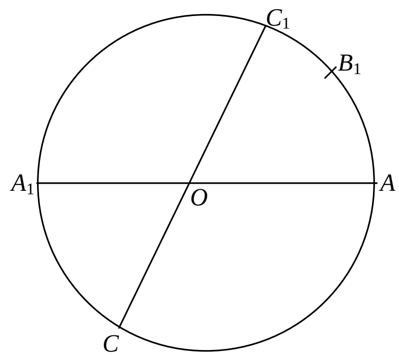
Agora estudemos a_3. Seja $a_3 = k$. Temos:

$$a_{10} = a_{3\cdot3+1} = 2a_3 + 1 = 2k + 1$$
$$a_{31} = a_{3\cdot10+1} = 2a_{10} + 1 = 2(2k+1) + 1 = 4k + 3$$
$$a_{94} = a_{3\cdot31+1} = 2a_{31} + 1 = 2(4k+3) + 1 = 8k + 7$$
$$a_{203} = a_{3\cdot94+1} = 2a_{94} + 1 = 2(9k+7) + 1 = 16k + 15$$
$$a_{650} = a_{3\cdot283+1} = 2a_{283} + 1 = 2(26k+15) + 1 = 32k + 31$$
$$a_{2561} = a_{3\cdot850+1} = 2a_{850} + 1 = 2(32k+31) + 1 = 64k + 63$$

Como $a_{2551} \geq a_{2001}$, temos $64k + 63 \geq 200 \Leftrightarrow k \geq 3$. Mas $a_3 \leq a_4 \Leftrightarrow k \leq 3$. Logo $k = 3$ e, portanto, $a_{850} = 32\cdot3 + 31 = 127$. Desta forma $a_{1000} \geq a_{850} \Leftrightarrow a_{100} \geq 127$(II).
De (I) e (II), temos $a_{1000} = 127$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3

Sejam $A_1\,A_2\,A_3$, $B_1\,B_2\,B_3$ e $C_1\,C_2\,C_3$ os triângulos. Tome o ponto A_1 e trace o diâmetro $\overline{AA_1}$ que passa por A_1. Podemos supor, sem perda de generalidade, que, dentre os pontos B_1, B_2, B_3, C_1, C_2 e C_3, o mais próximo de A é B_1 e que, dentre os pontos C_1, C_2 e C_3, o mais próximo de A, contido no arco $\overset{\frown}{AA_1}$ que contém B_1 é C_1.



O diâmetro $C_1\,C$ que passa por C_1 divide a circunferência em dois arcos. Se C_1, C_2 e C_3 estivessem no arco que contém A_1, teríamos que o maior ângulo do triângulo $C_1C_2C_3$ seria maior ou igual a $\frac{180°}{2}=90°$, o que não é possível. Logo existe um ponto, C_i no arco que contém B_1. Sendo C_1 o mais próximo de A, e como $\overset{\frown}{AC_1}$ que contém B_1, temos que C_i pertence ao arco $\overset{\frown}{CA}$.

Temos então que o triângulo $A_1B_1C_i$ satisfaz as condições do enunciado, pois $m\left(A_1\overset{\frown}{C_i}B_1\right)=\frac{m_a(\overset{\frown}{B_1A_1})}{2}<\frac{m_a(\overset{\frown}{AA_1})}{2}=90°$, $m(A_1\overset{\frown}{B_1}C_i)=\frac{m(\overset{\frown}{C_iA_1})}{2}\le\frac{m(\overset{\frown}{A_1A})}{2}=90°$

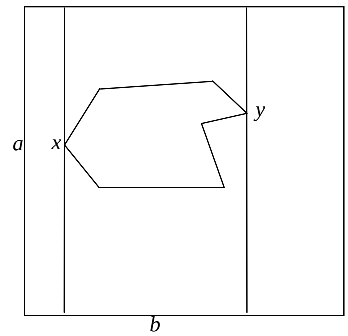
e $m(C_i\overset{\frown}{A_1}B_1)=\frac{m(\overset{\frown}{C_iB_1})}{2}<\frac{m(\overset{\frown}{CC_1})}{2}=90°$. Observe que o triângulo é retângulo se, e somente se, $C_i = A$.

Obs. Como o número total de pontos é 9, que é ímpar, podemos escolher um deles (que será o A_1) cujo antípoda não é nenhum dos outros pontos.

Nossa solução mostra então que é possível obter um triângulo acutângulo $A_iB_jC_k$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4

Suponha, por absurdo, que quaisquer dois pontos do polígono estejam separados por uma distância menor que S/a.



Consideramos o ponto mais à esquerda e mais à direita x e y do nosso polígono. Se b é a diferença de suas abscissas, o polígono está contido num retângulo de lados b e a.
Temos claramente $S \le ab$, donde $b \ge S/a$.
Como claramente $\overline{xy} \ge b$, temos um absurdo e o resultado está provado.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5

Temos $m + 2001\,S(m) = 2m \Leftrightarrow 2001\,S(m) = m$. Assim, m é divisível por 3 e conseqüentemente $S(m)$ também o é. Logo $S(m) = 3k$, para algum k inteiro, e
$m = 2001 \cdot 3k = 9 \cdot 667k$ é divisível por 9. Desta forma, 9 divide $S(m)$.
Seja n o número de algarismos de m. temos que $S(m) \le 9n$ (cada algarismo é menor ou igual a 9), assim $2001S(m) \le 18009n \Leftrightarrow m \le 18009n$.
Mas $m \ge \underbrace{100...0}_{n-1 \text{ zeros}} = 10^n$, logo $10^n \le 18009n$.

Esta última desigualdade só é válida para $n \le 6$. Assim, $S(m) \le 9 \cdot 6$.
Como $S(m)$ é divisível por 9, temos $S(m) = 9, 18, 27, 36, 45$ ou 54. Temos
$S(m) = 9 \Rightarrow m = 9{\cdot}2001 = 18009$, o que não é possível pois $1+8+0+0+9 = 18$.
$S(m) = 18 \Rightarrow n = 18{\cdot}2001 = 36018$.
$S(m) = 27 \Rightarrow m = 27{\cdot}2001 = 54027$, o que não é possível pois $5+ 4+0+2+7 = 18$
$S(m) = 36 \Rightarrow m = 36{\cdot}2001 = 72036$, o que não é possível pois $7+2+0+3+6=18$
$S(m) = 45 \Rightarrow m = 45{\cdot}2001 = 90045$, o que não é possível pois $9+0+0+0+4+5=18$
$S(m) = 54 \Rightarrow m = 54{\cdot}2001 = 108054$, o que não é possível pois $1+0+8+0+5+4=18$

Logo a única solução é $n = 36018$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6

Queremos encontrar o menor valor de k tal que $g(k) = 2001$. Assim, seja a_k o menor valor tal que $g(a_k) = n$. Desta forma, devemos calcular a_{2001}.

Temos $g(1) = 1$, logo $a_1 = 1$. Podemos tomar $g(2) = 2$, logo $a_2 = 2$. Observe que nesse caso $g(3) = g(1) = 1$ e $g(6) = g(2) = 2$. Podemos tomar $g(4) = 2$ e $g(5) = 3$, logo $a_3 = 5$.

Considere $g(k)$ e $g(k + 1)$. Temos $g(3k) = g(k)$ e $g(3k + 3) = g(k + 1)$. Assim, $g(3k + 3) = g(3k) + 1$ ou $g(3k + 3) = g(3k) – 1$. Desta forma, $g(3k +1)$ e $g(3k + 2)$ são no máximo iguais a $g(k) + 1$ ou $g(k + 1) + 1$. Por exemplo, se $g(4) = 2$ e $g(5) = 3$, temos $g(12) = 2$ e $g(15) = 3$. Tomando $g(13) = 3$ e $g(14) = 4$, temos que $a_4 = 14$.

Note que, como $g(k) \le 2$ para $k \le 4$, temos $g(k) \le 3$ para $k \le 12$.

Assim, podemos encontrar a_{n+1} em função de a_n. Temos que $g(a_n – 1) = n – 1$ pois $g(a_n – 1) < n$ (se $g(a_n – 1) > n$, existiria $k < a_n$ tal que $g(k) = n$, o que contradiz a hipótese de a_n ser mínimo. Assim, $g(3(a_n – 1) = n – 1$ e $g(3a_n) = n$. Para $k \le a_n – 1$, temos $g(k) \le n – 1$, logo $g(k) \le n$ para $k \le 3(a_n – 1)$. Podemos tomar $g(3a_n – 2) = n$ e $g(3a_n – 1) = n + 1$. Logo $a_{n+1} = 3a_n – 1$.

Note que temos "quase" uma progressão geométrica. Se somarmos um número x de cada lado da igual dado, temos $a_{n+1} + x = 3a_{n-1} + x = 3\left(a_n + \frac{x-1}{3}\right)$. Se fizermos $x = \frac{x-1}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$, temos $\left(a_{n+1} - \frac{1}{2}\right) = 3\left(a_n - \frac{1}{2}\right)$. Sendo $b_n = a_n - \frac{1}{2}$, temos $b_{n+1} = 3b_n$, ou seja , b_n é uma progressão geométrica de razão 3. Logo $b_n = b_1 \cdot 3^{n-1}$. Como $b_1 = a_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, temos

$b_n = \frac{3^{n-1}}{2} \Leftrightarrow a_n - \frac{1}{2} = \frac{3^{n-1}}{2} \Leftrightarrow a_n = \frac{3^{n-1}+1}{2}$. Para $n = 2001$, temos $a_n = \frac{3^{2000}+1}{2}$.

Obs. A função g que construímos é tal que $g(k)$ é o maior possível, para todo k, e é obtida da seguinte forma: Primeiro observamos que todo natural n pode ser escrito de maneira única como $n = 3^k + \varepsilon_1 3^{k-1} + \varepsilon_2 3^{k-2} + \ldots + \varepsilon_{k-1} \cdot 3 + \varepsilon_k$, com $\varepsilon_j \in \{-1,0,1\}$ para $0 \le j < k$ (onde k é tal que $\frac{3^k+1}{2} \le n < \frac{3^{k+1}+1}{2}$). Temos então $g(n) = 1 + \sum_{j=0}^{k-1} |\varepsilon_i|$,ou seja, $g(n)$ é o número de termos não nulos na representação acima.

XLII OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

Enunciados e Resultado Brasileiro

A XLII Olimpíada Internacional de Matemática foi realizada na cidade de Washington – DC, USA no período de 1 a 14 de julho de 2001 e teve a participação de 85 países.

A equipe brasileira foi selecionada através de provas realizadas em março e maio deste ano e foi liderada pelos professores Nicolau C. Saldanha (Rio de Janeiro – RJ) e Antonio Caminha Muniz Neto (Fortaleza - CE).

O Resultado da Equipe Brasileira

BRA 1	Alex Corrêa Abreu	Prata
BRA 2	Carlos Stein Naves de Brito	Prata
BRA 3	Thiago Barros Rodrigues Costa	Bronze
BRA 4	Humberto Silva Naves	Prata
BRA 5	Davi Máximo Alexandrino Nogueira	Prata
BRA 6	Daniel Pinheiro Sobreira	Bronze

PRIMEIRO DIA

DURAÇÃO: 4 horas e meia.

PROBLEMA 1

Seja ABC um triângulo acutângulo com circuncentro O. Seja PA uma altura do triângulo com P no lado BC.

Considere que $B\hat{C}A \geq A\hat{B}C + 30°$.

Prove que $C\hat{A}B + C\hat{O}P < 90°$.

PROBLEMA 2

Prove que

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

para quaisquer números reais positivos a, b, e c.

PROBLEMA 3

Vinte e uma meninas e vinte e um meninos participaram numa competição matemática.

- Cada participante resolveu no máximo seis problemas.
- Para cada menina e cada menino, existe pelo menos um problema que foi resolvido por ambos.

Prove que existe um problema que foi resolvido por pelo menos três meninas e pelo menos três meninos.

SEGUNDO DIA

DURAÇÃO: 4 horas e meia.

PROBLEMA 4

Seja n um inteiro ímpar maior do que 1 e sejam $k_1, k_2, ..., k_n$ inteiros dados. Para cada uma das n! permutações $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ de $\{1,2,...,n\}$, defina

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i .$$

Prove que existem duas permutações b e c, $b \neq c$, tais que n! é um divisor de $S(b) - S(c)$.

PROBLEMA 5

Num triângulo ABC, seja AP a bissectriz de $B\hat{A}C$ com P no lado BC, e seja BQ a bissectriz de $A\hat{B}C$ com Q no lado CA.

Sabemos que $B\hat{A}C = 60°$ e que $AB + BP = AQ + QB$.

Quais são os possíveis valores dos ângulos do triângulo ABC?

PROBLEMA 6

Sejam a, b, c, d inteiros com $a > b > c > d > 0$. Considere que

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c).$$

Prove que $ab + cd$ é um número primo.

A TORRE DE HANÓI

Carlos Yuzo Shine - Colégio Etapa

Artigo baseado em aula ministrada na IV Semana Olímpica, Salvador - BA

♦ Nível Iniciante.

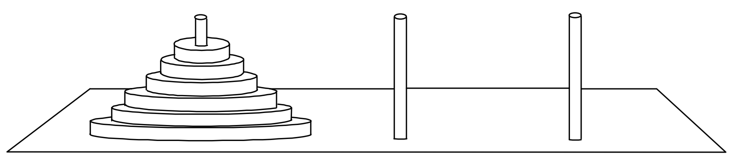
A Torre de Hanói é um dos quebra-cabeças matemáticos mais populares. Ele foi inventado por Edouard Lucas em 1883.

1. Peças

As peças são *n* discos de tamanhos diferentes e todos com um furo em seu centro e três pinos onde são colocados os discos. Certamente podem ser encontrados em qualquer loja de brinquedos.

2. Regras e objetivos do jogo

Inicialmente os discos formam uma torre onde todos são colocados em um dos pinos em ordem decrescente de tamanho.



Devemos transferir toda a torre para um dos outros pinos de modo que cada movimento é feito somente com um disco, nunca havendo um disco maior sobre um disco menor.

3. A Pergunta que será calada

Queremos saber qual é o menor número de movimentos necessários para resolver uma torre de Hanói com *n* discos.

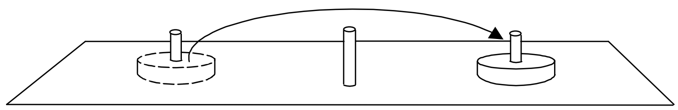
Há uma história (imaginada pelo próprio Edouard Lucas) sobre a torre de Hanói:

No começo dos tempos, Deus criou a Torre de Brahma, que contém três pinos de diamante e colocou no primeiro pino 64 discos de ouro maciço. Deus então chamou seus saserdotes e ordenou-lhes que transferissem todos os discos para o terceiro pino, seguindo as regras acima. Os sacerdotes então obedeceram e começaram o seu trabalho, dia e noite. Quando eles terminarem, a Torre de Brahma irá ruir e o mundo acabará.

4. Estudando o problema

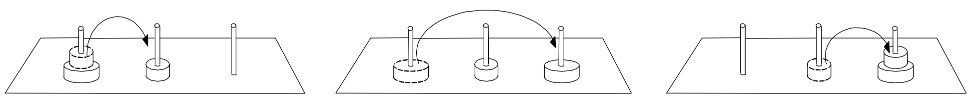
Para resolver um problema (não só este, mas vários outros problemas na matemática) que envolve *n* coisas, ajuda ver o que acontece para valores pequenos de *n*. Vejamos alguns casos.

• $n = 1$. Fazemos



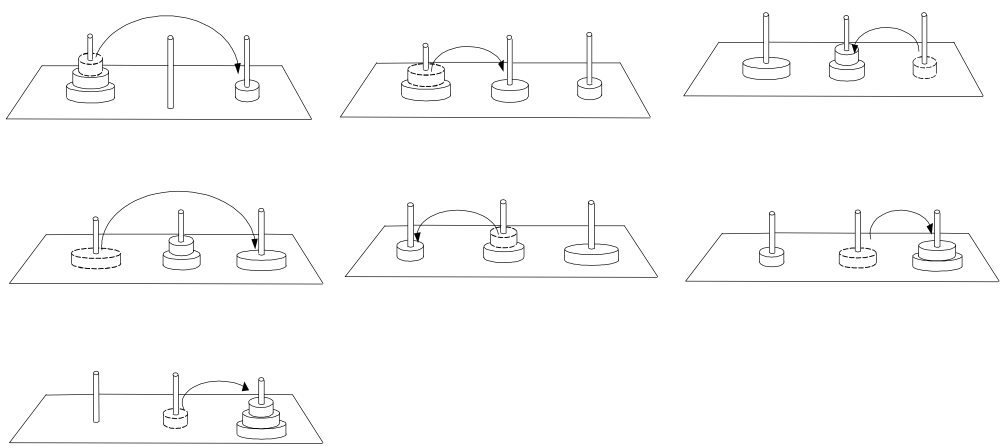
1 movimento foi suficiente.

• $n = 2$. Fazemos



3 movimentos deram.

• $n = 3$. Fazemos

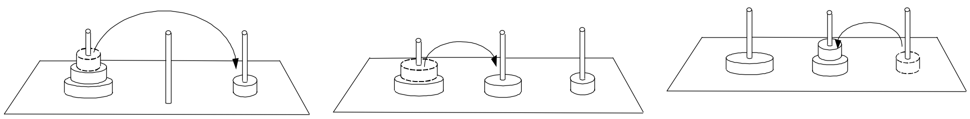


7 movimentos deram.

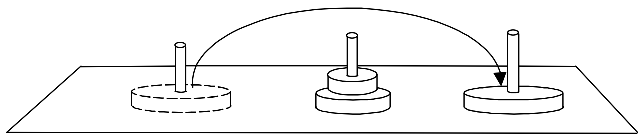
Mas é claro que não podemos fazer só isso. Não podemos ficar observando o que acontece para todos os valores de *n*! Então temos que começar a tirar algumas conclusões.

5. Como resolver o problema com *n* discos?

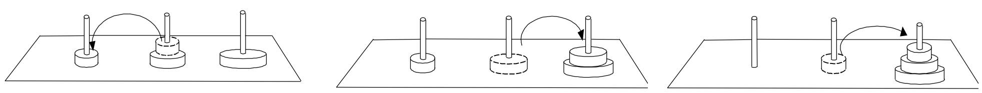
Vamos olhar o caso $n = 3$ mais perto. Observe os três primeiros movimentos:



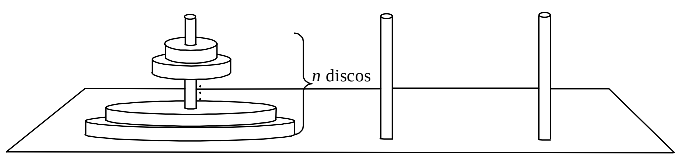
Note que o que fizemos foi mesmo para resolver o caso $n = 2$. O próximo movimento foi



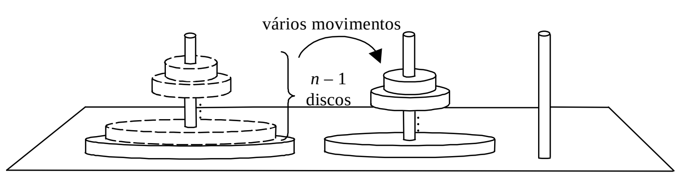
Isto é, passamos o disco maior para o pino sem discos.
Agora, veja os três últimos movimentos:



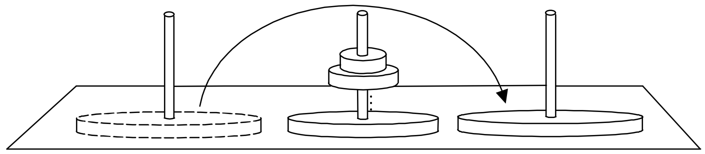
Novamente fizemos o mesmo que foi feito para o caso $n = 2$, só que transferindo agora a "subtorre" para o pino onde estava o disco maior.
Agora, imaginemos uma torre com n discos. Imagine também que sabemos resolver o problema com $n – 1$ discos.



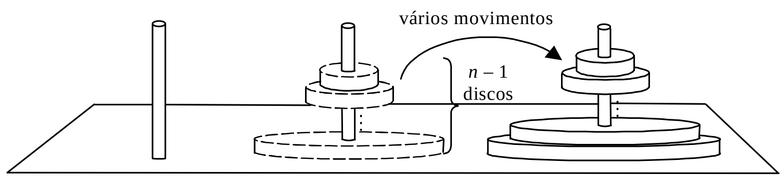
Podemos transferir os $n – 1$ discos de cima para um pino vazio:



Depois passamos o disco maior para o outro pino vazio:



Por fim, colocamos os $n - 1$ discos menores sobre o disco maior:



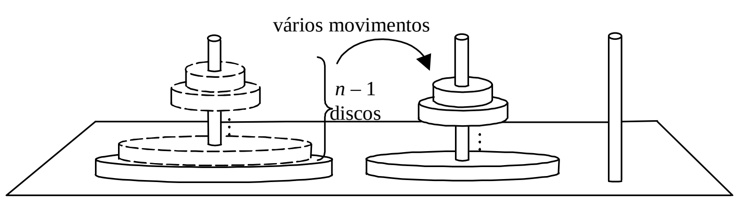
Assim, podemos resolver o problema com n discos. Por exemplo, para resolver o problema com 4 discos, transferimos os $4 - 1 = 3$ discos de cima para um pino vazio (já sabemos fazer isso!), depois passamos o disco maior para o outro pino vazio e por fim colocamos os 3 discos sobre o disco maior. Para resolver o problema com 5 discos, transferimos os $5 - 1 = 4$ discos de cima para um pino vazio (acabamos de aprender a fazer isso!), e assim por diante.

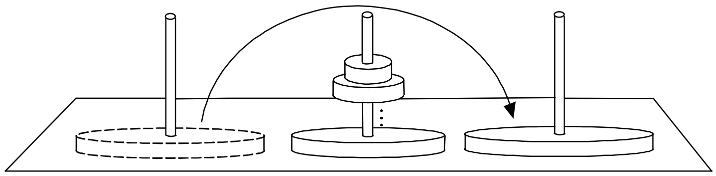
6. Dando nome aos bois

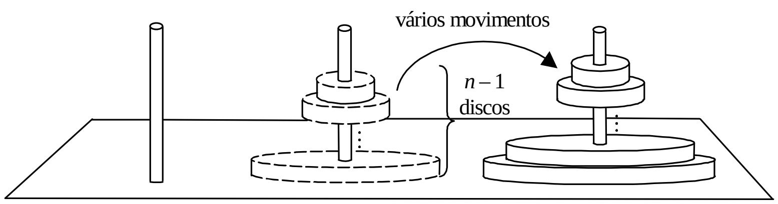
Voltemos à pergunta que será calada: queremos saber o número mínimo de movimentos necessários para resolver uma torre de Hanói com n discos. Vamos dar um nome para este número, digamos T_n. Assim, o número mínimo de movimentos necessários para resolver um problema com 1 disco é T_1, com 2 discos é T_2, com 2001 discos é T_{2001}, com ♥ discos é $T_{♥}$, e, em especial, com $n - 1$ discos é T_{n-1}.

7. Voltando ao problema

Já vimos que podemos resolver o problema da seguinte forma:







Vamos ver quantos movimentos são necessários neste modo de resolver o problema. Precisamos de T_{n-1} movimentos para movimentar os $n-1$ primeiros discos, mais um para movimentar o disco maior e mais T_{n-1} para colocar os $n-1$ discos sobre o disco maior. Assim, precisamos de $T_{n-1} + 1 + T_{n-1} = 2T_{n-1} + 1$ movimentos. Mas não sabemos se este modo de resolver o problema usa o menor número de movimentos; poderia haver outro modo que use menos movimentos. Como o menor número de movimentos é T_n, temos:

$$T_n \le 2T_{n-1} + 1 \qquad \text{(I)}$$

Provemos que na verdade $T_n = 2T_{n-1} + 1$. Para isso, mostraremos que $T_n \ge 2T_{n-1} + 1$ (lembre-se de que se $a \le b$ e $a \ge b$ então $a = b$). Esta aparentemente estranha maneira de se demonstrar que uma coisa é igual a outra é na verdade bem comum em vários problemas. Muitas igualdades podem ser obtidas a partir de desigualdades.

Considere agora, então, o disco maior. Ele vai ter que sair da torre inicial uma hora. Mas para ele sair, é preciso que os outros $n-1$ discos saiam de cima dele! E mais, se quisermos mudá-lo de lugar ele vai ter que ir para um pino vazio, pois ele não pode ficar sobre nenhum dos outros discos por ser o maior (que trabalho esse disco dá!)! Logo precisamos transferir os $n-1$ discos para um pino só, o que requer **no mínimo** T_{n-1} movimentos. Para mudarmos ele de lugar, precisamos, é claro, de mais um movimento. E depois, para colocarmos os $n-1$ discos sobre o disco maior precisamos **no mínimo** mais T_{n-1} movimentos. Assim, para resolver o problema precisamos na verdade de **no mínimo** $T_{n-1} + 1 + T_{n-1} = 2T_{n-1} + 1$ movimentos. Logo

$$T_n \geq 2T_{n-1} + 1 \qquad \text{(II)}$$

Assim, de (I) e (II),

$$T_n = 2T_{n-1} + 1 \qquad (*)$$

Assim, como $T_1 = 1$ (é só ver o caso n = 1), podemos, fazendo n = 2, concluir que $T_2 = 2T_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ (exatamente como achamos antes!!) e, fazendo n = 3, descobriríamos que $T_3 = 2T_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$ (que coisa!). Para n = 4, acharíamos $T_4 = 2T_3 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15.$ Se quiséssemos então T_n para um valor qualquer de n, devemos ter todos os valores de T_k para k = 1, 2, …, n – 1, mas com certeza é possível calcular. Uma seqüência deste tipo (isto é, tal que para calcular um dos valores usamos os valores anteriores) é chamada *recorrente* e a equação que relaciona os termos da seqüência é chamada de *relação de recorrência* (no caso, temos que (*) é uma *equação de recorrência*).[1]

Poderíamos parar por aqui (pois já sabemos como calcular os valores de T_n), mas encontraremos uma fórmula para T_n que não depende de seus valores anteriores (tal fórmula é costumeiramente chamada *fórmula fechada*). Nem sempre se pode (e quando se pode, pode ser bem difícil) fazer isso com uma relação de recorrência, mas com esta em particular pode ser feita.

Observe que temos "quase" $T_n = 2T_{n-1}$. Vamos ver se podemos acertar isso. Se somarmos um número x aos dois lados da equação (*), temos

$$T_n + x = 2T_{n-1} + 1 + x \Leftrightarrow T_n + x = 2 \cdot \left(T_{n-1} + \frac{1+x}{2} \right)$$

Se fizermos $x = (1+x)/2 \Leftrightarrow x = 1$ e sendo $A_n = T_n + 1,$ temos

$$A_n = 2A_{n-1} = 2 \cdot 2A_{n-2} = 2^2 A_{n-2} = 2^2 \cdot 2A_{n-3} = 2^3 A_{n-3} = \ldots = 2^{n-1} A_1$$

Como $A_1 = T_1 + 1 = 1 + 1 = 2,$ temos $A_n = 2^n.$ Assim,

$$A_n = T_n + 1 \Leftrightarrow 2^n = T_n + 1 \Leftrightarrow T_n = 2^n - 1$$

Assim, precisamos de $2^n - 1$ movimentos para resolver o problema da torre de Hanói com n discos. Ou seja, os sacerdotes precisarão de $2^{64} - 1$ movimentos. Mesmo se eles fizessem um movimento por segundo, eles precisariam de mais de 500 bilhões de anos!! Podemos ficar tranqüilos por enquanto.

[1] Para outros comentários e resultados sobre recorrência veja o artigo "Equações de Recorrência", de Héctor Soza Pollman, publicado na revista Eureka! Nº. 9

8. Observação importante

Os alunos mais observadores devem ter notado de antemão que $T_n = 2^n - 1$ bem antes, quando calculamos T_n para valores pequenos de *n*. Ter essa percepção é bom, mas só *perceber* que $T_n = 2^n - 1$ não é suficiente.

É preciso *provar* que esta relação realmente é verdadeira. As aparências podem enganar!! Por exemplo, considere a seqüência

$$a_n = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-2000)}{2001!} + n$$

(lembre-se : 2001! = 1· 2 · 3 · …· 2001)

Temos $a_1 = 1, a_2 = 2, ..., a_{2000} = 2000.$ Isto poderia nos levar a crer que $a_n = n$, não? Pois veja quanto vale a_{2001} e você terá uma bela surpresa!

Exercícios

01. Encontre uma fórmula fechada para cada uma das relações de recorrência a seguir:

a) $a_n = 3a_{n-1} + 4, a_1 = 0$

b) $b_n = \sqrt{2}b_{n-1} + \sqrt{3}, b_1 = \sqrt{5}$

02. (Prova de Seleção para a IMO e Olimpíada Iberoamericana 2001, adaptada) Seja *f* uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tal que, para todos *x, y, z* reais,

$$f(x+y) + f(y+z) + f(z+x) \geq 3f(x+2y+3z)$$

a) Mostre que $f(a) \geq f(0)$ para todo *a* real.

b) Mostre que $f(a) \leq f(0)$ para todo *a* real e conclua que as funções *f* onde $f(a) = f(0)$ são as únicas soluções do problema.

Observação:

A grosso modo, uma função *f* de um conjunto *A* em um outro conjunto *B*, é uma relação que toma cada elemento *x* de *A* e o transforma em um elemento *f*(*x*) de *B*. As equações de recorrência que acabamos de estudar são exemplos de funções de *N* em *R*.

03. Na torre de Hanói, suponha que em vez de transferir a torre para **um** dos pinos, você tenha que transferir a torre para **cada um** dos outros pinos uma vez. Encontre o número mínimo de movimentos para resolver esse problema.

TRIGONOMETRIA E DESIGUALDADES EM PROBLEMAS DE OLIMPÍADAS

Rafael Tajra Fonteles

♦ Nível Intermediário.

O que desejamos mostrar com esse texto é o potencial significativo da trigonometria para resolver problemas de olimpíadas de matemática, principalmente quando combinada com algumas desigualdades.
Esse texto, após a resolução de cada exemplo, apresenta um esquema da mesma, um *Guia de Resolução*, o qual busca facilitar o entendimento geral do que foi feito. Caso o leitor queira tentar resolver tais exemplos antes de conhecer a resolução descrita aqui, poderá recorrer a este guia, como instrumento auxiliar.

Vamos aos exemplos.

EXEMPLO 1: (*Seleção para IMO* 99 – *Brasil*) Para reais positivos satisfazendo $a + b + c = abc$, mostre que $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\le\frac{3}{2}$, e determine quando a igualdade ocorre.

RESOLUÇÃO:
A idéia básica para resolver esse problema é fazer uso da transformação de um número real em tangente de outro. Isso vem do simples fato de que qualquer número real a pode ser representado pela tangente de outro número real α pertencente ao intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, sendo tal α único – isso é explicado pelo fato da função tangente, nesse intervalo, ser bijetora e ter como imagem todo o conjunto dos números reais. E sendo ainda a um real positivo, podemos fazer $a = tg\ \alpha$, $\alpha \in (0, \pi/2)$.

Agora, podemos perguntar: por que essa transformação nos seria útil? Isso é respondido se percebermos que a partir da conhecida identidade trigonométrica $1+ tg^2\alpha = sec^2\alpha$, obtemos o seguinte resultado: $1/\sqrt{1+tg^2\alpha}=\cos\alpha, \forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\ne\frac{\pi}{2}+k\pi$, com o qual podemos simplificar a desigualdade a ser provada. É claro que se o estudante não tem o devido costume com essas fórmulas, ele, provavelmente, não as reconheceria e nem pensaria em utilizar a transformação

para tangente. Mas é aí que entra a relevância da trigonometria . Agora podemos prosseguir com a resolução.
Façamos $a = tg\ \alpha$, $b = tg\ \beta$ e $c = tg\ \gamma$, onde $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi/2)$. Temos então que $tg\ \alpha + tg\ \beta + tg\ \gamma = tg\ \alpha . tg\ \beta . tg\ \gamma$ (**1**) . Como $1/\sqrt{1+tg^2\alpha} = \cos\alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, então o que devemos mostrar agora é que $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq 3/2$ para quaisquer $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi/2)$ que satisfaçam a condição (**1**). Mas de (**1**) vem que $tg(\alpha + \beta + \gamma) = 0$ (*verifique! Dica: use a fórmula da tangente da soma de três termos*). Logo, como $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi/2)$, temos que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.
Para finalizarmos a demonstração, usaremos a seguinte forma especial da desigualdade de Jensen (ver [4]): se uma função f é estritamente côncava (ver observação abaixo) num dado intervalo (a,b), então

$$f\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right) \geq \frac{f(a_1) + \ldots + f(a_n)}{n},$$

para quaisquer $a_i \in (a, b)$, ocorrendo a igualdade se e somente se os a_i's forem todos iguais. E caso a função seja estritamente convexa (ver observação abaixo) em um determinado intervalo a desigualdade muda de sinal.

Continuando, como a função cosseno é estritamente côncava no intervalo $(0,\pi/2)$, temos que:

$$\frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{3} \leq \cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2},$$

para quaisquer $\alpha, \beta, \gamma \in (0,\pi/2)$, ocorrendo a igualdade se e somente se $\alpha = \beta = \gamma = \pi/3 \Leftrightarrow a = b = c = tg\ \pi/3 = \sqrt{3}$, concluindo a demonstração.

GUIA DE RESOLUÇÃO:

- A transformação de um número real em tangente de outro e o uso da fórmula $1 + tg^2\alpha = sec^2\alpha$.
- Uso da propriedade dada no enunciado, para encontrar outra de melhor proveito.
- Uso de uma forma especial da desigualdade de Jensen.

Obs.: Formalmente, uma função $f : I \to \mathbb{R}$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, é estritamente côncava se $f\left(\frac{x+y}{2}\right) > \frac{f(x)+f(y)}{2}$, para quaisquer x, y distintos em I. E é estritamente convexa se $f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$, para quaisquer x, y distintos em I. Uma maneira geométrica de identificar funções estritamente côncavas ou convexas é observar a forma do gráfico das mesmas: se o gráfico for uma curva com concavidade voltada para baixo, a função é estritamente côncava, e se a concavidade for voltada para cima, é estritamente convexa. Como exemplos de funções estritamente côncavas, temos a função $f(x) = \cos x$ no domínio $(0,\pi/2)$ e as funções logarítmicas cujas bases são maiores do que 1. E de funções estritamente convexas temos a função $f(x) = tg\, x$ no domínio $(0,\pi/2)$ e a função $f(x)=1/\text{sen}\, x$, com x em $(0,\pi)$. (Como exercício, classifique outras funções conhecidas em estritamente convexas ou côncavas).

É importante o leitor ver as referências [2] e [4], onde encontram-se definições e resultados mais precisos e genéricos, além das demonstrações.

O próximo exemplo, da IMO de 1996, é tido por alguns matemáticos interessados em olimpíadas (ver [1]), como o problema mais difícil já proposto em IMO's. É um problema de geometria associado a desigualdade (algo bastante explorado em olimpíadas).

EXEMPLO 2: (*IMO* 96) Seja *ABCDEF* um hexágono convexo tal que *AB* é paralelo a *DE*, *BC* é paralelo a *EF* e *CD* é paralelo a *FA*. Sejam R_A, R_C, R_E os raios das circunferências circunscritas aos triângulos *FAB*, *BCD*, *DEF* respectivamente, e seja p o perímetro do hexágono. Prove que

$$R_A + R_C + R_E \geq \frac{p}{2}\ .$$

RESOLUÇÃO:

Algo nesse problema já nos insinua a usar a trigonometria, você percebe? O fato dele relacionar raio de circunferência circunscrita com lado (que tem a ver com o perímetro) faz-nos lembrar da conhecida lei dos senos, que afirma: dado um triângulo *ABC*, temos que $\frac{BC}{senA} = \frac{AC}{senB} = \frac{AB}{senC} = 2R$, onde R é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo dado (como exercício, prove-a). Daí, portanto, podemos agora não mais trabalhar com os raios dos triângulos citados, mas sim com algumas diagonais do hexágono. Isso porque, pela lei dos senos,

obtemos que $BF = 2R_A.sen\,F\hat{A}B$, $BD = 2R_C.sen\,B\hat{C}D$, $FD = 2R_E.sen\,D\hat{E}F$ (ou seja, encontramos uma relação entre os raios citados no problema e algumas diagonais do hexágono, o que facilitará o nosso trabalho).
A próxima parte da resolução do problema é a que exige uma maior dose de criatividade por parte do estudante. Vejamos. Prolonguemos os lados paralelos *BC* e *EF* do hexágono (vide *figura* 1). Por *A* e *D* tracemos perpendiculares aos lados prolongados, obtendo o retângulo de vértices *M*, *N*, *P* e *Q*, ilustrados na *figura* 1. Como *MN* e *PQ* são as menores distâncias entre pontos das retas paralelas *BC* e *EF* (pois esses segmentos são perpendiculares às mesmas), temos que $BF \geq MN$ e $BF \geq PQ \Rightarrow 2BF \geq MN + PQ \Rightarrow 2BF \geq AM + NA + DP + DQ \Rightarrow$

$$2BF \geq AB.senB + AF.senF + CD.senC + DE.senE \ (\mathbf{1}),$$

onde *sen X* denota o seno do ângulo interno de vértice *X* do hexágono, o qual é igual ao seno do respectivo ângulo externo, pois os mesmos são suplementares.

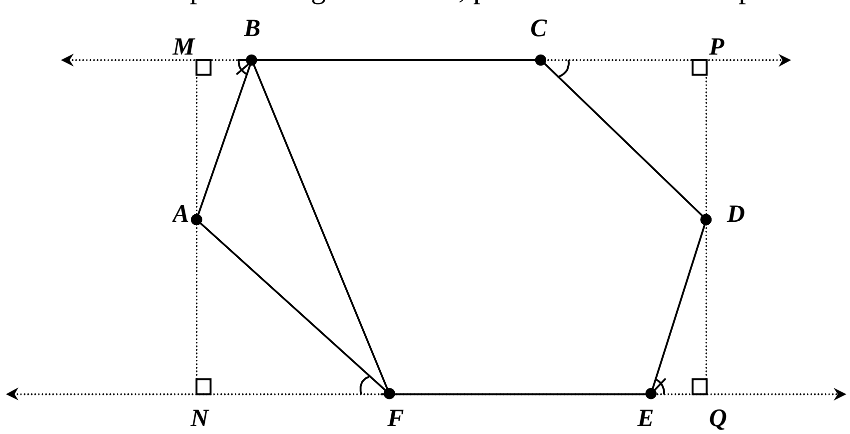


figura 1

Pela lei dos senos, nós já sabemos que $BF/senA = 2R_A$. Então dividindo ambos os lados da desigualdade (**1**) por *senA*, obtemos:

$$4R_A \geq AB.\frac{senB}{senA} + AF.\frac{senF}{senA} + CD.\frac{senC}{senA} + DE.\frac{senE}{senA} \ \text{(I)}$$

E de forma análoga, seguindo os mesmos passos com as diagonais *BD* e *DF* do hexágono, obtemos:

$$4R_C \geq BC.\frac{senB}{senC} + CD.\frac{senD}{senC} + AF.\frac{senA}{senC} + EF.\frac{senE}{senC} \text{ (ii)}$$

$$4R_E \geq AB.\frac{senA}{senE} + BC.\frac{senC}{senE} + DE.\frac{senD}{senE} + EF.\frac{senF}{senE} \text{ (iii)}$$

E agora, somando (I), (ii) e (iii), obtemos

$$4(R_A + R_C + R_E) \geq AB.\left(\frac{senA}{senE} + \frac{senB}{senA}\right) + BC.\left(\frac{senC}{senE} + \frac{senB}{senC}\right) + CD.\left(\frac{senC}{senA} + \frac{senD}{senC}\right) +$$
$$+ DE.\left(\frac{senE}{senA} + \frac{senD}{senE}\right) + EF.\left(\frac{senE}{senC} + \frac{senF}{senE}\right) + FA.\left(\frac{senA}{senC} + \frac{senF}{senA}\right).$$

Agora observe que como os lados opostos do hexágono convexo são paralelos, nós temos que os ângulos opostos do mesmo são congruentes. Assim, nós obtemos: $senA = senD$; $senB = senE$; $senC = senF$.

Por conseguinte, nós temos que os fatores que estão multiplicando os lados do hexágono na última desigualdade acima são da forma $(z + 1/z)$, sendo z positivo (pois o seno de um ângulo maior que 0º e menor que 180º é sempre positivo). E é fácil verificar que $z + 1/z \geq 2$, para todo z positivo. Assim nós obtemos:

$$4(R_A + R_C + R_E) \geq 2(AB + BC + CD + DE + EF + FA) \Rightarrow 4(R_A + R_C + R_E) \geq 2p \Rightarrow$$
$$\Rightarrow R_A + R_C + R_E \geq \frac{p}{2}, \text{ concluindo a demonstração.}$$

GUIA DE RESOLUÇÃO:

- Uso da Lei dos Senos.
- Uso das construções: prolongamento de dois lados opostos e traçado de perpendiculares pelos dois vértices restantes.
- Congruência dos ângulos opostos do hexágono convexo.
- Uso da desigualdade: $z + 1/z \geq 2$, $z > 0$.

EXEMPLO 3: (*IMO* 91) Seja ABC um triângulo e X um ponto interior do mesmo. Prove que pelo menos um dos ângulos $\angle XAB$, $\angle XBC$, $\angle XCA$ é menor ou igual a 30º.

RESOLUÇÃO:

Geralmente, em questões que envolvem um ponto num interior de um triângulo, é útil traçarmos perpendiculares a partir desse ponto aos lados do triângulo. Vamos utilizar isso.

Sejam *P*, *Q*, *R* os pés das perpendiculares traçadas por *X* aos lados *BC*, *CA* e *AB*, respectivamente. Para facilitar, denotaremos por α, β, γ os ângulos do triângulo ($\angle BAC$, $\angle CBA$, $\angle ACB$) e por α', β', γ' os ângulos $\angle XAB$, $\angle XBC$, $\angle XCA$.

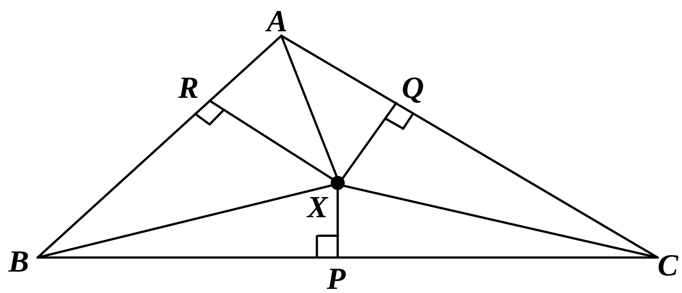


figura 2

Nós temos que $PX = BX.sen\beta' = CX.sen(\gamma - \gamma')$; $QX = CX.sen\gamma' = AX.sen(\alpha - \alpha')$; $RX = AX.sen\alpha' = BX.sen(\beta - \beta')$. Multiplicando essas três igualdades, nós obtemos:

$$sen(\alpha - \alpha').sen(\beta - \beta').sen(\gamma - \gamma') = sen\alpha'.sen\beta'.sen\gamma' \Leftrightarrow$$

$$\frac{sen(\alpha - \alpha')}{sen\alpha'}\frac{sen(\beta - \beta')}{sen\beta}\frac{sen(\gamma - \gamma')}{sen\gamma'} = 1.$$

Agora observe que a função $f(x) = \dfrac{sen(A - x)}{senx} = senA.\cot x - \cos A$ é estritamente decrescente no intervalo $(0, \pi)$, visto que a função cotangente é estritamente decrescente nesse intervalo. Assim, se α', β', γ' forem todos maiores que 30º, teremos que:

$$1 = \frac{sen(\alpha - \alpha')}{sen\alpha'}\frac{sen(\beta - \beta')}{sen\beta}\frac{sen(\gamma - \gamma')}{sen\gamma'} < \frac{sen(\alpha - 30^o)}{sen30^o}\frac{sen(\beta - 30^o)}{sen30^o}\frac{sen(\gamma - 30^o)}{sen30^o} \Leftrightarrow$$

$$sen(\alpha - 30^o)sen(\beta - 30^o)sen(\gamma - 30^o) > sen30^o\,sen30^o\,sen30^o = \frac{1}{8} \quad (\mathbf{1})$$

Mas, nós temos que:

$$sen(\alpha-30^o).sen(\beta-30^o)=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta-60^o)\right)\le\frac{1}{2}\left(1-\cos(\alpha+\beta-60^o)\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-sen(\gamma-30^o)\right)$$

Observe que essa última igualdade decorre do fato de (γ – 30º) ser complementar a ($\alpha+\beta$ – 60º). Continuando, nós temos que:

$$sen(\alpha-30^o)sen(\beta-30^o)sen(\gamma-30^o)\le\frac{1}{2}\left(1-sen(\gamma-30^o)\right).sen(\gamma-30^o)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\left(sen(\gamma-30^o)-\frac{1}{2}\right)^2\right)\le\frac{1}{8}.$$

Mas esta última desigualdade obtida contradiz (**1**), logo α' , β' , γ' não podem ser todos maiores do que 30º, o que encerra a nossa demonstração.

GUIA DE RESOLUÇÃO:

- Construção das perpendiculares a partir de X aos lados do triângulo e obtenção da igualdade: $sen(\alpha-\alpha').sen(\beta-\beta').sen(\gamma-\gamma')=sen\alpha'.sen\beta'.sen\gamma'$. Esses ângulos são identificados no início da resolução.
- Observar que a função $f(x)=\dfrac{sen(A-x)}{senx}$ é estritamente decrescente.
- Supor, por absurdo, que todos os três ângulos são maiores do que 30º, e chegar a uma contradição.

EXEMPLO 4: Prove que, dentre quaisquer cinco reais y_1 , y_2 , y_3 , y_4 , y_5 , existem dois, que satisfazem:

$$0\le\frac{y_i-y_j}{1+y_iy_j}\le 1.$$

RESOLUÇÃO:
Olhando para o termo do meio da desigualdade acima, o que ele nos faz lembrar? Sem muita dificuldade, associamo-lo logo à formula da tangente da diferença. Então mais uma vez façamos uso da transformação para tangente. Isto é, façamos $y_i = tg\, x_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, $x_i \in (-\pi/2, \pi/2)$.
Como $tg\, 0 = 0$ e $tg\, \pi/4 = 1$, devemos ter agora:

$$tg0 \leq \frac{tgx_i - tgx_j}{1 + tgx_i.tgx_j} \leq tg\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow tg0 \leq tg\left(x_i - x_j\right) \leq tg\frac{\pi}{4}.$$

E ainda, como no intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ a função tangente é sempre crescente, obtemos $0 \leq x_i - x_j \leq \frac{\pi}{4}$. Agora o que temos que provar é que existem dois dentre os cinco x_i*'s* que satisfazem esta última desigualdade. Para isso, usamos o conhecido Princípio da Casa dos Pombos. Dividamos o intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ de tamanho π em outros quatro intervalos de tamanho $\pi/4$. Assim, pelo princípio citado, dois dentro os cinco x_i*'s* estarão no mesmo intervalo, os quais vão satisfazer a desigualdade pedida.

GUIA DE RESOLUÇÃO:
- Uso da transformação para tangente.
- Aplicação da tangente da diferença.
- Uso do Princípio da Casa dos Pombos.

Finalizamos esse texto com alguns problemas para o leitor exercitar o que foi mostrado. É lógico que existe mais de uma solução para cada problema, mas pede-se que o leitor tente resolvê-los utilizando a trigonometria e as desigualdades mostradas ou outras conhecidas.

EXERCÍCIOS:

01. (*IMO* 61) Prove que, para qualquer triângulo de lados a, b, c e área A, temos que: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}A$.

02. Prove que, dentre 13 números reais, existem dois, x e y, tais que:

$$|x-y| \leq \left(2-\sqrt{3}\right)|1+xy| .$$

03. (*OBM* – 85) Um quadrilátero convexo está inscrito em uma circunferência de raio unitário. Demonstre que a diferença entre seu perímetro e a soma de suas diagonais é maior do que zero e menor do que 2.

04. (*Ibero-Americana* 88) As medidas dos ângulos de um triângulo estão em progressão aritmética e as medidas das alturas do mesmo também. Prove que o triângulo é equilátero.

05. (*Putnam* 78) Encontre a área de um octógono convexo que está inscrito em uma circunferência e que tem que quatro lados consecutivos medindo 3 unidades e os lados restantes medindo 2 unidades. Dê a resposta na forma $r + s\sqrt{t}$, com r, s e t inteiros positivos.

06. (*Grã-Bretanha* 84) O quadrilátero $ABCD$ tem uma circunferência inscrita. Para o lado AB nós associamos a expressão $f(AB) = p_1.(sen\ D\hat{A}B) + p_2.$ $(sen\ A\hat{B}C)$, onde p_1 e p_2 são as medidas das perpendiculares traçadas de A e B, respectivamente, até o lado oposto CD. Definimos $f(BC)$, $f(CD)$ e $f(DA)$ similarmente, usando para cada um as perpendiculares ao lado oposto. Mostre que $f(AB) = f(BC) = f(CD) = f(DA)$.

07. (*IMO* 91) Em um triângulo ABC, as bissetrizes AD, BE, CF encontram-se no ponto I. Mostre que:

$$\frac{1}{4} \leq \frac{IA}{AD} \cdot \frac{IB}{BE} \cdot \frac{IC}{CF} \leq \frac{8}{27} .$$

08. Mostre que se um quadrilátero de lados a, b, c, e d é inscritível e circunscritível então sua área é $\sqrt{abcd}$.

09. Uma função $d(x, y)$ de dois reais x, y é chamada *distância* se $d(x, y) = d(y, x)$; $d(x, x) = 0$; e $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$, para quaisquer reais x, y, z. Prove que a seguinte função é uma *distância*:

$$d(x,y)=\frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}.$$

***10.** Sejam x, y, z reais positivos tais que $xy + yz + zx = 1$. Prove que:

$$\frac{2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}+\frac{2y(1-y^2)}{(1+y^2)^2}+\frac{2z(1-z^2)}{(1+z^2)^2}\leq\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}$$

Rafael Tajra Fonteles cursa a 2ª. Série do Ensino Médio no Instituto Dom Barreto de Teresina – PI.
O Prof. José Nazareno Cardeal Fonteles da Universidade Federal do Piauí e coordenador de matemática do Instituto Dom Barreto colaborou com o artigo, fazendo a revisão do mesmo.

BIBLIOGRAFIA:

[1] – ENGEL, Arthur. *Problem-Solving Strategies*. Springer-Verlag, New York, 1998.
[2] – LARSON, Loren C. *Problem-Solving Through Problems*. Springer-Verlag, New York, 1983.
[3] – MEGA, Élio & WATANABE, Renate. *Olimpíadas Brasileiras de Matemática – 1ª a 8ª.* Comissão de Olimpíadas da SBM. Núcleo, São Paulo, 1988.
[4] – MUNIZ NETO, Antônio Caminha. *Desigualdade Elementares*. Eureka! Nº 5. OBM, 1999.
[5] – Página da Web mantida por Jonh Scholes*:* www.kalva.demon.co.uk/

SÉRIES FORMAIS

Eduardo Tengan - Colégio Etapa

♦ Nível Avançado.

Um polinômio é uma expressão da forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

Uma *série formal* é uma expressão ainda mais simples - basta apagar o último termo:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

Somas e produtos são definidos de maneira análoga às operações correspondentes com polinômios. Assim, por exemplo,

$$\begin{aligned}(1 - 3x + 3^2 x^2 - 3^3 x^3 + \ldots)(1 + 3x) &= 1 - 3x + 3^2 x^2 - 3^3 x^3 + \ldots \\ &\quad + 3x - 3^2 x^2 + 3^3 x^3 - \ldots \\ &= 1\end{aligned}$$

de modo que podemos escrever $1 - 3x + 3^2 x^2 - 3^3 x^3 + \ldots = 1/(1 + 3x)$. De maneira geral, podemos "compactar" uma série formal $1 + ax + a^2x^2 + \ldots$ na forma $1/(1 - ax)$, que certamente ocupa bem menos espaço que uma série infinita…

Vejamos uma primeira aplicação das séries formais. Vamos determinar uma "formula fechada" para a seqüência definida por $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ e $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ para $n \geq 0$. A idéia é considerar a série formal $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ e tentar "compactá-la" e depois "descompactá-la". Para alcançar o primeiro objetivo, observe que

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \\ -5xf(x) &= -5a_0 x - 5a_1 x^2 - 5a_2 x^3 + \ldots \\ 6x^2 f(x) &= \qquad\quad 6a_0 x^2 + 6a_1 x^3 + \ldots \end{aligned}$$

Somando as equações acima, os coeficientes de $x^n, n \geq 2,$ anulam-se e ficamos com

$$(1 - 5x + 6x^2) f(x) = a_0 + (a_1 - 5a_0)x \Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{1 - 5x + 6x^2}$$

Agora, como descompactar $f(x)$? O truque aqui é "quebrá-lo" em pedaços que sabemos como descompactar.

Observe que $1 - 5x + 6x^2 = (1 - 2x)(1 - 3x)$ e que é razoável procurar constantes a e b tais que

$$\frac{a}{1-2x}+\frac{b}{1-3x}=\frac{x}{1-5x+6x^2}\Leftrightarrow\frac{(a+b)-(3a+2b)x}{(1-2x)(1-3x)}=\frac{x}{1-5x+6x^2}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=0\\3a+2b=-1\end{cases}\Leftrightarrow a=-1\text{ e } b=1$$

Logo

$$f(x)=\frac{x}{1-5x+6x^2}=\frac{1}{1-3x}-\frac{1}{1-2x}=(1+3x+3^2x^2+3^3x^3+\ldots)-(1+2x+2^2x^2+2^3x^3+\ldots)$$

$$=(3^0-2^0)+(3^1-2^1)x+(3^2-2^2)x^2+(3^3-2^3)x^3+\ldots$$

Assim, o coeficiente de x^n em $f(x)$ (denotado por $[x^n]f(x)$) é 3^n-2^n. Mas $[x^n]f(x)=a_n$, pela definição de $f(x)$, logo $a_n=3^n-2^n$.

PROBLEMA 1

Utilizando séries formais, encontre "formulas fechadas" para as seguintes seqüências:

a) $F_0=0, F_1=1, F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ para $n\geq 0$ (esta é a famosa seqüência de Fibonacci)

b) $t_0=t_1=1, t_{n+2}=-2t_{n+1}-4t_n$ para $n\geq 0$

c) $p_0=p_1=1,\ p_2=0,\ p_{n+3}=7p_{n+1}-6p_n$ para todo $n\geq 0$

(As outras seqüências não tem nome. Alguma sugestão?)

PROBLEMA 2

Calcule

$$\frac{F_0}{10^0}+\frac{F_1}{10^1}+\frac{F_2}{10^2}+\frac{F_3}{10^3}+\ldots$$

em que F_n denota a seqüência de Fibonacci.

Outra aplicação das séries formais é ajudar a contar. Neste contexto, as séries formais recebem o nome de *funções geratrizes*. O esquema geral é o seguinte: o exponente de x quantifica alguma propriedade em que estamos interessados,

como o comprimento de uma seqüência, o número de conjuntos em uma partição, a quantidade de duendes verdes em um jardim, etc. Se para cada objeto associarmos tal potência de x e somarmos estas potências, o coeficiente de x^n será, respectivamente, o número de objetos com comprimento n, o número de partições com n conjuntos, o número de jardins com n duendes verdes, etc.
Por exemplo, considere o problema de determinar o número de maneiras de se escrever n como soma de termos 1, 2, 3, sem levar em conta a ordem dos termos. A idéia aqui não é tentar obter este número para um valor particular de n. Somos mais ousados: vamos obter *todos* estes números de uma só vez. Para isto, escrevemos a função geratriz $f(x)$ que é a soma das potências x^s para cada soma s:

$$f(x) = x^0 + x^1 + x^{1+1} + x^2 + x^{1+1+1} + x^{1+2} + x^3 + \ldots = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots$$

(x^0 corresponde à soma sem nenhum termo), de modo que, por exemplo, o coeficiente de x^3 é o número de maneiras de escrever 3 como soma não ordenada de termos 1, 2, 3. Aparentemente, obter $f(x)$ é uma tarefa mais difícil do que a inicial. Mas observe que cada termo de $f(x)$ é o produto de um termo da forma $x^{\text{somas de 1's}}$, um termo da forma $x^{\text{somas de 2's}}$ e um termo da forma $x^{\text{somas de 3's}}$, logo

$$f(x) = (x^0 + x^1 + x^{1+1} + x^{1+1+1} + \ldots)(x^0 + x^2 + x^{2+2} + x^{2+2+2} + \ldots)(x^0 + x^3 + x^{3+3} + x^{3+3+3} + \ldots)$$
$$\Leftrightarrow\ f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \ldots)$$
$$\Leftrightarrow\ f(x) = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^3}$$

O problema agora é encontrar $[x^n]f(x)$, o que pode ser feito utilizando-se as técnicas já vistas.

PROBLEMA 3
Mostre que o número de partições não ordenadas de n com exatamente k termos distintos é

$$[x^n y^k]\prod_{j\geq 1}\frac{1 + x^j(y-1)}{1 - x^j}$$

PROBLEMA 4

a) Encontre constantes a, b, c, d, e, f tais que

$$f(x)=\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^3}=\frac{a}{(1-x)^3}+\frac{b}{(1-x)^2}+\frac{c}{1-x}+\frac{d}{1+x}+\frac{e}{1-\omega x}+\frac{f}{1-\omega^2 x}$$

em que $\omega=(-1+i\sqrt{3})/2$.

b) Mostre que $\left[x^n\right]f(x)=\frac{(n+3)^2}{12}-\frac{7}{72}+\frac{(-1)^n}{8}+\frac{\omega^n+\omega^{2n}}{9}=\left\lfloor\frac{(n+3)^2}{12}+\frac{1}{2}\right\rfloor$

em que $\lfloor x\rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a x.

PROBLEMA 5

a) Determine a função geratriz do número de soluções da equação $x_1+x_2+\ldots+x_k=n$, em que x_i são inteiros positivos, $1\le x_i\le k$.

b) Determine a função geratriz do número de partições ordenadas de n. (por exemplo, 4 = 1 + 3 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1, de modo que há 8 partições ordenadas de 4)

c) Determine o número de partições ordenadas de n.

Os próximos problemas mostram uma técnica muito importante chamada *convolução*. Ela se baseia no seguinte fato:
se

$$f(x)=f_0+f_1x+f_2x^2+f_3x^3+\ldots$$
$$g(x)=g_0+g_1x+g_2x^2+g_3x^3+\ldots$$

então $h(x)=f(x)g(x)$ é a série formal associada à seqüência $h_0=f_0g_0$, $h_1=f_0g_1+f_1g_0$, $h_2=f_0g_2+f_1g_1+f_2g_0$, ..., $h_k=\sum_{i+j=k}f_ig_j$,...

PROBLEMA 6

a) Mostre que se $f(x)$ é a função geratriz da seqüência $(a_n)_{n\ge 0}$, então $f(x)/(1-x)$ é a função geratriz da seqüência $b_n=a_0+a_1+\ldots+a_n$.

b) Prove que $F_0+F_1+\ldots+F_n=F_{n+2}-1$, em que F_n denota a seqüência de Fibonacci.

(Este resultado pode também ser provado facilmente sem o uso de séries formais. Tente!)

PROBLEMA 7

Prove que

$$\binom{n}{n}F_0 + \binom{n}{n-1}F_1 + \binom{n}{n-2}F_2 + \ldots + \binom{n}{0}F_n = F_{2n}$$

em que, adivinhe, F_n denota a seqüência de Fibonacci!

PROBLEMA 8

a) Mostre que o número de triangulações T_n (por diagonais que não se interceptam fora dos vértices) de um polígono convexo de n vértices satisfaz

$$T_{n+1} = T_2T_n + T_3T_{n-1} + \ldots + T_nT_2$$

em que $T_2 = 1$.

b) Prove que $T(x) = T_2 + T_3x + T_4x^2 + \ldots = \dfrac{1-(1-4x)^{1/2}}{2x}$

c) Mostre que $T_n = \dfrac{1}{n-1}\dbinom{2n-2}{n-1}$.

(T_{n+1} é o assim chamado n-ésimo número de Catalan). Para isto, lembre-se da fórmula do binômio de Newton generalizada:

$$(1+x)^r = \sum_{k\geq 0}\binom{r}{k}x^k, \qquad \binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-k+1)}{k!}, k \in \mathbb{Z} \text{ e } r \in \mathbb{R}$$

Muitas vezes, as funções geratrizes são utilizadas não para calcular o número exato de maneiras de se fazer isto ou aquilo, mas para mostrar que duas quantidade são iguais. Vamos mostrar que o número de partições (não ordenadas) de n em naturais distintos é igual ao número de partições (também não ordenadas) de n em naturais ímpares. Por exemplo, 7 = 5 + 1 + 1 = 3 + 3 + 1 = 3 +1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 e 7 = 6 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3 = 4 + 2 + 1, de modo que em ambos os casos o número de partições em naturais distintos é:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\ldots$$

enquanto que o número de partições em naturais ímpares é dado por

$$(1+x+x^{1+1}+x^{1+1+1}+\ldots)(1+x^3+x^{3+3}+x^{3+3+3}+\ldots)\ldots(1+x^5+x^{5+5}+x^{5+5+5}+\ldots)\ldots$$
$$=(1+x+x^2+x^3+\ldots)(1+x^3+x^6+x^9+\ldots)\ldots(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\ldots)\ldots$$
$$=\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^3}\frac{1}{1-x^5}\ldots$$

Observe que as expressões acima são iguais! De fato, para se convencer disto, basta multiplicar as igualdades

$$\frac{1-x^2}{1-x}=1+x,\ \frac{1-x^4}{1-x^2}=1+x^2,\ \ \frac{1-x^6}{1-x^3}=1+x^3,\ldots$$

Isto completa a demonstração.

PROBLEMA 9

a) Escreva a função geratriz do número de maneiras de escrever um número n como soma de potências distintas de 2.
b) Verifique que a função acima é igual a $1/(1-x)$.
c) Utilizando os resultados acima, mostre que todo número pode ser escrito de maneira única em base 2.

PROBLEMA 10

Prove que o número de partições de n em que apenas as partes ímpares podem ser repetidas é igual ao número de partições de n em que nenhuma parte aparece mais do que três vezes.

PROBLEMA 11

Prove que o número de partições de n com uma única parte menor (ela ocorre uma única vez) e parte maior no máximo duas vezes a parte menor é igual ao número de partições de n em que a maior parte é ímpar e a menor parte é maior do que metade da parte maior.

PROBLEMA 12

Mostre que o número total de 1's nas partições de n é igual à soma dos números de partes distintas em cada partição de n.

OLIMPÍADAS AO REDOR DO MUNDO

O comitê editorial de EUREKA! agradece aos admiradores da seção Olimpíadas ao redor do Mundo o envio de críticas, soluções e possíveis erros nos enunciados dos problemas. Diversos leitores apontaram um possível erro no enunciado de:

33. (Moldávia-1999) Seja n um número natural tal que $2n^2$ possui 28 divisores distintos e o número $3n^2$ possui 30 divisores distintos. Qual o número de divisores do número $6n^2$?

Na realidade o problema está errado mesmo, apesar de corresponder à versão publicada em : **`http://www.olsedim.com/olympiad/99.html`**

De fato, se $2n^2$ tem 28 divisores, $3n^2$ só pode ter 24, 42 ou 54 divisores (prove!).
O problema é parecido com a **29ª. questão** da **47th AHSME 1996**, onde os números que possuíam 28 e 30 divisores eram respectivamente $2n$ e $3n$, e pede-se o número de divisores de $6n$ (Esse tem solução!).

Continuamos salientando que estamos à disposição na OBM para aqueles que estiverem interessados na solução de algum problema particular. Para tanto, basta contactar a OBM, através de carta ou e-mail.

Antonio Luiz Santos

Primeiramente vamos aos problemas propostos deste número

91. (Rússia-2000) Os coeficientes a e b da equação $x^2 + ax + b = 0$ e suas raízes são quatro números distintos. É possível determinar a equação usando estes quatro números?

92. (Rússia-2000) Um inteiro positivo n é chamado *perfeito* se a soma de todos os seus divisores, excluindo n, é igual a n. Prove que se um número perfeito maior do que 28 é divisível por 7 então ele é divisível por 49.

93. (Rússia-2000) Prove a existência de números reais distintos $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ tais que a equação:

$$(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_{10}) = (x+a_1)\cdot(x+a_2)\cdot\ldots\cdot(x+a_{10})$$

possua exatamente 5 raízes reais distintas.

94. (Rússia-2000) O círculo inscrito no triângulo *ABC* possui centro *O* e tangencia o lado *AC* no ponto *K*. Um segundo círculo *S* com centro no mesmo ponto *O* intersecta todos os lados do triângulo *ABC*. Sejam *E* e *F* os pontos de interseção de *S* com os lados *AB* e *BC* que estão mais próximos do vértice *B*; B_1 e B_2 são os pontos de interseção de *S* com o lado *AC* com B_1 mais próximo de *A*. Se *P* é o ponto de interseção dos segmentos B_2E e B_1F, mostre que os pontos *B*, *K* e *P* são colineares.

95. (Rússia-2000) A seqüência de números reais $(a_1, a_2, ..., a_{2000})$ satisfaz a condição: $a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2$ para todo n, $1 \le n \le 2000$. Mostre que todo elemento da seqüência é um número inteiro.

96. (Rússia-2000) Cada um dos números 1, 2, 3, ..., *N* é *preto* ou *branco*. É permitido mudar simultaneamente as cores de quaisquer *três* dos números se um deles é a média aritmética dos outros dois. Determine os valores de *N* para os quais é possível fazer com que todos os números fiquem *brancos*.

97. (Estônia-2000) Determine todos os restos possíveis da divisão do quadrado de um número primo com 120 por 120.

98. (Estônia-2000) Em um inteiro positivo *M*, de três algarismos, o algarismo das centenas é menor do que o algarismo das dezenas e o algarismo das dezenas é menor que o algarismo da unidades simples. A média aritmética de *M* com todos os números de três algarismos obtidos pela reordenação dos algarismos de *M* termina em 5. Determine tais números *M*.

99. (Estônia-2000) Gustavo convidou um número ímpar de pessoas para a festa de seu aniversário e os dispôs em torno de uma mesa circular de modo que os vizinhos de cada menina fossem meninos, os vizinhos de cada menino, exceto Gustavo cujos vizinhos eram ambas meninas, fossem uma menina e um menino. Mostre que :

a) o número de meninos convidados para a festa é divisível por 4.
b) na direção diametralmente oposta a Gustavo está sentada uma menina .

100. (Eslovênia-2000) Seja *H* o ortocentro de um triângulo acutângulo *ABC* com $AC \neq BC$. A reta que passa pelos pontos médios de *AB* e *HC* intersecta a bissetriz do ângulo $\angle ACB$ no ponto *D*. A reta *HD* passa pelo circuncentro do triângulo *ABC*. Determine a medida do ângulo $\angle ACB$.

101. (Eslovênia-2000) Sobre uma mesa existem pilhas de moedas. Um *movimento* consiste em escolher uma das pilhas com pelo menos três moedas, pegar uma moeda desta pilha, retirá-la da mesa e finalmente dividir as moedas restantes desta pilha em duas outras pilhas (não necessariamente do mesmo tamanho). É possível obtermos somente pilhas com três moedas após vários movimentos se começarmos com uma única pilha com 2000 moedas?

102. (Eslovênia-2000) Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfazem a condição $f(x - f(y)) = 1 - x - y$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

103. (Eslovênia-2000) Sobre uma mesa estão três caixas com pelo menos uma bola em cada uma delas. Um *movimento* consiste em duplicar o número de bolas de uma das caixas de modo que o número de bolas necessário para tal seja retirado de uma das outras duas caixas. É possível que após vários movimentos uma das caixas esteja vazia?

104. (Bielorússia-2000) Determine todos os pares de números inteiros (x, y) que satisfazem a equação: $y(x^2 + 36) + x(y^2 - 36) + y^2(y - 12) = 0$

105. (Bielorússia-2000) Seja M o ponto de interseção das diagonais AC e BD de um quadrilátero convexo $ABCD$. Seja K o ponto de interseção do prolongamento do lado AB, no sentido de B para A, com a bissetriz do ângulo $\angle ACD$. Sabendo que $MA \cdot MC + MA \cdot CD = MB \cdot MD$, prove que $\angle BKC = \angle CDB$.

106. (Moldávia-2000) Para cada subconjunto não vazio X do conjunto $M = \{1, 2, ..., 2000\}$, seja a_X a soma do menor com o maior elemento de X. Determine a *média aritmética* de todos tais números a_X assim obtidos.

107. (Moldávia-2000) Determine o valor *máximo* do produto xy se os números reais x e y satisfazem a relação: $y(1 + x^2) = x\left(\sqrt{1 - 4y^2} - 1\right)$.

108. (Moldávia-2000) Dois círculos se intersectam nos pontos M e N. A reta que passa por M intersecta os círculos nos pontos A e B de modo que $M \in (AB)$. Os pontos C e D são os pontos médios dos arcos AN e BN respectivamente e que não contém o ponto M e os pontos K e L são os pontos médios dos segmentos AB e CD respectivamente. Prove que $CL = KL$.

109. (Suíça-2000) Seja $q(n)$ a soma dos algarismos de n. Qual o valor de $q(q(q(2000^{2000})))$?

110. (Grécia-2000) Determine o número primo p para o qual o número $1+p+p^2+p^3+p^4$ é um quadrado perfeito.

111. (Repúblicas Tcheca e Eslovaca-2000) Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ dois trinômios quadráticos tais que três das raízes da equação $P(Q(x))=0$ são os números -22, 7 e 13. Determine a quarta raiz desta equação.

112. (Repúblicas Tcheca e Eslovaca-2000) Sabendo que a, b e c são números reais positivos, resolva o sistema no conjunto dos números reais positivos :

$$\begin{cases} \sqrt{xy}+\sqrt{xz}-x &= a \\ \sqrt{yz}+\sqrt{yx}-y &= b \\ \sqrt{zx}+\sqrt{zy}-z &= c \end{cases}$$

113. (Polônia-2000) Uma seqüência $(p_1, p_2, ..., p_n)$ de números primos satisfaz à seguinte condição: para $n \geq 3$, p_n é o maior divisor primo de $p_{n-1}+p_{n-2}+2000$. Mostre que a seqüência (p_n) é limitada.

114. (Israel-2000) ABC é um triângulo do Plano Cartesiano cujos vértices são pontos de coordenadas inteiras. As medidas de dois dos lados AB, BC e CA pertencem ao conjunto $\{\sqrt{17}, \sqrt{1999}, \sqrt{2000}\}$. Qual o valor máximo possível da área de ABC ?

115. (Inglaterra-2000) Sejam P e Q os pontos de tangência da tangente comum a dois círculos C_1 e C_2 que se intersectam nos pontos M e N sendo N mais próximo de PQ do que M. Mostre que os triângulos MNP e MNQ possuem áreas iguais.

116. (Inglaterra-2000) Quais os inteiros positivos a e b tais que

$$\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}-1\right)^2 = 49+20\sqrt[3]{6}\,.$$

117. (Alemanha-2000) Determine os números reais x tais que:

$$\left|\left|\left|\left|\left|\left|\left|x^2-x-1\right|-3\right|-5\right|-7\right|-9\right|-11\right|-13\right| = x^2-2x-48$$

118. (Alemanha-2000) Um quadrilátero convexo $ABCD$ está inscrito em um semicírculo de diâmetro AB. Sejam S o ponto de interseção de AC e BD e T o pé da perpendicular baixada de S a AB. Mostre que ST divide o ângulo $\angle CTD$ ao meio.

119. (Inglaterra-1970) As medidas dos ângulos $\angle B$ e $\angle C$ de um triângulo isósceles ABC são iguais a 50°. Sejam D e E pontos sobre os lados BC e AC respectivamente de modo que $\angle BAD = 50^\circ$ e $\angle ABE = 30^\circ$. Determine a medida do ângulo $\angle BED$.

120. (Polônia-2000) Seja $\mathbb{N}$ o conjunto de todos os inteiros positivos. Prove ou disprove a seguinte afirmação :
"Existe uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que a igualdade $f(f(n)) = 2n$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$".

***Agora vamos aos comentários e soluções dos leitores para alguns dos problemas apresentados em nossa seção nos números anteriores da* EUREKA !.**

1. (Bulgária-1998) Seja $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Determine o número de soluções reais e distintas da equação $f(f(x)) = 0$.

Solução de Geraldo Perlino Júnior (São Paulo - SP):

A resposta é 7. Utilizando cálculo, a derivada de $f(x)$ é $3x^2 - 3$, e então seus pontos críticos ocorrem em $(-1,3)$ e $(1,-1)$, respectivamente máximo e mínimo. Mas $f(-2) = -1$, $f(0) = 1$ e $f(2) = 3$ assim, as raízes de f pertencem aos intervalos $(-2,-1)$, $(0,1)$ e $(1,2)$. Se contarmos o número de vezes que f atravessa completamente cada intervalo obteremos a nossa resposta. Com efeito, f atravessa $(-2,-1)$ uma vez (quando $x < -2$), atravessa o intervalo $(0,1)$ três vezes (quando $-2 < x < -1$, $0 < x < 1$ e $1 < x < 2$); atravessa o intervalo $(1,2)$ três vezes também e portanto a equação $f(f(x)) = 0$ possui 7 raízes.

2. (Repúblicas Tcheca e Eslovaca-1998) Determine todos os números reais x tais que $x\lfloor x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor = 88$.

Solução de Israel Franklin Dourado Carra (Fortaleza - CE):

A resposta é $\frac{22}{7}$. Com efeito,

$\lfloor x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor = \frac{88}{x} \Rightarrow x$ é da forma $\frac{88}{k}$ com $k \le x^3$.

1) Se $x \ge 0$ então $x \ge 3$ pois, se $x < 3$ teríamos

$x\lfloor x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor < 3^4 = 81$

Como $\frac{88}{3} = 29\frac{1}{3}$ tem-se que $29 \ge x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor \ge 27$ e daí :

$\lfloor x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor = 27 \Rightarrow x = \frac{88}{27}$ (não serve)

$\lfloor x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor = 28 \Rightarrow x = \frac{88}{28} = \frac{22}{7}$

$\lfloor x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor = 29 \Rightarrow x = \frac{88}{29}$ (não serve)

2) Se $x \le 0$ então

$x < -3 \Rightarrow \lfloor x\rfloor \le -4 \Rightarrow x\lfloor x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor \ge 3^3 \cdot 4 > 88$

por outro lado,

$x \ge -3 \Rightarrow \lfloor x\rfloor \ge -3 \Rightarrow x\lfloor x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor \le 3^4 = 81$

e portanto, não há soluções negativas.

27. (Polônia-2000) Prove ou disprove a seguinte afirmativa :

Todo número racional positivo pode ser escrito sob a forma $\frac{a^2+b^3}{c^5+d^7}$ onde a, b, c e d são inteiros positivos.

Solução de Márcio Miranda de Carvalho (Teresina - PI):

A afirmativa é verdadeira.

Fazendo $a = x^3y^2$, $b = x^5y^2$, $c = xy$ e $d = x^2y$ para quaisquer inteiros positivos x e y, temos:

$$\frac{a^2+b^3}{c^5+d^7}=\frac{\left(x^3y^2\right)^2+\left(x^5y^2\right)^3}{(xy)^5+\left(x^2y\right)^7}=\frac{x^6y^4+x^{15}y^6}{x^5y^5+x^{14}y^7}=\frac{x}{y}$$

Como todo número racional pode ser obtido pelo quociente de dois números inteiros positivos, a afirmação está provada.

8. **(Rússia-1998)** Um número de 10 algarismos é dito *interessante* se todos os seus algarismos são distintos e ele é um múltiplo de 11111. Quantos números *interessantes* existem ?

Solução de Marcílio Miranda de Carvalho (Teresina - PI):

A resposta é 3456. Seja I um número interessante então

$I \equiv 0+1+2+\cdots+9 \equiv 0 \pmod 9$

Logo, $I = 99999\cdot N = \left(10^5-1\right)\cdot N$ para algum número natural N de 5 algarismos.

Digamos, $N = a_1a_2a_3a_4a_5$ logo,

$I = 10^9a_1+\cdots+10^5a_5-10^4a_1-\cdots-10a_4-a_5$

$I = 10^9a_1+\cdots+10^6a_4+10^5(a_5-1)+10^4(9-a_1)+\cdots+10(9-a_4)+10-a_5$.

Sejam $d_1, d_2, ..., d_9, d_{10}$ os dígitos de I, nesta ordem, então $d_1+d_6=9$, $d_2+d_7=9$, $d_3+d_8=9$, $d_4+d_9=9$ e $d_5+d_{10}=9$. Como os únicos pares de dígitos cuja soma é 9 são (0,9), (1,8), (2,7), (3,6) e (4,5) o número de possibilidades para $d_1, d_2, ..., d_9, d_{10}$ é $9\cdot8\cdot6\cdot4\cdot2\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1 = 3456$

18. (Armênia-1999) Resolva a equação $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{\left(4-\sqrt{3}x\right)^2}=1$

Solução de Geraldo Perlino (São Paulo - SP):

As soluções da equação são $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(1-2\cos 20^\circ\right)$, $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(1+2\cos 40^\circ\right)$ e $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(1+2\cos 80^\circ\right)$.

Com efeito fazendo-se $4-\sqrt{3}x = y+2$ temos que $x = \dfrac{2-y}{\sqrt{3}}$ para $x \neq 0$ e $x \neq \dfrac{4}{\sqrt{3}}$. Fazendo as devidas substituições e simplificando chegamos a $y(y^3 - 12y - 8) = 0$ o que implica em $y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ e $y^3 - 12y - 8 = 0$. Aplicando-se a fórmula da equação do terceiro grau nesta última temos:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{-8}{2} + \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 + \left(\frac{-12}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{-8}{2} - \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 + \left(\frac{-12}{3}\right)^3}}$$

ou

$$y = \sqrt[3]{4}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{3}i} + \sqrt[3]{1-\sqrt{3}i}\right) = \sqrt[3]{4}\left(\sqrt[3]{2}cis\frac{\theta}{3} + \sqrt[3]{2}cis\left(-\frac{\theta}{3}\right)\right)$$

onde $\theta = 2k\pi + \dfrac{\pi}{3}$. Daí, $y = 4\cos\dfrac{\pi(1+6k)}{9}$ para $k = 0,1,2$ e assim obtemos as outras raízes.

Obs: Também é possível chegar às soluções fazendo

$$\frac{1}{x} = \cos\theta,\ \frac{1}{4-\sqrt{3}x} = sen\theta \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{\cos\theta} + \frac{1}{sen\theta} = 4 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}sen\theta + \dfrac{1}{2}\cos\theta = 2sen\theta\cos\theta \Leftrightarrow sen(\theta + 30°) = sen(2\theta)$. Podemos fazer $\theta = 30°, \theta = 50°$, $\theta = 170°$ ou $\theta = 290°$, e obtemos as mesmas soluções (ainda que escritas numa outra forma:

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\cos 30°}, \frac{2\sqrt{3}}{3}(1+2\cos 40°) = \frac{1}{\cos 290°} = \frac{1}{\cos 70°},$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}(1-2\cos 20°) = \frac{1}{\cos 170°} = -\frac{1}{\cos 10°} \text{ e } \frac{2\sqrt{3}}{3}(1+2\cos 80°) = \frac{1}{\cos 50°}).$$

20. (Espanha-2000) Mostre que existe uma seqüência de inteiros positivos $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ tal que $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2$ é um quadrado perfeito para todo inteiro positivo n.

Solução de Marcílio Miranda de Carvalho (Teresina - PI):

Consideremos a seguinte seqüência:

$$a_1 = 3 \text{ e } a_n = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} (a_k)^2 - 1}{2}, \forall n \in \{2,3,4,...\}$$

Desta forma teremos :

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n-1} (a_k)^2 \right) + (a_n)^2 = (2a_n + 1) + (a_n)^2 = (a_n + 1)^2$$

o que conclui a demonstração. (note que a_n é sempre par, e também é igual a $\frac{a_{n-1}(a_{n-1} + 2)}{2}$, para todo $n \geq 3$).

25. (Espanha-2000) Determine o maior número inteiro N que satisfaz as seguintes condições :

(a) $\left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor$ possui seus três algarismos iguais.

(b) $\left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor$ é igual à soma de n números naturais consecutivos a partir de 1.

Solução de Wallace Rodrigues de Holanda Miranda (Teresina - PI):

De acordo com as condições (a) e (b), tem-se que

$$\left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor = \frac{n(n+1)}{2} = 111 \cdot k, k \in \mathbb{N}; 1 \leq k \leq 9$$

ou seja,

$$n = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8 \cdot 111 \cdot k}}{2}$$

Como n é natural, o radicando deve ser um quadrado perfeito o que ocorre somente para k = 6 que substituído na expressão anterior nos fornece n = 36 e daí, $\left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor = 111 \cdot 6 = 666 \Rightarrow 667 > \frac{N}{3} \geq 666 \Rightarrow 2001 > N \geq 1998$

e portanto o maior N que satisfaz às condições dadas é 2000.

Atendendo a um pedido especial do leitor José Renato Carneiro e Carneiro antecipamos a solução de:

55. (Eslovênia-1999) Determine todos os inteiros x e y que satisfazem à equação $x^3 + 9xy + 127 = y^3$.

Solução de Daniel Pinheiro Sobreira (Fortaleza - CE):

As soluções da equação são $(3,7)$ e $(-7,-3)$.

Fazendo-se $y = x + a$, substituindo-se e simplificando a equação proposta chegamos a: $(9-3a)x^2 + (9a - 3a^2)x + 127 - a^3 = 0$ (*)

Esta equação deve possuir soluções reais para possuir raízes inteiras. Seu discriminante é:

$$D = (9-3a)^2 - 4 \cdot (9-3a)(127 - a^3) = (9-3a)(a^3 + 9a^2 - 508)$$

Se $a \geq 6$ então $a^3 + 9a^2 \geq 540$ e $D < 0$. Para $-2 \leq a \leq 2$ temos $9 - 3a > 0$ e $a^3 + 9a^2 = a^2(a+9) \leq 4 \cdot 11 < 508$. Para $-8 \leq a \leq -3, a^2(a+9) \leq 64 \cdot 6 < 508$, e para $a \leq -9$, $a^2(a+9) \leq 0 < 508$. Assim, $D \geq 0$ somente para $a \in \{3,4,5\}$. Para $a = 3$ obtemos uma contradição em (*) . Para $a = 4$, a equação $x^2 + 4x - 21 = 0$ é satisfeita com $x = 3$ e $x = -7$. Para $a = 5$ a equação $3x^2 + 15x - 1 = 0$ não tem nenhuma solução inteira. As únicas soluções da equação proposta são portanto $(3,7)$ e $(-7,-3)$.

Enviaram soluções de problemas os seguintes leitores da EUREKA!

Arnaldo João do Nascimento	Duque de Caxias - RJ	Prob. desde o Nº. 61 até o Nº. 90
Anderson Torres	São Paulo - SP	Prob. 62, 73, 74, 87
Bruno de Souza Ramos	Realengo - RJ	Prob. 68, 70, 73, 80, 86, 87
Carlos A. Gomes	Natal - RN	Prob. 68, 76, 78, 82
Daniel de Souza Ramos	Rio de Janeiro - RJ	Prob. 61, 63, 67, 82, 85, 90
Edson R. de Andrade Silva	Fortaleza - CE	Prob. 62, 66, 67, 70, 73, 81, 85, 86, 90
Fabrício Maia	Fortaleza - CE	Prob. 88
Geraldo Perlino	São Paulo - SP	Prob. 18, 70
Geraldo Perlino Júnior	São Paulo - SP	Prob. desde o Nº. 61 até o Nº. 90
Gibran Medeiros de Souza	Natal - RN	Prob. 62, 74
Henrique Lima Santana	Salvador - BA	Prob. 31, 64, 69, 70, 76, 78, 80, 81, 82, 85, 88
Ioziel Matos Corrêa Júnior	Salvador - BA	Prob. 52, 62, 71, 74, 76, 78
José Guilherme Moreira Pinto	Juiz de Fora - MG	Prob. 46
Marcelo R. de Souza	Rio de Janeiro - RJ	Prob. 61, 73
Marcelo Rufino de Oliveira	Belém - PA	Prob. 61, 62, 63, 64, 75, 76, 82, 84, 88, 89
Marcílio Miranda de Carvalho	Teresina - PI	Prob. 62, 69, 76, 79, 80, 82
Márcio Miranda de Carvalho	Teresina - PI	Prob. 62, 64, 68, 72
Mauro Felix de Souza	Rio de Janeiro - RJ	Prob. 61, 74
Murilo Vasconcelos Andrade	Maceió - AL	Prob. 62, 63
Oswaldo Mello Sponquiado	Olímpia - SP	Prob. 12, 25, 32, 43, 62, 68, 70, 75, 82, 83
Paulo Alexandre Araújo Souza	Teresina - PI	Prob. 33, 46, 47, 51, 52, 56
Rodrigo Aguiar Pinheiro	Fortaleza - CE	Prob. 66, 67, 68, 70, 73, 82, 86
Rony Carlos Sousa Dias	Fortaleza - CE	Prob. 62, 68, 74
Wallace R. de M. Miranda	Teresina - PI	Prob. 61, 62, 63, 64, 68, 69, 72, 76, 78, 80, 82, 87

Você sabia…

Que colocando mais zeros em 2001 encontramos algumas fatorações interessantes:

2000001 = 3. 666667 (5 zeros e 5 seis)
200000001 = 3. 66666667 (7 zeros e 7 seis)
2000000001 = 3. 666666667 (8 zeros e 8 seis)
200000000001 = 3. 66666666667 (10 zeros e 10 seis)

Esses números com muitos 6 são todos primos.
Como será que essa seqüência continua?

SOLUÇÕES DE PROBLEMAS PROPOSTOS

✐ Publicamos aqui algumas das respostas enviadas por nossos leitores.

48) Doze pintores vivem em doze casas construídas ao longo de uma rua circular e são pintadas ou de branco ou de azul. Cada mês um dos pintores, pegando consigo bastante tinta branca e azul, deixa sua casa e caminha ao longo da rua no sentido anti-horário. Desta forma, ele repinta cada casa (iniciando na sua) com a cor oposta. Finaliza o trabalho tão longo repinte alguma casa branca de azul. Em um ano, cada casa estará pintada com a sua cor original sabendo que, no começo do ano, ao menos uma casa estava pintada de azul.

Solução de Zoroastro Azambuja Neto (Rio de Janeiro - RJ):

Dizemos que uma pintura de uma casa é induzida se não é feita pelo dono da casa. Isso só acontece quando o pintor acabou de mudar a cor da casa imediatamente anterior de azul para branca.

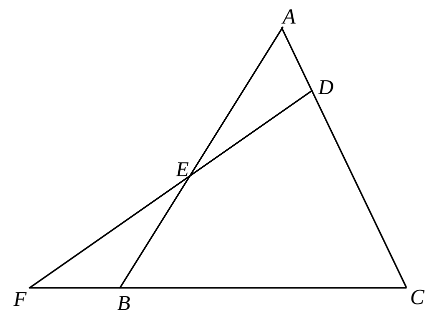
Vamos mostrar que cada casa muda de cor exatamente duas vezes, sendo uma induzida e outra não, o que claramente implica o resultado.

Primeiro vamos ver que uma casa não pode mudar de cor três vezes. Para isso, supomos por absurdo que alguma casa muda de cor pelo menos 3 vezes, e consideramos o primeiro momento em que uma casa muda de cor pela terceira vez. Nesse caso, pelo menos duas das 3 pinturas são induzidas, e portanto a casa imediatamente anterior muda duas vezes de azul para branca antes disso, e portanto muda de cor pelo menos 3 vezes antes desse momento, o que é uma contradição.

Para terminar, vamos agora ver que cada casa muda de cor duas vezes, o que equivale a dizer que muda (pelo menos) uma vez de forma induzida. Para isso, basta ver que toda casa muda alguma vez de azul para branca (pois uma casa muda de forma induzida quando a casa anterior muda de azul para branca ela muda de forma induzida). Isso é obvio para casas azuis. Vamos provar isso por indução no número de casas imediatamente anteriores que são inicialmente brancas. Para a casa imediatamente anterior esse número é menor (lembre que há pelo menos uma casa azul no início), e portanto em algum momento ela muda de azul para branca, e nossa casa muda de forma induzida, donde muda de cor pelo menos duas vezes, e portanto em algum momento muda de azul para branca ❑

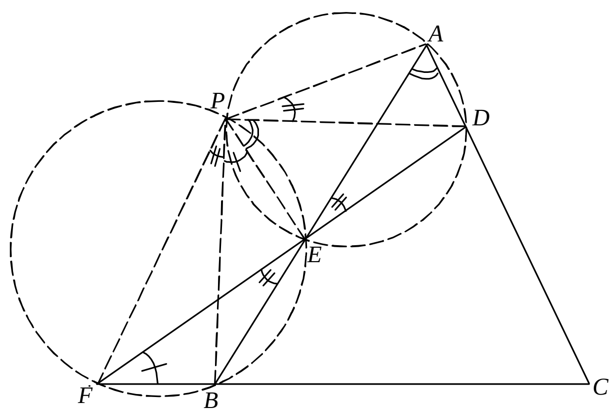
Obs. Note que essa solução não depende da ordem em que os pintores executam seu trabalho (depois de um pintor acabar de pintar, o próximo não precisa ser seu vizinho, mas é importante que cada pintor faça o processo uma vez).

52) Quatro retas se interceptam formando quatro triângulos conforme a figura abaixo.



a) Prove que as circunferências circunscritas aos quatro triângulos possuem um ponto em comum.
b) Prove que os centros dessas quatro circunferências são concíclicos (i.e. existe uma circunferência que passa por todos eles).

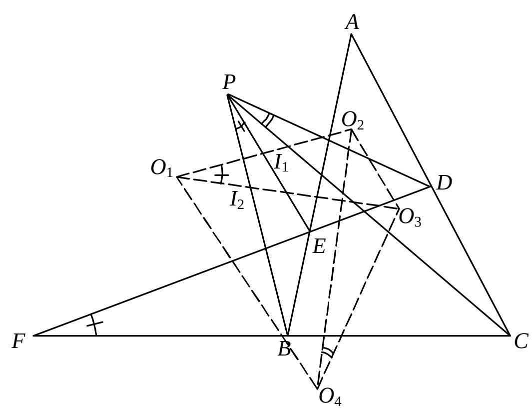
Solução de Arnaldo João do Nascimento (Duque de Caxias - RJ):



Seja P o outro ponto de interseção dos circuncírculos aos triângulos AED e FEB. Temos que #$FBEP$ é inscritível (# denota quadrilátero nesta solução), logo $E\hat{F}B = B\hat{P}E$. Da mesma forma $E\hat{P}D \equiv \hat{A}$

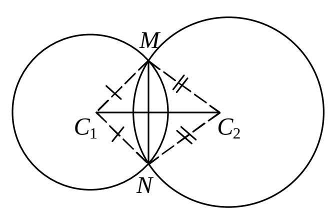
(#*ADEP* é inscritível) e $A\hat{P}D \equiv A\hat{E}D \equiv F\hat{E}B$, mas no triângulo *FBE* temos $F\hat{B}E \equiv \hat{A} + \hat{C}$ e $F\hat{E}B \equiv 180° - (\hat{A} + \hat{C} + E\hat{F}B) \Rightarrow F\hat{E}B + E\hat{F}B \equiv 180° - (\hat{A} + \hat{C})$, mas como $B\hat{P}A \equiv A\hat{P}D + E\hat{P}D + B\hat{P}E \equiv F\hat{E}B + E\hat{F}B + \hat{A} \equiv 180° - \hat{A} - \hat{C} + \hat{A} \equiv 180° - \hat{C}$, portanto #*APBC* é inscritível o que implica que o circuncírculo ao triângulo *ABC* passa por *P*. Temos ainda que $F\hat{P}B \equiv F\hat{E}B$(#*FBEP* é inscritível), logo $F\hat{P}D \equiv B\hat{P}A \equiv 180° - \hat{C}$, o que nos dá que o #*FPDC* também é inscritível, com isso os circuncírculos aos triângulos *ABC, FDC, FEB* e *AED* possuem o ponto *P* comum.

b)



Sejam:
O_1: Centro do circuncírculo a ΔBEF;
O_2: centro do circuncírculo a ΔADE;
O_3: centro do circuncírculo a ΔABC;
O_4: centro do circuncírculo a ΔCDF;

Lema: O segmento determinado pelos pontos de intersecção de dois círculos é perpendicular ao segmento determinado pelos centros dos círculos:



$\Delta C_1MC_2 \equiv \Delta C_1NC_2$ (L.L.L), logo $M\hat{C}_2C_1 \equiv N\hat{C}_2C_1$ o que significa que $\overline{C_1C_2}$ é bissetriz de ΔMC_2N, mas como este triângulo é isósceles então $\overline{C_1C_2}$ também é altura e $\overline{C_1C_2} \perp \overline{MN}$ (c.q.d).

Do lema acima temos $\overline{PB} \perp \overline{O_1O_3}$ e $\overline{PE} \perp \overline{O_1O_2}$, e portanto $B\hat{P}E = O_2\hat{O}_1O_3$ e $B\hat{P}E \equiv B\hat{F}E$ (subentendem o mesmo arco BE no círculo de centro O_1). Analogamente $D\hat{P}C \equiv O_2\hat{O}_4O_3$, mas $D\hat{P}C \equiv D\hat{F}C$ (subtendem o mesmo arco DC no círculo de centro O_4). Como $D\hat{F}C \equiv B\hat{F}E$ temos

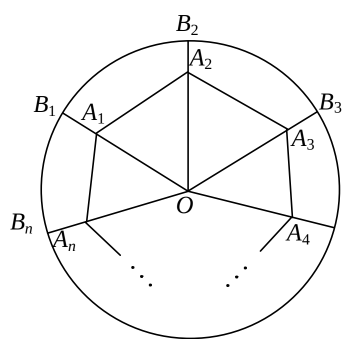
$D\hat{P}C \equiv B\hat{F}E \equiv B\hat{P}E \equiv O_2\hat{O}_1O_3 \Rightarrow O_2\hat{O}_4O_3 \equiv O_2\hat{O}_1O_3$.

Com isso provamos que $\#O_1O_2O_3O_4$ é inscritível.

53) Prove que num círculo convexo dado e para o mesmo número de lados, o polígono regular inscrito é aquele cuja superfície é máxima.

Solução de Carlos Alberto da Silva Victor (Nilópolis - RJ):

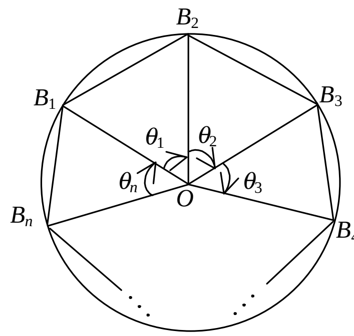
a) Observe inicialmente o polígono convexo $A_1\ A_2\ A_3\ldots A_n$ no círculo de centro O.



Tracemos os segmentos $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \overline{OA_3}, \ldots, \overline{OA_n}$ que encontram a circunferência nos pontos $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$; respectivamente.

Observe que o polígono $B_1B_2B_3\ldots B_n$ tem superfície maior que o polígono $A_1A_2\ldots A_n$; isto nos garante que o polígono de área máxima deve ser inscrito na circunferência.

b) Considere agora, o polígono convexo inscrito de n lados como na figura abaixo:



A área S do polígono é dado por $S = \frac{R^2}{2}\left(sen\theta_1 + sen\theta_2 + ... + sen\theta_n\right)$

onde $\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 2\pi$. S será máximo quando $\sum_{i=1}^{n} sen\theta_i$ for máximo.

Para este problema, vamos utilizar a "desigualdade de Jensen" que diz: suponha que f com concavidade para baixo (côncava) no intervalo I; então para todo $x_1, x_2, ..., x_n \in I$ teremos:

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n} \le f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right)$$

e a igualdade ocorrerá se e somente se $x_1 = x_2 = ... = x_n$. Para o nosso problema temos $f(x) = senx$ e $I = \left]0, \pi\right[$ onde $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n \in I$; portanto

$$\frac{sen\theta_1 + sen\theta_2 + ... + sen\theta_n}{n} \le sen\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n}{n}\right) = sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

e para o caso máximo: $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = ... = \theta_n = \frac{2\pi}{n}$; ou seja, o polígono é regular inscrito.

54) Sejam (x_n) a seqüência definida por $x_1 = 2, x_{n+1} = 2^{x_n}, \forall n \geq 1,$ e (y_n) a seqüência definida por $y_1 = 2001, y_{n+1} = 2001^{(y_n^{2001})}, \forall n \geq 1.$ Prove que existe c natural tal que $y_n \leq x_{n+c}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e determine o menor c com essa propriedade.

Solução de Alex Corrêa Abreu (Niterói - RJ):

Provaremos não que $x_{n+c} \geq y_n$ mas sim $x_{n+c} \geq 44022 \cdot y_n^{2001} = 22 \cdot 2001 \cdot y_n^{2001}$ pois é fácil ver que só com o fato $x_{n+c} \geq y_n$ não se pode fazer indução. Escolheremos c de tal modo que $x_{1+c} \geq 22 \cdot 2001 \cdot y_1^{2001}$. Suponha válida a desigualdade para um certo k então

$$x_{k+c} \geq 22 \cdot 2001 \cdot y_k^{2001} \Rightarrow x_{k+1+c} = 2^{x_{k+c}} > 2^{22 \cdot 2001 \cdot y_k^{2001}},$$

$$\text{mas } 2^{11} \geq 2001 \Rightarrow x_{k+1+c} \geq (2001^{y_k^{2001}})^{2 \cdot 2001} = y_{k+1}^{2 \cdot 2001} = y_{k+1}^{2001} \cdot y_{k+1}^{2001},$$

$$\text{mas } y_1 = 2001 \Rightarrow y_k^{2001} \geq 2001^{2001} > 22 \cdot 2001 \Rightarrow x_{k+1+c} \geq 22 \cdot 2001 \cdot y_{k+1}^{2001}$$

o que completa a indução.

Vemos que $c = 4$ satisfaz a condição pois $x_5 = 2^{65536} > 22 \cdot 2001^{2002}$ mas $x_5 = 2^{65536} < y_2 = 2001^{2001^{2001}}$ já que $65536 < 2001^{2001} < 2 < 2001$, portanto $c > 3$ e para $c = 4$ funciona $\Rightarrow c = 4$ é o menor valor.

55) Seja S o conjunto de pontos interiores de uma esfera de raio 1 e C o conjunto de pontos interiores de um círculo também de raio 1. Existe alguma função $f : S \to C$ tal que $d(A, B) \leq d(f(A), f(B))$ para quaisquer pontos $A, B \in S$? ($d(A, B)$ denota a distância euclidiana entre A e B).

Solução de Guilherme Fujiwara (São Paulo - SP):

Seja O o centro da esfera e C o da circunferência.
Tome $A, B \in S$ tal que A, B e O sejam colineares,

$$d(A;O)=d(B;O), d(A;B)=2-\varepsilon, \varepsilon \to 0, \varepsilon > 0.$$

Tome também $P, Q \in S$ tal que P, Q e O sejam colineares,

$$d(P;O)=d(Q;O), \overline{PQ} \perp \overline{AB} \text{ e } d(P;Q)=2-\varepsilon.$$

Agora note que $d(f(A); f(B)) \geq 2-\varepsilon \Rightarrow \angle f(A)\hat{C}\, f(B) \to 0,$ analogamente

$$d(f(P); f(Q)) \geq 2-\varepsilon \Rightarrow \angle f(P)\hat{C}\, f(Q) \to 0.$$

Como $d(A;P)=d(B;P)=\sqrt{2}\left(1-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$então

$$d(f(A); f(P)), d(f(B); f(P)) \geq \sqrt{2}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow f(P)\hat{C}\, f(A) \to 90°.$$

Agora vamos tomar P' e Q' do mesmo modo que tomamos P e Q, porém em um plano perpendicular ao plano de A, B e P. Temos que

$$d(P';P)=d(P';Q)=\sqrt{2}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Mas como vimos antes, $f(P')\hat{C}\, f(Q') \to 0$ e $f(P')\hat{C}\, f(A) \to 90°,$
logo $f(P') \to f(P)$ ou $f(P') \to f(Q) \Rightarrow d(f(P'); f(P)) \to 0$ ou
$d(f(P'); f(Q)) \to 0,$ o que é um absurdo, pois

$$d(f(P'); f(P)), d(f(P'); f(Q)) \geq \sqrt{2}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) \to \sqrt{2} \;\square$$

Agradecemos também o envio das soluções e a colaboração de:

Gilbert Johnson	**Church Rock, EUA**
M.L. Perez	**Rehoboth, EUA**
Marcelo R. Souza	**Rio de Janeiro - RJ**
Rildo Alves do Nascimento	**Santa Maria da Boa Vista - PE**
Rodrigo Villard	**Rio de Janeiro - RJ**

PROBLEMAS PROPOSTOS

✉ *Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e sugestões de novos problemas para os próximos números.*

56) Para cada número n, seja $f(n)$ a quantidade de maneiras que se pode expressar n como a soma de números iguais a 1, 3 ou 4.
Por exemplo, $f(4) = 4$, pois todas as maneiras possíveis são $4 = 1 + 1 + 1 + 1$, $4 = 1 + 3$, $4 = 3 + 1$, $4 = 4$. Demonstrar que se n é par, $f(n)$ é um quadrado perfeito.

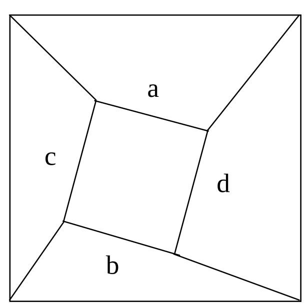
57) Dado n números reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfazendo as condições $x_1 + \ldots + x_n = 0$ e $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$, prove que existem i e j tais que $x_i x_j \le -\frac{1}{n}$.

58) Determine todos os primos p para os quais o número $\dfrac{2^{p-1} - 1}{p}$ é o quadrado de um inteiro.

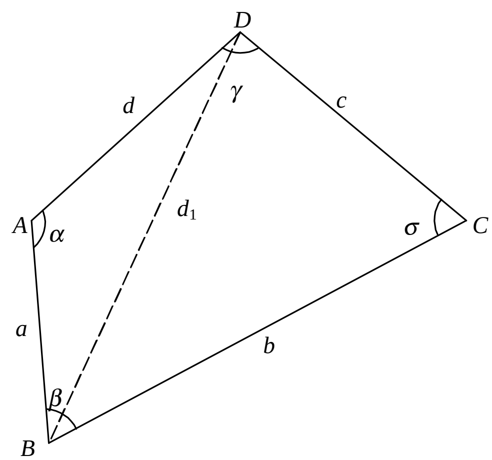
59) Um pedestal de altura a sustenta uma coluna de altura b ($b > a$). A que distância do monumento se deve colocar um observador para ver o pedestal e a coluna sob ângulos iguais?

60) Se num triângulo ABC, $A = 2B$, provar que $a^2 = b(b + c)$.
Obs.: a, b e c são, respectivamente, os lados opostos aos ângulos A, B e C.

61) Na figura abaixo um quadrado $EFGH$ foi colocado no interior do quadrado $ABCD$, determinando 4 quadriláteros. Se a, b, c, e d denotam os medidas das áreas dos quadriláteros, mostre que $a + b = c + d$.



62) Se *ABCD* é um quadrilátero convexo tal que os lados $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ e $\overline{DA}$ medem respectivamente *a*, *b*, *c* e *d* e que α, β, σ e γ são as medidas dos seus ângulos internos, mostre que a medida da área desse quadrilátero, denotada por (*ABCD*), é dada por:



$(ABCD) = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\delta}$ onde:

$p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$

$\delta = \dfrac{\alpha+\sigma}{2}$ (a fórmula também vale se fizermos $\delta = \dfrac{\beta+\gamma}{2}$)

Problemas 56 e 57 propostos por Cícero Thiago Magalhães (Fortaleza - CE); problema 58 proposto por Marcelo Rufino de Oliveira (Belém - PA); problemas 59 e 60 propostos por Osvaldo Mello Sponquiado (Olímpia - SP); problemas 61 e 62 propostos por Carlos A. Gomes (Natal - RN).

AGENDA OLÍMPICA

XXIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

NÍVEIS 1, 2 e 3
Primeira Fase – Sábado, 9 de junho
Segunda Fase – Sábado, 1 de setembro
Terceira Fase – Sábado, 20 de outubro (níveis 1, 2 e 3)
Domingo, 21 de outubro (níveis 2 e 3 - segundo dia de prova).

NÍVEL UNIVERSITÁRIO
Primeira Fase – Sábado, 1 de setembro
Segunda Fase – Sábado, 20 e Domingo, 21 de outubro

♦

VII OLIMPÍADA DE MAIO
Sábado, 12 de maio

♦

XII OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL
2 a 6 de julho
Santiago, Chile

♦

XLII OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA
1 a 14 de julho
Washington, Estados Unidos

♦

XVI OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA
22 a 30 de setembro
Minas, Uruguai

♦

IV OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
Sábado, 6 de outubro

♦ ♦ ♦

COORDENADORES REGIONAIS

Amarísio da Silva Araújo	(UFV)	Viçosa – MG
Alberto Hassen Raad	(UFJF)	Juiz de Fora – MG
Angela Camargo	(Centro de Educação de Adultos – CEA)	Blumenau – SC
Benedito Tadeu Vasconcelos Freire	(UFRN)	Natal – RN
Carlos Frederico Borges Palmeira	(PUC-Rio)	Rio de Janeiro – RJ
Claudio Arconcher	(Colégio Leonardo da Vinci)	Jundiaí – SP
Claus Haetinger	(UNIVATES)	Lajeado – RS
Cleonor Crescêncio das Neves	(UTAM)	Manaus – AM
Élio Mega	(Colégio Etapa)	São Paulo – SP
Rosângela Souza	(Colégio Singular)	Santo André – SP
Florêncio Ferreira Guimarães Filho	(UFES)	Vitória – ES
Gisele de Araújo Prateado Gusmão	(UFGO)	Goiânia – GO
Ivanilde Fernandes Saad	(UC. Dom Bosco)	Campo Grande– MS
Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia	(UFPB)	João Pessoa – PB
João Benício de Melo Neto	(UFPI)	Teresina – PI
João Francisco Melo Libonati	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Irene Nakaoka	(UEM)	Maringá – PR
José Carlos Pinto Leivas	(UFRG)	Rio Grande – RS
José Cloves Saraiva	(UFMA)	São Luis – MA
José Gaspar Ruas Filho	(ICMC-USP)	São Carlos – SP
José Luiz Rosas Pinho	(UFSC)	Florianópolis – SC
José Vieira Alves	(UFPB)	Campina Grande – PB
Marcelo Rufino de Oliveira	(Sistema Titular de Ensino)	Belém – PA
Licio Hernandes Bezerra	(UFSC)	Florianópolis – SC
Luzinalva Miranda de Amorim	(UFBA)	Salvador – BA
Marcondes Cavalcante França	(UFC)	Fortaleza – CE
Pablo Rodrigo Ganassim	(Liceu Terras do Engenho)	Piracicaba – SP
Paulo Henrique Cruz Neiva de Lima Jr.	(Escola Técnica Everardo Passos)	SJ dos Campos – SP
Reinaldo Gen Ichiro Arakaki	(INPE)	SJ dos Campos – SP
Ricardo Amorim	(Centro Educacional Logos)	Nova Iguaçu – RJ
Roberto Vizeu Barros	(Colégio Acae)	Volta Redonda – RJ
Sérgio Cláudio Ramos	(IM-UFRGS)	Porto Alegre – RS
Silvio de Barros Melo	(UFPE)	Recife – PE
Tadeu Ferreira Gomes	(UEBA)	Juazeiro – BA
Tomás Menéndez Rodrigues	(U. Federal de Rondônia)	Porto Velho – RO
Valdenberg Araújo da Silva	(U. Federal de Sergipe)	São Cristovão – SE
Wagner Pereira Lopes	(Escola Técnica Federal de Goiás)	Jataí – GO
Waldemar M. Canalli	(Prefeitura Municipal de S. João de Meriti)	SJ de Meriti – RJ