CONTEÚDO

AOS LEITORES

Realizamos durante o ano 2000 a XXII Olimpíada Brasileira de Matemática, atingindo na realização da Primeira Fase cerca de 80.000 alunos. Este ano a Olimpíada Brasileira de Matemática terá importantes modificações em relação à aplicação das provas da segunda e terceira fases (para maiores esclarecimentos leia com atenção o nosso novo regulamento publicado no site: **`http://www.obm.org.br/`**). Além disso a competição contará pela primeira vez com a participação de alunos de ensino superior, para os quais foi criado o nível Universitário. Assim, a partir deste ano, a OBM passa a ser realizada em 4 níveis de competição. O calendário para este ano é o seguinte:

NÍVEIS 1, 2 e 3

Primeira Fase – Sábado, 09 de junho
Segunda Fase – Sábado, 01 de setembro
Terceira Fase – Sábado, 20 de outubro (níveis 1, 2 e 3)
Domingo, 21 de outubro (Níveis 2 e 3 – Segundo dia de prova).

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Primeira Fase – Sábado, 01 de setembro
Segunda Fase – Sábado, 20 de outubro e Domingo, 21 de outubro

Gostaríamos de registrar a realização da IV Semana Olímpica. Neste ano o evento teve lugar no Colégio Militar de Salvador (Salvador – BA) entre os dias 19 a 26 de janeiro. Aproveitamos a oportunidade para expressar o nosso agradecimento pela calorosa acolhida.

Durante a IV Semana Olímpica, reunimos os alunos premiados na XXII OBM nos três níveis de competição. Um arquivo com as aulas ministradas durante o evento pode ser consultado no seguinte endereço eletrônico:
`http://www.obm.org.br/semana.htm`

Por fim, queremos agradecer aos alunos que têm nos ajudado com a revisão da revista EUREKA!

Os editores.

XXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e soluções da primeira fase – nível 1

1. Observe as multiplicações a seguir:

$$12\,345\,679 \times 18 = 222\,222\,222$$
$$12\,345\,679 \times 27 = 333\,333\,333$$
$$12\,345\,679 \times 54 = 666\,666\,666$$

Para obter 999 999 999 devemos multiplicar 12 345 679 por:
A) 29 B) 99 C) 72 D) 41 E) 81

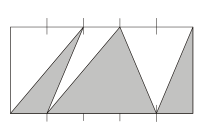
2. Outro dia ganhei 250 reais, incluindo o pagamento de horas extras. O salário (sem horas extras) excede em 200 reais o que recebi pelas horas extras. Qual é o meu salário sem horas extras?
A) 200 reais B) 150 reais C) 225 reais D) 175 reais E) 180 reais

3. Num relógio digital, que marca de 0:00 até 23:59, quantas vezes por dia o mostrador apresenta todos os algarismos iguais?
A) 10 B) 8 C) 6 D) 7 E) 9

4. A prefeitura de uma certa cidade fez uma campanha que permite trocar 4 garrafas de 1 litro vazias por uma garrafa de 1 litro cheia de leite. Até quantos litros de leite pode obter uma pessoa que possua 43 dessas garrafas vazias?
A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

5. Numa caixa havia várias bolas, sendo 5 azuis, 4 amarelas, 3 vermelhas, 2 brancas e 1 preta. Renato retirou 3 bolas da caixa. Sabendo que nenhuma delas era azul, nem amarela, nem preta, podemos afirmar a respeito dessas 3 bolas que:
A) são da mesma cor. B) são vermelhas. C) uma é vermelha e duas são brancas.
D) uma é branca e duas são vermelhas. E) pelo menos uma é vermelha.

6. Se a área do retângulo dado é 12, qual é a área da figura sombreada?



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

7. O número 10 pode ser escrito de duas formas como soma de dois números primos: 10 = 5 + 5 e 10 = 7 + 3. De quantas maneiras podemos expressar o número 25 como uma soma de dois números primos?

A) 4 B) 1 C) 2 D) 3 E) nenhuma

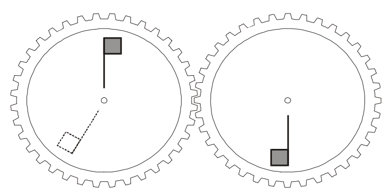
8. 1 litro de álcool custa R$0,75. O carro de Henrique percorre 25 km com 3 litros de álcool. Quantos reais serão gastos em álcool para percorrer 600 km?

A) 54 B) 72 C) 50 D) 52 E) 45

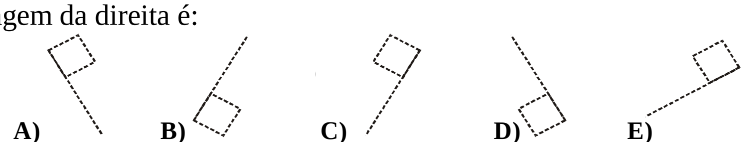
9. Um certo número N de dois algarismos é o quadrado de um número natural. Invertendo-se a ordem dos algarismos desse número, obtém-se um número ímpar. A diferença entre os dois números é o cubo de um número natural. Podemos afirmar que a soma dos algarismos de N é:

A) 7 B) 10 C) 13 D) 9 E) 11

10. Juliano colou uma bandeirinha cinza em cada engrenagem, como mostra a figura abaixo:



As engrenagens são iguais e quando a engrenagem da esquerda girou um pouco, a sua bandeirinha ficou na posição indicada com a bandeirinha branca pontilhada. Nesta condição, podemos afirmar que a posição da bandeirinha na engrenagem da direita é:



11. Uma fábrica embala 8 latas de palmito em caixas de papelão cúbicas de 20 cm de lado. Para que possam ser melhor transportadas, essas caixas são colocadas, da melhor maneira possível, em caixotes de madeira de 80 cm de largura por 120 cm de comprimento por 60 cm de altura. O número de latas de palmito em cada caixote é

A) 576 B) 4.608 C) 2.304 D) 720 E) 144

12. Há 18 anos Hélio tinha precisamente três vezes a idade de seu filho. Agora tem o dobro da idade desse filho. Quantos anos têm Hélio e seu filho?

A) 72 anos e 36 anos. B) 36 anos e 18 anos. C) 40 anos e 20 anos.
D) 50 anos e 25 anos. E) 38 anos e 19 anos.

13. Se os números naturais são colocados em colunas, como se mostra abaixo, debaixo de que letra aparecerá o número 2000?

A	***B***	***C***	***D***	***E***	***F***	***G***	***H***	***I***
1		**2**		**3**		**4**		**5**
	9		**8**		**7**		**6**	
10		**11**		**12**		**13**		**14**
	18		**17**		**16**		**15**	
19		**20**		**21**		**...**		**...**

A) *F* B) *B* C) *C* D) *I* E) *A*

14. O emir Abdel Azir ficou famoso por vários motivos. Ele teve mais de 39 filhos, incluindo muitos gêmeos. De fato, o historiador Ahmed Aab afirma num dos seus escritos que todos os filhos do emir eram gêmeos duplos, exceto 39; todos eram gêmeos triplos, exceto 39; todos eram gêmeos quádruplos, exceto 39. O numero de filhos do emir é:
A) 111 B) 48 C) 51 D) 78 E) 75

15. Quatro amigos vão visitar um museu e um deles resolve entrar sem pagar. Aparece um fiscal que quer saber qual deles entrou sem pagar.

– Eu não fui, diz o Benjamim.
– Foi o Carlos, diz o Mário.
– Foi o Pedro, diz o Carlos.
– O Mário não tem razão, diz o Pedro.

Só um deles mentiu. Quem não pagou a entrada do museu?

A) Mário B) Pedro C) Benjamim D) Carlos
E) não é possível saber, pois faltam dados

16. Em um jogo de duas pessoas, os jogadores tiram, alternadamente, 1, 2, 3, 4 ou 5 palitos de uma pilha que inicialmente tem 1000 palitos. Ganha o jogador que tirar o último palito da pilha. Quantos palitos o jogador que começa deve tirar na sua jogada inicial de modo a assegurar sua vitória?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

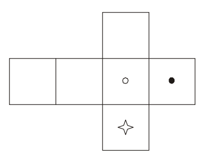
17. Quantos números inteiros e positivos menores do que 1.000.000 existem cujos cubos terminam em 1?
A) 1.000 B) 10.000 C) 50.000 D) 100.000 E) 500.000

18. Os 61 aprovados em um concurso, cujas notas foram todas distintas, foram distribuídos em duas turmas, de acordo com a nota obtida no concurso: os 31 primeiros foram colocados na turma A e os 30 seguintes na turma B. As médias das duas turmas no concurso foram calculadas. Depois, no entanto, decidiu-se passar o último colocado da turma A para a turma B. Com isso:

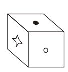
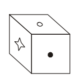
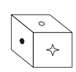
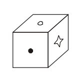
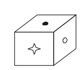
A) A média da turma A melhorou, mas a da B piorou.
B) A média da turma A piorou, mas a da B melhorou.
C) As médias de ambas as turmas melhoraram.
D) As médias de ambas as turmas pioraram.
E) As médias das turmas podem melhorar ou piorar, dependendo das notas dos candidatos.

19. Escrevem-se, em ordem crescente, os números inteiros e positivos que sejam múltiplos de 7 ou de 8 (ou de ambos), obtendo-se 7, 8, 14, 16, ... O 100º número escrito é:
A) 406 B) 376 C) 392 D) 384 E) 400

20. A figura abaixo foi desenhada em cartolina e dobrada de modo a formar um cubo.



Qual das alternativas mostra o cubo assim formado?

A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

GABARITO

NÍVEL 1

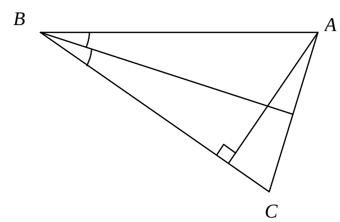
1) E	**6) D**	**11) A**	**16) D**
2) C	**7) B**	**12) A**	**17) D**
3) B	**8) A**	**13) C**	**18) C**
4) D	**9) D**	**14) C**	**19) E**
5) E	**10) A**	**15) B**	**20) B**

XXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e soluções da primeira fase – nível 2

1. Veja o problema 17 do nível 1.
2. Veja o problema 11 do nível 1.
3. Veja o problema 10 do nível 1.
4. Veja o problema 15 do nível 1.
5. Veja o problema 18 do nível 1.

6. No triângulo *ABC* representado ao lado, a Medida do ângulo $\hat{C}$ é 60° e a bissetriz do ângulo $\hat{B}$ forma 70° com a altura relativa ao vértice *A*. A medida do ângulo $\hat{A}$ é:



A) 50° B) 30° C) 40° D) 80° E) 70°

7. Veja o problema 6 do nível 1.

8. Alberto, Beatriz e Carlos correm numa pista circular. Todos saem ao mesmo tempo e do mesmo lugar, cada um desenvolvendo velocidade constante. Alberto e Beatriz correm no mesmo sentido. Correndo no sentido oposto, Carlos encontra Alberto, pela primeira vez, exatamente 90 segundos após o início da corrida e encontra Beatriz exatamente 15 segundos depois. Quantos segundos são necessários para que Alberto ultrapasse Beatriz pela primeira vez?
A) 105 B) 630 C) 900 D) 1.050
E) não pode ser determinado

9. *DEFG* é um quadrado no exterior do pentágono regular *ABCDE*. Quanto mede o ângulo $E\hat{A}F$?
A) 9^{o} B) 12^{o} C) 15^{o} D) 18^{o} E) 21^{o}

10. Quantos são os números inteiros de 2 algarismos que são iguais ao dobro do produto de seus algarismos?
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

11. Veja o problema 19 do nível 1.

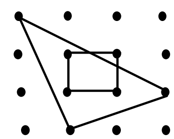
12. Uma caixa contém 900 cartões, numerados de 100 a 999. Retiram-se ao acaso (sem reposição) cartões da caixa e anotamos a soma dos seus algarismos. Qual é a menor quantidade de cartões que devem ser retirados da caixa, para garantirmos que pelo menos três destas somas sejam iguais?

A) 51 B) 52 C) 53 D) 54 E) 55

13. Se x e y são números reais positivos, qual dos números a seguir é o maior?

A) xy B) $x^2 + y^2$ C) $(x + y)^2$ D) $x^2 + y(x + y)$ E) $\dfrac{x^3 + y^3}{x + y}$

14. Na figura, as distâncias entre dois pontos horizontais consecutivos e as distâncias entre dois pontos verticais consecutivos são iguais a 1. A região comum ao triângulo e ao quadrado tem área:



A) $\dfrac{9}{10}$ B) $\dfrac{15}{16}$ C) $\dfrac{8}{9}$ D) $\dfrac{11}{12}$ E) $\dfrac{14}{15}$

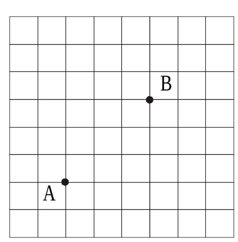
15. Sejam a e b números reais positivos tais que $\dfrac{a}{b} < 1$. Então $\dfrac{a+1}{b+1}$

A) é igual a $\dfrac{a}{b} + 1$. B) é igual a $\dfrac{a}{b}$. C) é menor que $\dfrac{a}{b}$.

D) é maior que $\dfrac{a}{b}$ mas menor que 1. E) pode ser maior que 1.

16. Veja o problema 16 do nível 1.

17. Quantos são os retângulos que têm os pontos A e B como vértices, e cujos vértices estão entre os pontos de interseção das 9 retas horizontais com as 9 retas verticais da figura abaixo?



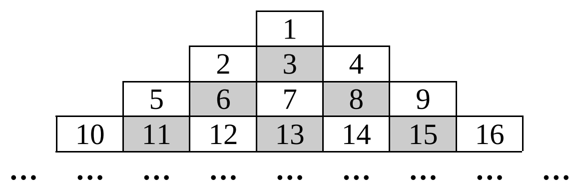
A) 3 B) 4 C) 7 D) 2 E) 5

18. Veja o problema 14 do nível 1.

19. De Itacimirim a Salvador, pela estrada do Coco, são 60 km. Às 11 horas, a 15 km de Salvador, dá-se um acidente que provoca um engarrafamento, que cresce à velocidade de 4 km/h, no sentido de Itacimirim. A que horas, aproximadamente, devemos sair de Itacimirim para chegar a Salvador ao meio-dia, sabendo que viajamos a 60 km/h, exceto na zona de engarrafamento, onde a velocidade é 6 km/h?

A) 10h43min B) 10h17min C) 10h48min D) 10h53min E) 11h01min

20. Colocamos em ordem crescente os números escritos nas casas brancas do tabuleiro a seguir (estamos mostrando apenas as suas quatro primeiras linhas). Assim, por exemplo, o nono número da nossa lista é 14. Qual é o 2000º número da nossa lista?



A) 3931 B) 3933 C) 3935 D) 3937 E) 3939

GABARITO

NÍVEL 2

1) D	**6) D**	**11) E**	**16) D**
2) A	**7) D**	**12) C**	**17) E**
3) A	**8) B**	**13) C**	**18) C**
4) B	**9) A**	**14) D**	**19) A**
5) C	**10) B**	**15) D**	**20) D**

XXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e soluções da primeira fase – nível 3

1. Veja o problema 13 do nível 2.
2. Veja o problema 9 do nível 2.
3. Veja o problema 14 do nível 2.

4. Escrevemos uma lista com todos os números inteiros de 1 a 30, inclusive. Em seguida, eliminamos alguns destes números de forma que não sobrem dois números tais que um seja o dobro do outro. Qual é a quantidade máxima de inteiros que podem permanecer na lista?
A) 15 B) 18 C) 19 D) 20 E) 21

5. Veja o problema 15 do nível 2.

6. Seja f uma função real que tem as seguintes propriedades:
i) Para todos x, y reais, $f(x + y) = x + f(y)$;
ii) $f(0) = 2$.
Quanto vale $f(2000)$?
A) 0 B) 2 C) 1998 D) 2000 E) 2002

7. Há três cartas viradas sobre uma mesa. Sabe-se que em cada uma delas está escrito um número inteiro positivo. São dadas a Carlos, Samuel e Tomás as seguintes informações:

i) todos os números escritos nas cartas são diferentes;
ii) a soma dos números é 13;
iii) os números estão em ordem crescente, da esquerda para a direita.

Primeiro, Carlos olha o número na carta da esquerda e diz: “Não tenho informações suficientes para determinar os outros dois números.” Em seguida, Tomás olha o número na carta da direita e diz: “Não tenho informações suficientes para determinar os outros dois números.” Por fim, Samuel olha o número na carta do meio e diz: “Não tenho informações suficientes para determinar os outros dois números.” Sabendo que cada um deles sabe que os outros dois são inteligentes e escuta os comentários dos outros, qual é o número da carta do meio?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5
E) Não há informações suficientes para determinar o número.

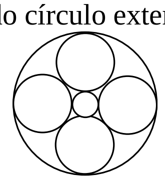
8. Veja o problema 16 do nível 2.
9. Veja o problema 12 do nível 2.

10. A notação $\lfloor x \rfloor$ significa o maior inteiro que não supera x. Por exemplo, $\lfloor 3{,}5 \rfloor = 3$ e $\lfloor 5 \rfloor = 5$. O número de inteiros positivos x para os quais $\left\lfloor x^{\frac{1}{2}} \right\rfloor + \left\lfloor x^{\frac{1}{3}} \right\rfloor = 10$ é:

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

11. Veja o problema 20 do nível 2.
12. Veja o problema 18 do nível 1.

13. A figura abaixo mostra o logotipo de uma empresa, formado por dois círculos concêntricos e por quatro círculos de mesmo raio, cada um deles tangente a dois dos outros e aos dois círculos concêntricos. O raio do círculo interno mede 1 cm. Então o raio do círculo externo deverá medir, em cm:



A) $2\sqrt{2} + 3$ B) $\sqrt{2} + 2$ C) $4\sqrt{2} + 1$ D) $3\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2} + 1$

14. Veja o problema 8 do nível 2.
15. Veja o problema 10 do nível 2.

16. Dois nadadores, inicialmente em lados opostos de uma piscina, começam simultaneamente a nadar um em direção ao outro. Um deles vai de um lado a outro da piscina em 45 segundos e o outro em 30 segundos. Eles nadam de um lado para outro por 12 minutos, sem perder qualquer tempo nas viradas. Quantas vezes eles passam um pelo outro (indo no mesmo sentido ou em sentidos opostos) durante este tempo, contando as vezes em que se encontram nos extremos da piscina.

A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 20

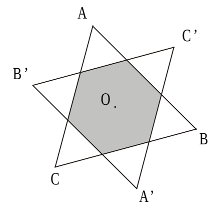
17. A soma de dois números naturais é 29. O mínimo valor para a soma de seus quadrados é:

A) 785 B) 733 C) 647 D) 421 E) 334

18. Veja o problema 1 do nível 2.
19. Veja o problema 17 do nível 2.

20. Veja o problema 10 do nível 1.

21. Na figura temos que os triângulos *ABC* e *A'B'C'* são equiláteros e a região destacada é um hexágono regular. A razão entre a área da região destacada e a área do triângulo *ABC* é igual a:



A) 1 B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

22. Veja o problema 14 do nível 1.
23. Veja o problema 19 do nível 2.

24. Seja $P(x) = a_{2000}x^{2000} + a_{1999}x^{1999} + a_{1998}x^{1998} + \ldots + a_1x + a_0$. Então $a_{2000} + a_{1998} + a_{1996} + \ldots + a_0$ é igual a

A) $\frac{P(1)-P(-1)}{2}$ B) $\frac{P(1)+P(-1)}{2}$ C) $P(2000) + P(1998) + \ldots + P(0)$

D) $P(0) \cdot P(1)$ E) $P(-1) \cdot P(1)$

25. Quantos números de três algarismos (que não começam com 0) possuem um algarismo que é a média aritmética dos outros dois?

A) 121 B) 117 C) 112 D) 115 E) 105

GABARITO

NÍVEL 3

1) C	**6) E**	**11) D**	**16) E**	**21) B**
2) A	**7) C**	**12) C**	**17) D**	**22) C**
3) D	**8) D**	**13) A**	**18) D**	**23) A**
4) D	**9) C**	**14) B**	**19) E**	**24) B**
5) D	**10) E**	**15) B**	**20) A**	**25) A**

XXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e soluções da segunda fase – nível 1

PROBLEMA 1:

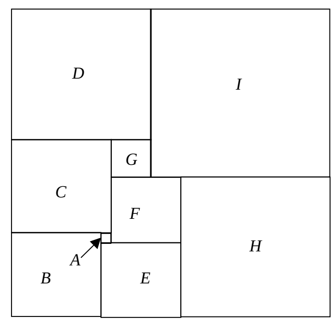
De quantas maneiras diferentes podemos construir um paralelepípedo usando exatamente 24 blocos cúbicos de medidas $1 \times 1 \times 1$?

Obs: Blocos de dimensões $2 \times 3 \times 4$ e $2 \times 4 \times 3$ devem ser considerados iguais.

PROBLEMA 2:

O retângulo ao lado está dividido em 9 quadrados, *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H* e *I*. O quadrado *A* tem lado 1 e o quadrado *B* tem lado 9.

Qual é o lado do quadrado *I*?



PROBLEMA 3:

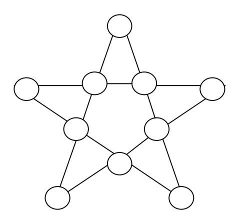
Pintamos de vermelho ou azul 100 pontos em uma reta. Se dois pontos vizinhos são vermelhos, pintamos o segmento que os une de vermelho. Se dois pontos vizinhos são azuis, pintamos o segmento de azul. Finalmente, se dois pontos vizinhos têm cores distintas, pintamos o segmento de verde. Feito isto, existem exatamente 20 segmentos verdes. O ponto na ponta esquerda é vermelho.

É possível determinar com estes dados a cor do ponto na ponta direita?

Em caso afirmativo, qual a cor deste ponto?

PROBLEMA 4:

Desejamos escrever os inteiros de 1 a 10 nas casas do desenho ao lado de tal forma que quaisquer quatro números alinhados aparecem em ordem crescente ou decrescente.



a) Mostre uma maneira de dispor os números respeitando estas condições.

b) Quais números podem aparecer nas pontas da estrela?

c) Quais números podem aparecer nas outras cinco posições?

PROBLEMA 5:

Qual é o menor inteiro positivo que é o dobro de um cubo e o quíntuplo de um quadrado?

PROBLEMA 6:
Qual é o maior inteiro positivo n tal que os restos das divisões de 154, 238 e 334 por n são iguais?

SOLUÇÕES DA SEGUNDA FASE - NÍVEL 1

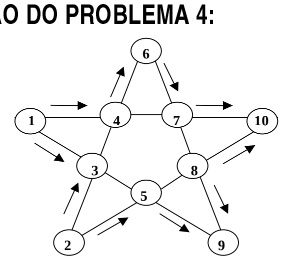
SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:
Sejam $a \le b \le c$ as dimensões do paralelepípedo. Temos que $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ e $abc = 24$. Como $abc \ge a.a.a \Leftrightarrow a^3 \le 24,$ temos $a \le 2,$ ou seja $a = 1$ ou $a = 2$. Se $a = 1,$ $bc = 24.$ As possibilidades para b e c são $b = 1$ e $c = 24;$ $b = 2$ e $c = 12;$ $b = 3$ e $c = 8;$ $b = 4$ e $c = 6.$ Se $a = 2,$ $bc = 12.$ As possibilidades para b e c com $b \ge 2$ são $b = 2$ e $c = 6;$ $b = 3$ e $c = 4.$ Assim, há 6 maneiras de construirmos o paralelepípedo.

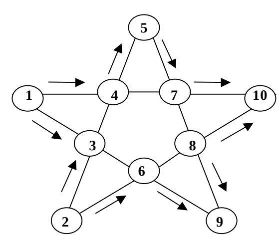
SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:
O quadrado A medida de lado 1cm enquanto que o quadrado B tem medida de lado 9cm. Daí que as longitudes dos lados dos quadrados restantes são:

C = 10cm	E = 8cm.
F = 7cm	G = 4cm.
D = 14cm.	I = 18cm.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:
Temos que os segmentos verdes dividem os pontos da reta em conjuntos de pontos com cores iguais, sendo que o primeiro conjunto à esquerda contém pontos vermelhos, o segundo conjunto contém pontos azuis, o terceiro conjunto contém pontos vermelhos, e assim por diante. Como há 20 segmentos verdes, temos 21 conjuntos de pontos.
Assim, como o 21º conjunto contém pontos vermelhos, o ponto na ponta direita é vermelho.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:





1) **1 e 2 ocupam pontas vizinhas.** É fácil ver que colocando o 2 no meio ou em uma ponta "oposta"a 1 o problema não tem solução.

2) **9 e 10 ocupam pontas vizinhas**. Pelo mesmo raciocinio anterior.
3) Uma vez que 1 e 2 estão colocados o **3 está no meio, entre o 1 e o 2**. Observe que colocar o 3 em qualquer outra posição leva a um absurdo.
4) Uma vez que 1, 2 e 3 estão colocados, fica claro que o **4 é vizinho ao 3**.
5) Se 1, 2, 3 e 4 já estão colocados, **5 pode estar no meio ou em uma ponta, e o mesmo ocorre com o 6**. (ver figuras) Quando um deles está numa ponta, o outro está no meio.
6) **O 7 está no meio**.

Respostas:
a) Ver figuras
b) 1, 2, 9 e 10 obrigatórios mais 5 ou 6.
c) 3, 4, 7, 8 obrigatórios mais 5 ou 6.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5:

Decomponha N em primos = $2^{a_2}3^{a_3}...$
Dobro de um cubo quer dizer que todos os a_i são múltiplos de 3 exceto a_2 que deixa resto 1 na divisão por 3.
Quíntuplo de um quadrado quer dizer que todos são pares exceto a_5.
Os menores expoentes possíveis são então $a_2 = 4$; $a_5 = 3$ e os outros $a_3 = a_7 =...= 0$.
Resposta: $N = 2^4\ 5^3 = 2000$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6:

Dois números deixam o mesmo resto quando divididos por n se e só se sua diferença é múltipla de n. Logo, as diferenças $238 – 154 = 84$ e $334 – 238 = 96$ são ambas múltiplas de n. Como n é o maior possível, concluímos que n deve ser o maior divisor comum de 84 e 96, que é 12.

XXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e soluções da segunda fase – nível 2

PROBLEMA 1:

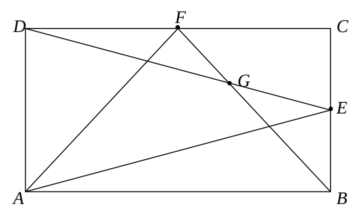
Qual é o menor inteiro positivo que é o dobro de um cubo e o quíntuplo de um quadrado?

PROBLEMA 2:

De quantas maneiras diferentes podemos construir um paralelepípedo usando exatamente 216 blocos cúbicos de medidas $1 \times 1 \times 1$? **Obs:** Blocos de dimensões $2 \times 3 \times 36$ e $2 \times 36 \times 3$ devem ser considerados iguais.

PROBLEMA 3:

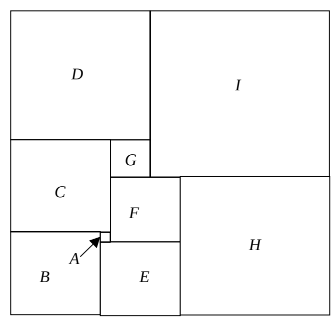
No retângulo *ABCD*, *E* é o ponto médio do lado *BC* e *F* é o ponto médio do lado *CD*. A interseção de *DE* com *FB* é *G*. O ângulo $E\hat{A}F$ mede 20º. Quanto vale o ângulo $E\hat{G}B$?



PROBLEMA 4:

O retângulo ao lado está dividido em 9 quadrados, *A, B, C, D, E, F, G, H* e *I*. O quadrado *A* tem lado 1.

Qual é o lado do quadrado *I*?



PROBLEMA 5:

Listamos os inteiros de 1 a *n*. Desta lista apagamos o inteiro *m*. A média dos $n - 1$ números restantes é $\frac{134}{11}$. Determine *n* e *m*.

PROBLEMA 6:

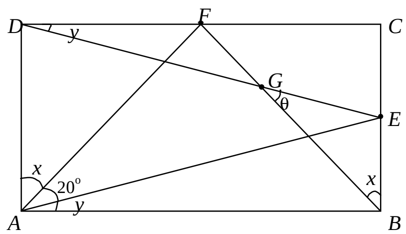
O campeonato *Venusiano* de futebol é disputado por 10 times, em dois turnos. Em cada turno cada equipe joga uma vez contra cada uma das outras. Suponha que o *Vulcano FC* vença todas as partidas do 1º. turno. Caso não vença o 2º. turno, o *Vulcano FC* jogará uma final contra o vencedor do 2º. turno, na qual terá vantagem caso faça mais pontos que o adversário durante todo o campeonato (vitória vale 3 pontos, empate vale 1 ponto e derrota 0 pontos).

a) Determine o menor n tal que, se o *Vulcano FC* fizer **exatamente** n pontos no segundo turno, garantirá pelo menos a vantagem na final (independente de contra quem e com que placares conquiste os n pontos).
b) Determine o menor n tal que, se o *Vulcano FC* fizer **pelo menos** n pontos no segundo turno, garantirá pelo menos a vantagem na final (independente de contra quem e com que placares conquiste os n pontos).

SOLUÇÕES DA SEGUNDA FASE - NÍVEL 2

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1: Veja a solução do problema 5 do nível 1.
SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:
Sejam $a \le b \le c$ as medidas do paralelepípedo. Temos então que a, b e c são inteiros positivos e $abc = 216$. Como $a \cdot b \cdot c \ge a \cdot a \cdot a \Leftrightarrow a \le 6$ e $a \mid 216$, temos $a = 1,$ $a = 2,$ $a = 3,$ $a = 4$ ou $a = 6.$ Se $a = 1,$ temos $b \cdot c = 216.$ As possibilidades neste caso são $b = 1$ e $c = 216;$ $b = 2$ e $c = 108;$ $b = 3$ e $c = 72;$ $b = 4$ e $c = 54;$ $b = 6$ e $c = 36;$ $b = 8$ e $c = 27;$ $b = 9$ e $c = 24;$ $b = 12$ e $c = 18.$ Se $a = 2,$ temos $b \cdot c = 108,$ com $b \ge 2.$ Temos então as possibilidades $b = 2$ e $c = 54;$ $b = 3$ e $c = 36;$ $b = 4$ e $c = 27;$ $b = 6$ e $c = 18;$ $b = 9$ e $c = 12.$
Se $a = 3,$ temos $b \cdot c = 72,$ com $b \ge 3.$ Temos então as possibilidades $b = 3$ e $c = 24;$ $b = 4$ e $c = 18;$ $b = 6$ e $c = 12;$ $b = 8$ e $c = 9.$ Se $a = 6,$ a única solução é $b = c = 6.$ Temos, assim, 19 maneiras de construirmos o paralelepípedo.
Observação: pode-se verificar que o número de soluções de $b.c = r$, com $b \le c$ naturais, é $\left\lceil \frac{d(n)}{2} \right\rceil,$ onde $\lceil x \rceil$ denota o menor número inteiro maior ou igual a x e $d(n)$ é o número de divisores de n. Assim, $b \cdot c = 216$ tem $\left\lceil \frac{d(216)}{2} \right\rceil = 8$ soluções; $b \cdot c = 108$ com $b \ge 2$ tem $\left\lceil \frac{d(108)}{2} \right\rceil - 1 = 5$ soluções (descontamos aqui a solução $b = 1$ e $c = 108$); $\mathrm{b} \cdot \mathrm{c} = 72$ com $b \ge 3$ tem $\left\lceil \frac{d(72)}{2} \right\rceil - 2 = 4$ soluções (eliminamos $b = 5$ e $c = 72$ e $b = 2$ e $c = 36$); $b \cdot c = 54$ com $b \ge 4$ tem $\left\lceil \frac{d(54)}{2} \right\rceil - 3 = 1$ solução (eliminamos $b = 1,$ $b = 2$ e $b = 3$) e $b \cdot c = 36$ com $b \ge 6$ tem $\left\lceil \frac{d(36)}{2} \right\rceil - 4 = 1$ solução (elimina-se b = 1, 2 ,3 ou 4).

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:



1) $F\hat{A}D = F\hat{B}C = x$ $\Rightarrow x + y = 70°$

2) $E\hat{A}B = E\hat{D}C = y$

$D\hat{E}C = 90° - y = \theta + x$

$90° - (x + y) = \theta \Rightarrow \theta = 20°$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:

Seja x o lado de B. O lado de $C = x – 1$, $D = x + 5$, $E = x – 1$, $F = x – 2$, $G = 4$, $H = 2x – 3$, $I = x + 9$ (=$D + G$) mas também é $3x – 9$ (=$F + H – G$). Assim $x + 9 = 3x – 9$ e $x = 9$. Assim, o lado de I é 18.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5:

A média aritmética dos inteiros de 1 a n é $(n + 1)/2$. Quando se apaga um destes números, a menor média possível é a dos números de 1 a $(n – 1)$, que é $n / 2$, e a maior é a dos números de 2 a n, que é $n/2 +1$. Logo, deve-se ter $\frac{n}{2} < 12\frac{2}{11} < \frac{n}{2} + 1$ o que fornece $22\frac{4}{11} \le n \le 24\frac{4}{11}$ e, portanto, n é igual a 23 ou 24. Mas a média dos números restantes é uma fração de denominador 11. Logo, a quantidade de números que restam no quadro deve ser múltipla de 11. Portanto, n só pode ser igual a 23. Finalmente, a soma dos números que restam é 22 x 12 2/11 = 268.A soma dos números de 1 a 23 é 23 x 12 = 276. Logo, o número apagado foi $m = 276 – 268 = 8$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6:

No pior caso, o 2º. colocado do 1º. turno faz 24 pontos no 1º. turno. Se o *Vulcano FC* fizer 23 pontos no 2º. turno, ele ganhará 7 jogos e empatará 2, e o 2º. colocado no 1º. turno chegará a um máximo de 25 pontos (pois no máximo empatará com o *Vulcano FC*) no segundo turno. Assim, o *Vulcano FC* terá vantagem na decisão, nesse caso. Note que se o *Vulcano FC* fizer 24 pontos no 2º. turno perdendo para o 2º. colocado do 1º. turno, este pode fazer 27 pontos no 2º. turno e ganhar a vantagem para a decisão. Se o *Vulcano FC* fizer 22 pontos ou menos e o *Klingon FC* tiver feito 24 pontos no 1o. turno poderá fazer 27 pontos no 2o. turno, somando 51 pontos, mais que os 49 (ou menos) pontos do *Vulcano FC.* Assim, a resposta da segunda pergunta é $n = 25$, enquanto a resposta da 1ª. pergunta é $n = 23$.

XXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e soluções da segunda fase – nível 3

PROBLEMA 1: Veja o problema 1 do nível 2.
PROBLEMA 2: Veja o problema 4 do nível 2.

PROBLEMA 3:
O trapézio *ABCD* tem bases *AB* e *CD*. O lado *DA* mede *x* e o lado *BC* mede 2*x*. A soma dos ângulos $D\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$ é 120º. Determine o ângulo $D\hat{A}B$.

PROBLEMA 4: Veja o problema 6 do nível 2.

PROBLEMA 5:
O número $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{2000^2}+\frac{1}{2001^2}}$ é racional; escreva-o na forma $\frac{p}{q}$, *p* e *q* inteiros.

PROBLEMA 6:
Para efetuar um sorteio entre os *n* alunos de uma escola (*n* > 1) se adota o seguinte procedimento. Os alunos são colocados em roda e inicia-se uma contagem da forma "um, DOIS, um, DOIS,...". Cada vez que se diz DOIS o aluno correspondente é eliminado e sai da roda. A contagem prossegue até que sobre um único aluno, que é o escolhido.

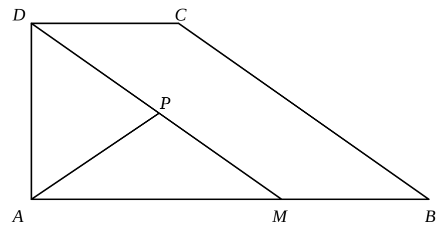
a) Para que valores de *n* o aluno escolhido é aquele por quem começou o sorteio?
b) Se há 192 alunos na roda inicial, qual é a posição na roda do aluno escolhido?

SOLUÇÕES DA SEGUNDA FASE - NÍVEL 3

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1: Veja a solução do problema 1 do nível 2.
SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2: Veja a solução do problema 4 do nível 2.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:
Tracemos *DM* // *BC* (vide figura abaixo). Como $\angle AMD = \angle ABC$ e $\angle DAM + \angle AMD = \angle DAM + \angle ABC = 120°$ tem-se que $\angle ADM = 60°$. Como *AD* = *x* e *BC* = 2*x*, sendo *P* o ponto médio de *DM*, então, *AD* = *DP* = *x* e *ADP* é um triângulo equilátero, isto é, *AP* = *x*. Portanto *APM* é um triângulo

isósceles com $\angle PAM = \angle AMP$ e como $\angle DPA$ é um ângulo externo do triângulo APM temos $60° = \angle DPA = \angle PAM + \angle AMP = 2.\ \angle AMP = 2.\ \angle ABC$. Portanto, $\angle ABC = 30°$ e $\angle DAB = 120° - \angle ABC = 90°$.



SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4: Veja a solução do problema 6 do nível 2.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5:

$$S = \sum_{a=1}^{2000} \sqrt{1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2}} = \sum_{a=1}^{2000} \sqrt{\frac{a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1}{a^2(a+1)^2}}$$

$$= \sum_{a=1}^{2000} \frac{a^2 + a + 1}{a^2 + a} = \sum_{a=1}^{2000} \left(1 + \frac{1}{a^2 + a}\right)$$

$$= 2000 + \sum_{a=1}^{2000} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}\right) = 2000 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2000} - \frac{1}{2001}\right)$$

$$= 2000 + 1 - \frac{1}{2001} = 2000 + \frac{2000}{2001}$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6:

a) Para que o primeiro da fila seja o escolhido é preciso, antes de mais nada, que haja um número par de alunos (caso contrário, ele será eliminado quando começar a segunda rodada). Mais precisamente, o primeiro da fila é o escolhido se e só se, a cada rodada, a fila tem um número par de alunos. Portanto, o primeiro da fila é escolhido se e só se o número de alunos é uma potência de 2.

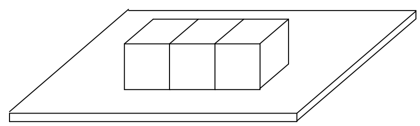
b) Como $192 = 2^6 \cdot 3$, nas primeiras 6 rodadas a fila tem um número par de alunos. Após estas 6 rodadas, a fila se reduz a três alunos e é fácil verificar que o escolhido é o terceiro deles. Resta, portanto, determinar quem são os alunos que restam após as primeiras 6 rodadas. Na primeira rodada, sobrevivem 1, 3, 5, 7, ..., 191. De um modo geral, sobrevivem à rodada de ordem n (n = 1, 2, ..., 6) os números da forma $2^n \cdot k + 1$. Portanto, após 6 rodadas os sobreviventes são 1, 65 e 129 e o aluno escolhido é o de número 129.

XXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e soluções da terceira fase – nível 1

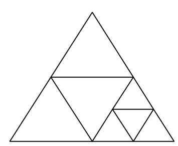
PROBLEMA 1:

Paulo tem três dados comuns idênticos nos quais a soma dos números em duas faces opostas é sempre igual a 7. Ele cola os dados, de modo que cada par de faces coladas tenha o mesmo número, e depois os coloca sobre uma mesa não transparente, conforme indica a figura. A soma dos números em todas as onze faces visíveis é 36. Qual é a soma dos números das três faces que estão em contato com a mesa?



PROBLEMA 2:

Um triângulo equilátero pode ser recortado em triângulos equiláteros menores. A figura abaixo mostra como recortar um triângulo equilátero em 7 triângulos equiláteros. Mostre como recortar um triângulo equilátero em 20 triângulos equiláteros menores.



PROBLEMA 3:

Isabel tem dois baralhos, cada um com 50 cartas. Em cada um dos baralhos estão escritos os números de 1 a 100 (em cada carta estão escritos dois números, um em cada face da carta). Por um defeito de fabricação, a distribuição dos números nas cartas não é a mesma nos dois baralhos (por exemplo, em um dos baralhos o 1 aparece na mesma carta do 2; no outro, o 1 aparece com o 76).
Mostre como Isabel deve fazer para que, ao colocar as 100 cartas sobre uma mesa, as faces voltadas para cima mostrem todos os números de 1 a 100.

PROBLEMA 4:

Considere a seguinte tabela 5×5, preenchida com os números de 1 a 25.

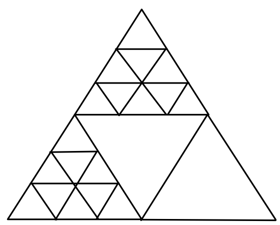
1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Em cada fileira horizontal e em cada fileira vertical, trocamos o sinal de 2 números, de forma que, em cada fileira horizontal e em cada fileira vertical, haja 3 números positivos e 2 números negativos. Somamos, então, todos os números da tabela. Calcule os possíveis valores dessa soma.

SOLUÇÕES DA TERCEIRA FASE – NÍVEL 1

PROBLEMA 1: Veja a solução do problema 1 do nível 2.

PROBLEMA 2: SOLUÇÃO DE BÁRBARA ÁRABE SARAIVA (SANTOS - SP)



Esta é uma forma de dividir um triângulo equilátero em 20 triângulos equiláteros menores.
Dividindo o maior triângulo em 4 partes (triângulos equiláteros menores), dois de esses quatro menores triângulos em nove outros menores triângulos equiláteros, obteremos 20 triângulos equiláteros:
2 maiores e 18 menores.

PROBLEMA 3: Veja a solução do problema 2 do nível 2.

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DA BANCA
Escrevemos os números da tabela na seguinte forma:

0 + 1	0 + 2	0 + 3	0 + 4	0 + 5
5 + 1	5 + 2	5 + 3	5 + 4	5 + 5
10 + 1	10 + 2	10 + 3	10 + 4	10 + 5
15 + 1	15 + 2	15 + 3	15 + 4	15 + 5
20 + 1	20 + 2	20 + 3	20 + 4	20 + 5

Cada número é da forma $5a + b$, com $0 \le a \le 4$ e $1 \le b \le 5$.

Depois de trocar de sinal temos que em cada linha há dois números negativos, se em cada linha fazemos a soma só das partes $\pm 5a$ temos que a soma dessa linha é $5a$ (já que há três $5a$ e dois $-5a$) e a soma de todas as linhas considerando somente os números 0 +5 +10 + 15 + 20 = 50.

Agora consideremos os números $\pm b$. Em cada coluna há dois números b que trocaram de sinal e três que não, portanto a soma dos números dessa coluna é b e a soma das colunas considerando somente as partes $\pm b$, é: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15. Logo a soma total é sempre 65.

XXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e soluções da terceira fase – nível 2

PROBLEMA 1: Veja o problema 1 do nível 1.

PROBLEMA 2:

Isabel tem dois baralhos, cada um com 50 cartas. Em cada um dos baralhos estão escritos os números de 1 a 100 (em cada carta estão escritos dois números, um em cada face da carta). Por um defeito de fabricação, a distribuição dos números nas cartas não é a mesma nos dois baralhos (por exemplo, em um dos baralhos o 1 aparece na mesma carta do 2; no outro, o 1 aparece com o 76).

Mostre como Isabel deve fazer para que, ao colocar as 100 cartas sobre uma mesa, as faces voltadas para cima mostrem todos os números de 1 a 100.

PROBLEMA 3:

Em uma folha de papel a reta r passa pelo canto A da folha e forma um ângulo α com a borda horizontal, como na figura 1. Para dividir este ângulo α em três partes iguais, executaremos as seguintes construções:

a) inicialmente, marcamos dois pontos B e C sobre a borda vertical de modo que $AB = BC$; pelo ponto B traçamos a reta s paralela à borda (figura 2);

b) a seguir, dobramos o papel, ajustando-o de modo que o ponto C coincida com um ponto C' sobre a reta r e o ponto A coincida com um ponto A' sobre a reta s (figura 3); chamamos de B' o ponto com o qual B coincide.

Mostre que as retas AA' e AB' dividem o ângulo α em três partes iguais.

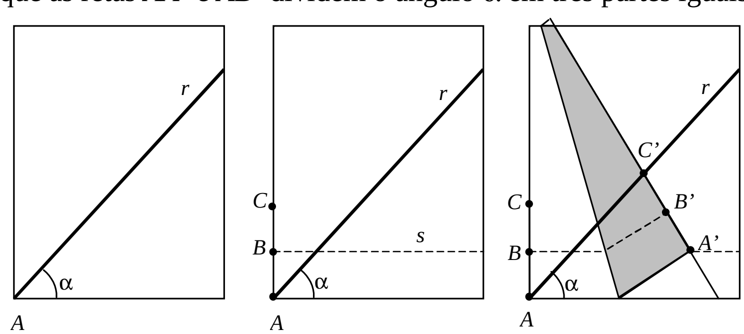


Figura 1 Figura 2 Figura 3

PROBLEMA 4:

É possível encontrar duas potências de 2, distintas e com o mesmo número de algarismos, tais que uma possa ser obtida através de uma reordenação dos dígitos da outra?

SOLUÇÕES DA TERCEIRA FASE – NÍVEL 2

PROBLEMA 1: SOLUÇÃO DE ALEX CORRÊA ABREU (NITERÓI - RJ)

Sejam a e b os números das faces coladas. Como a é o número da face oposta à face de b, no dado central, temos que $a + b = 7$.

A soma dos números das faces de cada dado é 21, então a soma dos números das faces de todos os dados é 63, mas a soma das faces coladas é $2\ (a + b) = 14$, e a soma das faces visíveis é 36, temos, então, que a soma de números das faces em contato com a mesa é: $63 – 36 – 14 = 13$. Resposta: a soma é 13.

PROBLEMA 2: SOLUÇÃO DE VITOR GABRIEL KLEINE (MOGI DAS CRUZES - SP)

Podemos fazer isso pegando qualquer carta de qualquer baralho, colocando sobre a mesa e vendo seu verso. Depois disso procuramos a carta de mesmo número do verso (procurando no outro baralho, já que foi usada no primeiro baralho). Fazemos com esta carta o mesmo que foi feito com a primeira carta. Continua-se a fazer isso até fechar um ciclo (um mesmo número que já saiu em um baralho sair no outro). Exemplo:

baralho:	1	2	1	2	
	x	y	z	w	Ciclo fechado.
verso:	y	z	w	x	

Quando um ciclo for fechado pega-se outra carta e começa um novo ciclo. Fazendo isso até o final das cartas as faces voltadas para cima mostrarão todos os números de 1 a 100.

PROBLEMA 3: Veja solução do problema 1 do nível 3.

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DE SAMUEL BARBOSA FEITOSA (FORTALEZA - CE)

Sejam $A = 2^m$ e $A' = 2^n$ onde A' é uma reordenação dos dígitos de A, suponha sem perda de generalidade que $A > A'$, daí A é um múltiplo de A' pois possui os mesmos fatores primos. Então temos que $A = A' \cdot k$, onde $k \in Z$, $k > 1$ (pois caso não fosse $\Rightarrow A' = A$, o que seria um absurdo, pois A e A' são distintos.) e k é uma potência de dois, pois A só possui fatores primos iguais a 2, daí $k = 2,4,8 \Rightarrow A = 2A'$ ou $A = 4A'$ ou $A = 8A'$.

Como a soma de seus dígitos é a mesma, A e A' deixam o mesmo resto (mod 9) e sua diferença é divisível por 9, mas $A – A'$ só pode se: A', $3A'$, $7A'$, onde nenhuma desas diferenças é divisível por 9. Daí não existem tais números. Nenhum número é divisível por 9, pois cada um desses números não possui pelo menos dois fatores primos iguais a 3.

XXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e soluções da terceira fase – nível 3

PROBLEMA 1: Veja o problema 3 do nível 2.

PROBLEMA 2:

Seja $\sigma(n)$ a soma de todos os divisores positivos de *n*, onde *n* é um inteiro positivo (por exemplo, $\sigma(6)=12$ e $\sigma(11)=12$). Dizemos que *n* é *quase perfeito* se $\sigma(n)=2n-1$ (por exemplo, 4 é quase perfeito, pois $\sigma(4)=7$). Sejam $n \bmod k$ o resto da divisão de *n* por *k* e $s(n)=\sum_{k=1}^{n} n \bmod k$ (por exemplo: $s(6) = 0 + 0 + 0 + 2 + 1 + 0 = 3$ e $s(11) = 0 + 1 + 2 + 3 + 1 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 22$).

Prove que n é quase perfeito se, e somente se, $s(n)=s(n-1)$.

PROBLEMA 3:

Seja *f* uma função definida nos inteiros positivos da seguinte forma:

Dado *n*, escrevemos $n=2^a\cdot(2b+1)$, com *a* e *b* inteiros e definimos $f(n)=a^2+a+1$.

Determine o menor inteiro positivo *n* tal que $f(1)+f(2)+...+f(n)\geq 123456$.

PROBLEMA 4:

A avenida Providência tem infinitos semáforos igualmente espaçados e sincronizados.

A distância entre dois semáforos consecutivos é de 1.500m. Os semáforos ficam abertos por 1 min 30s, depois fechados por 1 min, depois abertos por 1 min 30s e assim sucessivamente.

Suponha que um carro trafegue com velocidade constante igual a *v*, em m/s, pela avenida Providência.

Para quais valores de *v* é possível que o carro passe por uma quantidade arbitrariamente grande de semáforos sem parar em qualquer um deles?

PROBLEMA 5:

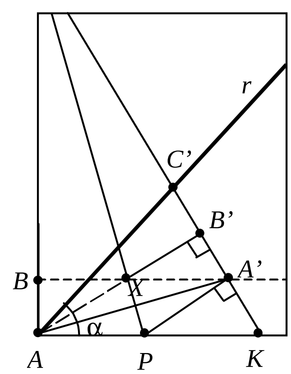
Seja X o conjunto de todas as seqüências $\underline{a}=(a_1,a_2,...,a_{2000})$ tais que $a_i\in\{0,1,2\}$ se $1\leq i\leq 1000$ e $a_i\in\{0,1\}$ se $1001\leq i\leq 2000$. Dados $\underline{a}$ e $\underline{b}$ em *X*, definimos a distância $d(\underline{a},\underline{b})$ entre *a* e $\underline{b}$ como sendo o número de valores de *i*, $1\leq i\leq 2000$, tais que $a_i\neq b_i$. Determine o número de funções $f:X\to X$ que preservam distância, isto é, tais que $d(f(\underline{a}), f(\underline{b})) = d(\underline{a}, \underline{b}),$ para quaisquer $\underline{a}$ e $\underline{b}$ em *X*.

PROBLEMA 6:
Seja *C* um cubo de madeira. Para cada um dos 28 pares de vértices de *C* cortamos o cubo *C* pelo plano mediador dos dois vértices do par. Em quantos pedaços fica dividido o cubo?

Nota: Dados dois pontos *A* e *B* no espaço, o plano mediador de *A* e *B* é o conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias a *A* e *B* são iguais. Em outras palavras: é o plano perpendicular ao segmento *AB* passando pelo ponto médio de *AB*.

SOLUÇÕES DA TERCEIRA FASE – NÍVEL 3

PROBLEMA 1: SOLUÇÃO DE MARTHA P. ARAÚJO DE MORAES (FORTALEZA - CE)



Veja que $\overline{AP} = \overline{A'P}$, então $\Delta AA'P$ é isósceles. Seja $P\hat{A}A' = \alpha$ então $A\hat{A}'B = \alpha (BA' // AP)$.
Note que $\Delta APX \equiv \Delta A'PX$,
Daí:

$$X\hat{A}P = X\hat{A}'P$$
$$\alpha + X\hat{A}A' = 2\alpha$$
$$X\hat{A}A' = \alpha$$

Agora observe que:

$$B\hat{A}X = 90 - 2\alpha \rightarrow B\hat{X}A = 2\alpha$$

$$B\hat{A}X = 90 - 2\alpha \rightarrow B'\hat{X}A' = 2\alpha$$

Donde segue que os pontos *A*, *X*, *B*' são colineares. Como $CB = C'B'$, $AB = A'B'$ e $CB = AB$, temos que $C'B' = A'B'$.
Então *AB'* é mediana e altura do $\Delta C'AA'$, sendo, conseqüentemente, bissetriz do $\Delta C'AA'$. Daí: $C'\hat{A}B' = B'\hat{A}A' = P\hat{A}A' = \alpha$.

PROBLEMA 2: SOLUÇÃO DE FABRÍCIO SIQUEIRA BENEVIDES (FORTALEZA - CE)

Fixe *n*. Seja $a_i = n \bmod i$ e $b_i = (n-1) \bmod i$

Temos $s(n) = \sum_{i=1}^{n} a_i$ e $s(n-1) = \sum_{i=1}^{n} b_i$

Veja que se $d|n$, por definição, $a_d = 0$, e que $n \equiv 0 (\bmod d) \Rightarrow n - 1 \equiv -1 (\bmod d) \Rightarrow b_d = d - 1$
(já que $0 \le b_d \le d - 1$) (inclusive se *d* = 1)
Além disso se $t \nmid n$, $a_t > 0$ e é fácil ver que $b_t = a_t - 1$.
Sendo assim:

$$s(n) = s(n-1) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n-1} b_i \Leftrightarrow \sum_{\substack{d|n \\ d\neq n}} a_d + \sum_{t\nmid n} a_t + a_n = \sum_{\substack{d|n \\ d\neq n}} b_d + \sum_{t\nmid n} b_t \Leftrightarrow \sum_{\substack{d|n \\ d\neq n}} (b_d - a_d) =$$

$$= \sum_{t\nmid n} (a_t - b_t) \Leftrightarrow \sum_{\substack{d|n \\ d\neq n}} (d-1) = \sum_{t\nmid n} 1$$

Seja *f*(*n*) o número de divisores de *n*. Temos:

$$\sum_{\substack{d|n \\ d\neq n}} (d-1) = \sum_{t\nmid n} 1 \Leftrightarrow \sum_{\substack{d|n \\ d\neq n}} d - \sum_{\substack{d|n \\ d\neq n}} 1 = \sum_{t\nmid n} 1 \Leftrightarrow (\sigma(n) - n) - (f(n) - 1) = n - f(n) \Leftrightarrow \sigma(n) - n - f(n) + 1 =$$

$$= n - f(n) \Leftrightarrow \sigma(n) = 2n - 1.$$

De modo que $s(n) = s(n-1) \Leftrightarrow \sigma(n) = 2n - 1$.

PROBLEMA 3: SOLUÇÃO DE ULISSES MEDEIROS DE ALBUQUERQUE (FORTALEZA - CE)

Considere as representações binárias dos números, ex: 17 = (10001); 24 = (11000) e 5 = (101)
Seja *n* na base 2 igual a $(...a_i...a_3a_2a_1a_0)$, onde $a_i = 0$ ou $a_i = 1, \forall i \in Z_+$ se $2^j > n \Rightarrow a_j = 0$.

$n = 2^a \cdot (2b+1) \Leftrightarrow a$ é a quantidade de zeros à direita na sua representação binária. Exemplo:
a para o 24 é 3, já a = 0 para o 17 e o 5. Isto vem exatamente do que significa a representação de um número em uma dada base. (*)

Seja $S_k = f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(2^k)$

Como $\underline{a}$ só depende da quantidade de zeros no final (*), temos que se $2^j > n,\ n \geq 1$ então $f(2^j + n) = f(n),$ pois terão a mesma quantidade de zeros à direita na base 2.

Assim,

$$S_k = f(1) + f(2) + \ldots f(2^{k-1} - 1) + f(2^{k-1}) + f(2^{k-1} + 1) + f(2^{k-1} + 2) + \ldots + f(2^k)$$

$$S_k = (f(1) + f(2) + \ldots + f(2^{k-1} - 1) + f(2^{k-1})) + (f(1) + f(2) + \ldots + f(2^{k-1} - 1)) + f(2^k)$$

$$S_k = (S_{k-1}) + (S_{k-1} - f(2^{k-1})) + f(2^k)$$

$$S_k = S_{k-1} + S_{k-1} + \left[-(k-1)^2 - (k-1) - 1\right] + \left[k^2 + k + 1\right]$$

$$S_k = 2 \cdot S_{k-1} + 2 \cdot k$$

$$S_k = 2 \cdot (S_{k-1} + k).$$

Primeiros $S_{k's}$:
S_0 = 1, S_1 = 4, S_2 = 12, S_3 = 30, S_4 = 68, S_5 = 146, S_6 = 304, S_7 = 622, S_8 = 1260, S_9 = 2538,
S_{10} = 5096, S_{11} = 10214, S_{12} = 20452, S_{13} = 40930, S_{14} = 81888, S_{15} = 163806

Seja $g(n) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n),$ provaremos que $g(n) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \cdot S_i$, onde $n = (\ldots a_j \ldots a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0)$.

Seja j o maior possível tal que $a_j = 1.$ $n = 2^j + a_{j-1} \cdot 2^{j-1} + \ldots + a_1 \cdot 2 + a_0 \cdot 2^0$

$$g(n) = (f(1) + f(2) + \ldots + f(2^j)) + (f(2^j + 1) + f(2^j + 2) + \ldots + f(2^j + a_{j-1} \cdot 2^{j-1} + \ldots a_0))$$

$$g(n) = (S_j) + f(1) + f(2) + \ldots + f(a_{j-1} \cdot 2^{j-1} + \ldots + a_0))$$

De modo análogo, tomamos o maior j_0, tal que $j > j_0$ e $a_{j_0} = 1.$

$$g(n) = S_j + (f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(2^{j_0})) + (f(2^{j_0} + 1) + \ldots + f(2^{j_0} + a_{j_0 - 1} \cdot 2^{j_0 - 1} + \ldots + a_0))$$

$$g(n) = S_j + (S_{j_0}) + (f(1) + f(2) + \ldots + f(a_{j_0 - 1} \cdot 2^{j_0 - 1} + \ldots + a_0))$$

De maneira análoga, fazemos (vamos baixando) para todos os $a_{i's}$ = 1.

Como $a_i = 1$ ou $a_i = 0$, podemos escrever $g(n) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \cdot S_i$

Para termos o menor *n*, tal que $g(n) \geq 123456$

Temos que conseguir uma soma de $S_{k's} \geq 123456$, com os menores *k's* possíveis, pois isto se refletirá em $(...a_i...a_2a_1a_0)$ com os menores *i's* possíveis. Mas isto é uma tarefa fácil se tomarmos os S_k*'s* calculados na página anterior e também sabendo que:

$$S_k > 2 \cdot S_{k-1} > S_{k-1} + 2S_{k-2} ... > S_{k-1} + S_{k-2} + S_{k-3} + ... + S_0$$

Daí, temos que a soma procurada é:

$$S_{14} + S_{13} + S_7 + S_2 + S_1 = 81888 + 40930 + 622 + 12 + 4 = 1234456$$

Assim, o menor *n* tal que $g(n) \geq 123456$ é $(110000010000110)_2$

$$n = 2^{14} + 2^{13} + 2^7 + 2^2 + 2^1 = 16384 + 8192 + 128 + 4 + 2$$

$n = 24710$

O menor inteiro positivo tal que $f(1) + ... + f(n) \geq 123456$ é 24710.

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DA BANCA

Suponha que no tempo 0 os sinais se abram e que o carro passe pela primeira vez por um sinal no tempo $t_0 \geq 0$ (mediremos o tempo sempre em segundos). Os sinais estarão abertos entre os tempos 150*k* e 150*k* + 90 e fechados entre os tempos 150*k* + 90 e 150(*k* + 1), para todo inteiro *k*. O carro passará pelos sinais nos tempos $t_0 + \frac{1500}{v} r$, para todo inteiro não negativo r. Assim, a condição necessária e suficiente para que o carro encontre sempre o sinal aberto é que $\frac{t_0}{150} + \frac{10}{v} r$ seja igual a um inteiro mais um número entre 0 e $\frac{3}{5}$ para todo *r* inteiro. Isso é claramente possível se $\frac{10}{v}$ é inteiro (com qualquer t_0 entre 0 e 90) e se $\frac{10}{v}$ é a metade de um inteiro ímpar (com qualquer t_0 entre 0 e 15).

Vamos mostrar que esses são os únicos casos possíveis.

Primeiro mostraremos que $\dfrac{10r}{v}$ é igual a um inteiro mais um número pertencente a $\left(0,\dfrac{2}{5}\right)$ para algum r_0: seja $\dfrac{10}{v} = j + \alpha$, com j inteiro e $\alpha \in [0,1)$. Se $0 < \alpha < \dfrac{2}{5}$, tomamos $r_0 = 1$.

Se $\dfrac{1}{2} < \alpha < \dfrac{3}{5}, 2\alpha = 1 + \beta$, com $0 < \beta < \dfrac{1}{5}$, e tomamos $r_0 = 2$.

Se $\dfrac{3}{5} < \alpha < 1$, tomamos $\beta = 1 - \alpha$ e k inteiro tal que $k\beta < 1 < (k+1)\beta$. Como $\beta < \dfrac{2}{5}$, temos $k\beta > \dfrac{3}{5}$, e podemos tomar $r_0 = k$.

Se $\dfrac{2}{5} \le \alpha < \dfrac{1}{2}$, temos $\dfrac{3}{5} < \dfrac{4}{5} \le 2\alpha < 1$, e podemos proceder como no caso anterior, tomando $\beta = 1 - 2\alpha$ e $r_0 = 2k$.

Para finalizar, vamos mostrar que, nesses casos, existe k inteiro positivo tal que $\dfrac{t_0}{150} + \dfrac{10}{v}k$ é igual a um inteiro mais um elemento de $\left(\dfrac{3}{5},1\right)$.

De fato, existe m inteiro tal que $\dfrac{10}{v}r_0 = m + \beta$, com $0 < \beta < \dfrac{2}{5}$, e existem ℓ e j inteiros com $\dfrac{t_0}{150} + \ell\beta < j \le \dfrac{t_0}{150} + (\ell+1)\beta$, donde

$\dfrac{t_0}{150} + \dfrac{10}{v}\ell r_0 = lm + \dfrac{t_0}{150} + \ell\beta = (\ell m + j - 1) + \gamma$, onde $\dfrac{3}{5} < 1 - \beta < \gamma < 1$.

Assim as possíveis velocidades são $v = \dfrac{20}{k} m/s$, para cada inteiro positivo k.

PROBLEMA 5: SOLUÇÃO DE HUMBERTO SILVA NAVES (SÃO PAULO - SP)

Vamos observar um caso particular primeiro:
Sabemos que:
$d(f(0,0,0,\ldots,0), f(1,0,0,\ldots,0)) = 1$
e $d(f(1,0,0,\ldots,0), f(2,0,0,0,\ldots,0)) = 1$
e $d(f(2,0,0,\ldots,0), f(0,0,0,\ldots,0)) = 1$
Seja $A = f(0,0,\ldots,0), B = f(1,0,0,\ldots,0)$

e $C = f(2,0,0,...,0)$

$A = (a_1, a_2, ..., a_{2000})$ e $B = (b_1, b_2, ..., b_{2000})$ e $C = (c_1, c_2, ..., c_{2000})$

Deve existir um único $i_1 \in \mathbb{N}$ e $1 \le i_1 \le 2000$, tal que:

$a_{i_1} \ne b_{i_1}$, vamos provar que $i_1 \le 1000$.

Deve existir um único i_1' tal que $b_{i_1'} \ne c_{i_1'}$ e se fosse $i_1 \ne i_1'$ teríamos que $d(A, C) = 2,$ um absurdo, logo $i_1 = i_1'$

Logo temos:

$A = (..., a_{i_1}, ...)$

$B = (..., b_{i_1}, ...)$ e como $a_{i_1} \ne b_{i_1} \ne c_{i_1} \ne a_{i_1}$ logo $i_1 \le 1000$.

Vamos provar que se:

$x_0 = f(0, a_2', a_3', ..., a_{2000}') = (x_1, x_2, ..., x_{2000})$ então $x_{i_1} = a_{i_1}$.

Suponhamos por absurdo que $x_{i_1} \ne a_{i_1}$ (por simetria, consideramos $x_{i_1} = b_{i_1}$)

Se $d(A; x_0) = m,$ então $d(B; x_0) = m + 1,$ pois $B = f(1,0,0,0,0,...,0)$ e $A = f(0,0,0,...,0)$ $x_0 = f(0, a_2', a_3', ..., a_{2000}')$ mas $d(B, x_0) = m - 1$ (pois $x_{i_1} = b_{i_1}$) que é um absurdo, logo $x_{i_1} = a_{i_1}$

Analogamente verificamos que se

$x_1 = f(1, b_2', b_3', ..., b_{2000}') = (y_1, y_2, ..., y_{2000})$ então $y_{i_1} = b_{i_1}$

Vamos generalizar o argumento (nós só fizemos para o 1º. termo):

Teorema 1: Seja

$A_t = f(0,0,...,0,0,...) = (a_1, a_2, ..., a_{2000})$

$B_t = f(0,0,...,1,0,...) = (b_1, b_2, ..., b_{2000})$

$C_t = f(0,0,...,2,0,...,0) = (c_1, c_2, ..., c_{2000})$

onde $t \le 1000$: e alteramos apenas o *t*-ésimo termo no domínio.

Então se $x' = f(x_1, ..., x_{2000}) = (y_1, y_2, ..., y_{2000})$

$y_{i_t} = a_{i_t}$ se $x_t = 0$ (onde i_t é posição que muda de A_t para B_t)

$y_{i_t} = b_{i_t}$ se $x_t = 1$

$y_{i_t} = c_{i_t}$ se $x_t = 2$

Demonstração: Análoga à anterior (basta trocar algumas variáveis e copiar a demonstração acima).

É claro que $i_1, i_2, ..., i_{1000}$ são todos distintos. Na verdade $(i_1, ..., i_{1000})$ é uma permutação de $(1,2,...,1000)$.
Consideramos agora as seguintes 2000-uplas.

$A_j = f(0,0,...,0) = (a_1, a_2, ..., a_{2000})$
$B_j = f(0,0,...,1,0,0,0,...,0) = (b_1, ..., b_{2000})$ onde $j > 1000$ e colocamos o 1 na *j*-ésima posição.

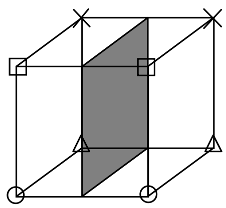
Sabemos que $d(A_j, B_j) = 1 \Rightarrow \exists t \in \mathbb{N}$ tal que:
$a_t \neq b_t$ e esse *t* é único!
É claro que $t > 1000$ (pois se fosse $t < 1000$, existiria $w \leq 1000$ tal que $i_w = t$, um absurdo, pois o valor de posição w_i da imagem é determinado exclusivamente pelo valor da posição *w* da 2000-upla do domínio da função *t* (devido ao teorema 1).

Vamos chamar esse *t* de i_j, assim como fizemos anteriormente.
Seja $x' = f(x_1, x_j, ..., x_{2000}) = (y_1, ..., y_j, ..., y_{2000})$
De forma semelhante à anterior, mostramos que:
$y_{i_j} = a_{i_j}$ se $x_j = 0$
$y_{i_j} = b_{i_j}$ se $x_j = 1$

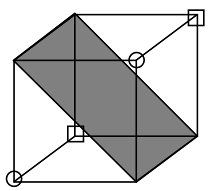
Para contar o número de funções $f: X \to X$, basta contar o número de permutações de $\{1,2,...,1000\}$ vezes o número de permutações de $\{1001,...,2000\} \times (3!)^{1000} \times (2!)^{1000}$ que é $1000! \times 1000! \times 12^{1000}$ pois para determinarmos uma função $f: X \to X$ basta escolher:
$(i_1, ..., i_{2000})$ que é uma permutação de $(1,2,...,1000)$ e $(i_{1001}, ..., i_{2000})$ que é uma permutação de $(1001,...,2000)$ e escolher os valores apropriados de $(a_{i_t}, b_{i_t}, c_{i_t})$, para $1 \leq t \leq 1000$ (1000 permutações de $\{0,1,2\}$) e de (a_{i_t}, b_{i_t}), para $1001 \leq t \leq 2000$ (1000 permutações de {0, 1}).

PROBLEMA 6: SOLUÇÃO DE CHRISTIAN WATANABE (ITAGUAÍ - RJ)

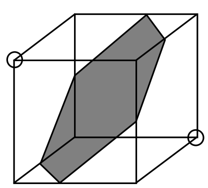
Plano mediador de dois vértices adjacentes (PMVA).



Existem 12 arestas, logo são 12 pares de vértices adjacentes, mas 4 pares possuem o mesmo plano mediador. Portanto são 12 : 4 = 3 planos.

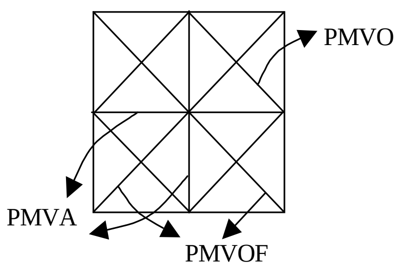


Plano mediador de dois vértices opostos de uma face (PMVOF).



Plano mediador de dois vértices opostos (PMVO).

Repare que todos os planos mediadores juntos determina em cada face a seguinte figura:



Como o centro do cubo é interseção de todos os PMs e todas as interseções entre retas da figura ao lado são extremidades das interseções entre PMs, ao ligarmos as interseções entre PMs, teremos várias pirâmides cujo vértice comum é o centro do cubo e as bases são os triângulos da face. Como são $16 \times 6 = 96$ triângulos no total, o cubo fica dividido em 96 pirâmides.

XXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Resultado – nível 1 (5ª. e 6ª. séries)

NOME	CIDADE – ESTADO	PRÊMIO
Maricy Miki Hisamoto	São Paulo – SP	**Ouro**
Yuriy Thallickson Bincovsky	Curitiba – PR	**Ouro**
Guilherme Rohden Echelmeier	Itajaí – SC	**Ouro**
Gabriel Tavares Bujokas	São Paulo – SP	**Ouro**
Heitor Silva Lima Lacerda	Fortaleza – CE	**Ouro**
Camila Santos Costa	Salvador – BA	**Prata**
Thomás Yoiti Sasaki Hoshina	Rio de Janeiro – RJ	**Prata**
Júlia Ribeiro Lamardo	São Paulo – SP	**Prata**
Augusto Ossamu Shitani	São Paulo – SP	**Prata**
Thiago de Paula Garcia Caixeta	Colatina – ES	**Prata**
Vitor Rezende Faria	Goiânia – GO	**Prata**
Vitor Humia Fontoura	Salvador – BA	**Prata**
Adriano Jorge Braun Vieira Neto	Fortaleza – CE	**Prata**
Mariana de Camargo Penteado	São Paulo – SP	**Prata**
Luiz Müller	Vitória – ES	**Prata**
Floris Uyttenhove	Vitória – ES	**Bronze**
Raul Máximo Alexandrino Nogueira	Fortaleza – CE	**Bronze**
Rudá Moreira de Lima e Silva	Unaí – MG	**Bronze**
Fabio Eigi Imada	S.J. dos Campos – SP	**Bronze**
Blandina Lavor Barbosa Bezerra	Vila Velha – ES	**Bronze**
Felipe Sanches Varroni	São Paulo – SP	**Bronze**
Nicoli Gavassa	São Paulo – SP	**Bronze**
Rafael Fonseca de Campos	Atibaia – SP	**Bronze**
Bruna Aguilar Trotta	Belo Horizonte – MG	**Bronze**
Daniel Folador Rossi	São Mateus – ES	**Bronze**
Max Douglas Peixoto da Silva	Fortaleza – CE	**Bronze**
Tiago Abreu Tavares de Sousa	Campina Grande – PB	**Bronze**
Paulo André Carvalho de Melo	Rio de Janeiro – RJ	**Bronze**
Eduardo Martins de Figueiredo	Vitória – ES	**Bronze**
João Marcos Nobuo Umetsu Hansen	Jundiaí – SP	**Bronze**
Gabriel Salvagno	Jundiaí – SP	**Bronze**
Adalberto Delgado Neto	Fortaleza – CE	**Bronze**
Gilberto Marques Arsiolli	Três Lagoas – MS	**Bronze**
Felipe Leon Peres Camargo Shalders	Vitória – ES	**Bronze**
Martin Alexander Barrios Gundelach	Rio de Janeiro – RJ	**Menção Honrosa**
Louise Nagashima Omi	São Paulo – SP	**Menção Honrosa**
Édipo Martins Sípoli	Curitiba – PR	**Menção Honrosa**
André Ikeda Cantão	Curitiba – PR	**Menção Honrosa**
Paulo Henrique Macera	S.J. dos Campos – SP	**Menção Honrosa**
Lucas de Barros Navarro	Salvador – BA	**Menção Honrosa**
Ana Paula Seno Pinheiro	Ourinhos – SP	**Menção Honrosa**
Eduardo Fischer	Encantado – RS	**Menção Honrosa**
Germano Bezerra de Menezes Pinho	Fortaleza – CE	**Menção Honrosa**
Wagner Silveira Aniceto	Campo Grande – MS	**Menção Honrosa**
Gabryel Melo Lutz	Goiânia – GO	**Menção Honrosa**
Diego Frade Bernardes	Fortaleza – CE	**Menção Honrosa**
Átila Pereira Ricarte	Fortaleza – CE	**Menção Honrosa**
Frederico de Souza Frydman	Salvador – BA	**Menção Honrosa**
Pedro Thiago Ezequiel de Andrade	Fortaleza – CE	**Menção Honrosa**
Hugo Siqueira Robert Pinto	Fortaleza – CE	**Menção Honrosa**
Bárbara Gomes Arabe Saraiva	Santos – SP	**Menção Honrosa**
Domingos Gomes de Aguiar Neto	Fortaleza – CE	**Menção Honrosa**
Fernanda Mary Sonoki	São Paulo – SP	**Menção Honrosa**
Carolina Lisboa Borgo	Montanha – ES	**Menção Honrosa**
Raphael Rodrigues Mata	Salvador – BA	**Menção Honrosa**
Gil Henriques	Vassouras – RJ	**Menção Honrosa**
Gustavo Schmidt Joau e Silva	Juiz de Fora – MG	**Menção Honrosa**
Anderson Cipriano de Lima	Jaboatão dos G.– PE	**Menção Honrosa**
Rafael Santos Correia de Araújo	Salvador – BA	**Menção Honrosa**
Paulo Henrique Gonçalves dos Santos	São Paulo – SP	**Menção Honrosa**
Hanna Kirihara e Silva	Florianópolis – SC	**Menção Honrosa**
Luciana Salomão Vilar	São Carlos – SP	**Menção Honrosa**
Thaís Viveiro	São Paulo – SP	**Menção Honrosa**
Raffaello Couto Caser	Vitória – ES	**Menção Honrosa**

XXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Resultado – nível 2 (7ª. e 8ª. séries)

NOME	CIDADE – ESTADO	PRÊMIO
Alex Corrêa Abreu	Niterói – RJ	Ouro
Fabio Dias Moreira	Rio de Janeiro – RJ	Ouro
Larissa Cavalcante Queiroz de Lima	Fortaleza – CE	Ouro
Rafael Daigo Hirama	Campinas – SP	Ouro
Samuel Barbosa Feitosa	Fortaleza – CE	Prata
Jorge Peixoto de Morais Neto	Goiânia – GO	Prata
Israel Franklim Dourado Carrah	Fortaleza – CE	Prata
Davi Máximo Alexandrino Nogueira	Fortaleza – CE	Prata
Vitor Gabriel Kleine	Mogi das Cruzes – SP	Prata
Juliana Gomes Varela	Fortaleza – CE	Prata
Ayran Ayres Barbosa Loriato	Vitória – ES	Prata
Daniel Haanwickel Junqueira	Salvador – BA	Prata
Raquel Lamboglia Guimarães	Fortaleza – CE	Prata
Paulo Roberto Sampaio Santiago	Salvador – BA	Prata
Telmo Luis Correa Jr.	Santo André – SP	Prata
Adalberto Studart Neto	Fortaleza – CE	Bronze
João Marcos da Cunha Silva	Fortaleza – CE	Bronze
Thiago Costa Leite Santos	São Paulo – SP	Bronze
Kiyoshi Horie Filho	Ourinhos – SP	Bronze
Antônio Monteiro Guimarães Jr.	Campina Grande – PB	Bronze
Adriano Brasileiro Silva	Fortaleza – CE	Bronze
Renato Mendes Coutinho	Americana – SP	Bronze
Diogo dos Santos Suyama	Belo Horizonte – MG	Bronze
Gustavo Ferruzzi Martucci	Piracicaba – SP	Bronze
Henry Wei Cheng Hsu	São Paulo – SP	Bronze
Thiago Pinheiro Faury	São Paulo – SP	Bronze
Otacílio Torres Vilas Boas	Salvador – BA	Bronze
Vitor Sarmento Mesquita	Fortaleza – CE	Bronze
Felipe Netto de Santana	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
Patricia Akemi Komura	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Regiane Cristina Yamanari	Guararapes – SP	Menção Honrosa
Guilherme Honda Saito	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Milton Eiji Kato	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Vinicius Antonio Batagello	Araçatuba – SP	Menção Honrosa
Thiago Mizuta	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Daniel Costa Garcia	Goiânia – GO	Menção Honrosa
Henrique Castro Noronha	Valinhos – SP	Menção Honrosa
Raphael Henrique Ribas	Curitiba – PR	Menção Honrosa
Dafne de Albuquerque Simão	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Michel Renato Manzolli Ballestero	Araraquara – SP	Menção Honrosa
Fernanda Ramos Correia	Salvador – BA	Menção Honrosa
Fernando Santos Simões Ferreira	Vitória – ES	Menção Honrosa
Lucas Lolli Saui	Florianópolis – SC	Menção Honrosa
Luciano Lacerda Silveira	Campo Grande – MS	Menção Honrosa
Samara Anny Maia Fava	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Gustavo Eufrásio Farias	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Vinicius Figueiredo de Castro	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Luís Eduardo de Godoi	S.J. dos Campos – SP	Menção Honrosa
Helder Seiji Kato	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Márcio Jun Hisamoto	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Vinicius Augusto Paccola	Matão – SP	Menção Honrosa
Erika Famini Silva	Salvador – BA	Menção Honrosa

XXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Resultado – nível 3 (Ensino médio)

NOME	CIDADE – ESTADO	PRÊMIO
Ulisses Medeiros de Albuquerque	Fortaleza – CE	Ouro
Sérgio Tadao Martins	São Paulo – SP	Ouro
Daniel Massaki Yamamoto	São Paulo – SP	Ouro
Humberto Silva Naves	São Paulo – SP	Ouro
Carlos Stein Naves de Brito	Goiânia – GO	Ouro
Lucas Heitzmann Gabrielli	São Paulo – SP	Prata
Daniel Mourão Martins	Fortaleza – CE	Prata
Leonardo Augusto Zão	Nilópolis – RJ	Prata
Fabrício Siqueira Benevides	Fortaleza – CE	Prata
Christian Lyoiti Watanabe	Itaguaí – RJ	Prata
Rodrigo Roque Dias	São Paulo – SP	Prata
Rui Facundo Vigelis	Fortaleza – CE	Prata
Thiago Barros Rodrigues Costa	Fortaleza – CE	Prata
Ronaldo Ikaro Farias Araújo	Fortaleza – CE	Prata
Daniel Nobuo Uno	São Paulo – SP	Prata
Daniel Pinheiro Sobreira	Fortaleza – CE	Prata
João Alfredo Castellani Fajardo Freire	Salvador – BA	Bronze
Daniel Pessoa Martins Cunha	Fortaleza – CE	Bronze
Guilherme Fujiwara	São Paulo – SP	Bronze
Gilberto Kirk Rodrigues	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
Artur Duarte Nehmi	São Paulo – SP	Bronze
Rodrigo Villard Milet	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
Eduardo Moraes de Morais	São Paulo – SP	Bronze
Carlos Sartori Ferreira Filho	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
Thiago da Silva Sobral	Fortaleza – CE	Bronze
Silvano José Gomes Flumignan	P. Prudente – SP	Bronze
Mateus Ymanaka Barretto	São Paulo – SP	Bronze
Hugo Pinto Iwata	S.J. do Rio Preto – SP	Bronze
Paulo Ribeiro de Almeida Neto	Ananindeua – PA	Bronze
Diêgo Veloso Uchôa	Teresina – PI	Bronze
Artur Radoman de Oliveira	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
Yuri Gomes Lima	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Rafael Tajra Fonteles	Teresina – PI	Menção Honrosa
Maurício de Carvalho Paiva	Belém – PA	Menção Honrosa
Bernardo Freitas Paulo da Costa	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Eduardo Barbosa Araújo	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Antônio Davi Macêdo de Castro	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Eduardo Famini Silva	Salvador – BA	Menção Honrosa
Arnaldo João do Nascimento Júnior	Duque de Caxias – RJ	Menção Honrosa
Augusto Quadros Teixeira	Belo Horizonte – MG	Menção Honrosa
Einstein do Nascimento Jr.	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Marcos Soares de Souza	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Caio Augusto P. del Bianco Licciardi	Atibaia – SP	Menção Honrosa
Luiz Antonio Felinto Cruz	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Diego Alvarez Araujo Correia	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Afonso de Paula P. Rocha	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Tibério Bittencourt de Oliveira	Goiânia - GO	Mençao Honrosa

OS NÚMEROS IRRACIONAIS

Hermano Frid
Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA

♦ Nível Intermediário.

No texto a seguir fazemos uma breve introdução ao conceito de número irracional. Na sua maior parte o texto será acessível a alunos da última série do primeiro grau. As duas últimas seções talvez requeiram um pouco mais de maturidade embora não exijam nenhum conhecimento prévio adicional. Para simplificar a exposição nos restringiremos a números positivos. A extensão dos fatos abordados ao contexto geral de números positivos, negativos e 0 não requer nenhuma dificuldade adicional.

Pode-se imaginar que a idéia de número inteiro positivo tenha surgido num estágio primário da civilização, juntamente com a necessidade da prática da contagem. Por exemplo, era necessário a um pastor saber contar de algum modo o número de animais no seu rebanho. A maneira de representar o resultado dessa contagem era no início bastante diferente da que usamos agora e é provável que no começo cada pessoa tivesse sua maneira própria de fazê-lo. Contar significa estabelecer um modo de comparar quantidades de elementos de conjuntos distintos. Por exemplo, a quantidade de pedrinhas em um saco com a quantidade de animais num rebanho, ou a quantidade de alimentos conseguidos em uma caçada ou em colheita com a quantidade de membros da tribo. Também não é difícil imaginar que a ideia de fração tenha surgido na evolução da civilização humana, primeiramente e de forma mais elementar, com a ocorrência usual da necessidade de um determinado grupo de pessoas partilhar um ou mais bens de propriedade comum entre seus membros. E num estágio mais avançado, dentre outras motivações possíveis, com a necessidade de as pessoas trocarem entre si bens de tipos distintos. Por exemplo, um pastor deseja trocar com um agricultor peles de carneiro por sacos de milho numa razão de 3 peles de carneiro para cada grupo de 7 sacos de milho. Por outro lado, a idéia de um "número" que não seja nem inteiro nem fração é, em princípio, muito menos natural que a daqueles e surge num estágio muito mais avançado da civilização com a necessidade da prática da medição. Por exemplo, medir as dimensões ou a área de um terreno, comparar as distâncias entre pares de pontos distintos, etc. Procuraremos, a seguir, mostrar as propriedades básicas destes números "estranhos" em contraste com as propriedades, na maior parte já bem conhecidas, daqueles mais intuitivos, os inteiros e as frações.

1. BASE DECIMAL; DÍZIMAS

Os números reais positivos podem ser representados no sistema decimal por uma seqüência de algarismos – elementos do conjunto {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} – Separados por uma vírgula. Assim, se $a_N, a_{N-1}, ..., a_0, a_{-1}, a_{-2}, a_{-3}, ...$, são algarismos quaisquer, um número real positivo representado no sistema decimal tem a forma $a_N a_{N-1} a_{N-2} ... a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} a_{-3} ...,$ (1)

onde $a_N > 0.$ Nessa representação, à esquerda da vírgula temos sempre um número finito de algarismos, porém à direita podemos ter uma infinidade de algarismos. Por exemplo, 783,5231 representa o número obtido como resultado da expressão

$$7\times10^2 + 8\times10^1 + 3\times10^0 + 5\times10^{-1} + 2\times10^{-2} + 3\times10^{-3} + 1\times10^{-4}. \qquad (2)$$

Por outro lado, a fração $\frac{154}{999}$ tem representação decimal 0, 1545454… com uma infinidade de algarismos à direita. Essa representação se traduz como resultado de uma expressão com infinitas parcelas

$$1\times10^{-1} + 5\times10^{-2} + 4\times10^{-3} + 5\times10^{-4} + 4\times10^{-5} + 5\times10^{-6} + ... \qquad (3)$$

Essa expressão significa exatamente que se quisermos aproximar $\frac{154}{999}$ no sistema decimal com “precisão de 8 casas decimais, por exemplo, devemos tomar como aproximação o número 0,15454545 que é resultado da expressão

$$1\times10^{-1} + 5\times10^{-2} + 4\times10^{-3} + 5\times10^{-4} + 4\times10^{-5} + 5\times10^{-6}$$
$$+ 4\times10^{-7} + 5\times10^{-8}. \qquad (4)$$

Claro, o número 0, 1545454… é o que chamamos de uma dízima periódica e por isso pode ser obtido como uma fração $\frac{154}{999}$.

O QUE ACONTECE NO CASO DE UMA DÍZIMA NÃO-PERIÓDICA?

Neste caso, assim como no periódico, temos uma infinidade de algarismos à direita da vírgula e assim só nos é possível escrever a representação decimal até uma certa casa decimal, porém, diferentemente do que acontece no caso periódico, não há repetição indefinidamente de um determinado grupo de algarismos e, assim, o número em questão *não pode ser obtido como uma fração* $\frac{p}{q}$ *com e* e q diferente de 0. Os números que podem ser obtidos como frações são chamados *racionais;* os que não podem ser obtidos como frações são chamados *irracionais*.

2. POR QUE PRECISAMOS DOS NÚMEROS IRRACIONAIS?

Responderemos esta pregunta através de um exemplo. Euclides provou que o número positivo cujo quadrado é 2, isto é, *o número positivo x que satisfaz a equação*

$$x^2 = 2, \tag{5}$$

não é racional. Euclides argumentou da seguinte forma: Suponhamos que o número x satisfazendo (5) seja racional. Então existem inteiros positivos p e q, primos entre si, tais que $\frac{p^2}{q^2} = 2$. ou seja $p^2 = 2q^2$. (6)

Portanto p^2 é par e p também é par; p pode ser escrito na forma $p = 2k$. Assim,

$$(2k)^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2k^2 = q^2 \cdot \tag{7}$$

Pela mesma razão que acabamos de expor, concluímos que q também deve ser par. Mas isto nos leva a uma contradição pois p e q são primos entre si por hipótese! Assim, a suposição de que $x = \frac{p}{q}$ nos leva a uma contradição e, portanto, deve ser descartada, considerada falsa.

Chegamos à conclusão que $\sqrt{2}$, que é como representamos o número positivo cujo quadrado é 2, é *um número irracional!!*

3. COMO OBTER APROXIMAÇÕES RACIONAIS PARA $\sqrt{2}$

Podemos obter aproximações cada vez melhores de $\sqrt{2}$ (o número x que satisfaz (5)) através do seguinte procedimento que é um caso particular de um esquema inventado por *Newton* conhecido como *método de Newton*. (Com base nesse método podemos programar as máquinas de calcular para produzirem aproximações de $\sqrt{2}$ tão precisas quanto o avanço da eletrônica nos permitir). primeiro "chutamos" um número x_0 como uma primeira aproximação de x que nos pareça razoável; por exemplo, $x_0 = 1$. Em seguida observamos que

$$x^2 - x_0^2 = (x + x_0)(x - x_0) \cong 2x_0(x - x_0),$$

onde o símbolo $\cong$ significa "é aproximadamente igual a". Assim,

$$x^2 - x_0^2 \cong 2x_0(x - x_0),$$

e, portanto, dividindo a "equação aproximada" por $2x_0$ e arranjando os termos, obtemos

$$x \cong \frac{x^2 - x_0^2}{2x_0} + x_0. \qquad (8)$$

substituindo $x^2 = 2$ e $x_0 = 1$ em (8), obtemos $x \cong \frac{2-1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$.

Assim temos uma segunda aproximação $x_1 = \frac{3}{2}$. Encontramos também x_2 :

$x_2 \cong \frac{2 - \frac{9}{4}}{3} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow x_2 \cong -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow x_2 \cong \frac{-1}{12} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 \cong \frac{17}{12}$. Da mesma forma, podemos obter uma quarta aproximação x_3, fazendo

$$x_3 = \frac{x^2 - x_2^2}{2x_2} + x_2 = \frac{2 - (17/12)^2}{17/6} + \frac{17}{12} = \frac{288 - 289}{2 \times 12 \times 17} + \frac{17}{12} = \frac{288 - 289 + 2 \times 289}{2 \times 12 \times 17} = \frac{577}{408}.$$

Assim, $x_3 = \frac{577}{408}$ seria a aproximação seguinte: Sua representação decimal é a dízima periódica $x_3 = 1{,}414\underbrace{2156862745098039}_{período}\underbrace{21568627...9}....$

Agora se você pegar uma máquina de calcular e pedir (através dos devidos comandos) que ela calcule $\sqrt{2}$, você obterá, se sua máquina puder exibir 33 dígitos (incluindo a vírgula ou ponto), a expressão decimal

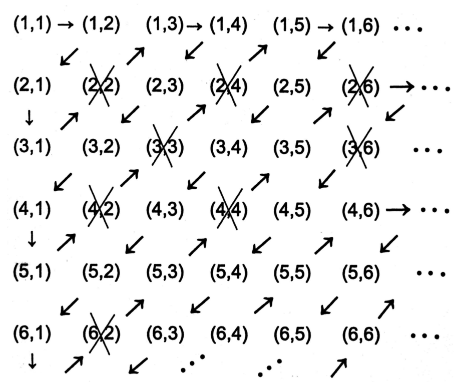
1,4142135623730950488016887242097.

Horrível, não é? Você obterá uma expressão ainda maior se sua máquina puder exibir mais dígitos. Repare como nossas aproximações x_1, x_2 e x_3 estão cada vez mais próximas desse número!

4. OS NÚMEROS RACIONAIS PODEM SER ENUMERADOS

Isto significa que podemos dispor os números racionais numa sucessão da forma $r_1, r_2, r_3, ...,$ com uma infinidade de elementos. Podemos interpretar este fato como significando que a quantidade de números racionais, embora sendo infinita, é de uma "ordem de infinitude" equivalente a dos números naturais 1, 2, 3…. O argumento para a demonstração desse fato é devido a *Georg Cantor*.

Como todo racional tem uma representação única como fração $\frac{p}{q}$ com p e q inteiros positivos primos entre si, basta que saibamos enumerar os pares ordenados (p, q) de naturais primos entre si. A forma de obter essa enumeração está descrita pela figura abaixo:



A enumeração é obtida seguindo-se o caminho indicado pelas flechas, iniciando a partir de (1,1), tendo o cuidado de descartar os pares de naturais que não são primos entre si, como, por exemplo, (2,2), (4,2), (3,3) etc.. Com isso, teríamos

$$r_1 = \frac{1}{1} = 1,\ \ r_2 = \frac{1}{2},\ r_3 = \frac{2}{1} = 2,\ r_4 = \frac{3}{1} = 3,\ r_5 = \frac{1}{3}, \text{etc.}$$

5. REPRESENTAÇÃO DECIMAL DOS RACIONAIS

Há pouco dissemos que não era possível pôr uma dízima não periódica em forma de fração $\frac{p}{q}$ com p e q naturais primos entre si. Vamos dar uma explicação para este fato. Fixemos um natural q. Quando dividimos um número qualquer $N > q$ pelo número q. Obtemos como resto da divisão um elemento do conjunto (finito) $\{0, 1, 2,\ldots, q - 1\}$. Tomemos como exemplo $q = 7$ e $N = 17$; nesse caso os restos possíveis pertencem ao conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Agora vamos recordar o algoritmo da divisão com esse exemplo específico:

```
17  |7
14   2,428571428571...
[3]0
 28
  20
  14
   60
   56
    40
    35
     50
     49
      10
       7
     [3]0
```

O que acontece é que os restos possíveis são elementos do conjunto *finito* de q elementos $\{0, 1,\ldots, q - 1\}$(no exemplo acima $q = 7$). Assim, em no máximo q iterações do algoritmo ou acabamos repetindo um elemento do conjunto de restos possíveis (no exemplo acima o primeiro a se repetir foi o 3), ou o 0 ocorre como resto e o processo termina. No primeiro caso, a partir daí passamos a repetir os restos ocorridos anteriormente na mesma ordem (3, 2, 6, 4, 5, 1, no exemplo acima). As casas decimais no quociente por sua vez também se repetem o obtemos então uma dízima periódica. No segundo caso, obtemos simplesmente um número finito de casas decimais.

6. REPRESENTAÇÃO DECIMAL DOS IRRACIONAIS

Todo número irracional positivo possui uma representação decimal *única* por meio de uma dízima *não periódica*. Para simplificar vamos nos restringir aos números entre 0 e 1. Já sabemos que um número cuja representação decimal possui uma quantidade finita de casas decimais pertence ao conjunto dos racionais. Da mesma forma aprendemos que um número cuja representação decimal é uma dízima periódica é também um número racional. Por outro lado, vimos no item anterior que as representações decimais de um racional são necessariamente de um dos dois tipos: ou possuem uma quantidade finita de casas decimais, ou "terminam" em uma dízima periódica. Logo, uma representação decimal para um número irracional tem necessariamente que ser uma *dízima não-periódica.* Afirmamos que essa representação é *única*. Repare que isso não ocorre em geral com os racionais. Por exemplo, 0, 21 e 0, 20999… representam o mesmo racional $\frac{21}{100}$. Suponhamos que um irracional x entre 0 e 1 possua duas representações decimais distintas:

$$x = 0, a_{-1}a_{-2}a_{-3}..., \tag{10}$$

$$x = 0, b_{-1}b_{-2}b_{-3}..., \tag{11}$$

Se essas representações são distintas certamente existe um $p \in \mathbb{N}$ tal que $a_{-k} = b_{-k}$, para $k = 0,..., p-1$, e $a_{-p} \neq b_{-p}$. Para fixar idéias vamos assumir então que $a_{-p} \geq b_{-p} + 1$ e por (10) e (11)

$$x \geq 0, a_{-1}a_{-2}...a_{-p}, \tag{12}$$

$$x \leq 0, a_{-1}a_{-2}...b_{-p}999... = 0, a_{-1}a_{-2}...(b_{-p} + 1), \tag{13}$$

já que $b_{-k} = a_{-k}$ se $k = 0,..., p-1$ e b_{-k} é sempre menor ou igual a 9. Mas (12) e (13) implicam que $a_{-p} = b_{-p} + 1$ e $x = 0, a_{-1}a_{-2}...a_{-p}$.

Porém nesse caso *x* é racional e chegamos a uma contradição! Chegaríamos a uma contradição semelhante também se tivéssemos assumido $b_{-p} > a_{-p}$, argumentando da mesma forma apenas trocando os papéis dos a_{-k} e b_{-k}. A contridição tem origem no fato de termos suposto que havia duas representações decimais distintas para o mesmo irracional *x*. Logo essa possibilidade tem que ser descartada, considerada falsa, e assim concluímos que todo irracional possui uma representação decima única como dízima não-periódica.

7. OS IRRACIONAIS NÃO PODEM SER ENUMERADOS

Isto significa que não podemos dispor os números irracionais numa sucessão $s_1, s_2, s_3,...,$ mesmo admitindo uma infinidade de elementos. Quer dizer, diferentemente dos racionais, a "ordem de infinitude" da quantidade dos números irracionais é maior que a dos números naturais. Concluímos daí que *existem muito mais números irracionais do que racionais!*

Vamos tentar justificar nossa afirmação sobre a não-enumerabilidade dos irracionais. O argumento é uma adaptação de uma idéia também devida a *G. Cantor*. Suponhamos que fosse possível dispor os irracionais numa sucessão $s_1, s_2, s_3,...,$. Basta considerarmos apenas os irracionais entre 0 e 1. Criamos um número irracional *x*, também entre 0 e 1, através de uma representação decimal (portanto, uma dízima não periódica) da seguinte forma. O número *x* tem representação decimal dada por $x = 0, x_{-1}x_{-2}x_{-3}...$ onde x_{-p} é escolhido dentro do conjunto {0, 1, …, 9} de modo que x_{-p} é diferente de $(s_p)_{-p}$ onde este último é o algarismo que aparece na casa decimal de ordem *p* do irracional s_p (*p*-ésima elemento da sucessão $s_1, s_2, ...s_p, ...$). A escolha de cada x_p também deve atender a condição de não permitir que nenhum grupo de algarismos dentre os já escolhidos $x_{-1}, x_{-2}, ..., x_{-(p-1)}$ possa se tornar o gerador de uma dízima periódica. Desta forma obtemos uma dízima não periódica representando um único irracional que, no entanto, não pode constar na lista $s_1, s_2, s_3, ...,$. De fato, se $x = s_r$, para algum $r \in \mathbb{N}$, então como $x_{-r} \neq (s_r)_{-r}$ teríamos um absurdo (uma contradição)!.

8. ESTUDO SUPLEMENTAR: O IRRACIONAL π

O número π é definido como sendo a área limitada por um círculo de raio 1. Ele é certamente o irracional *transcendente* mais conhecido. A expressão transcendente significa, neste contexto, um número irracional que não é raiz de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros. Por exemplo, os irracionais $\sqrt{2}, 1+\sqrt{3}$ não são transcendentes pois são raízes das equações polinomiais $x^2 = 2, x^2 - 2x - 2 = 0,$ respectivamente. Neste último caso dizemos que os números são *algébricos*. A demonstração de que π é um número irracional, apesar de não ser trivial, pode ser feita usando-se apenas o cálculo diferencial elementar que é ensinado no primeiro período dos cursos de ciências exatas. A primeira demonstração de que π é irracional só foi obtida em 1766 por *J. H. Lambert*, de forma não completamente rigorosa, tendo sido finalmente (re)obtida de modo rigoroso pelo famoso matemático *A. M. Legendre* e publicada em 1855. A prova de que π é transcendente é muito mais complexa e só foi obtida em 1882 por *F. Lindermann.*

O fabuloso matemática grego *Arquimedes* foi o primeiro a obter uma aproximação razoável de π por numeros racionais. Ele provou que

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7},$$

usando dois polígonos regulares de 96 lados, um inscrito e outro circunscrito a um círculo de raio 1.

Podemos obter aproximações cada vez melhores de π, com o auxílio de uma máquina de calcular bastante rudimentar, capaz apenas de fazer as operações básicas (+, –, ·) e mais a operação de extrair raiz quadrada, da seguinte forma. A idéia é aproximarmos o círculo de raio 1 por polígonos regulares de 2^n lados inscritos neste círculo. Primeiramente, é fácil verificar que para a área e o perímetro do polígono regular de 2^n lados inscritos num círculo de raio 1 temos

$$\text{Área} = \frac{1}{4}\,\text{Perímetro} \times \sqrt{4 - l^2},$$

onde l é o comprimento do lado do polígono. Como l se aproxima mais e mais de 0 a medida que n cresce, vemos que para o círculo de raio 1 devemos ter (fazendo $l = 0$ na fórmula acima)

$$\text{Área} = \frac{1}{4}\,\text{Perímetro}$$

Assim, podemos também definir π como sendo a metade do perímetro do círculo de raio 1. Por outro lado, usando o teorema de *Pitágoras* que diz que em um triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos, se l_n denota o comprimento do lado do polígono regular de 2^n lados, é fácil mostrar que

$$l_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l_n^2}}. \tag{14}$$

Para $n = 2$ temos o polígono regular de 4 lados, quadrado, inscrito no círculo de raio 1, cujo lado, facilmente obtido usando-se o teorema de Pitágoras, é

$$l_2 = \sqrt{2}.$$

Por meio de (14) obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned}
l_3 &= \sqrt{2 - \sqrt{2}}, \\
l_4 &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \\
l_5 &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}, \\
l_6 &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}, \\
l_7 &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}}, \\
l_8 &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}}}, \\
&\vdots \qquad \vdots
\end{aligned}$$

Para obter uma boa aproximação de π calculemos, por exemplo, o valor da metade do perímetro do polígono de $2^8 = 256$ lados, inscrito no círculo de raio 1, cujo lado tem comprimento igual a l_8. Podemos obter um valor aproximado para l_8 executando a seguinte seqüência de operações numa calculadora

2 sqrt + 2 = sqrt + 2 = sqrt + 2 = sqrt
+ 2 = sqrt + 2 = sqrt + / – + 2 = sqrt,

e obtemos

$$l_8 = 0.02454307657143985215881652390200 64.$$

Agora, multiplicaremos o resultado obtido para l_8 por 256, que é o número de lados da polígono em questão, e em seguida dividimos por 2 o que nos dá

$$\pi \simeq 3.14151380114430107632851505945682$$

o que fornece uma aproximação com erro menor que 0, 0001 já que é sabido que

$$3,1415 < \pi < 3,1416.$$

Considerações finais: Exceto pelas duas últimas seções, o texto acima foi elaborado a partir de um "pedido" de minha filha, Marina, atualmente na 8a. série do primeiro grau, urgida por um trabalho de casa em grupo passado por sua professora. O referido trabalho, felizmente, resultou bastante diferente do que foi exposto acima, que acabou servindo apenas como uma entre várias referências usadas pelo grupo. No entanto, as 7 primeiras seções foram bem compreendidas por ela e seu grupo; as duas últimas foram escritas depois que o prazo para a entrega do trabalho havia esgotado e, portanto, não chegaram a ser "testadas". Para concluir gostaria de deixar aqui meus agradecimentos ao estimado professor e colega Elon Lages Lima pelas sugestões sobre uma versão preliminar destas notas.

EXERCÍCIOS:

1) Usando o mesmo argumento de Euclides descrito em **2.** prove que $\sqrt{3}, \sqrt{5}$ e $\sqrt{7}$ são irracionais.
2) Usando o método de Newton, descrito em 3, obtenha aproximações correspondentes ao x_3 do texto para os irracionais $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ e compare com o resultado fornecido pela máquina de calcular.
3) Pesquise sobre a vida e a obra dos grandes matemáticos mencionados no texto: *Arquimedes, Pitágoras, Euclides, Isaac Newton* e *Georg Cantor*.
4) Prove a fórmula (14).

OLIMPÍADAS AO REDOR DO MUNDO

O comitê editorial de EUREKA! agradece aos inúmeros elogios recebidos pela criação desta seção bem como ao crescente número de leitores que nos enviam soluções para os problemas da mesma.

A realização de inúmeras olimpíadas nesta época do ano torna mais importante a preparação para as mesmas e por isto resolvemos apresentar neste número somente novos problemas acompanhados dos nomes dos leitores que nos enviaram soluções de problemas anteriores. No próximo número de EUREKA! voltaremos ao normal apresentando problemas e soluções.

Continuamos salientando que estamos à disposição na OBM para aqueles que estiverem interessados na solução de algum problema particular. Para tanto, basta contactar a OBM, seção **OLIMPÍADAS AO REDOR DO MUNDO**, através de carta ou e-mail.

Antonio Luiz Santos

Primeiramente vamos aos problemas propostos deste número

61. (Rússia-2000) Sejam a, b, c números reais tais que as equações $x^2 + ax + 1 = 0$ e $x^2 + bx + c = 0$ possuem exatamente uma raiz real comum e as equações $x^2 + x + a = 0$ e $x^2 + cx + b = 0$ também possuem exatamente uma raiz comum. Determine a soma $a + b + c$.

62. (Rússia-2000) Determine a soma $\left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^3}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{2^{1000}}{3} \right\rfloor$ onde, como usual, $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro que não supera x.

63. (Rússia-2000) Sejam a e b números reais não nulos que satisfazem à equação

$$a^2b^2(a^2b^2 + 4) = 2(a^6 + b^6)$$

Mostre que pelo menos um deles não é racional.

64. (Rússia-2000) Seja M o conjunto que consiste dos 2000 números $11, 101, 1001, \ldots$. Mostre que pelo menos 99% dos elementos de M não são primos.

65. (Rússia-2000) Sejam $ABCD$ um paralelogramo com $\angle A = 60^{\circ}$ e O o circuncentro do triângulo ABD. A reta AO intersecta a bissetriz externa do ângulo $\angle C$ do paralelogramo em K. Determine AO/OK.

66. (Estônia-2000) Sejam ABC um triângulo acutângulo com $\angle ACB = 60^{\circ}$, AD e BE duas de suas alturas que se intersectam no ponto H. Mostre que o circuncentro do triângulo ABC pertence à bissetriz dos ângulos $\angle AHE$ e $\angle BHD$.

67. (Estônia-2000) Sobre o lado AC do triângulo ABC, toma-se um ponto D distinto de A e C. Sejam O_1 e O_2 os centros dos círculos circunscritos aos triângulos ABD e CBD respectivamente. Mostre que os triângulos O_1DO_2 e ABC são semelhantes.

68. (Eslovênia-2000) Determine todos os inteiros n para os quais o valor da expressão abaixo é inteira.

$$\sqrt{\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-n}}+\sqrt{\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n}}$$

69. (Eslovênia-2000) Determine todas as funções $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ tais que $f(f(n)) = n$ e $f(f(n+2)+2) = n$ para todo inteiro n e $f(0) = 1$.

70. (Belarus-2000) Os triângulos equiláteros ABF e CAG são construídos externamente sobre a hipotenusa AB e sobre o cateto CA do triângulo retângulo ABC. Se M é o ponto médio de BC, determine BC se $MF = 11$ e $MG = 7$.

71. (Belarus-2000) Determine todos os pares de inteiros positivos (m,n) que satisfazem à equação

$$(m-n)^2(n^2-m) = 4m^2n$$

72. (Belarus-2000) Quantos pares (n,q) satisfazem a igualdade

$$\{q^2\} = \left\{\frac{n!}{2000}\right\}$$

com n inteiro positivo e q um número racional não inteiro tal que $0 < q < 2000$, onde $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$?

73. **(Moldávia-2000)** O ortocentro H de um triângulo ABC não pertence a nenhum de seus lados. Sabendo que a medida de AH é igual ao raio do círculo circunscrito ao triângulo ABC, determine a medida do ângulo $\angle A$.

74. **(Moldávia-2000)** Resolva em $\mathbb{R}$ a equação

$$\left(x^2 - 3x - 2\right)^2 - 3\left(x^2 - 3x - 2\right) - 2 - x = 0$$

75. **(Moldávia-2000)** Dado o número 2000, calcule a soma das *décimas potências* dos algarismos deste número e continue fazendo o mesmo com o número obtido e assim sucessivamente. Mostre que entre os números obtidos existem pelo menos dois números iguais.

76. **(Moldávia-2000)** Os números inteiros a, b, c satisfazem à relação $a + b + c = 0$. Mostre que o número $2a^4 + 2b^4 + 2c^4$ é um quadrado perfeito.

77. **(Hungria-2000)** Se $A = \left(1000 + \sqrt{1000^2 + 1}\right)^{1000}$, determine o 2000–*ésimo* algarismo após a vírgula da sua representação decimal.

78. **(Hungria-2000)** Determine todos os inteiros n para os quais $n^4 - 4n^3 + 14n^2 - 20n + 10$ é um quadrado perfeito.

79. **(Repúblicas Tcheca e Eslovaca-2000)** Uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é tal que $f(n) = 1$ se *n é ímpar,* e $f(n) = k$ para todo *inteiro par* $n = 2^k l$, onde k é um número natural e l um número ímpar . Determine o maior número natural n para o qual

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) \leq 123456$$

80. **(Repúblicas Tcheca e Eslovaca-2000)** Se n é número natural, mostre que $4 \cdot 3^{2^n} + 3 \cdot 4^{2^n}$ é divisível por 13 se, e somente se, n é par.

81. **(Irã-2000)** Dois círculos se intersectam nos pontos A e B. Uma reta l que passa por A, intersecta estes círculos nos pontos C e D. Se M e N são os pontos médios dos arcos BC e BD que não contém A e K é o ponto médio de CD, mostre que $\angle MKN = 90^\circ$.

82. (Irlanda-2000) Sejam $x \geq 0$, $y \geq 0$ números reais tais que $x + y = 2$. Mostre que $x^2 y^2 \left(x^2 + y^2\right) \leq 2$.

83. (Iugoslávia-2000) Em um tubo de ensaio há exatamente uma ameba. A cada segundo algumas das amebas dividem-se em sete novas amebas ou morre exatamente uma das amebas. Determine o período mínimo de tempo após o qual o número de amebas no tubo de ensaio será igual a 2000.

84. (Iugoslávia-2000) Mostre que todo número racional positivo pode ser representado sob a forma

$$r = \frac{a^3 + b^3}{c^3 + d^3}$$

onde a, b, c e d são inteiros positivos.

85. (Polônia-2000) Os lados AC e BC de um triângulo ABC possuem a mesma medida. Sejam P um ponto do interior do triângulo tal que $\angle PAB = \angle PBC$ e M o ponto médio de AB Mostre que $\angle APM + \angle BPC = 180^{o}$.

86. (Inglaterra-2000) Dois círculos C_1 e C_2 se intersectam nos pontos M e N e possuem uma tangente comum sendo P e Q respectivamente os pontos de tangência com os círculos. Se N é o ponto mais próximo de PQ e a reta determinada por PN intersecta C_2 novamente em R , mostre que MQ é a bissetriz do ângulo $\angle PMR$.

87. (Inglaterra-2000) Para cada inteiro positivo k, definamos a seqüência $\left(a_n\right)$ por $a_0 = 1$ e $a_n = kn + (-1)^n a_{n-1}$ para $n \geq 1$. Determine todos os valores de k para os quais 2000 é um termo da seqüência.

88. (Inglaterra-2000) Sejam x, y, z números reais positivos tais que $xyz = 32$. Determine o valor mínimo de

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2$$

89. (Balcânica-2000) Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que possuem a propriedade :

$$f\left(xf\left(x\right)+f\left(y\right)\right)=\left(f\left(x\right)\right)^{2}+y$$

para todos os números reais x e y.

90. (Baltic Way-2000) Seja ABC um triângulo tal que

$$\frac{BC}{AB-BC}=\frac{AB+BC}{AC}$$

Determine a razão $\angle A : \angle C$.

Enviaram soluções de problemas anteriores os seguintes leitores da EUREKA!

Cláudio Pamplona dos Santos Dias	**Rio de Janeiro – RJ**	**Prob. 36**
Daniel Pinheiro Sobreira	**Fortaleza – CE**	**Prob. 32**
Davi Máximo Alexandrino Nogueira	**Fortaleza – CE**	**Prob. 28, 47, 48**
Diego Alvarez Araújo Correia	**Fortaleza – CE**	**Prob. 20, 32, 36, 43, 48, 51, 52**
Diêgo Veloso Uchôa	**Teresina – PI**	**Prob. 1, 26, 29, 31, 28**
Evandro Makiyama	**São Paulo – SP**	**Prob. 35, 39, 45, 46, 47, 52, 56**
Formiga	**Atibaia – SP**	**Prob. 32, 43, 45, 56**
Geraldo Perlino Jr.	**São Paulo – SP**	**Prob. 32 ao 59**
Juliana Gomes Varela	**Fortaleza – CE**	**Prob. 37, 43, 45**
Lucas de Melo Pontes	**Fortaleza – CE**	**Prob. 32, 35, 36, 43, 45, 47, 51, 52, 54**
Luciano Prudente	**Rio de Janeiro – RJ**	**Prob. 32, 43, 44, 47, 51, 52**
Marcelo Ribeiro de Souza	**Rio de Janeiro - RJ**	**Prob. 32, 44**
Marcílio Miranda de Carvalho	**Teresina – PI**	**Prob. 8, 37, 45, 51**
Márcio Miranda de Carvalho	**Teresina – PI**	**Prob. 26, 27, 44, 49, 50**
Marina Lima Medeiros	**Fortaleza – CE**	**Prob. 47**
Rodrigo Roque Dias	**São Paulo – SP**	**Prob. 20, 43**
Rodrigo Villard Milet	**Rio de Janeiro – RJ**	**Prob. 32, 36, 43, 45, 51, 53, 54, 56, 57**
Thiago da Silva Sobral	**Fortaleza – CE**	**Prob. 32 ao 56**
Wallace Rodrigues de Holanda Miranda	**Teresina – PI**	**Prob. 32, 33, 49, 51, 52, 56, 59**
Yuri Gomes Lima	**Fortaleza – CE**	**Prob. 32 ao 56**

Você sabia…

Que para calcular as raízes quadradas de 100, 121, 144, 169, 400, 441, 484, 900, 961, basta calcular as raízes dos algarísmos situados nos extremos?

Há outros números de 3 dígitos com essa propriedade?

Colaboração de Rildo Alves do Nascimento (Sta. Maria da Boa Vista – PE)

SOLUÇÕES DE PROBLEMAS PROPOSTOS

Publicamos aqui algumas das respostas enviadas por nossos leitores.

41) Se a e b são números reais positivos, então $a^b + b^a > 1$.

Solução dos alunos do CEMPI (Teresina – PI)

Observe que se "a" ou "b" for maior ou igual a 1 a desigualdade é imediata. Então analisaremos o caso em que $0 < a, b < 1$.

Seja $a = \dfrac{1}{(1+u)}$, $b = \dfrac{1}{(1+v)}$, $u > 0$ e $v > 0$.

Então $a^b = \dfrac{1}{(1+u)^b} >^* \dfrac{1}{1+u\cdot b} = \dfrac{1}{1+u\cdot b} = \dfrac{1}{1+u\cdot\left(\dfrac{1}{1+v}\right)} = \dfrac{1+v}{1+u+v}$ e

Analogamente $b^a = \dfrac{1+u}{1+u+v}$ e portanto:

$$a^b + b^a > \frac{1+v}{1+u+v} + \frac{1+u}{1+u+v} = 1 + \frac{1}{1+u+v} > 1.$$

*Agora o problema se reduz a mostrarmos que $(1+u)^b < 1+ub$ para $0 < b < 1$. Para isso basta termos uma noção de cálculo diferencial

$$f(u) = 1 + bu - (1+u)^b \Rightarrow f'(u) = b - b(1+u)^{b-1} = b\left[1 - \frac{1}{(1+u)^{1-b}}\right] > 0.$$

Como f é crescente no intervalo $(0,1) \Rightarrow f(u) > f(0) = 0$ e portanto segue imediatamente a demonstração.

45) Existe uma seqüência infinita de:

a) Números reais
b) Números inteiros

Tais que a soma de quaisquer dez termos consecutivos é positiva, enquanto que para todo n a soma dos primeiros $10n + 1$ termos consecutivos é negativa?

Solução de Zoroastro Azambuja Neto (Rio de Janeiro – RJ)

a) Sim. Tome $a_{10k} = 1 + \dfrac{1}{10^k}$ para todo inteiro positivo k e $a_n = -\dfrac{1}{9}$ se n não é múltiplo de 10.

Temos $a_1 + \dots + a_{10n+1} = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{10^n} - \frac{1}{9} = -\frac{1}{9 \cdot 10^n} < 0$ e, se

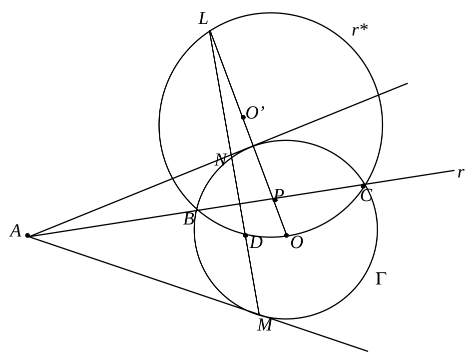
$10k < n \le 10(k+1), a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+9} = \frac{1}{10^{k+1}} > 0.$

b) Não. Se $n > |a_1|, a_1 + a_2 + \dots + a_{10n+1} = a_1 + (a_2 + \dots + a_{11}) + (a_{12} + \dots + a_{21}) +$

$+ (a_{10n-g} + \dots + a_{10n+1}) > a_1 + 1 + 1 + \dots + 1 > a_1 + n > 0.$

47) Dada uma circunferência Γ, trace as tangentes a ela por um ponto exterior, A, tocando-a em *M* e *N*. Trace a reta *r* passando por *A* e tocando Γ em *B* e *C*. Se *D* é o ponto médio de $\overline{MN}$, prove que $\overline{MN}$ é a bissetriz de $\angle BDC$.

Solução de Cláudio Arconcher (Jundiaí – SP)



Consideremos a inversão na circunferência Γ de centro *O*.
Notemos que o ponto *D*, pela sua definição, é o inverso do ponto *A* em relação a Γ, *B* e *C* coincidem com seus inversos em relação a Γ. Assim a figura inversa da reta *r* é a circunferência *r** que contém *O*. Assim sendo as circunferências Γ e *r** compartilham a corda $\overline{BC}$. A reta perpendicular a $\overline{BC}$ pelo ponto médio *P* passa por *O* e *O'* (centro de *r**). Por esse motivo os arcos $\overset{\frown}{RL}$ e $\overset{\frown}{CL}$ indicados na figura acima são congruentes, ($\overline{OL}$ é um diâmetro de *r**).
Notemos agora que o fato de ser reto o ângulo $N\hat{D}O$ implica que a reta pelos pontos *N* e *D* passa por *L*. Isso completa nossa demonstração: os ângulos inscritos $B\hat{D}L$ e $C\hat{D}L$ ”enxergam” arcos congruentes do mesmo círculo, melhor, circunferência, *r**, são congruentes por esse motivo.

49) É dado um polígono regular de *n* lados.

Assinale aleatoriamente, no seu interior, um ponto *M*. Sendo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ as distâncias de *M* a cada um dos lados, verifique que:

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots \frac{1}{x_n} > \frac{2\pi}{a}$, onde *a* é a medida do lado do poligono.

Solução de Antonio Caminha Neto (Fortaleza – CE)

Sejam *O* o centro e $A_1, A_2, \ldots, A_n$ os vértices do polígono. Podemos supor, sem perda de generalidade, que x_i é a distância de *M* ao lado $A_i A_{i+1}$ (aqui, $A_{n+1} = A_1$). Então

$$A(A_1A_2...A_n) = \sum_{i=1}^{n} A(A_iMA_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{ax_i}{2} = \frac{a}{2}(x_1 + x_2 + ... + x_n) \quad (*)$$

Por outro lado, sendo *r* o raio do círculo Γ inscrito no polígono, temos também

$$A(A_1A_2...A_n) = \sum_{i=1}^{n} A(A_iOA_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{ar}{2} = n \times \frac{ar}{2} \quad (**)$$

Comparando (*) e (**), concluímos que $x_1 + x_2 + ... + x_n = nr$. Agora, note que o perímetro de Γ é menor que o do polígono, o que nos dá $2\pi r < na$. Então

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = nr < \frac{n^2 a}{2\pi}$$

Finalmente, sabemos (ver artigo "Desigualdades Elementares, A. Caminha", Eureka 5) que para os reais positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tem-se

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} \geq \frac{n^2}{x_1 + x_2 + ... + x_n}$, e daí

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} \geq \frac{n^2}{x_1 + x_2 + ... + x_n} > \frac{n^2}{n^2/(n^2 a/2\pi)} = \frac{2\pi}{a}.$$

50) Calcule o determinante:

$$\begin{vmatrix} MDC(1,1) & MDC(1,2) \cdots & MDC(1,n) \\ MDC(2,1) & MDC(2,2) \cdots & MDC(2,n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ MDC(n,1) & MDC(n,2) \cdots & MDC(n,n) \end{vmatrix}$$

Onde *MDC* (*a*, *b*) é o máximo divisor comum de *a* e *b*.

Solução de Márcio A. Assad Cohen e Fábio de Oliveira Costa (Rio de Janeiro – RJ)

Convenção: det (n) é igual ao determinante desejado quando este tem n linhas e colunas.

Inicialmente escreveremos o determinante com uma quantidade de linhas suficiente para percebermos como o problema se comporta ao mudarmos o valor de n.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} \text{ Determinante quando } n = 8$$

Pode-se perceber que em cada linha $k(1 \le k \le n)$ do determinante, os elementos dessa linha considerada repetem-se com período k, pois $mdc(x,k) = mdc(x + k, k)$

Como $mdc(1,n) = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$, a primeira linha é 1 1 1 ... 1

Além disso, para todo p primo, $mdc(n, p) = 1$ se $n < p$, logo a p-ésima linha é da forma 1 1 1 ... 1 p, e a p-ésima coluna idem quando tomamos $n = p$

Logo, fazendo $L_p = L_p - L_1$ vemos que det(p) = (p-1) det(p-1), sendo $det(p)$ o determinante desejado quando o número de linhas é primo.

Obs: Fazer $L_p = L_p - L_1$ significa trocar a linha p do determinante pela combinação linear (linha p – linha 1). Essa notação será usada outras vezes no decorrer dessa resolução.

Calculemos então o determinante para alguns valores pequenos de n:

$$det(2) = 1.det(1) = 1;$$
$$det(3) = 2.det(2) = 2;$$

Para calcular $det(4)$, note que podemos fazer $L_4 = L_4 - L_2$ para concluir que $det(4) = 2.det(3) = 4$, e portanto $det(5) = 4.det(4) = 16$; $det(6)$ é um pouco mais difícil de calcular, mas notando a similaridade da L_6 com L_2 e L_3, pode-se perceber que fazendo $L_6 = L_6 - L_3 + L_1 - L_2$ reduzimos a ordem do determinante de forma que $det(6) = 2.det(5)$ (pois $a_{6,6}$ vira $6 - 3 + 1 - 2 = 2$ e para $i < 6$, $a_{6,i} = 0$). Daí, $det(7) = 6.det(6)$ também fica determinado.

Para $det(8)$ é fácil ver que a combinação linear a ser utilizada é $L_8 = L_8 - L_4$ e para $det(9)$, a combinação linear é $L_9 = L_9 - L_3$.

É razoável supor que sempre é possível encontrar uma combinação linear que reduza de 1 a ordem do determinante. Note que os números das linhas utilizadas nas combinações lineares sempre foram divisores do número de linhas do determinante correspondente (por exemplo, no caso $n = 6$ usamos as linhas 1, 2, 3 e 6).

Mais do que isso, os sinais que antecedem as linhas nas combinações lineares parecem estar ligados à função μ de Möbius!

De fato, no caso do 6, temos: $L_6 = \mu(6)\,L_6 + \mu(3)L_3 + \mu(2)L_2 + \mu(1)L_1$.

Entretanto, essa combinação linear falha para L_8. No caso, entre os divisores de 8, apenas 1 e 2 têm μ não nulo. Mas estamos usando exatamente L_4 e L_8. Uma maneira de satisfazer esse caso e o do 6 é fazer:

$L_8 = \mu\left(\frac{8}{8}\right)L_8 + \mu\left(\frac{8}{4}\right)L_4 = L_8 - L_4$. Note que para $n = 6$ temos:

$L_6 = \mu\left(\frac{6}{6}\right)L_6 + \mu\left(\frac{6}{3}\right)L_3 + \mu\left(\frac{6}{2}\right)L_2 + \mu\left(\frac{6}{1}\right)L_1 = L_6 - L_3 - L_2 + L_1$, como desejávamos.

Tentaremos então provar que fazer a substituição $L_n = \sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)L_d$ é suficiente para reduzir a ordem (note que para $d = n$ isso dá L_n).

Temos então que as entradas da última linha zeram, com exceção daquele que também está na última coluna do determinante.

De fato, consideramos a coluna x, $x \neq n$. (que na última linha equivale à entrada $mdc(x, n)$)

Quero calcular $\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right).mdc(x,d)$.

Vamos tentar usar a fórmula da inversão de Möbius (no caso, $g(d) = mdc(x, d)$). Se acharmos uma função "f" tal que $g(n) = \sum_{d|n} f(d)\,\forall n > 0$, o problema termina porque aí $f(n) = \sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right).g(d)$.

Tomando então $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \begin{cases} f(d) = 0 \text{ se } d \text{ não divide } x \\ f(d) = \varphi(d) \text{ se } d \text{ divide } x \end{cases}$, sendo φ a função de Euler temos:

$$\sum_{d|n} f(d) = \sum_{\substack{d|n \\ d|x}} \varphi(d) = \sum_{d|mdc(x,n)} \varphi(d) \overset{(***)}{=} mdc(x, n) = g(n)\ \forall n.$$

E se $x < n$, temos que n não divide x, e portanto $f(n)=0$. Logo, $\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right).mdc(x,d)=f(n)=0$ para $x < n$. Se, entretanto, $x = n$, então $f(n)=\varphi(n)$ (pois n divide $x = n$) e $\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right).mdc(n,d)=\varphi(n)$ portanto, a última linha passa a ser da forma 0 0 0 0 ... $\varphi(n)$ e então

$det(n)=\varphi(n).det(n-1)$Logo, $det(n)=\prod_{i=1}^{n}\varphi(i)=\varphi(1).\varphi(2).\varphi(3)...\varphi(n)$.

(***) pois temos como conseqüência da fórmula da inversão de Möbius, $\sum_{d|n}\varphi(d)=n$.

51) Três feirantes foram vender melancias. Um levou 10; outro 16; o terceiro, 26. Todos venderam algumas melancias pelo mesmo preço até o meio dia. Depois disso, os três baixaram o preço, mas continuaram vendendo por preços iguais. Quando voltaram para casa, após venderem todas as melancias, cada um tinha a mesma quantia de dinheiro; 35 mil cruzeiros. Por quanto foi vendida cada melancia antes e após o meio-dia?

Solução de Diêgo Veloso Uchôa (Teresina – PI)

Sejam A_1, A_2 e A_3 os vendedores que venderam 10, 16 e 26 melancias respectivamente, x_i a quantidade de melancias que o vendedor A_i vendeu antes do meio dia e y o preço antes do meio dia e y_1 o preço após o meio dia.

Portanto, teremos:

$$\begin{cases} \text{I)}\ \ y\cdot x_1+(10-x_1)y_1=35000 \\ \text{II)}\ \ y\cdot x_2+(16-x_2)\cdot y_1=35000 \\ \text{III)}\ \ y\cdot x_3+(26-x_3)\cdot y_1=35000 \end{cases}$$

De I) e II)

$\Rightarrow y\cdot(x_1)+(10-x_1)y_1=y\cdot x_2+(16-x_2)y_1 \Rightarrow y(x_1-x_2)=(6+x_1-x_2)y_1$

Analogamente de II), III) e I), III) teremos $y(x_1-x_3)=(16+x_1-x_3)y_1$ e $y(x_2-x_3)=(10+x_2-x_3)\cdot y_1$

Faça $\left|\begin{aligned} x_1 - x_2 &= w_1 \\ x_1 - x_3 &= w_2 \\ x_2 - x_3 &= w_3 \end{aligned}\right. \Rightarrow \left|\begin{aligned} y \cdot w_1 &= (6 + w_1) \cdot y_1 \\ y \cdot w_2 &= (16 + w_2) \cdot y_1 \\ y \cdot w_3 &= (10 + w_3) \cdot y_1 \end{aligned}\right. \Rightarrow$

$\dfrac{y \cdot w_1}{y \cdot w_2} = \dfrac{(6+w_1)\cdot y_1}{(16+w_2)\cdot y_1} \Rightarrow \dfrac{16+w_2}{w_2} = \dfrac{6+w_1}{w_1} \Rightarrow \dfrac{16}{w_2} + \dfrac{w_2}{w_2} \Rightarrow \dfrac{6}{w_1} + \dfrac{w_1}{w_1} \Rightarrow$

$\dfrac{16}{w_2} = \dfrac{6}{w_1} \Rightarrow \dfrac{8}{w_2} = \dfrac{3}{w_1}$; Imagine, agora, essas duas frações nas suas formas irredutíveis e como os seus numeradores deverão ser iguais e o número 8 não tem o fator “3” então w_1 é múltiplo de $"3" \Rightarrow w_1 = 3k(\text{ com } k \in \mathbb{N})$ se $k \neq 1 \Rightarrow w_1 \geq 6 \Rightarrow w_2 \geq 16$ (Absurdo! pois $w_2 = x_1 - x_2 < 10,$ pois $x_1 < 10)$ logo $k = 1$ e $w_1 = 3 \Rightarrow w_2 = 8$ e $w_3 = 5$. Como todos os vendedores venderam algumas melancias antes e após o meio dia temos que $1 \leq x_1 \leq 9$ e $1 \leq x_3 \leq 25$ mas $w_3 = x_1 - x_3 = 8 \Rightarrow x_3 = 1$ e $x_1 = 9 \Rightarrow x_2 = 6.$

Lembrando que $y \cdot w_1 = (6 + w_1) \cdot y_1 \Rightarrow y = 3 \cdot y_1$ e assim substituindo em I) $3y_1 \cdot x_1 + (10 - 9) \cdot y_1 = 35000 \Rightarrow 28y_1 = 35000 \Rightarrow y_1 = 1250$ cruzeiros e $y = 3750$ cruzeiros.

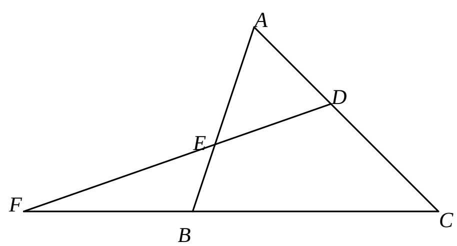
Seguimos aguardando a solução do problema 48 publicado na EUREKA! Nº. 9
Agradecemos também o envio das soluções e a colaboração de:

Carlos A.Gomes	**(Natal – RN)**
Carlos Alberto da Silva Victor	**(Nilópolis – RJ)**
Carlos Rodrigo Mendes Lima	**(Rio de Janeiro – RJ)**
Diego Alvarez Araújo Correia	**(Fortaleza – CE)**
Einstein do Nascimento Júnir	**(Fortaleza – CE)**
Fernando Carvalho Ramos	**(Santa Maria – RS)**
Formiga	**(São Paulo – SP)**
Geraldo Perlino	**(Itaparica da Serra – SP)**
Geraldo Perlino Júnior	**(São Paulo – SP)**
Gilbert R. Johnson	**(EUA)**
Luciano Nunes Prudente	**(Rio de Janeiro – RJ)**
Manuel Murillo Tsijli	**(Costa Rica)**
Osvaldo Melo Sponquiado	**(Olímpia – SP)**
Paulo de Souza Sobrinho	**(Natal – RN)**
Rodrigo Roque Dias	**(São Paulo – SP)**
Vicente Wilson Moura Gaeta	**(Manaus – AM)**

PROBLEMAS PROPOSTOS

Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e sugestões de novos problemas para os próximos números.

52) Quatro retas se interceptam formando quatro triângulos conforme a figura abaixo.



a) Prove que as circunferências circunscritas aos quatro triângulos possuem um ponto em comum.

b) Prove que os centros dessas quatro circunferências são concíclicos (i.e. existe uma circunferência que passa por todos eles).

53) Prove que num círculo convexo dado e para o mesmo número de lados. O polígono regular inscrito é aquele cuja superfície é máxima.

54) Sejam (x_n) a seqüência definida por $x_1 = 2, x_{n+1} = 2^{x_n}, \forall n \ge 1,$ e (y_n) a seqüência definida por $y_1 = 2001, y_{n+1} = 2001^{(y_n^{2001})}, \forall n \ge 1.$ Prove que existe c natural tal que $y_n \le x_{n+c}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e determine o menor c com essa propriedade.

55) Seja S o conjunto de pontos interiores de uma esfera de raio 1 e C o conjunto de pontos interiores de um círculo também de raio 1. Existe alguma função $f : S \to C$ tal que $d(A, B) \le d(f(A), f(B))$ para quaisquer pontos $A, B \in S$? ($d(A, B)$ denota a distância euclidiana entre A e B).

Problema 52 proposto por Carlos Alexandre Gomes da Silva (Natal – RN), problema 53 proposto por Luis Farias Maia (Fortaleza – CE)

AGENDA OLÍMPICA

XXIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

NÍVEIS 1, 2 e 3

Primeira Fase – Sábado, 9 de junho
Segunda Fase – Sábado, 1 de setembro
Terceira Fase – Sábado, 20 de outubro (níveis 1, 2 e 3)
Domingo, 21 de outubro (níveis 2 e 3 - segundo dia de prova).

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Primeira Fase – Sábado, 1 de setembro
Segunda Fase – Sábado, 20 e Domingo, 21 de outubro

♦

VII OLIMPÍADA DE MAIO

Sábado, 12 de maio

♦

XLII OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

1 a 14 de julho
Washington, Estados Unidos

♦

IV OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA

Sábado, 6 de outubro

♦ ♦ ♦

Errata: O leitor Diego Alvarez Araújo Correia, de Fortaleza – CE, notou um erro tipográfico na página 45 da revista Eureka N^{o}. 8. O enunciado correto do Teorema 2 (Fórmula de inversão de Möbius) é o seguinte:

Se para todo $n > 0$ temos $g(n)=\sum_{d|n} f(d)$ então, para todo n, $f(n)=\sum_{d|n}\mu(n/d)g(d)$.

COORDENADORES REGIONAIS

Amarísio da Silva Araújo	(UFV)	Viçosa – MG
Alberto Hassen Raad	(UFJF)	Juiz de Fora – MG
Angela Camargo	(Centro de Educação de Adultos – CEA)	Blumenau – SC
Benedito Tadeu Vasconcelos Freire	(UFRN)	Natal – RN
Carlos Frederico Borges Palmeira	(PUC-Rio)	Rio de Janeiro – RJ
Claudio Arconcher	(Colégio Leonardo da Vinci)	Jundiaí – SP
Claus Haetinger	(UNIVATES)	Lajeado – RS
Cleonor Crescêncio das Neves	(UTAM)	Manaus – AM
Élio Mega	(Colégio Etapa)	São Paulo – SP
Kátia Gonçalves de Faria	(Colégio Singular)	Santo André – SP
Florêncio Ferreira Guimarães Filho	(UFES)	Vitória – ES
Gisele de Araújo Prateado Gusmão	(UFGO)	Goiânia – GO
Ivanilde Fernandes Saad	(UC. Dom Bosco)	Campo Grande– MS
Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia	(UFPB)	João Pessoa – PB
João Benício de Melo Neto	(UFPI)	Teresina – PI
João Francisco Melo Libonati	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Irene Nakaoka	(UEM)	Maringá – PR
José Carlos Pinto Leivas	(UFRG)	Rio Grande – RS
José Cloves Saraiva	(UFMA)	São Luis – MA
José Gaspar Ruas Filho	(ICMC-USP)	São Carlos – SP
José Luiz Rosas Pinho	(UFSC)	Florianópolis – SC
José Vieira Alves	(UFPB)	Campina Grande – PB
Marcelo Rufino de Oliveira	(Sistema Titular de Ensino)	Belém – PA
Licio Hernandes Bezerra	(UFSC)	Florianópolis – SC
Luzinalva Miranda de Amorim	(UFBA)	Salvador – BA
Marcondes Cavalcante França	(UFC)	Fortaleza – CE
Pablo Rodrigo Ganassim	(Liceu Terras do Engenho)	Piracicaba – SP
Paulo Henrique Cruz Neiva de Lima Jr.	(Escola Técnica Everardo Passos)	SJ dos Campos – SP
Reinaldo Gen Ichiro Arakaki	(INPE)	SJ dos Campos – SP
Ricardo Amorim	(Centro Educacional Logos)	Nova Iguaçu – RJ
Roberto Vizeu Barros	(Colégio Acae)	Volta Redonda – RJ
Sérgio Cláudio Ramos	(IM-UFRGS)	Porto Alegre – RS
Silvio de Barros Melo	(UFPE)	Recife – PE
Tadeu Ferreira Gomes	(UEBA)	Juazeiro – BA
Tomás Menéndez Rodrigues	(U. Federal de Rondônia)	Porto Velho – RO
Valdenberg Araújo da Silva	(U. Federal de Sergipe)	São Cristovão – SE
Wagner Pereira Lopes	(Escola Técnica Federal de Goiás)	Jataí – GO
Waldemar M. Canalli	(Prefeitura Municipal de S. João de Meriti)	SJ de Meriti – RJ