CONTEÚDO

XXVII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e Soluções da Primeira Fase

PROBLEMAS – NÍVEL 1

1. Sabendo-se que $9\,174\,532 \times 13 = 119\,268\,916$, pode-se concluir que é divisível por 13 o número:

A) 119 268 903 B) 119 268 907 C) 119 268 911
D) 119 268 913 E) 119 268 923

2. Numa caixa havia 3 meias vermelhas, 2 brancas e 1 preta. Professor Piraldo retirou 3 meias da caixa. Sabendo-se que nenhuma delas era preta, podemos afirmar sobre as 3 meias retiradas que:

A) são da mesma cor.
B) são vermelhas.
B) uma é vermelha e duas são brancas.
D) uma é branca e duas são vermelhas.
E) pelo menos uma é vermelha.

3. Diamantino colocou em um recipiente três litros de água e um litro de suco composto de 20% de polpa e 80% de água. Depois de misturar tudo, que porcentagem do volume final é polpa?

A) 5% B) 7% C) 8% D) 20% E) 60%

4. Perguntado, Arnaldo diz que 1 bilhão é o mesmo que um milhão de milhões. Professor Piraldo o corrigiu e disse que 1 bilhão é o mesmo que mil milhões. Qual é a diferença entre essas duas respostas?

A) 1 000 B) 999 000 C) 1 000 000 D) 999 000 000
E) 999 000 000 000

5. Numa seqüência, cada termo, a partir do terceiro, é a soma dos dois termos anteriores mais próximos. O segundo termo é igual a 1 e o quinto termo vale 2005. Qual é o sexto termo?

A) 3 002 B) 3 008 C) 3 010 D) 4 002 E) 5 004

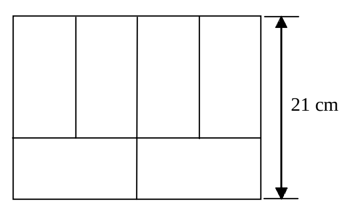
6. Um galão de mel fornece energia suficiente para uma abelha voar 7 milhões de quilômetros. Quantas abelhas iguais a ela conseguiriam voar mil quilômetros se houvesse 10 galões de mel para serem compartilhados entre elas?
A) 7 000 B) 70 000 C) 700 000 D) 7 000 000
E) 70 000 000

7. Três anos atrás, a população de Pirajussaraí era igual à população que Tucupira tem hoje. De lá para cá, a população de Pirajussaraí não mudou mas a população de Tucupira cresceu 50%. Atualmente, as duas cidades somam 9000 habitantes. Há três anos, qual era a soma das duas populações?
A) 3 600 B) 4 500 C) 5 000 D) 6 000 E) 7 500

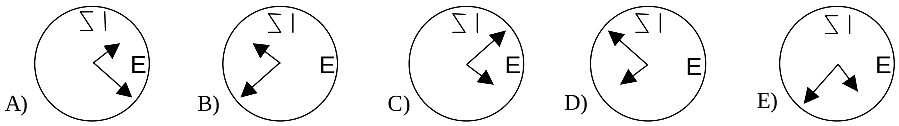
8. Um agricultor esperava receber cerca de 100 mil reais pela venda de sua safra. Entretanto, a falta de chuva provocou uma perda da safra avaliada entre $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{4}$ do total previsto. Qual dos valores a seguir pode representar a perda do agricultor?
A) R$ 21.987,53 B) R$ 34.900,00 C) R$ 44.999,99
D) R$ 51.987,53 E) R$ 60.000,00

9. Devido a um defeito de impressão, um livro de 600 páginas apresenta em branco todas as páginas cujos números são múltiplos de 3 ou de 4. Quantas páginas estão impressas?
A) 100 B) 150 C) 250 D) 300 E) 430

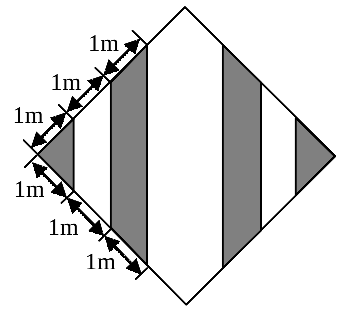
10. Seis retângulos idênticos são reunidos para formar um retângulo maior conforme indicado na figura. Qual é a área deste retângulo maior?
A) 210 cm^2 B) 280 cm^2
C) 430 cm^2 D) 504 cm^2
E) 588 cm^2



11. O relógio do professor Piraldo, embora preciso, é diferente, pois seus ponteiros se movem no sentido anti-horário. Se você olhar no espelho o relógio quando ele estiver marcando 2h23min, qual das seguintes imagens você verá?



12. Uma placa decorativa consiste num quadrado de 4 metros de lado, pintada de forma simétrica com algumas faixas, conforme indicações no desenho ao lado. Qual é a fração da área da placa que foi pintada?

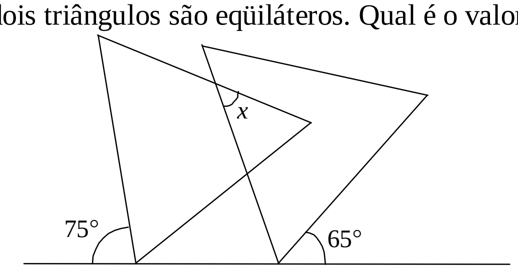


A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{6}{13}$ E) $\frac{7}{11}$

13. Películas de *insulfilm* são utilizadas em janelas de edifícios e vidros de veículos para reduzir a radiação solar. As películas são classificadas de acordo com seu grau de transparência, ou seja, com o percentual da radiação solar que ela deixa passar. Colocando-se uma película de 70% de transparência sobre um vidro com 90% de transparência, obtém-se uma **redução** de radiação solar igual a :

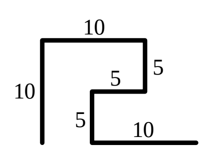
A) 3% B) 37% C) 40% D) 63% E) 160%

14. Na figura, os dois triângulos são eqüiláteros. Qual é o valor do ângulo x?

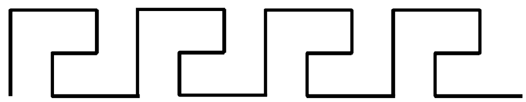


A) 30º B) 40º C) 50º D) 60º E) 70º

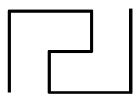
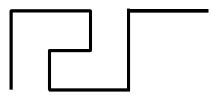
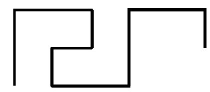
15. Um serralheiro solda varetas de metal para produzir peças iguais que serão juntadas para formar o painel abaixo. O desenho ao lado apresenta as medidas, em centímetros, de uma dessas peças. O serralheiro usa exatamente 20

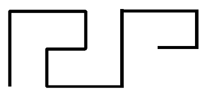
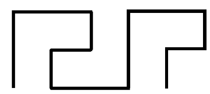


metros de vareta para fazer o seu trabalho.

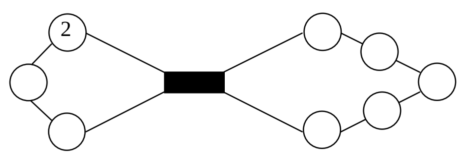


Qual dos desenhos abaixo representa o final do painel?

A)  B)  C) 

D)  E) 

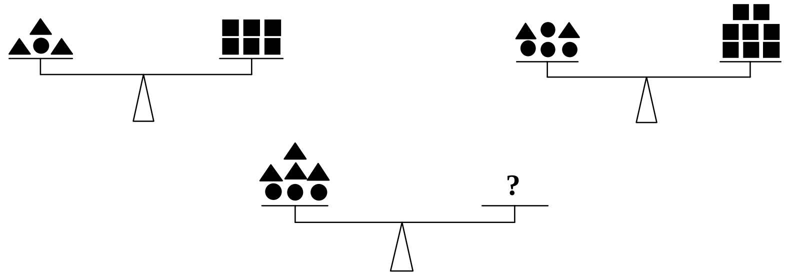
16. Dentre os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10, escolha alguns e coloque-os nos círculos brancos de tal forma que a soma dos números em dois círculos vizinhos seja sempre um quadrado perfeito. Atenção: o 2 já foi colocado em um dos círculos e não é permitido colocar números repetidos; além disso, círculos separados pelo retângulo preto não são vizinhos.



A soma dos números colocados em todos os círculos brancos é:

A) 36 B) 46 C) 47 D) 49 E) 55

17. Figuras com mesma forma representam objetos de mesma massa. Quantos quadrados são necessários para que a última balança fique em equilíbrio?



A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

18. As 10 cadeiras de uma mesa circular foram numeradas com números consecutivos de dois algarismos, entre os quais há dois que são quadrados perfeitos. Carlos sentou-se na cadeira com o maior número e Janaína, sua namorada, sentou-se na cadeira com o menor número. Qual é a soma dos números dessas duas cadeiras?
A) 29 B) 36 C) 37 D) 41 E) 64

19. Em um ano, no máximo quantos meses têm cinco domingos?
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

20. As nove casas de um tabuleiro 3×3 devem ser pintadas de foram que cada coluna, cada linha e cada uma das duas diagonais não tenham duas casas de mesma cor. Qual é o menor número de cores necessárias para isso?
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

PROBLEMAS – NÍVEL 2

1. Uma loja de sabonetes realiza uma promoção com o anúncio *"Compre um e leve outro pela metade do preço"*. Outra promoção que a loja poderia fazer oferecendo o mesmo desconto percentual é
A) *"Leve dois e pague um"* B) *"Leve três e pague um"*
C) *"Leve três e pague dois"* D) *"Leve quatro e pague três"*
E) *"Leve cinco e pague quatro"*

2. Veja o problema No. 13 do Nível 1.
3. Veja o problema No. 10 do Nível 1.
4. Veja o problema No. 4 do Nível 1.
5. Veja o problema No. 9 do Nível 1.

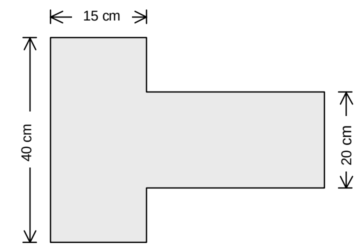
6. Platina é um metal muito raro, mais raro até do que ouro. Sua densidade é 21,45 g/cm^3. Suponha que a produção mundial de platina foi de cerca de 110 toneladas em cada um dos últimos 50 anos e desprezível antes disso. Assinale a alternativa com o objeto cujo volume é mais próximo do volume de platina produzido no mundo em toda a história.
A) uma caixa de sapatos B) uma piscina
C) um edifício de dez andares D) o monte Pascoal E) a Lua

7. Veja o problema No. 5 do Nível 1.
8. Veja o problema No. 17 do Nível 1.

9. Entre treze reais não nulos há mais números positivos do que negativos. Dentre os $\frac{13\times 12}{2}=78$ produtos de dois dos treze números, 22 são negativos. Quantos números dentre os treze números dados são negativos?

A) 2 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

10. O desenho ao lado mostra um pedaço de papelão que será dobrado e colado nas bordas para formar uma caixa retangular. Os ângulos nos cantos do papelão são todos retos. Qual será o volume da caixa em cm^3?



A) 1 500 B) 3 000 C) 4 500 D) 6 000
E) 12 000

11. Sendo *a*, *b* e *c* números reais, pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, é verdade que $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$. A distributiva da adição em relação à multiplicação $a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$ não é sempre verdadeira, mas ocorre se, e somente se,

A) $a = b = c = \frac{1}{3}$ ou $a = 0$ B) $a = b = c$
C) A igualdade nunca ocorre D) $a + b + c = 1$ ou $a = 0$
E) $a = b = c = 0$

12. Em certa cidade, acontece um fato interessante. Dez por cento dos Baianos dizem que são Paulistas e dez por cento dos Paulistas dizem que são Baianos. Todos os outros Paulistas e Baianos assumem a sua verdadeira origem. Dentre os Paulistas e Baianos, 20%
dizem que são Paulistas. Que percentual os realmente Paulistas representam dentre os Paulistas e Baianos?

A) 12,5% B) 18% C) 20% D) 22%
E) 22,5%

13. Veja o problema No. 14 do Nível 1.

14. As letras O, B e M representam números inteiros. Se $O \times B \times M = 240$, $O \times B + M = 46$ e $O + B \times M = 64$, quanto vale $O + B + M$?

A) 19 B) 20 C) 21 D) 24 E) 36

15. Veja o problema No. 15 do Nível 1.

16. Veja o problema No. 19 do Nível 1.

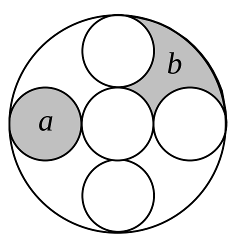
17. Quantos números entre 10 e 13000, quando lidos da esquerda para a direita, são formados por dígitos consecutivos e em ordem crescente?
Exemplificando, 456 é um desses números, mas 7890 não é:

A) 10 B) 13 C) 18 D) 22 E) 25

18. Um piloto percorreu três trechos de um rali, de extensões 240 km, 300 km e 400 km, respectivamente. As velocidades médias nos três trechos foram 40 km/h, 75 km/h e 80 km/h, mas não necessariamente nessa ordem. Podemos garantir que o tempo total em horas gasto pelo piloto nos três trechos é:

A) menor ou igual a 13 horas
B) maior ou igual a 13 horas e menor ou igual a 16 horas
C) maior ou igual a 14 horas e menor ou igual a 17 horas
D) maior ou igual a 15 horas e menor ou igual a 18 horas
E) maior ou igual a 18 horas

19. Na figura, todas as circunferências menores têm o mesmo raio r e os centros das circunferências que tocam a circunferência maior são vértices de um quadrado. Sejam a e b as áreas cinzas indicadas na figura. Então a razão $\frac{a}{b}$ é igual a:



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) 2

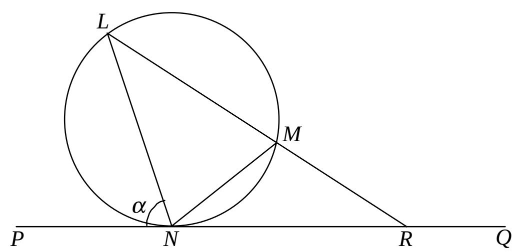
20. Um professor de Inglês dá aula particular para uma classe de 9 alunos, dos quais pelo menos um é brasileiro. Se o professor escolher 4 alunos para fazer uma apresentação, terá no grupo pelo menos dois alunos de mesma nacionalidade; se escolher 5 alunos, terá no máximo três alunos de mesma nacionalidade. Quantos brasileiros existem na classe?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

21. Um relógio, com ponteiros de horas, minutos e segundos, faz *plim* toda vez que um ponteiro ultrapassa outro no mostrador. O número de *plins* registrados em um certo dia, no período entre as 12 horas e 1 segundo e as 23 horas, 59 minutos e 59 segundos é:

A) 732 B) 1438 C) 1440 D) 1446 E) 1452

22. Na figura, a reta PQ toca em N o círculo que passa por L, M e N. A reta LM corta a reta PQ em R. Se $LM = LN$ e a medida do ângulo PNL é α, $\alpha < 60^o$, quanto mede o ângulo LRP?



A) $3\alpha - 180^o$ B) $180^o - 2\alpha$ C) $180^o - \alpha$ D) $90^o - \alpha/2$ E) α

23. Os inteiros positivos x e y satisfazem a equação

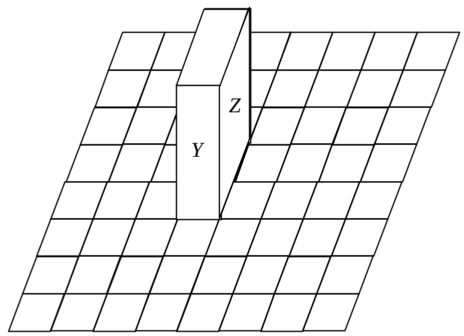
$$\sqrt{x+\tfrac{1}{2}\sqrt{y}} - \sqrt{x-\tfrac{1}{2}\sqrt{y}} = 1 .$$

Qual das alternativas apresenta um possível valor de y?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

24. Veja o problema No. 16 do Nível 1.

25. Um bloco de dimensões $1 \times 2 \times 3$ é colocado sobre um tabuleiro 8×8, como mostra a figura, com a face X, de dimensões 1×2, virada para baixo. Giramos o bloco em torno de uma de suas arestas de modo que a face Y fique virada para baixo. Em seguida, giramos novamente o bloco, mas desta vez de modo que a face Z fique virada para baixo. Giramos o bloco mais três vezes, fazendo com que as faces X, Y e Z fiquem viradas para baixo, nessa ordem. Quantos quadradinhos diferentes do tabuleiro estiveram em contato com o bloco?

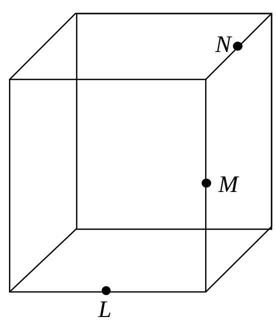


A) 18 B) 19 C) 20 D) 21 E)22

PROBLEMAS – NÍVEL 3

1. Veja o problema No. 17 do Nível 2.

2. Os pontos L, M e N são pontos médios de arestas do cubo, como mostra a figura. Quanto mede o ângulo LMN?



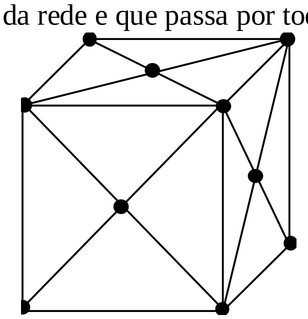
A) 90º B) 105º C) 120º D) 135º E) 150º

3. Veja o problema No. 22 do Nível 2.
4. Veja o problema No. 14 do Nível 2.

5. Esmeralda digitou corretamente um múltiplo de 7 muito grande, com 4010 algarismos. Da esquerda para a direita, os seus algarismos são 2004 algarismos 1, um algarismo *n* e 2005 algarismos 2. Qual é o valor de *n*?
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

6. Veja o problema No. 23 do Nível 2.
7. Veja o problema No. 25 do Nível 2.
8. Veja o problema No. 1 do Nível 2.
9. Veja o problema No. 6 do Nível 2.

10. A figura mostra um cubo de aresta 1 no qual todas as doze diagonais de face foram desenhadas. Com isso, criou-se uma rede com 14 vértices (os 8 vértices do cubo e os 6 centros de faces) e 36 arestas (as 12 arestas do cubo e mais 4 sobre cada uma das 6 faces). Qual é o comprimento do menor caminho que é formado por arestas da rede e que passa por todos os 14 vértices?



A) $1+6\sqrt{2}$ B) $4+2\sqrt{2}$ C) 6 D) $8+6\sqrt{2}$
E) $12+12\sqrt{2}$

11. Uma das faces de um poliedro é um hexágono regular. Qual é a quantidade mínima de arestas que esse poliedro pode ter?
A) 7 B) 9 C) 12 D) 15 E) 18

12. Veja o problema No. 19 do Nível 1.

13. O ponto *D* pertence ao lado *BC* do triângulo *ABC*. Sabendo que *AB* = *AD* = 2, *BD* = 1 e os ângulos *BAD* e *CAD* são congruentes, então a medida do segmento *CD* é:
A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{6}{5}$ E) $\frac{7}{6}$

14. Esmeralda adora os números triangulares (ou seja, os números 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28…), tanto que mudou de lugar os números 1, 2, 3, …, 11 do relógio de parede do seu quarto de modo que a soma de cada par de números vizinhos é um número triangular. Ela deixou o 12 no seu lugar original. Que número ocupa o lugar que era do 6 no relógio original?
A) 1 B) 4 C) 5 D) 10 E) 11

15. Os termos a_n de uma seqüência de inteiros positivos satisfazem a relação

$$a_{n+3} = a_{n+2}(a_{n+1} + a_n) \text{ para } n = 1, 2, 3\ldots$$

Se $a_5 = 35$, quanto é a_4?
A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

16. Veja o problema No. 11 do Nível 2.
17. Veja o problema No. 19 do Nível 2.

18. Entre treze reais não nulos há mais números positivos do que negativos. Dentre os $\frac{13\times 12}{2} = 78$ produtos de dois dos treze números, 22 são negativos. Quantos números dentre os treze números dados são negativos?
A) 2 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

19. Traçando as quatro retas perpendiculares aos lados de um paralelogramo não retângulo pelos seus pontos médios, obtém-se uma região do plano limitada por essas quatro retas. Podemos afirmar que a área dessa região é igual à área do paralelogramo se um dos ângulos do paralelogramo for igual a:
A) 30^o B) 45^o C) 60^o D) 75^o E) 90^o

20. O número $(2+\sqrt{2})^3(3-\sqrt{2})^4 + (2-\sqrt{2})^3(3+\sqrt{2})^4$ é:
A) inteiro ímpar B) inteiro par
C) racional não inteiro D) irracional positivo E) irracional negativo

21. Sejam $A = 10^{(\log_{10} 2005)^2}$, $B = 2005^3$ e $C = 2^{\sqrt{2005}}$. Então:
A) $A < B < C$ B) $A < C < B$
C) $B < A < C$ D) $B < C < A$ E) $C < A < B$

22. Veja o problema No. 18 do Nível 2.

23. Dois números inteiros são chamados de *primanos* quando pertencem a uma progressão aritmética de números primos com pelo menos três termos. Por exemplo, os números 41 e 59 são primanos pois pertencem à progressão aritmética (41; 47; 53; 59) que contém somente números primos.
Assinale a alternativa com dois números que **não são** primanos.
A) 7 e 11 B) 13 e 53 C) 41 e 131 D) 31 e 43
E) 23 e 41

24. Um relógio, com ponteiros de horas, minutos e segundos, faz *plim* toda vez que um ponteiro ultrapassa outro no mostrador. O número de *plins* registrados em um certo dia no período entre as 12 horas e 1 segundo e as 23 horas, 59 minutos e 59 segundos é:
A) 732 B) 1438 C) 1440 D) 1446 E) 1452

25. Veja o problema No. 20 do Nível 2.

GABARITO

NÍVEL 1 (5ª. e 6ª. séries)

1) A	6) B	11) A	16) B
2) E	7) E	12) C	17) D
3) A	8) A	13) B	18) D
4) E	9) D	14) B	19) C
5) B	10) E	15) B	20) C

NÍVEL 2 (7ª. e 8ª. séries)

1) D	6) B	11) D	16) C	21) Anulada
2) B	7) B	12) A	17) D	22) Anulada
3) E	8) D	13) B	18) Anulada	23) C
4) E	9) A	14) B	19) C	24) B
5) D	10) B	15) B	20) C	25) B

NÍVEL 3 (Ensino Médio)

1) D	6) C	11) C	16) D	21) C
2) C	7) B	12) C	17) C	22) Anulada
3) Anulada	8) D	13) B	18) A	23) B
4) B	9) B	14) C	19) B	24) Anulada
5) B	10) A	15) D	20) B	25) C

XXVII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas e Soluções da Segunda Fase

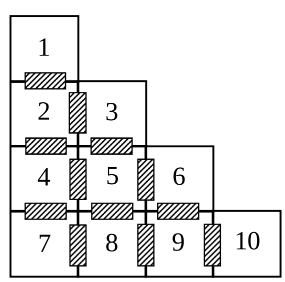
PROBLEMAS – Nível 1 PARTE A
(Cada problema vale 5 pontos)

01. O tanque do carro de Esmeralda, com capacidade de 60 litros, contém uma mistura de 20% de álcool e 80% de gasolina ocupando metade de sua capacidade.
Esmeralda pediu para colocar álcool no tanque até que a mistura ficasse com quantidades iguais de álcool e gasolina. Quantos litros de álcool devem ser colocados?

02. Na seqüência de números 1, a, 2, b, c, d, ... dizemos que o primeiro termo é 1, o segundo termo é a, o terceiro termo é 2, o quarto termo é b, e assim por diante.
Sabe-se que esta seqüência tem 2005 termos e que cada termo, a partir do terceiro, é a média aritmética de todos os termos anteriores. Qual é o último termo dessa seqüência?

03. Natasha é supersticiosa e, ao numerar as 200 páginas de seu diário, começou do 1 mas pulou todos os números nos quais os algarismos 1 e 3 aparecem juntos, em qualquer ordem. Por exemplo, os números 31 e 137 não aparecem no diário, porém 103 aparece.
Qual foi o número que Natasha escreveu na última página do seu diário?

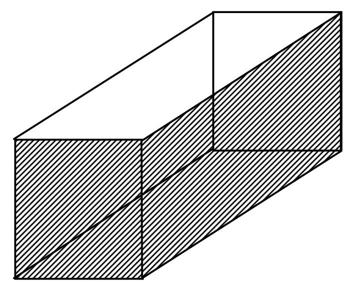
04. Juliana foi escrevendo os números inteiros positivos em quadrados de papelão, colados lado a lado por fitas adesivas representadas pelos retângulos escuros no desenho abaixo. Note que cada fila de quadrados tem um quadrado a mais que a fila de cima. Ela escreveu até o número 105 e parou. Quantos pedaços de fita adesiva ela usou?



05. Lara tem cubos iguais e quer pintá-los de maneiras diferentes, utilizando as cores laranja ou azul para colorir cada uma de suas faces.

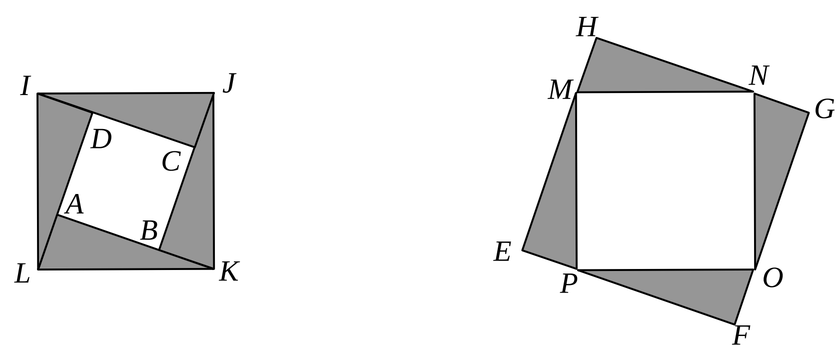
Para que dois cubos não se confundam, não deve ser possível girar um deles de forma que fique idêntico ao outro. Por exemplo, há uma única maneira de pintar o cubo com uma face laranja e cinco azuis.
Quantos cubos pintados de modos diferentes ela consegue obter?

06. Um carpinteiro fabrica caixas de madeira abertas na parte de cima, pregando duas placas retangulares de 600 cm^2 cada uma, duas placas retangulares de 1200 cm^2 cada uma e uma placa retangular de 800 cm^2, conforme representado no desenho.
Qual é o volume, em litros, da caixa? Note que l litro = 1000 cm^3.



PROBLEMAS – Nível 1 PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1
Quatro peças iguais, em forma de triângulo retângulo, foram dispostas de dois modos diferentes, como mostram as figuras.

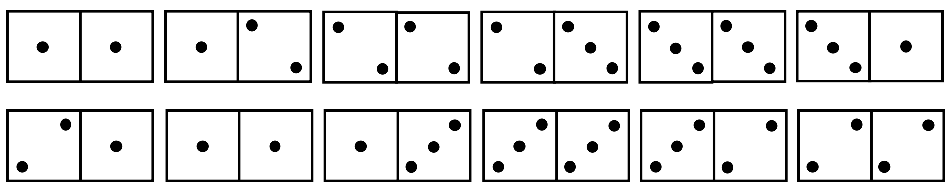


Os quadrados *ABCD* e *EFGH* têm lados respectivamente iguais a 3 cm e 9 cm. Calcule as áreas dos quadrados *IJKL* e *MNOP*.

PROBLEMA 2
Considere três números inteiros positivos consecutivos de três algarismos tais que o menor é múltiplo de 7, o seguinte é múltiplo de 9 e o maior é múltiplo de 11. Escreva todas as seqüências de números que satisfazem essas propriedades.

PROBLEMA 3
Cada peça de um jogo de dominó possui duas casas numeradas. Considere as 6 peças formadas apenas pelos números 1, 2 e 3.

(a) De quantos modos é possível colocar todas estas peças alinhadas em seqüência, de modo que o número da casa da direita de cada peça seja igual ao número da casa da esquerda da peça imediatamente à direita?
A seguir, mostramos dois exemplos:

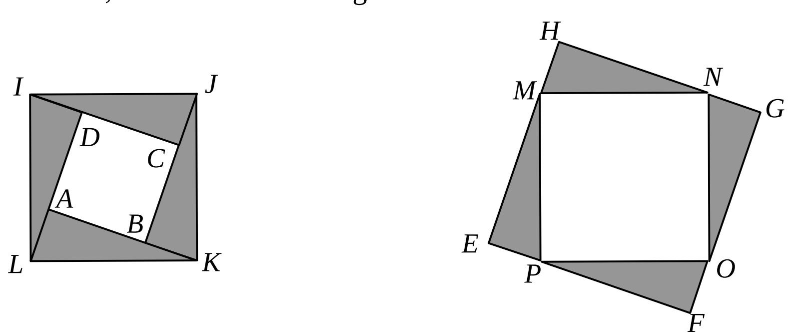


(b) Explique por que não é possível fazer o mesmo com todas as 10 peças formadas apenas pelos números 1, 2, 3 e 4.

PROBLEMAS – Nível 2 PARTE A
(Cada problema vale 4 pontos)

01. Veja o problema No. 3 do Nível 1 Parte A.

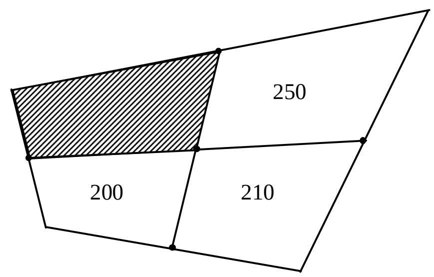
02. Quatro peças iguais, em forma de triângulo retângulo, foram dispostas de dois modos diferentes, como mostram as figuras abaixo.



Os quadrados *ABCD* e *EFGH* têm lados respectivamente iguais a 3 cm e 9 cm. Determine a medida do lado do quadrado *IJKL*.

03. Veja o problema No. 4 do Nível 1 parte A.

04. Um terreno quadrangular foi dividido em quatro lotes menores por duas cercas retas unindo os pontos médios dos lados do terreno. As áreas de três dos lotes estão indicadas em metros quadrados no mapa a seguir.



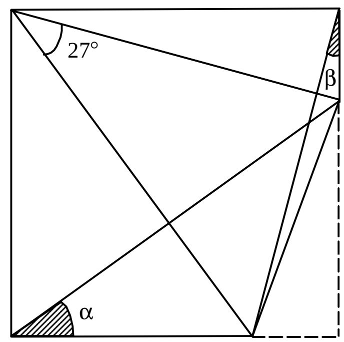
Qual é a área do quarto lote, representado pela região escura no mapa?

05. Seja a um número inteiro positivo tal que a é múltiplo de 5, $a + 1$ é múltiplo de 7, $a + 2$ é múltiplo de 9 e $a + 3$ é múltiplo de 11. Determine o menor valor que a pode assumir.

PROBLEMAS – Nível 2 PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1
Gabriel resolveu uma prova de matemática com questões de álgebra, geometria e lógica. Após checar o resultado da prova Gabriel observou que respondeu corretamente 50% das questões de álgebra, 70% das questões de geometria e 80% das questões de lógica. Gabriel observou, também, que respondeu corretamente 62% das questões de álgebra e lógica e 74% das questões de geometria e lógica. Qual a porcentagem de questões corretas da prova de Gabriel?

PROBLEMA 2
O canto de um quadrado de cartolina foi cortado com uma tesoura. A soma dos comprimentos dos catetos do triângulo recortado é igual ao comprimento do lado do quadrado. Qual o valor da soma dos ângulos α e β marcados na figura abaixo?



PROBLEMA 3

(a) Fatore a expressão $x^2 - 9xy + 8y^2$.

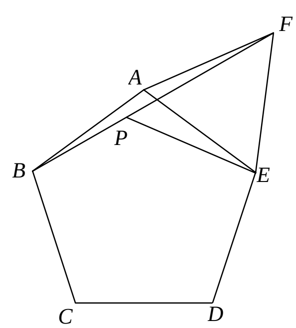
(b) Determine todos os pares de inteiros (*x*; *y*) tais que $9xy - x^2 - 8y^2 = 2005$.

PROBLEMA 4

Veja o problema No. 3 do Nível 1 Parte B.

PROBLEMAS – Nível 3 PARTE A
(Cada problema vale 4 pontos)

01. Na figura, *ABCDE* é um pentágono regular e *AEF* é um triângulo eqüilátero. Seja *P* um ponto sobre o segmento $\overline{BF}$, no interior de *ABCDE*, e tal que o ângulo $P\hat{E}A$ mede 12º, como mostra a figura abaixo.



Calcule a medida, em graus, do ângulo $P\hat{A}C$.

02. Seja a um número inteiro positivo tal que a é múltiplo de 5, a + 1 é múltiplo de 7, a + 2 é múltiplo de 9 e a + 3 é múltiplo de 11. Determine o menor valor que a pode assumir.

03. Veja o problema No. 4 do Nível 2 parte A.

04. A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisfaz $f(x+f(y))=x+f(f(y))$ para todos os números reais x e y. Sabendo que $f(2)=8$, calcule $f(2005)$.

05. Você tem que determinar o polinômio $p(x)$ de coeficientes inteiros positivos fazendo perguntas da forma "Qual é o valor numérico de $p(k)$?", sendo k um inteiro positivo à sua escolha.

Qual é o menor número de perguntas suficiente para garantir que se descubra o polinômio?

PROBLEMAS – Nível 3 PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1
Determine todos os pares de inteiros $(x; y)$ tais que $9xy - x^2 - 8y^2 = 2005$.

PROBLEMA 2
Um prisma é reto e tem como base um triângulo equilátero. Um plano corta o prisma mas não corta nenhuma de suas bases, determinando uma secção triangular de lados a, b e c. Calcule o lado da base do prisma em função de a, b e c.

PROBLEMA 3
No campeonato tumboliano de futebol, cada vitória vale três pontos, cada empate vale um ponto e cada derrota vale zero ponto. Um *resultado* é uma vitória, empate ou derrota. Sabe-se que o Flameiras não sofreu nenhuma derrota e tem 20 pontos, mas não se sabe quantas partidas esse time jogou. Quantas seqüências ordenadas de resultados o Flameiras pode ter obtido? Representando vitória por V, empate por E e derrota por D, duas possibilidades, por exemplo, são $(V, E, E, V, E, V, V, V, E, E)$ e (E, V, V, V, V, V, E, V).

PROBLEMA 4
Determine o menor valor possível do maior termo de uma progressão aritmética com todos os seus sete termos a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 primos positivos distintos.

Curiosidade: No ano passado, os ex-olímpicos Terence Tao (Austrália, ouro na IMO 1988) e Ben Green (Reino Unido, prata na IMO 1994) provaram que existem progressões aritméticas arbitrariamente grandes com todos os termos primos positivos. Tal questão remonta ao século XVIII, aparecendo nas pesquisas de Lagrange e Waring.

Soluções Nível 1 – Segunda Fase – Parte A

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**
Resposta	18	2	214	182	10	24

01. O tanque contém uma mistura de 30 litros, sendo $0,2\times 30=6$ litros de álcool e 30 – 6 = 24 litros de gasolina. Portanto, para que as quantidades de gasolina e álcool fiquem iguais, devem ser colocados no tanque 24 – 6 = **18** litros de álcool.

02. Como 2 é a média aritmética de 1 e *a*, podemos escrever $\frac{1+a}{2}=2$, logo $1+a=4\Leftrightarrow a=3$; portanto, $b=\frac{1+2+3}{3}=2$; $c=\frac{1+3+2+2}{4}=2$; $d=\frac{1+3+2+2+2}{5}=2$. Esses exemplos sugerem que todos os termos, a partir do terceiro, são iguais a 2. De fato, quando introduzimos em uma seqüência um termo igual à média de todos os termos da seqüência, a média da nova seqüência é a mesma que a da seqüência anterior. Assim, o último termo da seqüência dada é **2**.

03. Natasha pulou os números 13, 31, 113, 130,131, 132, ..., 139, num total de 13 números. Portanto, na última página do seu diário escreveu o número 200 + 13 +1 = **214**.

04. Olhando para o último número da fila *n*, vemos que ele é a soma de todos os números de 1 a *n*: por exemplo, na fila 4, o último número da fila é 1 + 2 + 3 + 4 = 10. Note que para obter a quantidade de números até uma certa fila, basta somar o número da fila ao total de números que havia antes dessa fila. Assim, temos, fila 5 : 15, fila 6: 21, fila 7: 28, fila 8: 36, fila 9: 45, fila 10: 55, fila 11: 66, fila 12: 78, fila 13: 91, fila 14: 105

O número de fitas adesivas horizontais entre uma fila n – 1 e uma fila n é igual a n – 1 e o número de fitas adesivas verticais numa fila n é igual n – 1. Portanto, até a fila número 14, o número de fitas é $(1+2+\cdots+13)+(1+2+\cdots+13)=2\cdot\frac{13\cdot 14}{2}=\mathbf{182}$.

05. Todas as faces azuis: *uma maneira*.
Cinco faces azuis e uma amarela: *uma maneira*.
Quatro faces azuis e duas amarelas: *duas maneiras* (duas faces amarelas opostas ou duas faces amarelas adjacentes).
Três faces azuis e três faces amarelas: *duas maneiras* (três azuis com um vértice comum – *uma maneira* ou três azuis com uma aresta comum duas a duas – *uma maneira*)
Duas faces azuis e quatro amarelas: *duas maneiras*
Uma face azul e cinco amarelas: *uma maneira*.
Todas as faces amarelas: *uma maneira*.
Portanto, o número de maneiras diferentes de pintar o cubo é **10**.

06. Sejam a, b e c as medidas da caixa, conforme indicado no desenho ao lado. Segundo o enunciado, podemos escrever ab = 600, ac = 1200 *e* bc = 800. Sabemos que o volume da caixa é abc. Utilizando as propriedades das igualdades e de potências, podemos escrever

$$(ab)\cdot(ac)\cdot(bc)=600\cdot 1200\cdot 800 \Leftrightarrow a^2\cdot b^2\cdot c^2=2\cdot 3\cdot 10^2\cdot 2^2\cdot 3\cdot 10^2\cdot 2^3\cdot 10^2 \Leftrightarrow$$

$$(abc)^2=2^6\cdot 3^2\cdot 10^6 \Leftrightarrow abc=\sqrt{2^6\cdot 3^2\cdot 10^6} \Leftrightarrow abc=2^3\cdot 3\cdot 10^3=24\cdot 1000\text{ cm}^3$$

Como 1 litro é igual a 1000 cm^3, concluímos que o volume da caixa é de **24** litros.

Soluções Nível 1 – Segunda Fase – Parte B

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

1ª maneira: O quadrado $IJKL$ e o quadrado $MNOP$ têm como lados as hipotenusas dos triângulos retângulos dados, logo têm a mesma área s. Fazendo os dois quadrados coincidirem, concluímos que o dobro da soma t das áreas dos quatro triângulos retângulos é a diferença entre as áreas dos quadrados $IJKL$ e $EFGH$, ou seja, $2t=9^2-3^2 \Leftrightarrow 2t=72 \Leftrightarrow t=36$. Assim, s = 9 + 36 = 81 – 36 = 45 cm^2.

2ª maneira: No quadrado $IJKL$, seja $JC = x$. Então $IC = ID + DC = JC + DC = x$ + 3. Então, no quadrado $EFGH$, temos $HN+NG=x+3+x=9 \Leftrightarrow 2x=6 \Leftrightarrow x=3$. Portanto, a área do quadrado

IJKL, igual à soma das áreas dos quatro triângulos retângulos com a área do quadrado *ABCD*, vale $4\cdot\dfrac{3\cdot(3+3)}{2}+3^2=36+9=45$ e a área do quadrado *MNOP*, igual à diferença entre a área do quadrado *EFGH* e a soma das áreas dos quatro triângulos retângulos, vale $9^2-4\cdot\dfrac{3\cdot(3+3)}{2}=81-36=45$ cm^2.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:

Seja $n = abc$ múltiplo de 11; então $n - 1$ deve ser múltiplo de 9 e $n - 2$ deve ser múltiplo de 7.

Seja $c \neq 0$**:**

Como *abc* é múltiplo de 11, podemos ter $a-b+c=0$ ou $a-b+c=11$. Como *abc* – 1 é múltiplo de 9, podemos ter $a+b+c-1=9$ ou $a+b+c-1=18$. No caso de $a+b+c-1=0$, teríamos $n-1=99 \Leftrightarrow n=100$, que não é múltiplo de 11. Assim, simultaneamente, somente podemos ter $(i)\left|\begin{array}{l} a+b+c=10 \\ a+c=b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 2b=10 \\ a+c=b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} b=5 \\ a+c=5 \end{array}\right.$ ou

$$(ii)\left|\begin{array}{l} a+b+c=19 \\ a+c=b+11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 2b+11=19 \\ a+c=b+11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} b=4 \\ a+c=15 \end{array}\right.$$

No caso *(i)* existem as seguintes possibilidades para *n*: 154, 253, 352, 451, que são múltiplos de 11; para $n - 1$ temos os números 153, 252, 351, 450 e 549 são múltiplos de 9. Para os números $n - 2$ temos 152, 251, 350, 449 e 548, dos quais apenas 350 é múltiplo de 7.

No caso *(ii)* existem as seguintes possibilidades para *n*: 649, 748, 847 e 946, que são múltiplos de 11; para $n - 1$ temos os números 648, 747, 846 e 945 são múltiplos de 9. Para os números $n - 2$ temos 647, 746, 845 e 944, dos quais nenhum é múltiplo de 7.

Seja $c = 0$:

Neste caso, $n - 1$ tem os algarismos *a*, $b - 1$ e 9. Assim, $a+b-1+9=9$ ou $a+b-1+9=18$ ou seja, $a+b=1$ ou $a+b=10$. Como $a-b+c=a-b=0$ ou $a-b+c=a-b=11$, concluímos que $a = b$. Assim, $a = b = 5$, o que fornece os números $n = 550$, $n - 1 = 549$ e $n - 2 = 548$, que não é divisível por 7.

Portanto, a única seqüência de três números inteiros consecutivos nas condições dadas é 350, 351 e 352.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

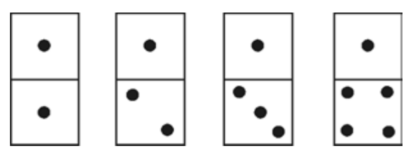
1ª maneira:

a) Podemos representar uma seqüência válida como uma seqüência de pares ordenados. O primeiro exemplo é a seqüência [(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,3),(3,1)] e, a partir dela, podemos criar outras seqüências válidas movendo o par da esquerda para a direita (ou da direita para a esquerda). Assim, são válidas as seqüências [(1,2),(2,2),(2,3),(3,3),(3,1),(1,1)], [(2,2),(2,3),(3,3),(3,1),(1,1), (1,2)],etc. num total de 6 seqüências diferentes. Mudando a posição dos números dos pares ordenados, podemos criar outras 6 seqüências: [(2,1), (1,1), (1,3), (3,3),(3,2),(2,2)], [(1,1), (1,3), (3,3),(3,2),(2,2), (2,1)], etc. Portanto, de acordo com as regras dadas há 12 modos de colocar as peças em seqüência.

2ª maneira:

a) As pontas devem ter o mesmo número, pois eles aparecem um número par de vezes (se aparecer um número numa ponta e outro na outra, então há pelo menos dois números que aparecem um número ímpar de vezes, o que não ocorre). Alguma peça com dois números iguais deve aparecer em uma das pontas, pois do contrário teríamos três das quatro peças centrais com duas iguais, vizinhas, o que é impossível). Sendo assim, a seqüência pode ser representada por XX-XY-YY-YZ-ZZ-ZX, onde para X temos três possibilidades, para Y temos duas possibilidade e para Z, uma possibilidade, num total de 3.2.1 = 6 possibilidades para a seqüência que começa com uma dupla. Se a seqüência terminar com uma dupla, teremos novamente 6 possibilidades. Portanto, há 12 modos de colocar as seis peças em seqüência.

b) Para cada número, existem 4 peças. Por exemplo, as peças com o número 1 estão desenhadas ao lado. O número de vezes em que aparece o número 1 é ímpar, logo a seqüência deveria começar com 1 e terminar com outro número ou começar com outro número e terminar com 1. Neste caso, os outros dois números deveriam aparecer um número par de vezes, pois não estariam na ponta, mas isso não ocorre: todos os quatro números aparecem um número ímpar de vezes.



Soluções Nível 2 – Segunda Fase – Parte A

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**
Resposta	214	**--------**	182	240	1735

01. Natasha pulou os números 13, 31, 113, 130,131, 132, ..., 139, num total de 13 números. Portanto, na última página do seu diário escreveu o número 200 + 13 +1 = **214**.

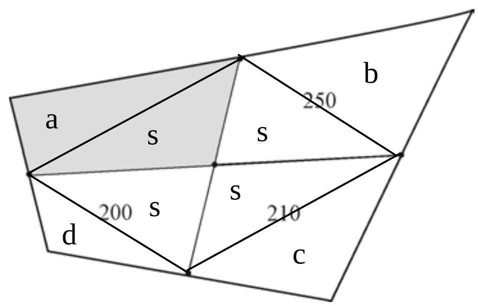
02. Sejam x e y o maior e o menor catetos, respectivamente, do triângulo retângulo. Como o lado do quadrado *ABCD* mede 3 cm, temos $x - y = 3$. Por outro lado, como o lado de *EFGH* mede 9 cm, temos $x + y = 9$. Resolvendo o sistema, encontramos $x = 6$ e $y = 3$. Logo, o lado do quadrado *IJKL*, que é a hipotenusa do triângulo retângulo, mede $\sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ cm.

OUTRA SOLUÇÃO: O quadrado *IJKL* e o quadrado *MNOP* têm como lados as hipotenusas dos triângulos retângulos dados, logo têm a mesma área s. Fazendo os dois quadrados coincidirem, concluímos que o dobro da soma t das áreas dos quatro triângulos retângulos é a diferença entre as áreas dos quadrados *IJKL* e *EFGH*, ou seja, $2t = 9^2 - 3^2$, o que fornece $t = 36$.. Assim, $s = 9 + 36 = 81 - 36 = 45$ cm^2 e o lado do quadrado IJKL é $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ cm.

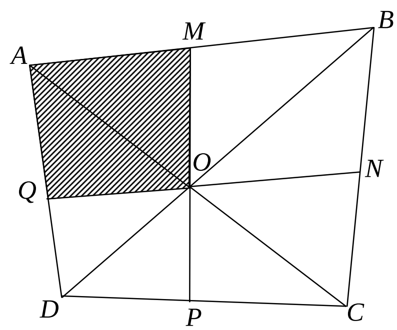
03. Olhando para o último número da fila n, vemos que ele é a soma de todos os números de 1 a n: por exemplo, na fila 4, o último número da fila é 1 + 2 + 3 + 4 = 10. Note que para obter a quantidade de números até uma certa fila, basta somar o número da fila ao total de números que havia antes dessa fila. Assim, temos, fila 5 : 15, fila 6: 21, fila 7: 28, fila 8: 36, fila 9: 45, fila 10: 55, fila 11: 66, fila 12: 78, fila 13: 91, fila 14: 105

O número de fitas adesivas horizontais entre uma fila $n - 1$ e uma fila n é igual a $n - 1$ e o número de fitas adesivas verticais numa fila n é igual $n - 1$. Portanto, até a fila número 14, o número de fitas é $(1+2+\cdots+13)+(1+2+\cdots+13) = 2\cdot\dfrac{13\cdot 14}{2} = \mathbf{182.}$

04. Primeira Solução: Unindo os pontos médios de lados consecutivos do quadrilátero, obtemos segmentos paralelos às suas diagonais e iguais à metade delas. Portanto, o quadrilátero assim obtido é um paralelogramo. Os segmentos traçados dividem cada um dos quatro lotes em duas partes. Todas as partes internas têm a mesma área s, igual a 1/4 da área do paralelogramo. Cada uma das partes externas tem área igual a 1/4 do triângulo determinado pela diagonal correspondente. Assim, $a + c$ é igual à metade da área do quadrilátero, o mesmo ocorrendo com $b + c$. Daí, $a + s + c + s = b + s + d + s$. Portanto, a área S desconhecida satisfaz $S + 210 = 200 + 250$, ou seja, $S =$ **240**.



Segunda Solução: Ligando o ponto de interseção das retas que representam as duas cercas aos vértices, obtemos:



Observemos que, como $AQ = QD$ e as alturas de OAQ e OQD que passam por O são iguais, as áreas de OAQ e OQD são iguais.
Analogamente, as áreas de OAM e OMB; OBN e ONC; OCP e OPD são iguais. Logo área OAQ + área OAM + área OCP + área ONC = área OQD + área OMB + área OPD + área OBN $\Leftrightarrow$ área $AMOQ$ + área $CNOP$ = área $DPOQ$ + área $BMON$ $\Leftrightarrow$ área $AMOQ = 200 + 250 - 210 = 240$.

05. Como $a + 3$ é múltiplo de 11, $a + 3 = 11b$, b $\in$ Z. Sendo a múltiplo de 5, $a-10b=b-3$ também é, de modo que $b - 3 = 5c \Leftrightarrow b=5c+3 \Leftrightarrow a=11(5c+3)-3=55c+30,\ c\in\mathbb{Z}_{+2}$ O número $a + 2$ é múltiplo de 9, assim como *a* + 2 – 54*c* – 36 = *c* – 4. Portanto $c-4=9d \Leftrightarrow c=9d+4 \Leftrightarrow a=55(9d+4)+30=495d+250,\ d\in\mathbb{Z}$. Por fim, sendo *a* + 1 múltiplo de 7, então *a* + 1 – 497*d* – 245 = *a* + 1 – 7 (71*d* + 35) = –2*d* + 6 = –2(*d* – 3) também é, ou seja, *d* – 3 = 7*k* $\Leftrightarrow d=7k+3, k\in\mathbb{Z}$ e $a=495(7k+3)+250=3465t+1735$ Logo o menor valor de *a* é **1735.**

Soluções Nível 2 – Segunda Fase – Parte B

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

Vamos representar por *A*, *G* e *L* a quantidade de questões de Álgebra, Geometria e Lógica da Prova e por *a*, *g* e *l* as questões respondidas acertadamente em cada uma destas áreas. As condições do problema fornecem as seguintes equações:

$$\frac{a}{A}=0,5;\quad \frac{g}{G}=0,7;\quad \frac{l}{L}=0,8;\quad \frac{a+l}{A+L}=0,62;\quad \frac{g+l}{G+L}=0,74$$

Substituindo as relações expressas pelas três primeiras equações nas outras duas, obtemos:

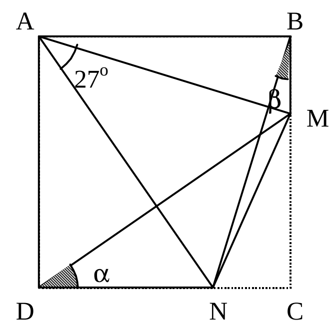
$$\frac{0,5A+0,8L}{A+L}=0,62 \Rightarrow 0,12A=0,18L \Rightarrow A=\frac{3L}{2}$$
$$\frac{0,7G+0,8L}{G+L}=0,74 \Rightarrow 0,04G=0,06L \Rightarrow G=\frac{3L}{2}$$

A porcentagem de questões acertadas é:

$$\frac{a+g+l}{A+G+L}=\frac{0,5A+0,7G+0,8L}{A+G+L}=\frac{0,5.\frac{3}{2}L+0,7.\frac{3}{2}L+0,8L}{\frac{3}{2}L+\frac{3}{2}L+L}=\frac{2,6}{4}=0,65=65\%$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:

Vamos denotar por *A*, *B*, *C* e *D* os vértices do quadrado e por *MN* o corte efetuado. Como *CM* + *CN* = *BC* = *CD*, resulta que *BM* = *CN* e *DN* = *MC*. Em conseqüência, os triângulos *ADN* e *DCM* são congruentes, o mesmo ocorrendo com *ABM* e *BCN* (em cada caso, os triângulos são retângulos e possuem catetos iguais). Logo, *DÂN* = *CDM* = α e *BÂM* = *CBN* = β. Assim, $\alpha + \beta + 27^{o} = 90^{o}$ e $\alpha + \beta = 63^{o}$.



SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

a) $x^2 - 9xy + 8y^2 = x^2 - xy - 8xy + 8y^2 = x(x - y) - 8y(x - y) = (x - 8y)(x - y)$.
Alternativamente, as raízes da equação do 2º grau $x^2 - 9xy + 8y^2$, de incógnita x, são y e $8y$. Logo, $x^2 - 9xy + 8y^2$ fatora em $(x - 8y)(x - y)$.

b) A equação a ser resolvida é $(x - y)(8y - x) = 2005$ (*)
Observemos que a fatoração em primos de 2005 é $5 \cdot 401$.
Além disso, a soma dos fatores $x - y$ e $8y - x$ é $7y$, que é múltiplo de 7. A soma dos fatores é ± 406, sendo que somente ± 406 é múltiplo de 7. Assim,

$$(*)\left|\begin{array}{l} x-y=5 \text{ e } 8y-x=401 \\ \qquad\text{ou} \\ x-y=401 \text{ e } 8y-x=5 \\ \qquad\text{ou} \\ x-y=-5 \text{ e } 8y-x=-401 \\ \qquad\text{ou} \\ x-y=-401 \text{ e } 8y-x=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=63 \text{ e } y=58 \\ \qquad\text{ou} \\ x=459 \text{ e } y=58 \\ \qquad\text{ou} \\ x=-63 \text{ e } y=-58 \\ \qquad\text{ou} \\ x=-459 \text{ e } y=-58 \end{array}\right.$$

As soluções são, portanto, (63; 58), (459;58), (–63; –58) e (–459; –58).

OUTRA SOLUÇÃO:

Observando a equação dada como uma equação do segundo grau em x, obtemos
$x^2 - 9yx + 8y^2 + 2005 = 0$ (*),
cujo discriminante é
$\Delta = (9y)^2 - 4(8y^2 + 2005) = 49y^2 - 8020$

Para que (*) admita soluções inteiras, seu discriminante deve ser um quadrado perfeito; portanto
$49y^2 - 8020 = m^2 \Leftrightarrow (7y - m)(7y + m) = 8020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 401$ (**)

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $m \geq 0$, pois se $(m; y)$ é solução de (**), então
$(-m; y)$ também é. Observando também que $7y - m$ e $7y + m$ têm a mesma paridade e
$y - m \leq 7y + m$, então podemos dividir o problema em 4 casos:

- $7y - m = 2$ e $7y + m = 4010 \Leftrightarrow m = 2004$ e $y = 2006/7$, impossível;
- $7y - m = 10$ e $7y + m = 802 \Leftrightarrow m = 396$ e $y = 58$;
- $7y - m = -802$ e $7y + m = -10 \Leftrightarrow m = 396$ e $y = -58$;
- $7y - m = -4010$ e $7y + m = -2 \Leftrightarrow m = 2004$ e $y = -2006/7$, impossível.

Se $y = 58$, as soluções em x de (*) são $\frac{9y+m}{2} = \frac{9\cdot 58+396}{2} = 459$ e $\frac{9y-m}{2} = \frac{9\cdot 58-396}{2} = 63$.

Se $y = -58$, as soluções em x de (*) são $\frac{9y+m}{2} = \frac{9\cdot(-58)+396}{2} = -63$
e $\frac{9y-m}{2} = \frac{9\cdot(-58)-396}{2} = -459$.

Logo as soluções são (63 ; 58), (459 ; 58), (– 63 ; – 58) e (– 459 ; – 58).

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:
Veja a solução do problema No. 3 do Nível 1 parte B

Soluções Nível 3 – Segunda Fase – Parte A

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**
Resposta	12	1735	240	2011	2

01 . Primeiro observamos que os ângulos internos de um pentágono regular medem $\frac{(5-2)\cdot 180°}{5} = 108°$.

Como $AF = AE = AB$, o triângulo ABF é isósceles com

$$m(A\hat{B}F) = m(A\hat{F}B) = \frac{180° - m(B\hat{A}F)}{2} = \frac{180° - m(B\hat{A}E) - m(E\hat{A}F)}{2} = \frac{180° - 108° - 60°}{2} = 6°.$$

No triângulo PEF, $m(E\hat{F}P) = m(A\hat{F}E) - m(A\hat{F}B) = 60° - 6° = 54°$ e

$m(E\hat{P}F) = 180° - m(P\hat{E}F) - m(E\hat{F}P) = 180° - 60° - 12° - 54° = 54°$, ou seja, o triângulo PEF é isósceles com $PE = EF$. Assim, como $EF = AE$, o triângulo PEA também é isósceles com $m(P\hat{A}E) = m(E\hat{P}A) = \dfrac{180° - m(P\hat{E}A)}{2} = \dfrac{180° - 12°}{2} = 84°.$

Além disso, $m(C\hat{A}B) = \dfrac{180° - m(A\hat{B}C)}{2} = \dfrac{180° - 108°}{2} = 36°$ e

$m(C\hat{A}E) = m(B\hat{A}E) - m(C\hat{A}B) = 108° - 36° = 72°.$

Logo, $m(P\hat{A}C) = m(P\hat{A}E) - m(C\hat{A}E) = 84° - 72° = 12°.$

02. PRIMEIRA SOLUÇÃO:

Como a + 3 é múltiplo de 11, a + 3 = 11b, $b \in \mathbb{Z}$. Sendo a múltiplo de 5, $a - 10b = b - 3$ também é, de modo que b – 3 = $5c \Leftrightarrow b = 5c + 3 \Leftrightarrow a = 11(5c+3) - 3 = 55c + 30,\ c \in \mathbb{Z}$

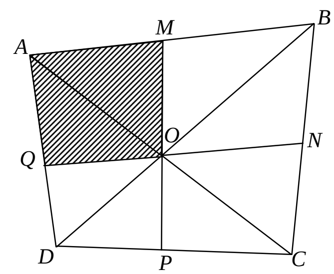
O número a + 2 é múltiplo de 9, assim como a + 2 – 54c – 36 = c – 4. Portanto $c - 4 = 9d \Leftrightarrow c = 9d + 4 \Leftrightarrow a = 55(9d+4) + 30 = 495d + 250,\ d \in \mathbb{Z}.$

Por fim, sendo a + 1 múltiplo de 7, então a + 1 – 497d – 245 = a + 1 – 7 (71d + 35) = –2d + 6 =
–2(d – 3) também é, ou seja, d – 3 = 7k $\Leftrightarrow d = 7k + 3, k \in \mathbb{Z}$ e
$a = 495(7k+3) + 250 = 3465t + 1735.$ Logo o menor valor de a é 1735.

SEGUNDA SOLUÇÃO:

As condições do problema equivalem a dizer que $2a - 5 = 2(a+1) - 7 = 2(a+2) - 9 = 2(a+3) - 11$ é múltiplo de 5, 7, 9 e 11, donde é múltiplo de $5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 = 3465.$ Assim, o menor valor de a é tal que $2a - 5 = 3465$, ou seja, a = 1735.

03. Ligando o ponto de interseção das retas que representam as duas cercas aos vértices, obtemos:



Observemos que, como $AQ = QD$ e as alturas de OAQ e OQD que passam por O são iguais, as áreas de OAQ e OQD são iguais.
Analogamente, as áreas de OAM e OMB; OBN e ONC; OCP e OPD são iguais. Logo área OAQ + área OAM + área OCP + área ONC = área OQD + área OMB + área OPD + área OBN $\Leftrightarrow$ área $AMOQ$ + área $CNOP$ = área $DPOQ$ + área $BMON$ $\Leftrightarrow$ área $AMOQ = 200 + 250 – 210 = 240$.

04. Substituindo y por 2 e x por $a - f(2) = a - 8$, obtemos $f(a - f(2) + f(2)) = a - 8 + f(f(2)) \Leftrightarrow f(a) = a - 8 + f(8)$.
Substituindo a por 2 na última equação, obtemos $f(2) = 2 - 8 + f(8) \Leftrightarrow 8 = 2 - 8 + f(8) \Leftrightarrow f(8) = 14$. Assim $f(a) = a - 8 + 14 = a + 6$ e $f(2005) = 2005 + 6 = 2011$.

05. A idéia da solução é perguntar o valor numérico de $p(k)$ para k suficientemente grande. Suponha que o polinômio seja: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$, com a_n, a_{n-1}, ..., a_0 inteiros positivos. Se k é um inteiro, tal que: $k > M = máx\ \{a_n, a_{n-1}, ..., a_0\}$, então $p(k)$ é um inteiro, cujos dígitos na representação em base k são exatamente os coeficientes do polinômio $p(x)$. Podemos então tomar k igual a uma potência de 10 suficientemente grande.
Logo para resolver o problema, basta perguntarmos o valor de $p(1)$, assim obtemos uma cota superior para M, e então perguntamos o valor de $p(x)$ para x igual a uma potência de 10 maior do que $p(1)$. Portanto, o número mínimo de perguntas que devemos fazer, para garantir que o polinômio $p(x)$ seja determinado sem sombra de dúvidas, é 2.
Por exemplo: Se $p(1) = 29$, perguntamos $p(100)$, digamos que $p(100) = 100613$. Então o nosso polinômio é $p(x) = 10x^2 + 6x + 13$.

Soluções Nível 3 – Segunda Fase – Parte B

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

Temos $9xy - x^2 - 8y^2 = 2005 \Leftrightarrow xy - x^2 + 8xy - 8y^2 = 2005$

$\Leftrightarrow x(y - x) + 8y(x - y) = 2005 \Leftrightarrow (x - y)(8y - x) = 2005(*)$

Observemos que a fatoração em primos de 2005 é $5 \cdot 401$.

Além disso, a soma dos fatores $x - y$ e $8y - x$ é $7y$, que é múltiplo de 7. Devemos então escrever 2005 como produto de dois fatores, cuja soma é um múltiplo de 7. Para isso, os fatores devem ser ± 5 e ± 401. A soma dos fatores é ± 406.

$$(*)\left|\begin{array}{l} x - y = 5 \ \text{ e } \ 8y - x = 401 \\ \qquad\quad \text{ou} \\ x - y = 401 \ \text{ e } \ 8y - x = 5 \\ \qquad\quad \text{ou} \\ x - y = -5 \ \text{ e } \ 8y - x = -401 \\ \qquad\quad \text{ou} \\ x - y = -401 \ \text{ e } \ 8y - x = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x = 63 \ \text{ e } \ y = 58 \\ \qquad \text{ou} \\ x = 459 \ \text{ e } \ y = 58 \\ \qquad \text{ou} \\ x = -63 \ \text{ e } \ y = -58 \\ \qquad \text{ou} \\ x = -459 \ \text{ e } \ y = -58 \end{array}\right.$$

As soluções são, portanto, (63; 58), (459;58), (–63; –58) e (–459; –58).

OUTRA SOLUÇÃO:

Observando a equação dada como uma equação do segundo grau em x, obtemos

$x^2 - 9yx + 8y^2 + 2005 = 0$ (*),

cujo discriminante é

$\Delta = (9y)^2 - 4(8y^2 + 2005) = 49y^2 - 8020$

Para que (*) admita soluções inteiras, seu discriminante deve ser um quadrado perfeito; portanto

$49y^2 - 8020 = m^2 \Leftrightarrow (7y - m)(7y + m) = 8020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 401$ (**)

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $m \geq 0$, pois se $(m; y)$ é solução de (**), então

$(-m; y)$ também é. Observando também que $7y - m$ e $7y + m$ têm a mesma paridade e

$7y - m \leq 7y + m$, podemos dividir o problema em 4 casos:

- $7y - m = 2$ e $7y + m = 4010 \Leftrightarrow m = 2004$ e $y = 2006/7$, impossível;

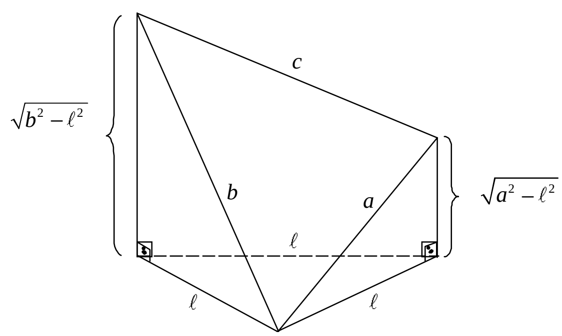
- $7y - m = 10$ e $7y + m = 802 \Leftrightarrow m = 396$ e $y = 58$;
- $7y - m = -802$ e $7y + m = -10 \Leftrightarrow m = 396$ e $y = -58$;
- $7y - m = -4010$ e $7y + m = -2 \Leftrightarrow m = 2004$ e $y = -2006/7$, impossível.

Se $y = 58$, as soluções em x de (*) são $\frac{9y+m}{2} = \frac{9\cdot 58+396}{2} = 459$ e $\frac{9y-m}{2} = \frac{9\cdot 58-396}{2} = 63$.

Se $y = -58$, as soluções em x de (*) são $\frac{9y+m}{2} = \frac{9\cdot(-58)+396}{2} = -63$ e $\frac{9y-m}{2} = \frac{9\cdot(-58)-396}{2} = -459$.

Logo as soluções são (63 ; 58), (459 ; 58), (– 63 ; – 58) e (– 459 ; – 58).

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:



Podemos supor, sem perda de generalidade, a configuração acima e, portanto, pelo teorema de Pitágoras:

$$\ell^2 + \left(\sqrt{b^2-\ell^2} - \sqrt{a^2-\ell^2}\right)^2 = c^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{\left(b^2-\ell^2\right)\left(a^2-\ell^2\right)} = a^2+b^2-c^2-\ell^2 \Leftrightarrow$$

$$4\left(b^2a^2 - b^2\ell^2 - a^2\ell^2 + \ell^4\right) = \ell^4 + a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2\ell^2 - 2b^2\ell^2 + 2c^2\ell^2 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 \Leftrightarrow$$

$$3\ell^4 - 2\left(a^2+b^2+c^2\right)\ell^2 - (a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2) = 0$$

O discriminante da equação do segundo grau acima, em ℓ^2, é

$$\Delta = \left[-2(a^2+b^2+c^2)\right]^2 + 4\cdot 3\cdot\left(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2\right) =$$

$16(a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2)$.

Logo $\ell^2 = \dfrac{2(a^2+b^2+c^2) \pm \sqrt{16(a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2)}}{2\cdot 3} \Leftrightarrow$

$$\ell^2 = \frac{(a^2+b^2+c^2) \pm 2\sqrt{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2}}{3}$$

De fato, observando que ℓ é menor ou igual a min $\{a, b, c\}$, temos $\ell^2 \le \dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}$. Portanto

$$\ell = \sqrt{\frac{(a^2+b^2+c^2) - 2\sqrt{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2}}{3}}.$$

Observação: Outra maneira de obter as equações é trabalhar em R^3, supondo, sem perda de generalidade, que C = (0, 0, 0), $A=(\ell,0,h)$ e $B=\left(\dfrac{\ell}{2},\dfrac{\ell\sqrt{3}}{2},z\right)$, com $h, z \ge 0$. Obteríamos, então, as equações $\ell^2+h^2=a^2, \ell^2+z^2=b^2$ e $\ell^2+(z-h)^2=c^2$, que nos leva à mesma equação da solução acima.

Curiosidade: Para o triângulo 3, 4, 5 a medida do lado da projeção que é um triângulo equilátero é aproximadamente e. O erro é de apenas 0,1%.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

Primeira Solução:

Seja a_n o número de ordenadas de resultados (sem derrotas), cujo total de pontos seja n. A pergunta do problema é: quanto vale a_{20}?

Para responder a tal pergunta, iremos determinar uma relação recursiva entre os termos dessa seqüência. Pensando no último resultado de uma ordenada de resultados totalizando n pontos, ele pode ser E ou V. Se for E, então retirando o último termo da ordenada, ela passa a totalizar n – 1 pontos. Se for V, então ao retiramos o último resultado, a ordenada passa a totalizar n – 3 pontos. Disto, concluímos que:

$a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$.

Calculando os valores da seqüência, temos: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, $a_5 = 4$, $a_6 = 6$, $a_7 = 9$,

$a_8 = 13$, $a_9 = 19$, $a_{10} = 28$, $a_{11} = 41$, $a_{12} = 60$, $a_{13} = 88$, $a_{14} = 129$, $a_{15} = 189$, $a_{16} = 277$, $a_{17} = 406$, $a_{18} = 595$, $a_{19} = 872$ e $a_{20} = 1278$.

Logo existem 1278 possíveis seqüências ordenadas de resultados que o Flameiras pode ter obtido.

Segunda Solução:
Sejam x e y o número de vitórias e empates do Flameiras, respectivamente. Temos que: $x \geq 0$,
$y \geq 0$ e $3x + y = 20$. Dividindo em 7 possíveis casos:
1º caso: $x = 0$ e $y = 20$: Temos exatamente uma seqüência ordenada de resultados.
2º caso: $x = 1$ e $y = 17$: Uma seqüência ordenada deverá conter exatamente um "V" e 17 "E", portanto o número de seqüências ordenadas é exatamente o número de anagramas da palavra:
"VEEEEEEEEEEEEEEEEE", que é: $(17 + 1)! / (17! \cdot 1!) = 18$.
3º caso: $x = 2$ e $y = 14$: Analogamente ao 2º caso, o número de seqüências ordenadas é igual ao número de anagramas da palavra "VVEEEEEEEEEEEEEE", que é: $(14 + 2)! / (14! \cdot 2!) = 120$.
4º caso: $x = 3$ e $y = 11$: $(11 + 3)! / (11! \cdot 3!) = 364$ seqüências ordenadas.
5º caso: $x = 4$ e $y = 8$: $(8 + 4)! / (8! \cdot 4!) = 495$ seqüências ordenadas.
6º caso: $x = 5$ e $y = 5$: $(5 + 5)! / (5! \cdot 5!) = 252$ seqüências ordenadas.
7º caso: $x = 6$ e $y = 2$: $(2 + 6)! / (2! \cdot 6!) = 28$ seqüências ordenadas.
Temos um total de $1 + 18 + 120 + 364 + 495 + 252 + 28 = 1278$ seqüências ordenadas de resultados possíveis.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:
Seja $p, p + d, p + 2d, p + 3d, p + 4d, p + 5d, p + 6d$ a progressão aritmética, que podemos supor crescente sem perda de generalidade. Então:
1) $p \neq 2$.
De fato, se $p = 2$, $p + 2d$ é par e maior do que 2 e, portanto, não é primo.

2) d é múltiplo de 2.
Caso contrário, como p é ímpar, $p + d$ seria par e maior do que 2.

3) $p \neq 3$
Senão, teríamos $p + 3d$ múltiplo de 3, maior do que 3.

4) d é múltiplo de 3
Caso contrário, $p + d$ ou $p + 2d$ seria múltiplo de 3 e maior do que 3.

5) $p \neq 5$
Senão teríamos $p + 5d$ múltiplo de 5, maior do que 5.

6) d é múltiplo de 5.
Caso contrário, $p + d$, $p + 2d$, $p + 3d$ ou $p + 4d$ seria múltiplo de 5, maior do que 5.
De 1), 2), 3), 4), 5) e 6), $p \geq 7$ e d é múltiplo de 30.
Se $p = 7$, observando que $187 = 11 \cdot 17$, então $d \geq 120$.
Para $d = 120$, a seqüência é 7, 127, 247, 367, 487, 607, 727 a qual não serve, pois $247 = 13 \cdot 19$.
Para $d = 150$, a seqüência é 7, 157, 307, 457, 607, 757, 907 e satisfaz as condições do problema.
Finalmente, se $p \neq 7$, então d é múltiplo de 210 e o menor último termo possível para tais seqüências é $11 + 6 \cdot 210 = 1271$.
Portanto a resposta é 907.

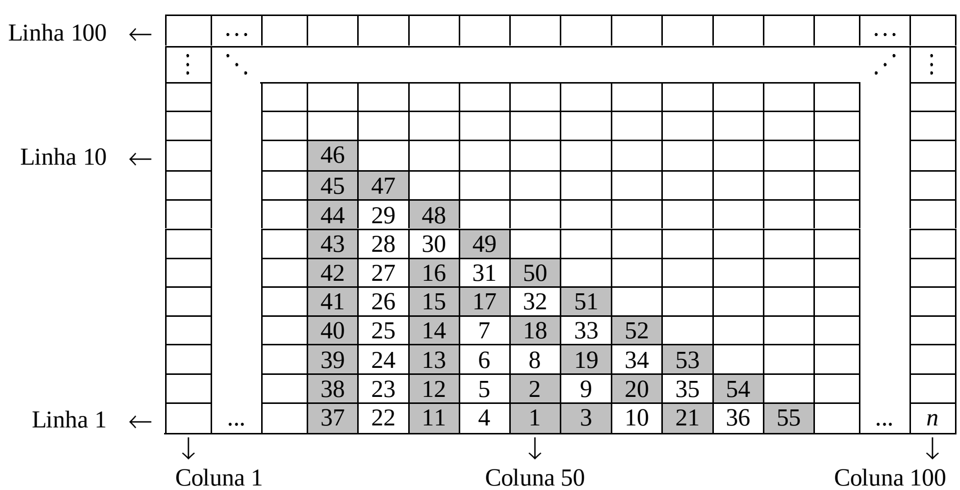
XXVII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Problemas e Soluções da Terceira Fase

PROBLEMAS – NÍVEL 1

PROBLEMA 1
Esmeraldinho tem alguns cubinhos de madeira de 2 cm de aresta. Ele quer construir um grande cubo de aresta 10 cm, mas como não tem cubinhos suficientes, ele cola os cubinhos de 2 cm de aresta de modo a formar apenas as faces do cubo, que fica oco.
Qual é o número de cubinhos de que ele precisará?

PROBLEMA 2
Num tabuleiro quadrado 5×5, serão colocados três botões idênticos, cada um no centro de uma casa, determinando um triângulo.
De quantas maneiras podemos colocar os botões formando um triângulo retângulo com catetos paralelos às bordas do tabuleiro?
Observação: Triângulo retângulo é todo triângulo que possui um ângulo de 90°.
Os lados que formam esse ângulo são chamados de catetos.

PROBLEMA 3
A partir da casa localizada na linha 1 e na coluna 50 de um tabuleiro 100×100, serão escritos os números 1, 2, 3, 4, ..., *n*, como na figura a seguir, que apresenta uma parte do tabuleiro e mostra como os números deverão ser colocados. O número *n* ocupará a casa da linha 1, coluna 100.



a) Determine n.
b) Em qual linha e coluna aparecerá o número 2005?

PROBLEMA 4
No retângulo *ABCD*, com diagonais *AC* e *BD*, os lados *AB* e *BC* medem, respectivamente, 13 cm e 14 cm. Sendo M a intersecção das diagonais, considere o triângulo *BME*, tal que
ME = *MB* e *BE* = *BA*, sendo $E \neq A$.
a) Calcule a área do triângulo *BME*.
b) Mostre que o segmento *BD* é paralelo ao segmento *EC*.

PROBLEMA 5
Um número inteiro positivo n tem a propriedade P se a soma de seus divisores positivos é igual a $2n$. Por exemplo: 6 tem a propriedade P, pois $1+2+3+6=2\cdot 6$, porém 10 não tem a propriedade P, pois $1+2+5+10\neq 2\cdot 10$.
Mostre que nenhum quadrado perfeito tem a propriedade P.
Observação: Um número inteiro positivo é um quadrado perfeito se é igual ao quadrado de um inteiro. Por exemplo, $1=1^2$, $4=2^2$ e $9=3^2$ são quadrados perfeitos.

PROBLEMAS – NÍVEL 2

PROBLEMA 1
Num tabuleiro quadrado 5×5, serão colocados três botões idênticos, cada um no centro de uma casa, determinando um triângulo.
De quantas maneiras podemos colocar os botões formando um triângulo retângulo com catetos paralelos às bordas do tabuleiro?

PROBLEMA 2
No triângulo retângulo *ABC*, os catetos *AB* e *BC* medem, respectivamente, 3 cm e 4 cm. Seja M o ponto médio da hipotenusa AC e seja D um ponto, distinto de *A*, tal que *BM* = *MD* e *AB* = *BD*.
a) Prove que *BM* é perpendicular a *AD*.
b) Calcule a área do quadrilátero *ABDC*.

PROBLEMA 3

Dado que $\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \dfrac{1}{11}$, qual é o valor de $\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{b+c} + \dfrac{c}{c+a}$?

PROBLEMA 4

Em seu treino diário de natação, Esmeraldinho percorre várias vezes, com um ritmo constante de braçadas, o trajeto entre dois pontos A e B situados na mesma margem de um rio. O nado de A para B é a favor da corrente e o nado em sentido contrário é contra a corrente. Um tronco arrastado pela corrente passa por A no exato instante em que Esmeraldinho sai de A. Esmeraldinho chega a B e imediatamente regressa a A. No trajeto de regresso, cruza com o tronco 6 minutos depois de sair de A. A seguir, Esmeraldinho chega a A e imediatamente sai em direção a B, alcançando o tronco 5 minutos depois da primeira vez que cruzou com ele ao ir de B para A. Quantos minutos o tronco leva para ir de A até B?

PROBLEMA 5

Prove que o número $1^{2005} + 2^{2005} + 3^{2005} + ... + 2005^{2005}$ é múltiplo de $1 + 2 + 3 + ... + 2005$.

PROBLEMA 6

A medida do ângulo B de um triângulo ABC é 120°. Sejam M um ponto sobre o lado AC e K um ponto sobre o prolongamento do lado AB, tais que BM é a bissetriz interna do ângulo $\angle ABC$ e CK é a bissetriz externa correspondente ao ângulo $\angle ACB$. O segmento MK intersecta BC no ponto P. Prove que $\angle APM$ = 30°.

PROBLEMAS – NÍVEL 3

PROBLEMA 1:

Um número natural é palíndromo quando se obtém o mesmo número ao escrevermos os seus dígitos na ordem inversa. Por exemplo, 481184, 131 e 2 são palíndromos.

Determine todos os pares de inteiros positivos (m, n) tais que $\underbrace{111...1}_{m \text{ uns}} \cdot \underbrace{111...1}_{n \text{ uns}}$ é palíndromo.

PROBLEMA 2:

Determine o menor número real C para o qual a desigualdade

$$C\left(x_1^{2005}+x_2^{2005}+x_3^{2005}+x_4^{2005}+x_5^{2005}\right)\geq x_1x_2x_3x_4x_5\left(x_1^{125}+x_2^{125}+x_3^{125}+x_4^{125}+x_5^{125}\right)^{16}$$
é válida para todos os números reais positivos x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

PROBLEMA 3:
Dizemos que um quadrado está contido em um cubo quando todos os seus pontos estão nas faces ou no interior do cubo. Determine o maior $\ell > 0$ tal que existe um quadrado de lado ℓ contido num cubo de aresta 1.

PROBLEMA 4:
Temos quatro baterias carregadas, quatro baterias descarregadas e um rádio que necessita de duas baterias carregadas para funcionar.
Supondo que não sabemos quais baterias estão carregadas e quais estão descarregadas, determine o menor número de tentativas suficiente para garantirmos que o rádio funcione. Uma tentativa consiste em colocar duas das baterias no rádio e verificar se ele, então, funciona.

PROBLEMA 5:
Sejam ABC um triângulo acutângulo e F o seu *ponto de Fermat*, isto é, o ponto interior ao triângulo ABC tal que os três ângulos $A\hat{F}B$, $B\hat{F}C$ e $C\hat{F}A$ medem 120 graus. Para cada um dos triângulos ABF, ACF e BCF trace a sua *reta de Euler*, ou seja, a reta que liga o seu circuncentro e o seu baricentro.
Prove que essas três retas concorrem em um ponto.

PROBLEMA 6:
Dados a, c inteiros positivos e b inteiro, prove que existe x inteiro positivo tal que
$$a^x + x \equiv b \pmod{c},$$
ou seja, existe x inteiro positivo tal que c é um divisor de $a^x + x - b$.

SOLUÇÕES – NÍVEL 1

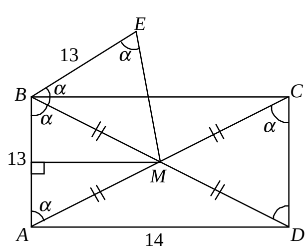
PROBLEMA 1: SOLUÇÃO DE DANIEL LUCAS FILGUEIRA (FORTALEZA - CE)
Como cada cubinho tem 2 cm de aresta e o cubo tem 10 cm de aresta, então cabem 5 cubinhos no comprimento, na largura e na altura, então em todo o cubo cabem 125 cubinhos.
Se no lado do cubo coubessem n cubinhos, então o No. de cubinhos da parte de dentro do cubo seria $(n-2)\times(n-2)\times(n-2)$. Como no lado do cubo cabem 5 cubinhos, então para sabermos o No. de cubinhos da parte de dentro, basta substituir o n pelo 5, e ficaria o seguinte:
$(5-2)\times(5-2)\times(5-2) = 3\times3\times3 = 27$

Como em todo o cubo cabem 125 cubinhos, então para deixar o cubo oco, basta tirar a parte de dentro, que tem 27 cubinhos.
Logo, Esmeraldinho precisaria de 125 – 27 = 98 cubinhos para formar o cubo oco.

PROBLEMA 2: SOLUÇÃO DE RAFAEL SUSSUMU YAMAGUTI MIADA (CAMPINAS - SP)
Se o botão correspondente ao ângulo reto estiver em (1, 1) teremos mais 4 casas acima e 4 casas à direita, portanto $4 \times 4 = 16$ possibilidades.
Se ele estiver em (2, 1) teremos mais 4 casas acima, 3 casas à direita e 1 casa à esquerda o que dá de novo $4 \times 4 = 16$ possibilidades. Do mesmo modo, vemos que, para cada casa escolhida para o botão correspondente ao ângulo reto temos 16 possibilidades, e como no campo existem 25 casas, teremos portanto $25 \times 16 = 400$ possibilidades. Então teremos 400 possibilidades.

PROBLEMA 3: SOLUÇÃO DA BANCA
a) Quando for escrito o número *n*, todas as casas da diagonal que passa pela (linha 100; coluna 1) e (linha 1; coluna 100) e as que estão abaixo dela estarão preenchidas e, nesse caso, 100 + 99 + 98 +...+ 3 + 2 + 1 = 5050 números terão sido escritos no tabuleiro. Como começamos com o 1, o último, *n*, será 5050.
b) A quantidade de termos nas camadas (1, 2, 3), (4, 5, 6, 7, 8, 9, 10), (11, 12, 13, 14 , 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21) aumenta de 4 em 4. Ao final da 31ª camada, que tem $3 + 30 \times 4 = 123$ números, terão sido escritos 3 + 7 + 11 +...+ 123 = 1953 números, ou seja, o último número dessa camada é 1953.
O termo que ocupa a linha mais alta em cada camada aumenta de 2 em 2 (veja que a 1ª camada sobe até alinha 2, a 2ª camada até a linha 4, a 3ª sobe até a linha 6, e assim por diante). Assim, o termo da 31ª camada que ocupa a linha mais alta estará na linha $1 + (122 \div 2) = 62$.
Por fim, a 32ª camada iniciará na linha 1 e coluna 51 – 32 = 19, com o número 1954, e subirá até a linha 62 + 2 = 64. Como 2005 = 1954 + 51, o número 2005 aparecerá na linha 51 + 1 = 52 e coluna 19.

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO MATHEUS BARROS DE PAULA (TAUBATÉ - SP)
a) Montando a figura, ela ficará assim:



Os triângulos *BEM* e *BAM* são congruentes pelo critério *LLL*. Como a distância de *M* ao lado *AB* é metade do lado *AD*, o triângulo *BAM* possui uma base de 13 cm e uma altura de 7cm, e sua área é de $\frac{13\times 7}{2} = 45,5\,\text{cm}^2$.

b) O triângulo *BEM* é congruente ao triângulo *CMD* pelo critério *LLL*, logo a distância de *E* à reta $\overleftrightarrow{BD}$ é idêntica à distância de *C* à reta $\overleftrightarrow{BD}$, pois as alturas serão as mesmas.

Assim, $\overleftrightarrow{EC} // \overleftrightarrow{BD}$.

PROBLEMA 5:

BASEADA NA SOLUÇÃO DE GUSTAVO LISBÔA EMPINOTTI (FLORIANÓPOLIS - SC)

Um quadrado perfeito sempre tem um número ímpar de divisores, pois há pares de números cujo produto é o quadrado perfeito dado e mais um número, a sua raiz.

Se o quadrado perfeito *n* for ímpar, então todos os seus divisores são ímpares, e assim será sua soma. Logo a soma não pode ser 2*n*, pois 2*n* é par.

Se o quadrado perfeito *n* for par, então é igual a uma potência de 2 vezes o quadrado de um ímpar. Os divisores ímpares de *n* são divisores desse quadrado e, como já vimos, sua soma (de todos os divisores ímpares de *n*) é ímpar e logo a soma de todos os divisores de *n* também é ímpar, não podendo ser igual a 2*n*, que é par.

Portanto nenhum quadrado perfeito tem a propriedade *P*.

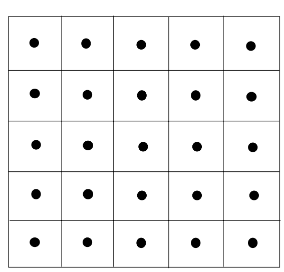
SOLUÇÕES – NÍVEL 2

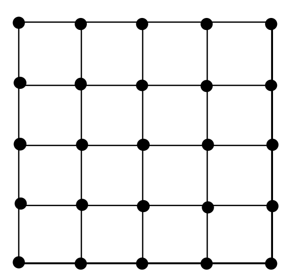
PROBLEMA 1:

SOLUÇÃO DE HENRIQUE PONDÉ DE OLIVEIRA PINTO (SALVADOR – BA)

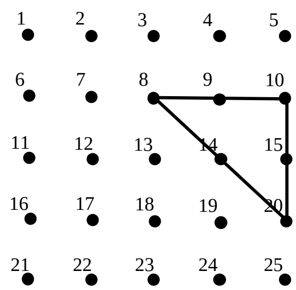
Ao invés de considerarmos um tabuleiro quadrado consideremos uma malha pontilhada onde os pontos são centros de cada quadradinho.

Isto é:





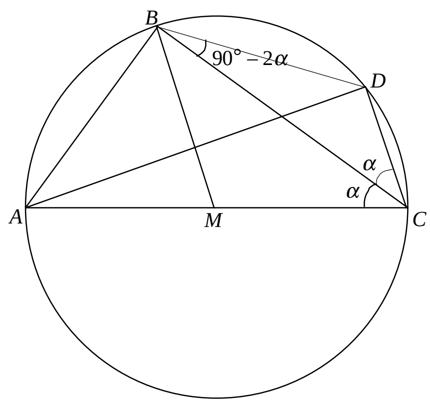
Observe que para cada triângulo do enunciado existe um único conjunto dos 2 pontos extremos da hipotenusa. Ou seja, o conjunto de dois pontos extremos da hipotenusa no triângulo abaixo é {8; 20}.



Ou seja os pontos 8 e 20 determinam a hipotenusa do triângulo abaixo. No entanto para cada dois pontos que determinam a hipotenusa existem outros dois pontos que podem ser o vértice oposto à hipotenusa. No exemplo acima os pontos 8 e 20 determinam a hipotenusa de dois triângulos retângulos; os triângulos 8; 18; 20 e 8; 10; 20. Basicamente, cada triângulo possui uma única hipotenusa e cada hipotenusa é comum a dois triângulos retângulos do enunciado. Para provar que cada hipotenusa pertence a dois triângulos retângulos distintos, vamos pegar uma hipotenusa genérica de extremos $(5K+a)$ e $(5N+b)$ (no quadriculado acima) contando que ambos sejam menores que 25 e tanto a e b sejam maiores ou iguais a 1 e menores ou iguais a 5. Observe que $K \neq N$ e $a \neq b$ ou seja, ambos os pontos estão em linhas e colunas diferentes pois se coincidirem em linhas e ou colunas não há triângulos como definidos no enunciado com essa hipotenusa. Os dois triângulos com essa hipotenusa são: $(5K+a;\ 5K+b;\ 5N+b)$ e $(5K+a;\ 5N+a;\ 5N+b)$ como para cada triângulo há uma única hipotenusa e para cada hipotenusa dois triângulos, o número de triângulos é o dobro do de hipotenusas. Vamos calcular o número de hipotenusas: O primeiro ponto pode ficar em 25 lugares (todos os pontos) já o segundo pode ficar em 16 (todos que não estão na mesma linha ou coluna do primeiro). Logo são $25 \cdot 16 = 400$ onde a ordem das escolhas importa, mas a ordem não importa. Logo, como são duas escolhas dividi-se por 2! = 2 e teremos 400/2 = 200 hipotenusas $\Rightarrow$ 400 triângulos. Logo a resposta é 400 triângulos.

Obs. Para um quadrado $n \times n$ a quantidade de triângulos é $\frac{n^2 \cdot (n-1)^2}{2} \cdot 2 = \left[n \cdot (n-1)\right]^2$ se generalizamos esse processo que foi utilizado.

PROBLEMA 2:
SOLUÇÃO DE RAFAEL TUPYNAMBÁ DUTRA (BELO HORIZONTE - MG)



Chamemos $B\hat{C}A = \alpha$.

Temos $sen\alpha = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3}{5}$

$\cos\alpha = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{4}{5}$.

a) Como ΔABC é retângulo em *B*, sabemos que *B* pertence à circunferência de diâmetro *AC*. Desta forma, $AM = MB = MD \Rightarrow AM = MD$. Isso significa que *M* pertence à mediatriz de $\overline{AD}$. Como $AB = BD$, *B* também pertence à mediatriz de $\overline{AD}$.

Assim, a mediatriz de $\overline{AD}$ é a reta $\overleftrightarrow{BM}$ e, assim, $BM \perp AD$.

c) *D* pertence à circunferência de centro *M* e raio $\overline{BM}$, já que $BM = MD$. Assim, *D* pertence ao circuncírculo do ΔABC. Como $\overline{AB} = \overline{BD}$, temos $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BD}$ e, assim, $B\hat{C}D = B\hat{C}A \Rightarrow B\hat{C}D = \alpha$. No triângulo ABC, $B\hat{A}C = 90° - \alpha$. Logo, como *ABDC* é inscritível, $B\hat{D}C = 180° - (90° - \alpha) = 90° + \alpha$. No triângulo *BCD*, temos $C\hat{B}D = 180° - (90° + \alpha) - \alpha = 90° - 2\alpha$.

Área $BCD = \dfrac{BD \cdot BC \cdot sen(90° - 2\alpha)}{2} = \dfrac{3cm \cdot 4cm \cdot \cos 2\alpha}{2} = 6cm^2 \cdot \cos 2\alpha$ e, como $sen\ \alpha = \dfrac{3}{5}$ e $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$, Área $BCD = 6cm^2\left(\cos^2\alpha - sen^2\alpha\right) = 6cm^2\left(\left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2\right) = 6cm^2\left(\frac{16-9}{25}\right) = \frac{42}{25}cm^2$

Usamos aqui o fato de que $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$.

Área $ABC = \frac{AB\cdot BC}{2} = \frac{3cm\cdot 4cm}{2} = 6cm^2 \Rightarrow$

Área $ABDC$ = Área ABC + Área BCD = $\left(6+\frac{42}{25}\right)cm^2 = \frac{192}{25}cm^2$.

PROBLEMA 3:
SOLUÇÃO ADAPTADA DE MARCELO MATHEUS GAUY (SÃO JOSÉ DO RIO PRETO - SP)

Inicialmente, podemos observar que

$$\frac{a+b}{a+b}+\frac{b+c}{b+c}+\frac{c+a}{c+a}=3 \Leftrightarrow \frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}=3-\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\right),$$

ou seja, obter o valor de $\alpha = \frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$ é equivalente a obter o valor de $\beta = \frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}$.

Como já sabemos que $\beta = 3-\alpha$, basta agora conseguir outra relação entre α e β aproveitando a igualdade fornecida no enunciado a qual envolve $\gamma = \frac{(a-b)\cdot(b-c)\cdot(c-a)}{(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)}$

Após alguns testes, substituindo valores em *a*, *b* e *c*, somos levados a supor que $\alpha-\beta=-\gamma$, isto é, $\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a} = -\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{b-c}{b+c}\cdot\frac{c-a}{c+a}$.

(Temos acima uma incrível identidade, ela fornece infinitas triplas de reais cuja soma é igual ao oposto do produto!).

Vamos demonstrar tal identidade:

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a} = \frac{(a-b)(b+c)(c+a)+(b-c)(a+b)(c+a)+(c-a)(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \quad (*)$$

Porém,

1) $(a-b)(b+c)(c+a) = (a-b)(b-c+2c)(a-c+2c) =$
$(a-b)(b-c)(a-c)+2c(a-b)(b-c+a-c+2c) =$
$(a-b)(b-c)(a-c)+2c(a-b)(a+b)$

2) $(b-c)(a+b)(c+a)+(c-a)(a+b)(b+c)=$

$(a+b)\big((b-c)(c+a)+(c-a)(b+c)\big)=$

$(a+b)\left(bc+ba-c^2-ca+cb+c^2-ab-ac\right)=$

$(a+b)(2bc-2ac)=-2c(a-b)(a+b)$

Logo, de 1 e 2,

$$(*)=-\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Assim, $\alpha-\beta=-\frac{1}{11}\Leftrightarrow\alpha-(3-\alpha)=-\frac{1}{11}\Leftrightarrow\alpha=\frac{16}{11}.$

PROBLEMA 4:
SOLUÇÃO DE HENRIQUE WATANABE (SÃO PAULO - SP)

Vamos supor que a velocidade da corrente do rio é c e a velocidade de Esmeraldinho é v (sem a corrente). Seja d o comprimento do rio.

Em 6 minutos os dois juntos percorreram $2d$.

A velocidade no sentido $A\to B$ é $(v+c)$ e a velocidade no sentido $B\to A$ é $(v-c)$.

O primeiro encontro foi à $6c$ do ponto A.

De $A\to B$ ele leva $\frac{d}{v+c}$ minutos.

O segundo encontro ocorreu à $11c$ do ponto A.

Para ir e voltar Esmeraldinho leva: $t=\frac{d}{v+c}+\frac{d}{v-c}=\frac{2dv}{(v+c)(v-c)}$

e de A até $11c$: $\frac{11c}{v+c}$. Logo $\frac{2dv+11c(v-c)}{(v+c)(v-c)}=11$

$\Leftrightarrow 2dv+11cv-11c^2=11v^2-11c^2\Leftrightarrow v(11v-11c-2d)=0$

De B até o primeiro encontro em $6c$ $t=\frac{d-6c}{v-c}$. Logo $6=\frac{(d-6c)(v+c)+d(v-c)}{(v+c)(v-c)}$

$\Leftrightarrow 6v^2-6c^2=dv+dc-6vc-6c^2+dv-dc$

$\Leftrightarrow 2v(3v+3c-d)=0$

Como $v\neq 0$: $\left|\begin{array}{l}11v-11c-2d=0\\ 3v+3c-d=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}11v-11c=2d\\ 6v+6c=2d\end{array}\right.$

$\therefore 11v - 11c = 6v + 6c \Leftrightarrow v = \dfrac{17c}{5}$

Então: $d = 3 \cdot \dfrac{17c}{5} + 3c = \dfrac{51c + 15c}{5} = \dfrac{66c}{5}$

O tronco leva: $t = \dfrac{d}{c} = \dfrac{66c}{5} \cdot \dfrac{1}{c} = \dfrac{66}{5}$ minutos

O tronco vai de A para B em $\dfrac{66}{5}$ minutos, ou seja, 13 minutos e 12 segundos.

PROBLEMA 5: SOLUÇÃO DE HENRIQUE PONDÉ DE OLIVEIRA PINTO (SALVADOR - BA)

Observe que $1 + 2 + 3 + ... + 2005 = \dfrac{2005 \cdot (2005 + 1)}{2} = 2005 \cdot 1003$

Seja $E = 1^{2005} + 2^{2005} + ... + 2005^{2005}$

Vamos provar que $2005 | E$

Vendo E módulo 2005 temos:

$E \underset{2005}{\equiv} 1^{2005} + 2^{2006} + 3^{2005} + ... + 1001^{2005} + 1002^{2005} + (-1002)^{2005} + (-1001)^{2005} + ... + (-2)^{2005} + (-1)^{2005} + 0^{2005}$

como $a^{2005} \underset{2005}{\equiv} -(-a)^{2005} \Rightarrow a^{2005} + (-a)^{2005} \underset{2005}{\equiv} 0$ Temos que o n-ésimo termo da expressão acima irá se anular com o $(2005 - n)°$ e, portanto, $E \equiv 0 (\text{mod } 2005) \Rightarrow 2005 | E$.

Vamos provar agora que 1003 divide E. Vendo E módulo 1003 temos:

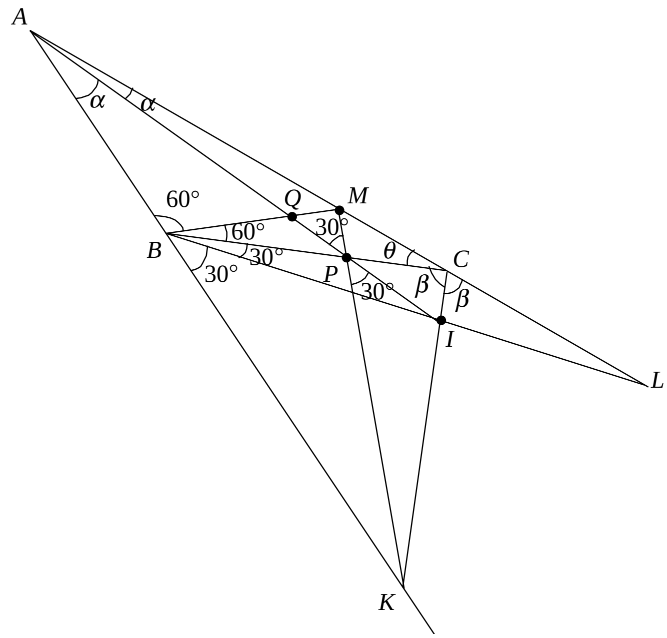
$E \underset{1003}{\equiv} 1^{2005} + 2^{2005} + ... + 1001^{2005} + 1002^{2005} + 0^{2005} + (-1002)^{2005} + (-1001)^{2005} + ... + (-2)^{2005} + (-1)^{2005}$

como $a^{2005} \underset{1003}{\equiv} -(-a)^{2005} \Rightarrow a^{2005} + (-a)^{2005} \underset{1003}{\equiv} 0 \Rightarrow$ cada n-ésimo termo irá se anular com o $(2006 - n)°$ termo e o 1003º. já é múltiplo de 1003 pois é igual a 1003^{2005} temos que $E \equiv 0 (\text{mod } 1003) \Rightarrow 1003 | E$

com o $1003 | E$ e $2005 | E$ e $(1003, 2005) = 1 \Rightarrow 1003 \cdot 2005 | E \Rightarrow$

$1 + 2 + ... + 2005 | 1^{2005} + 2^{2005} + ... + 2005^{2005}$ c.q.d.

PROBLEMA 6: SOLUÇÃO DE MARÍLIA VALESKA COSTA MEDEIROS (FORTALEZA - CE)



Observe a figura acima:
Vamos explicar como chegar até ela!
Sejam:

Q o ponto de intersecção de $\overline{BM}$ e $\overline{AP}$.

I a intersecção de $\overline{CK}$ e a bissetriz externa de $A\hat{B}C$, que encontra o prolongamento de $\overline{AC}$ em L.

$B\hat{C}K \equiv K\hat{C}L = \beta$ (pelo enunciado)

Vamos provar que A, Q, P, I são colineares.

Usando Menelaus no $\Delta ABC,$ temos: M, P e K são colineares $\Rightarrow$

$$\frac{AK}{BK} \cdot \frac{BP}{CP} \cdot \frac{CM}{AM} = 1 \quad (*)$$

Só temos que:
Pelo Teorema da bissetriz interna:
(I) No ΔABC

$$\frac{CM}{AM} = \frac{BC}{AB}$$

Pelo Teorema da bissetriz externa:

(II) No ΔABC

$$\frac{AK}{BK}=\frac{AC}{BC}$$

Então, substituindo em (*):

$$\frac{AC}{BC}\cdot\frac{BP}{CP}\cdot\frac{BC}{AB}=1\Rightarrow\frac{AC}{AB}\cdot\frac{BP}{CP}=1\Rightarrow\frac{AC}{AB}=\frac{CP}{BP}$$

Com este resultado, observe que $\overline{AP}$ é bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$.

Como Q é a intersecção de $\overline{AP}$ e $\overline{BM}$, Q pertence a bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$, o que implica, que no ΔABM, $\overline{AQ}$ é bissetriz de $B\hat{A}M$.

Vamos provar que I pertence a bissetriz de $B\hat{A}M$.

Pelo teorema da bissetriz interna:

(III) No ΔBCK

$$\frac{CI}{IK}=\frac{BC}{BK}$$

Por (II), temos

$$\frac{AK}{AC}=\frac{BK}{BC}=\frac{IK}{CI}\Rightarrow\frac{IK}{AK}=\frac{CI}{AC}$$

Observe que isto é nada mais nada menos do que a propriedade da bissetriz interna. Logo AI é bissetriz do ângulo $K\hat{A}C=B\hat{A}M$.

Assim, provamos que A, Q, P e I são colineares.

Seja $A\hat{C}B=\theta$. No ΔABC podemos observar que $2\alpha+\theta=60°$

Só que:

$B\hat{C}L=120°+2\alpha$ (teorema do ângulo externo). Sabemos, então, que $B\hat{C}L=2\beta\Rightarrow\beta=60°+\alpha$

Observe que o ângulo $A\hat{I}K=\alpha+\theta+\beta=\alpha+\theta+60°+\alpha=2\alpha+\theta+60°$

Logo, $A\hat{I}K=120°$

Olhando para o quadrilátero $BPIK$, observe que este é inscritível, pois:

$P\hat{B}K+P\hat{I}K=60°+120°=180°$

Assim, $I\hat{B}K\equiv I\hat{P}K=30°$

Agora, observe que $A\hat{P}M\equiv I\hat{P}K$ (o.p.v)

Portanto, $A\hat{P}M=30°$

SOLUÇÕES – NÍVEL 3

PROBLEMA 1:
SOLUÇÃO DE WILSON CAMARA MARRIEL (RIO DE JANEIRO - RJ)

Podemos escrever $\underbrace{11...1}_{k}$ como $\dfrac{10^k-1}{9}$.

Então:

$$\underbrace{11...1}_{m}\cdot\underbrace{11...1}_{n}=\frac{10^m-1}{9}\frac{10^n-1}{9}=\frac{\dfrac{10^m(10^n-1)}{9}-\dfrac{10^n-1}{9}}{9}=\frac{\overbrace{11...1}^{n}\overbrace{00...0}^{m}-\overbrace{11...1}^{n}}{9}=\frac{\overbrace{11...1}^{n-1}0\overbrace{99...9}^{m-n}\overbrace{88...8}^{n-1}9}{9},$$

se supusermos $m > n$ (o que não nos faz perder a generalidade!). Esse número tem $m + n - 1$ algarismos.
Então vejamos: (fazendo $n > 9$)

$$\begin{array}{l|l} \overbrace{11...1}^{n-1}0\overbrace{99...9}^{m-n}\overbrace{88...8}^{n-1}9 & 9 \\ \cline{2-2} \quad k & \underbrace{1234567901\ldots x}_{n-2} \end{array}$$

onde x é o último termo do quociente antes de usar o 0 e k é o resto de $\overbrace{11...1}^{n-1}$ por 9.
Isto é, acima temos parte da divisão euclidiana de $\overbrace{11...1}^{n-1}0\overbrace{99...9}^{m-n}\overbrace{88...8}^{n-1}9$ por 9.

Dividimos nos casos para possíveis valores de k.

1º. caso ($k = 0$) $\Rightarrow n = 9\theta + 1$. Continuando a divisão, obtemos

$$\begin{array}{l|l} 00\overbrace{99...9}^{m-n}\overbrace{88...8}^{n-1}9 & 9 \\ \cline{2-2} & \underbrace{1234567901\ldots x}_{n-2}\ \underbrace{011111\ldots1}_{m-n}0987 \end{array}$$

Contando da esquerda para a direita 8 é o $(m + 1)$º. algarismo; como $m+1>\dfrac{m+n-1}{2}$ então está na metade direita do resultado. Logo, já que o 8 não aparece no lado esquerdo e aparece no direito, temos uma assimetria, ABSURDO!

2º. caso ($k = 1$): $n = 9\theta + 2$

$$\begin{array}{l|l} 10\overbrace{99\ldots9}^{m-n}\overbrace{88\ldots8}^{n-1}9 & 9 \\ \cline{2-2} \;19 & \underbrace{1234567901\ldots x}_{n-2}\ \underbrace{122\ldots2}_{m-n}2098 \\ \;\;19 & \\ \quad\ddots & \\ \qquad 18 & \\ \qquad\; 088 & \end{array}$$

mesmo caso anterior, ABSURDO!

3º. caso ($k = 2$): $n = 9\theta + 3$

$$\begin{array}{l|l} 20\overbrace{99\ldots9}^{m-n}\overbrace{88\ldots8}^{n-1}9 & 9 \\ \cline{2-2} \;29 & \underbrace{1234567901\ldots x}_{n-2}\ \underbrace{233\ldots3}_{m-n}2098 \\ \;\;29 & \\ \quad\ddots & \\ \qquad 28 & \\ \qquad\; 18 & \\ \qquad\;\; 088 & \end{array}$$

mesmo caso anterior, ABSURDO!

Ao tentarmos os 9 casos, vemos que um deles tem que ser ≤ 9. Basta conferir se é verdade!
Vejamos:

$n = 1$ é verdade!

$$n = 2 \left(\begin{array}{r} 11\ldots11 \\ \underline{111\ldots1\;} \\ 122\ldots21 \end{array}\right) \text{ é verdade!}$$

$$n = 3 \left(\begin{array}{r} 11\ldots11 \\ 111\ldots1\; \\ \underline{1111\ldots1\;\;} \\ 1233\ldots321 \end{array}\right) \text{ é verdade!}$$ Obs. É fácil ver que sempre dará certo de 1 à 9.

$n = 9 \begin{pmatrix} \qquad\qquad 11...111111111 \\ \qquad \iddots \qquad\qquad \iddots \\ \quad 11111111...111 \\ 111111111...11 \\ \underline{1111111111...1} \\ 1234567899...987654321 \end{pmatrix}$ é verdade! Pois basta ir somando 1 aos posteriores.

Então nossos pares são:

$$(m,n)=\begin{Bmatrix}(1,k),(2,k),(3,k),(4,k),(5,k),(6,k),(7,k),(8,k),(9,k)\\ (k,1),(k,2),(k,3),(k,4),(k,5),(k,6),(k,7),(k,8),(k,9)\end{Bmatrix} \text{ tal que } k\in\mathbb{N}^*.$$

PROBLEMA 2: SOLUÇÃO DE ANDERSON HOSHIKO AIZIRO (SÃO PAULO – SP)

Para $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1$ temos $C\cdot 5 \ge 5^{16} \Leftrightarrow C \ge 5^{15}$.

Por *bunching* (ou *desigualdade de Muirhead*), temos que

$$\sum_{sym} x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}x_4^{\alpha_4}x_5^{\alpha_5} \ge \sum_{sym} x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}x_3^{\beta_3}x_4^{\beta_4}x_5^{\beta_5}$$

no caso de termos uma desigualdade homogênea e simétrica (o que é o nosso caso). Além disso, devemos ter

$\alpha_1 \ge \beta_1, \alpha_1+\alpha_2 \ge \beta_1+\beta_2, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \ge \beta_1+\beta_2+\beta_3, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 \ge \beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4$ e $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5 = \beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_5$.

A notação $\sum_{sym} x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}x_4^{\alpha_4}x_5^{\alpha_5}$ significa que estamos somando todos os 5! = 120 termos da forma $x_{i_1}^{\alpha_1}x_{i_2}^{\alpha_2}x_{i_3}^{\alpha_3}x_{i_4}^{\alpha_4}x_{i_5}^{\alpha_5}$, sendo (i_1,i_2,i_3,i_4,i_5) uma permutação de (1, 2, 3, 4, 5). Aqui, impomos também $\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge \alpha_3 \ge \alpha_4 \ge \alpha_5$ e o mesmo para os β's.

Observando que a desigualdade dada é simétrica, se abrirmos $x_1x_2x_3x_4x_5\left(x_1^{125}+x_2^{125}+x_3^{125}+x_4^{125}+x_5^{125}\right)^{16}$ obtemos um somatório simétrico no qual o maior expoente de algum dos termos é $125\cdot 16+1 < 2005$. Podemos, então, aplicar *bunching*.

A desigualdade é, então, equivalente a

$$C\frac{1}{4!}\sum_{sym} x_1^{2005} \ge \frac{5^{16}}{5!}\sum_{sym} x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}x_4^{\alpha_4}x_5^{\alpha_5}$$

Explicando: $\sum_{sym} x_1^{2005}$ possui 5! termos no desenvolvimento no qual temos 4! x_1^{2005}, $4!x_2^{2005}$, $4!x_3^{2005}$, $4!x_4^{2005}$ e $4!x_5^{2005}$.

Além disso, temos 5^{16} termos no desenvolvimento de $\left(x_1^{125}+x_2^{125}+x_3^{125}+x_4^{125}+x_5^{125}\right)^{16}$ e, para cada conjunto $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$ temos 5! dos 5^{16} termos e, portanto, há $\dfrac{5^{16}}{5!}$ somatórios simétricos.

Como por *bunching* $\sum_{sym} x_1^{2005} \ge \sum_{sym} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} x_4^{\alpha_4} x_5^{\alpha_5}$, se $C\dfrac{1}{4!}=\dfrac{5^{16}}{5!} \Leftrightarrow C=5^{15}$ a desigualdade é válida.

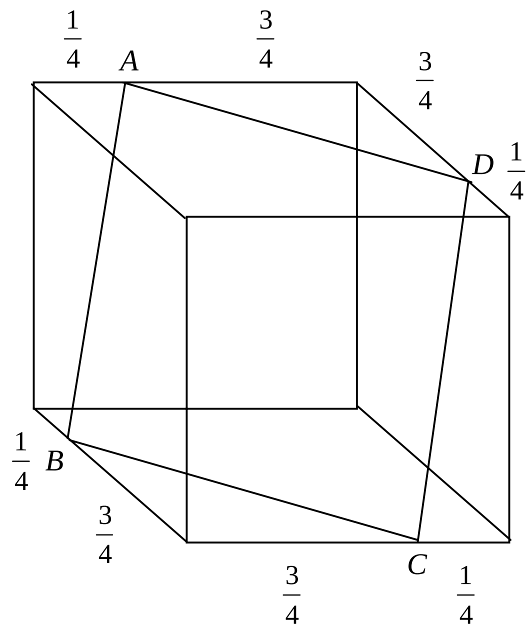
Desse modo, concluímos que o menor número real C para o qual a desigualdade $C\left(x_1^{2005}+x_2^{2005}+x_3^{2005}+x_4^{2005}+x_5^{2005}\right) \ge x_1x_2x_3x_4x_5\left(x_1^{125}+x_2^{125}+x_3^{125}+x_4^{125}+x_5^{125}\right)^{16}$ é válida para todos os números reais positivos x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 é $C=5^{15}$.

PROBLEMA 3: SOLUÇÃO DA BANCA

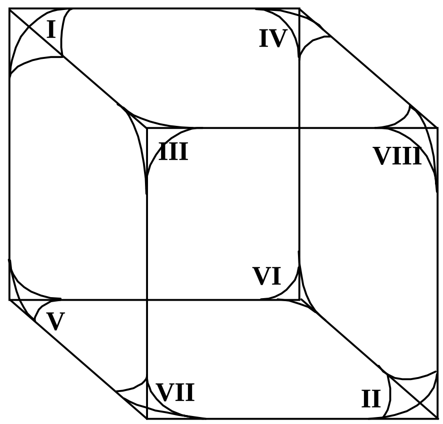
Primeiro, mostremos que podemos supor, sem perda de generalidade, que os centros do cubo (que doravante chamaremos C) e do quadrado coincidem. Suponha que os centros não coincidam. Considere os três planos distintos, cada um deles paralelo a duas faces do cubo, que passam pelo centro do quadrado. Os três planos determinam no cubo oito paralelepípedos; considere o de menores dimensões (ou seja, algum que tem todas as dimensões menores ou iguais a 1/2). Seja a a maior dimensão desse paralelepípedo. Então construa um cubo C_0 de lado $2a$ com centro no centro do quadrado e faces paralelas às faces do cubo do problema. O quadrado está contido nesse cubo, pois cada plano ou contém o quadrado ou o corta em dois polígonos congruentes e simétricos em relação ao centro do quadrado. Translade o cubo C_0, incluindo o quadrado, que está em seu interior, de modo que o centro de C_0 coincida com o centro do cubo. Agora os centros do quadrado e de C coincidem, e dado que $2a \le 1$, C_0 está contido em C, e o quadrado ainda está contido no cubo C.

A figura a seguir mostra que $\ell \ge \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

Note que $AB = CD = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, $AD = BC = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{2}$ e $AC = BD = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{2}$.

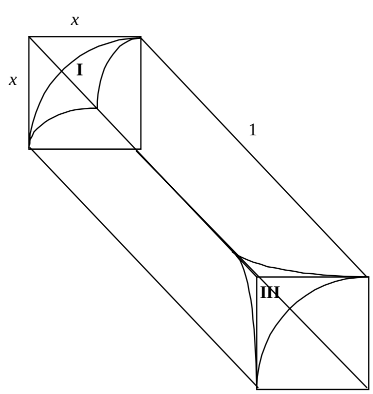


Vamos provar que, na verdade, $\ell = \frac{3\sqrt{2}}{4}$. Suponha que exista um quadrado de lado $\ell > \frac{3\sqrt{2}}{4}$. Podemos supor que o centro do quadrado coincide com o centro do cubo. Seja S uma esfera com centro no centro O de C e que passa pelos quatro vértices do quadrado, ou seja, de raio $\ell\sqrt{2}/2 > 3/4$. A figura a seguir mostra as secções de S no cubo C. Numeramos as oito regiões contidas na superfície da esfera e no interior do cubo com números romanos

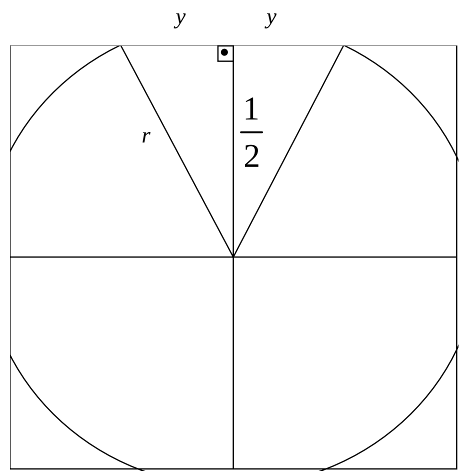


Agora, vamos tentar localizar os vértices do quadrado de lado $\ell > \frac{3\sqrt{2}}{4}$ em S. Note que cada um dos quatro vértices deve pertencer a uma das regiões de I a VIII. Suponhamos, sem perda de generalidade, que dois vértices opostos do quadrado estão contidos nas regiões I e, conseqüentemente, II, já que vértices opostos do quadrado são diametralmente opostos em S.

Considere o paralelepípedo de menores dimensões que contém as regiões I e, digamos, III. Sejam x, x e 1 as suas dimensões. Vamos provar que dois pontos no interior desse paralelepípedo estão a uma distância menor que $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.



Primeiro, considere uma face do cubo e sua interseção com a esfera. A partir da figura a seguir, podemos concluir que o raio da esfera é $\sqrt{y^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{y^2+\frac{1}{2}}$. Como o raio da esfera é maior que $\frac{3\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{4},\ y^2+\frac{1}{2}>\left(\frac{3}{4}\right)^2 \Leftrightarrow y>\frac{1}{4}$. Conseqüentemente, $x=\frac{1}{2}-y<\frac{1}{4}$.



A diagonal do paralelepípedo mede $\sqrt{x^2+x^2+1^2}<\sqrt{2\cdot\frac{1}{16}+1}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$ e, portanto, dois vértices do quadrado não podem estar contidos em I e III. Como um dos vértices pertence a I, não pode existir vértice do quadrado em III e, analogamente, em IV e V. Da mesma forma, lembrando que um dos vértices do quadrado está em II, não pode haver vértices do quadrado em VI, VII e VIII. Mas então não sobraram regiões para os outros dois vértices do quadrado, absurdo.

Deste modo, o maior lado de um quadrado contido no cubo unitário é $\ell=\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

PROBLEMA 4: SOLUÇÃO DE GABRIEL TAVARES BUJOKAS (SÃO PAULO – SP)

Separe as pilhas em 3 grupos, 2 de 3 pilhas e 1 de 2 pilhas, e faça todas as possibilidades dentro dos grupos. Faremos $\binom{3}{2}+\binom{3}{2}+\binom{2}{2}=7$ tentativas.

Como são 3 grupos e 4 baterias boas, um grupo terá 2 baterias boas, e em algum momento serão testadas juntas.

Suponha que seja possível com apenas 6 tentativas. Considere o grafo com 8 vértices representando as 8 baterias e as arestas $\{i, j\}$ representando que a bateria i e a j não foram testadas juntas. O grafo tem $\binom{8}{2} - 6 = 22$ arestas.

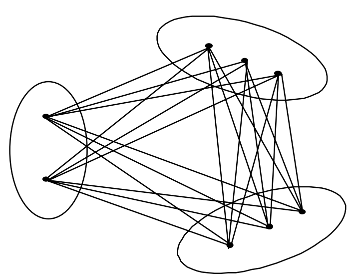
Por Turán, ele tem um K_4. De fato, o máximo de arestas sem K_4 é $\binom{8}{2} - \binom{3}{2} - \binom{3}{2} - \binom{2}{2} = 21$.

Se as 4 baterias carregadas forem as respectivas aos vértices do K_4, temos que nunca duas delas foram testadas juntas, logo o algoritmo com 6 tentativas falha nesta situação.

Resposta: Com 7 tentativas é possível.

Observação: o grafo completo de n vértices (também conhecido como *n-clique*), notado por K_n, é um grafo em que todo par de vértices é ligado. O *teorema de Túran* diz que, fixado o número de vértices n, o grafo que não contém um K_r com a maior quantidade possível de arestas é o grafo $(r - 1)$-partido completo com classes de vértices as mais distribuídas possíveis. Esse grafo é obtido da seguinte forma: divida os vértices em $r - 1$ conjuntos, de modo que a diferença entre as quantidades de vértices nos conjuntos seja no máximo 1; em seguida, ligue todo par de vértices que **não estão** no mesmo conjunto.

Na aplicação do problema 4, Gabriel dividiu os 8 vértices em três grupos com 3, 3 e 2 vértices. Daí a quantidade de arestas máxima ser $\binom{8}{2} - \binom{3}{2} - \binom{3}{2} - \binom{2}{2} = 21$.



Aliás, a resolução de Gabriel também resolve uma generalização do problema, no qual há m baterias funcionando e n baterias descarregadas. Tente pensar nesse problema!

PROBLEMA 5: SOLUÇÃO DE LEANDRO FARIAS MAIA (FORTALEZA – CE)

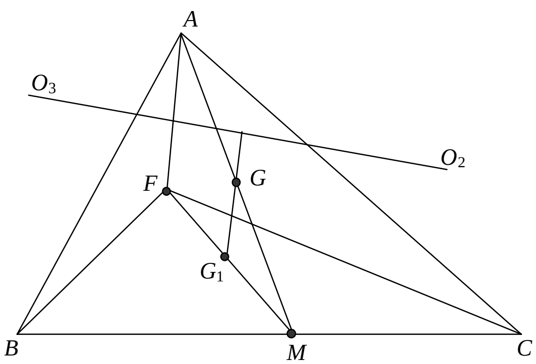
Construa um triângulo equilátero BXC, externo a ABC. O ponto O_1 é o circuncentro do ΔBFC e também de ΔBXC.

G é o baricentro do ΔABC.

Temos: $\frac{AG}{GM} = 2 = \frac{XO_1}{O_1M} \Rightarrow O_1G \,//\, XF$. Mas: $O_3A = O_3F$ e $O_2A = O_2F$

$\Rightarrow AF \perp O_2O_3 \Rightarrow O_1G \perp O_2O_3$.

Analogamente temos: $O_2G \perp O_1O_3$ e $O_3G \perp O_1O_2 \Rightarrow G$ é o ortocentro do $\Delta O_1O_2O_3$.



Sendo G_1 o baricentro do ΔFBC temos: $\frac{FG_1}{G_1M} = 2 = \frac{AG}{GM} \Rightarrow G_1G \,//\, AF$

$\Rightarrow G_1G \perp O_2O_3 \Rightarrow$ como G é o ortocentro de $\Delta O_1O_2O_3$, então G_1 está na altura relativa a O_2O_3. Portanto, O_1G_1, O_2G_2 e O_3G_3 são concorrentes em G (seu ortocentro).

PROBLEMA 6: SOLUÇÃO DE GABRIEL TAVARES BUJOKAS (SÃO PAULO – SP)

Lema: Seja p primo e a, b, r, α inteiros, $a > 0$, $\alpha > 0$. Então existe $x > 0$ tal que

$$\left| \begin{array}{l} x \equiv r \pmod{p-1} \\ a^x + x \equiv b \pmod{p^\alpha} \end{array} \right.$$

Demonstração: Indução em α. Para $\alpha = 1$ (Base):

Se $p \mid a$, então obtemos $\left| \begin{array}{l} x \equiv r \pmod{p-1} \\ x \equiv b \pmod{p} \end{array} \right.$, que tem solução pelo teorema chinês dos restos.

Se $p \nmid a$; $x = (p-1)(a^r - b + r + l \cdot c) + r$; com l tal que $x > 0$.

De fato, $x \equiv r \pmod{p-1}$ e

$$a^x + x \underset{p}{\equiv} a^r \left(a^{p-1}\right)^{\left(a^r - b + r + l\cdot c\right)} + (p-1)\left(a^r - b + r + l\cdot c\right) + r \underset{p}{\equiv} a^r - a^r + b - r - l\cdot c + r \underset{p}{\equiv} b.$$

Passo: Da hipótese, existe x_0 tal que $a^{x_0} + x_0 = b + t\cdot p^\alpha$ e $x_0 \equiv r \pmod{p-1}$.

Tomando $x_1 = x_0 + (p-1)p^\alpha \cdot t$: $x_1 \underset{p-1}{\equiv} x_0 \underset{p-1}{\equiv} r$ e

$$a^{x_1} + x_1 \underset{p^{\alpha+1}}{\equiv} a^{x_0}\cdot\left(a^{(p-1)p^\alpha}\right)^t + x_0 + (p-1)p^\alpha\cdot t \underset{p^{\alpha+1}}{\equiv} a^{x_0} + x_0 - p^\alpha\cdot t = b$$

Isso termina a demonstração do lema.

Seja $c = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n};\ p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ a fatoração em primos de c.

Vamos mostrar por indução em n que $\exists x$ tal que $a^x + x \equiv b \pmod{c_n}$, onde $c_i = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_i^{\alpha_i}$.

Base: $n = 1$: $a^x + x \equiv b\left(\operatorname{mod} p_1^{\alpha_1}\right)$. Caso especial do lema.

Passo: Se $\exists x_i$ tal que $a^{x_i} + x_i \equiv b\left(\operatorname{mod} c_i\right)$, pelo lema existe x tal que

$$\begin{cases} x \equiv x_i \pmod{p_{i+1}-1} \\ a^x + x \equiv b \pmod{p_{i+1}^{\alpha_{i+1}}} \end{cases}$$

Pelo teorema chinês dos restos $\exists x_{i+1}$ tal que

$$\begin{cases} x_{i+1} \equiv x_i \quad \left(\operatorname{mod}\ \operatorname{mmc}(p_{i+1}-1; c_i; \varphi(c_i))\right) \\ x_{i+1} \equiv x \pmod{p_{i+1}^{\alpha_{i+1}}} \end{cases}$$

Observe que $\operatorname{mdc}\left(p_{i+1}^{\alpha_{i+1}}, \operatorname{mmc}(p_{i+1}-1; c_i; \varphi(c_i))\right) = 1$ pois p_{i+1} é maior que todos os fatores primos de c_i e, conseqüentemente, de $\varphi(c_i)$.

Logo $x_{i+1} \equiv x_i \equiv x \pmod{p_{i+1}-1}$ e $x_{i+1} \equiv x \pmod{p_{i+1}^{\alpha_{i+1}}} \Rightarrow$

$$x_{i+1} \equiv x \pmod{(p_{i+1}-1)p_{i+1}^{\alpha_{i+1}}}, \text{ ou seja, } x_{i+1} = x + p_{i+1}^{\alpha_{i+1}}(p_{i+1}-1)l'$$

Assim, $a^{x_{i+1}} + x_{i+1} \underset{p_{i+1}^{\alpha_{i+1}}}{\equiv} a^{x + p_{i+1}^{\alpha_{i+1}}(p_{i+1}-1)\cdot l'} + x \underset{p_{i+1}^{\alpha_{i+1}}}{\equiv} a^x + x \underset{p_{i+1}^{\alpha_{i+1}}}{\equiv} b$ e

$a^{x_{i+1}} + x_{i+1} \underset{c_i}{\equiv} a^{x_i + \varphi(c_i)\cdot l} + x_i + c_i\cdot k \underset{c_i}{\equiv} a^{x_i} + x_i \underset{c_i}{\equiv} b$ onde $\varphi(c_i)\cdot l = k\cdot c_i = x_{i+1} - x_i$.

Portanto $a^{x_{i+1}} + x_{i+1} \underset{p_{i+1}^{\alpha_{i+1}}\cdot c_i}{\equiv} b \Leftrightarrow a^{x_{i+1}} + x_{i+1} \underset{c_{i+1}}{\equiv} b.$

Em especial, $a^{x_n} + x_n \underset{c_n}{\equiv} b \Leftrightarrow a^{x_n} + x_n \underset{c}{\equiv} b$.

XXVII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase – Nível Universitário

PROBLEMA 1

Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, sendo a, b e c inteiros. Sabe-se que $f(1) = f(-1) = 0$.
As retas tangentes ao gráfico de f nos pontos $A = (-1; 0)$ e $B = (1; 0)$ cortam-se em C. Calcule a área do triângulo ABC, sabendo-se que tal área é inteira.

PROBLEMA 2

Calcule a integral: $\int_0^{\pi/4} \ln(1+tgx)dx$

PROBLEMA 3

Determine o maior valor possível para o volume de um tetraedro inscrito no elipsóide de equação $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{25}=1$.

PROBLEMA 4

Sejam A e B matrizes reais quadradas de mesma dimensão tais que, para todo inteiro positivo k, $(A+B)^k=A^k+B^k$. Prove que se A é invertível então B é a matriz nula.

PROBLEMA 5

Determine todos os valores reais de α para os quais a matriz $A=(a_{ij})_{n\times n}$ definida por $a_{ij}=\cos((i-1)\cdot j\alpha)$, para $1\le i, j\le n$, tem determinante nulo.

PROBLEMA 6

Prove que existem pelo menos 2005 potências 27-ésimas distintas (isto é, números da forma n^{27}, com n inteiro positivo), todas com exatamente 2005 algarismos, tais que qualquer uma pode ser obtida de qualquer outra a partir de uma permutação de seus algarismos.

XXVII Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Primeira Fase

Soluções Nível Universitário

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

Pelo enunciado, temos
$f(x) = (x - 1)(x + 1)(x - c) = x^3 - cx^2 - x + c$, $f'(x) = 3x^2 - 2cx - 1$, donde $f'(-1) = 2(1 + c)$ e
$f'(1) = 2(1 - c)$.
Assim, as equações das retas AC e BC são, respectivamente,
$y = 2(1 + c)(x + 1)$ e $y = 2(1- c)(x - 1)$.
Igualando para obter as coordenadas de C, temos
$(1 + c)(x + 1) = (1- c)(x - 1)$
$x = -1/c$
$y = 2(c + 1)(c - 1)/c$
Assim a área pedida é $S = |2(c + 1)(c - 1)/c|$, pois o triângulo ABC tem base $AB = 2$ e altura $|y| = |2(c+1)(c-1)/c|$.
Como c e a área S são inteiros, temos $c \mid 2(c + 1)(c - 1)$.
Mas $(c + 1)$ e $(c - 1)$ são primos com c, donde $c \mid 2$.
Assim $c = \pm 1$ ou $c = \pm 2$.
Os casos $c = \pm 1$ dão $S = 0$, um triângulo degenerado.
Os casos $c = \pm 2$ dão $S = 3$.
O valor da área é, portanto, igual a 3.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:

Temos $\ln(1+tgx) = \ln\left(1+\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) = \ln\left(\dfrac{\operatorname{sen} x+\cos x}{\cos x}\right)$.

Entretanto, $\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen} x \cos\dfrac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x)$, e logo

$\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2}\,\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Assim, $\ln(1+tgx) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{2}\,\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos x}\right) = \dfrac{\ln 2}{2} + \ln\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) - \ln\cos x$, donde

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1+tgx)\,dx = \frac{\pi\cdot\ln 2}{8} + \int_0^{\pi/4} \ln\ \text{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx - \int_0^{\pi/4} \ln\ \cos x\ dx.$$

Agora, $\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$, donde

$$\int_0^{\pi/4} \ln\ \text{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx = \int_0^{\pi/4} \ln\ \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)dx = \int_0^{\pi/4} \ln\ \cos y\ dy$$

(fazendo a substituição $y = \frac{\pi}{4} - x$), donde $\int_0^{\pi/4} \ln(1+tgx)\,dx = \frac{\pi\cdot\ln 2}{8}$.

SOLUÇÃO ALTERNATIVA DO PROBLEMA 2:

Seja $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+tgx)dx$; faça $u = \frac{\pi}{4} - x,\ du = -dx.$

Então $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln\left(1+tg\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\right)(-du) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{1-tgu}{1+tgu}\right)du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+tgu}\right)du$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2du - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+tgu)du = \frac{\pi\cdot\ln 2}{4} - I \Rightarrow 2I = \frac{\pi\cdot\ln 2}{4} \Rightarrow I = \frac{\pi\cdot\ln 2}{8}.$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

LEMA: O tetraedro de maior volume inscrito na esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ é o tetraedro regular. Seus vértices podem ser tomados como $(\pm c,\ \pm c, \pm c)$ com um número par de sinais – onde $c = \sqrt{3}/3$. Sua aresta é $a = 2\sqrt{6}/3$ e seu volume é V $= 8\sqrt{3}/27$.

O elipsóide do problema é obtido a partir da esfera unitária aplicando a transformação linear

$T = diag(3,4,5) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Tetraedros inscritos na esfera são levados em tetraedros inscritos no elipsóide multiplicando o volume por |det (T)| = 60. Assim um tetraedro de volume máximo é $(\pm 3c, \pm 4c, \pm 5c)$, com um número par de sinais –, de volume $160\sqrt{3}/9$.

Demonstração do LEMA:

A única parte não trivial é a de provar que um tetraedro de volume máximo deve ser regular. Vamos provar que todas as faces de um tetraedro de volume máximo são triângulos equiláteros. Para isso vamos fixar o vértice V_0 e variar os vértices V_1, V_2, V_3 restritos ao círculo definido por estes pontos. Ora, com este tipo de mudança a altura do tetraedro não muda, donde maximizamos o volume maximizando a área do triângulo V_1, V_2, V_3. É um fato sabido e de fácil demonstração que o triângulo de área máxima inscrito em um círculo dado é o equilátero.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:

Temos, de $A^2+B^2=(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$ que $AB+BA=0$.

Agora,

$A^3+B^3=(A+B)^3=(A+B)(A+B)^2=(A+B)(A^2+B^2)=A^3+AB^2+BA^2+B^3$,

donde

$AB^2+BA^2=0.$ Como $BA=-AB,\ 0=AB^2+BA^2=AB^2-ABA=A(B^2-BA)$ e, como A é invertível, $B^2-BA=0.$

Temos, também

$A^3+B^3=(A+B)^3=(A+B)^2(A+B)=(A^2+B^2)(A+B)=A^3+A^2B+B^2A+B^3$,

donde $A^2B+B^2A=0.$ Como $B^2=BA,$ segue que $A^2B+BA^2=0,$ e, como $BA=-AB,$ obtemos $0=A^2B+BA^2=A^2B-ABA=A(AB-BA),$ donde $AB=BA$, pois A é invertível.

Finalmente, de $AB+BA=0$, segue que $2AB=0,$ donde, como A é invertível, devemos ter $B=0$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5:

Sabemos que para todo natural k existe um polinômio $P_k(t)=c_{k,k}t^k+\ldots+c_{k,1}t+c_{k,0}$

de grau k tal que $\cos(ka)=P_k(\cos a)$ para todo a.

Por exemplo, $P_0=1, P_1=t, P_2=2t^2-1$

Temos portanto

$a_{ij}=P_{i-1}(\cos(j\alpha))=\sum_{0\le k<i} c_{i-1,k}(\cos(j\alpha))^k$

Podemos agora, para $i>1$, subtrair $c_{i-1,0}$ vezes a primeira linha da i-ésima linha sem alterar o determinante obtendo assim que, para $i>1$, $\tilde{a}_{ij}=\sum_{0<k<i} c_{i-1,k}\cdot(\cos(j\alpha))^k$.

Para $i > 2$, subtraímos $c_{i-1,1}$ vezes a segunda linha da i-ésima linha, ainda sem alterar o determinante.

Repetindo o processo, vemos que det(A) = det(B) onde $b_{ij} = c_{i-1,i-1}(\cos(j\alpha))^{i-1}$

Assim, a menos dos fatores $c_{i-1,i-1}$, B é uma matriz de Vandermonde, e seu determinante é igual a

$$\prod_{i\le n} c_{i-1,i-1} \cdot \prod_{j_0<j_1} (\cos(j_1 \cdot \alpha) - (\cos(j_0 \cdot \alpha)) = (-2)^{n(n-1)/2} \cdot \prod_{i\le n} c_{i-1,i-1} \cdot \prod_{1<j} \left(sen\left(\frac{(j_1 + j_0)\alpha}{2} \right) \right) \cdot \left(sen\left(\frac{(j_1 - j_0)\alpha}{2} \right) \right).$$

Assim det(A) = 0 se e somente se existem $1 \le j_0 < j_1 \le n$ tais que $sen\left(\frac{(j_1 + j_0)\alpha}{2} \right) = 0$ ou $sen\left(\frac{(j_1 - j_0)\alpha}{2} \right)$.

Mas isto ocorre se e somente se $(j_1 \pm j_0)\alpha = 2k\pi$, k inteiro.

Ou seja, det(A) = 0 se e somente se $\alpha = 2k\pi/(j_1 \pm j_0)$ para alguma escolha de $1 \le j_0 < j_1 \le n$

Falta verificar quais os valores possíveis de $j_1 \pm j_0$.

Para $n \le 1$ o problema é trivial (det(A) = 1), donde não há nenhum α com essa propriedade.

Para $n = 2$, os únicos valores possíveis de $j_1 \pm j_0$ são 1 e 3,

donde α deve ser da forma $\frac{2k\pi}{3}$, com k inteiro

Para $n > 2$, $j_1 \pm j_0$ assume todos os valores inteiros positivos m até $2n-1$, donde α deve ser da forma $2k\pi/m$, com $m \le 2n-1$ e k inteiro.

Observação:

Temos ainda $c_{k,k} = 2^{k-1}$ para $k > 1$

donde $\prod_{i\le n} c_{i-1,i-1} = 2^{(n-1)(n-2)/2}$ e

$$\det(A) = (-1)^{n(n-1)/2} \cdot 2^{(n-1)^2} \cdot \prod_{j_1<j_0} \left(sen\left(\frac{(j_1 + j_0)\alpha}{2} \right) \cdot sen\left(\frac{(j_1 - j_0)\alpha}{2} \right) \right).$$

Demonstração da afirmação cos(*ka*) = P_k(cos(a)) [Não vale pontos extras]:
Temos $\cos((k+1)a)+\cos((k-1)a)=2\cos(ka)\cdot\cos a,$ donde, assumindo que o resultado vale para *k* – 1 e para *k*, $\cos((k+1)a)=2\cos a\cdot P_k(\cos a)-P_{k-1}(\cos a),$ o que prova o resultado fazendo $P_{k+1}(x)=2xP_k(x)-P_{k-1}(x),$ para $k\ge 1,$ com $P_0(x)=1$ e $P_1(x)=x.$ Note que, sabendo que o coeficiente líder $c_{k,k}$ de $P_k(x)$ é $2^{k-1},$ segue imediatamente que o coeficiente líder $c_{k+1,k+1}$ de $P_{k+1}(x)$ é $2\cdot 2^{k-1}=2^k=2^{(k+1)-1}.$

06. Vamos estimar inicialmente a quantidade de tipos de números de 2005 algarismos a menos de uma permutação de seus algarismos. Um tal tipo de números está determinado pelas quantidades $x_0,x_1,...,x_9$ de algarismos iguais a 0, 1, …, 9, respectivamente; devemos ter $x_0+x_1+...+x_9=2005.$
Assim, a quantidade desses tipos de números é, no máximo, o número de soluções de $x_0+x_1+...+x_9=2005,$ com $x_i\ge 0$ para $0\le i\le 9,$ que é

$$\binom{2005+9}{9}=\binom{2014}{9}<2014^9<(10^4)^9=10^{36}.$$

Por outro lado n^{27} tem 2005 algarismos se, e somente se, $10^{2004}\le n^{27}<10^{2005}\Leftrightarrow 10^{\frac{2004}{27}}\le n<10^{\frac{2005}{27}},$ donde há pelo menos $10^{\frac{2005}{27}}-10^{\frac{2004}{27}}$ naturais *n* tais que n^{27} tem 2005 algarismos. Entretanto,

$$10^{\frac{2005}{27}}-10^{\frac{2004}{27}}=10^{\frac{2004}{27}}\left(10^{\frac{1}{27}}-1\right)=10^{\frac{2004}{27}}\left(e^{\frac{\ln 10}{27}}-1\right)>10^{\frac{2004}{27}}\cdot\frac{\ln 10}{27}>10^{74}\cdot\frac{\ln 10}{27}>10^{72}\ge 2005\cdot 10^{36},$$

donde, pelo princípio da casa dos pombos, há pelo menos 2005 naturais *n* tais que n^{27} tem 2005 algarismos e esses números n^{27} são todos do mesmo tipo (seus algarismos são os mesmos a menos de uma permutação).

Nota: É possível estimar $10^{\frac{1}{27}}-1$ sem usar a desigualdade $e^x-1\ge x.$ Por exemplo:

$$10^{\frac{1}{27}}>10^{\frac{1}{32}}=\left(10^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{16}}>3^{\frac{1}{16}}>(1,7)^{\frac{1}{8}}>(1,3)^{\frac{1}{4}}>(1,12)^{\frac{1}{2}}>1,05,\text{ donde}$$

$$10^{\frac{1}{27}}-1>0,05>\frac{1}{100}\text{ (que foi o que usamos).}$$

XXVII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
SEGUNDA FASE – NÍVEL UNIVERSITÁRIO
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1:
Determine, em função de *n*, o número de possíveis valores para o determinante de *A*, dado que *A* é uma matriz real $n \times n$ tal que $A^3 - A^2 - 3A + 2I = 0$, onde *I* representa a matriz identidade $n \times n$, e 0 representa a matriz nula $n \times n$.

PROBLEMA 2:
Sejam *f* e *g* funções contínuas distintas de [0, 1] em $(0, +\infty)$ tais que $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx$. Para $n \geq 0$, seja $y_n = \int_0^1 \frac{f(x)^{n+1}}{g(x)^n} dx$.
Prove que $(y_n)_{n\geq 0}$ é uma seqüência crescente e divergente.

PROBLEMA 3:
Sejam $v_1, v_2, ..., v_n$ vetores em $\mathbb{R}^2$ tais que $|v_i| \leq 1$ para $1 \leq i \leq n$ e $\sum_{i=1}^{n} v_i = 0$. Prove que existe uma permutação σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $\left|\sum_{j=1}^{k} v_{\sigma(j)}\right| \leq \sqrt{5}$ para qualquer *k* com $1 \leq k \leq n$.
Obs. Se $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2, |v| = \sqrt{x^2 + y^2}$ denota a norma euclidiana de *v*.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4:
Considere a seqüência $(a_n)_{n\geq 1}$ dada por $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^{2005}}, \forall n \geq 1$.
Prove que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot a_n}$ converge.

PROBLEMA 5:

Prove que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}=\int_0^1 x^{-x}dx.$

PROBLEMA 6:

Prove que para quaisquer naturais $0\le i_1<i_2<\ldots<i_k$ e $0\le j_1<j_2<\ldots<j_k$, a matriz $A=(a_{rs})_{1\le r,s\le k}$ dada por $a_{rs}=\binom{i_r+j_s}{i_r}=\frac{(i_r+j_s)!}{i_r!\,j_s!}$ $(1\le r,s\le k)$ é invertível.

SOLUÇÕES

PROBLEMA 1:

SOLUÇÃO DE MOYSES AFONSO ASSAD COHEN (RIO DE JANEIRO – RJ)

Podemos escrever $A^3-A^2-3A+2I=0$ como $(A-2I)(A^2+A-I)=0.$ Podemos concluir então que os possíveis autovalores de A são $\lambda_1=2,\ \lambda_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_3=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Seja d_i a multiplicidade do autovalor λ_i. Temos que o determinante de A é da forma: $2^{d_1}\cdot\lambda_2^{d_2}\cdot\lambda_3^{d_3}$, onde $d_1+d_2+d_3=n.$ Se provarmos que não existem duas combinações (d_1,d_2,d_3) e (e_1,e_2,e_3) tais que $2^{d_1}\cdot\lambda_2^{d_2}\cdot\lambda_3^{d_3}=2^{e_1}\cdot\lambda_2^{e_2}\cdot\lambda_3^{e_3}$, então o número de possíveis valores para o determinante, será o número de maneiras de escolher d_1,d_2,d_3 satisfazendo $d_i>0$ e $d_1+d_2+d_3=n.$ E o número de escolher esses d_i's

é $\frac{(n+2)!}{n!2!}=\frac{\cancel{n!}(n+2)(n+1)}{\cancel{n!}2}=\frac{n^2+3n+2}{2}.$

Vamos provar então que $2^{d_1}\cdot\lambda_2^{d_2}\cdot\lambda_3^{d_3}=2^{e_1}\cdot\lambda_2^{e_2}\cdot\lambda_3^{e_3}$ se, e somente se, $d_1=e_1$, $d_2=e_2$ e $d_3=e_3$.

$2^{d_1}\cdot\lambda_2^{d_2}\cdot\lambda_3^{d_3}=2^{e_1}\cdot\lambda_2^{e_2}\cdot\lambda_3^{e_3},\ \ d_1+d_2+d_3=e_1+e_2+e_3=n$

$\Leftrightarrow 2^{d_1}\cdot\lambda_2^{d_2}\cdot\lambda_1^{n-d_1-d_2}=2^{e_1}\cdot\lambda_2^{e_2}\cdot\lambda_3^{n-e_1-e_2},$

Podemos usar também que $\lambda_2\cdot\lambda_3=-1,$

(pois $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{+1+\sqrt{5}-\sqrt{5}-5}{4}=\frac{-4}{4}=-1.$)

$$\Leftrightarrow 2^{d_1}\cdot\left(-\frac{1}{\lambda_3}\right)^{d_2}\cdot\lambda_3^{n-d_1-d_2}=2^{e_1}\cdot\left(-\frac{1}{\lambda_3}\right)^{e_2}\cdot\lambda_3^{n-e_1-e_2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{d_1}\cdot(-1)^{d_2}\cdot\lambda_3^{n-d_1-2d_2}=2^{e_1}\cdot(-1)^{e_2}\cdot\lambda_3^{n-e_1-2e_2}\Leftrightarrow 2^{d_1-e_1}=(-1)^{e_2-d_2}\cdot\lambda_3^{(d_1-e_1)+2(d_2-e_2)},$$ e

como não podemos escrever $\left(-1+\sqrt{5}\right)^{I}$, onde I é um inteiro maior que 1, como uma potência de 2, temos que a igualdade é verdadeira se, e somente se, os expoentes são zero. Ou seja

$\begin{cases} d_1-e_1=0\Rightarrow d_1=e_1 \\ e_2-d_2=0\Rightarrow d_2=e_2 \end{cases}$ e portanto $d_3=e_3$.

PROBLEMA 2:
SOLUÇÃO DE HUMBERTO SILVA NAVES (S.J. DOS CAMPOS – SP)

Sejam:

$$u_n=y_{n+1}-y_n=\int_0^1\frac{f(x)^{n+1}}{g(x)^{n+1}}\left[f(x)-g(x)\right]dx$$

e

$$v_n=u_{n+1}-u_n=\int_0^1\frac{f(x)^{n+1}}{g(x)^{n+2}}\left(f(x)-g(x)\right)^2dx$$

Sabemos que $v_n>0,\forall n\in\mathbb{N},$ pois $\dfrac{f(x)^{n+1}}{g(x)^{n+2}}\left(f(x)-g(x)\right)^2>0,$

Para $x\in[0;1]$ e como f e g são contínuas, temos:

$v_n=\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)^{n+1}}{g(x)^{n+2}}\left(f(x)-g(x)\right)^2dx>0,\forall n\in\mathbb{N},$ logo $(u_n)_{n\geq 0}$ é crescente.

Vamos agora provar que $u_0>0$:

$$u_0=u_0-\int_0^1\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_0^1\frac{f(x)}{g(x)}\left(f(x)-g(x)\right)dx-\int_0^1\left[f(x)-g(x)\right]dx=$$

$=\displaystyle\int_0^1\frac{\left(f(x)-g(x)\right)^2}{g(x)}\,dx>0\Rightarrow u_n\geq u_o>0,\forall n\in\mathbb{N},$ pois $(u_n)_{u>0}$ é crescente.

Portanto claramente $y_n\geq y_o+n\cdot u_o,\forall n\geq 0,$ e $(y_n)_{n\geq 0}$ é crescente e divergente.

PROBLEMA 3: SOLUÇÃO DA BANCA

Vamos usar a solução da versão em *R* do problema:

se $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ são números reais com $|\alpha_i| \le 1, \forall i \le m$ e $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 0$ então existe uma permutação τ de {1, 2,…,*m*} tal que $\alpha_{\tau(i)}$ tenha sinal contrário a $\sum_{j<i} \alpha_{\tau(j)}$ (i. e., com $\alpha_{\tau(i)} \cdot \sum_{j<i} \alpha_{\tau(j)} \le 0$).

Seja *I* = {1, 2,…,*n*}. Escolhemos um conjunto $X \subset I$ tal que $\left|\sum_{i \in X} v_i\right|$ seja o maior possível. Podemos supor (rodando os eixos coordenados, se necessário) que $\sum_{i \in X} v_i$ é um vetor da forma (0, *y*), com *y* > 0. Sejam $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ as projeções na primeira e na segunda coordenadas, respectivamente. Usando a versão em $\mathbb{R}$ do problema para reordenar os elementos de *X* e de *I**X*, podemos supor que *X* = {1, 2,…,*k*} para um certo *k* > *n*, $\left|\pi_1\left(\sum_{i=1}^{r} v_i\right)\right| \le 1,\ \forall r \le k$ e $\left|\pi_1\left(\sum_{j=k+1}^{k+1} v_j\right)\right| \le 1, \forall s \le n-k.$

Note agora que $\pi_2(v_i) \ge 0,\ \forall i \in X$ (e $\pi_2(v_i) \le 0, \forall i \in I \setminus X)$, pois, se $j \in X$ e $\pi_2(v_j) < 0$, teríamos $\left|\sum_{i \in X\setminus\{j\}} v_i\right| > \left|\sum_{i \in X} v_i\right|$, absurdo. Podemos então obter (como na versão em $\mathbb{R}$ do problema) uma permutação σ de *I* que intercala os índices em *X* e em *I**X* , preservando a ordem dos índices em *X* e em *I**X*, de modo que $\left|\pi_2\left(\sum_{i=1}^{m} v_{\sigma(i)}\right)\right| \le 1, \forall m \le n.$ Como os índices em *X* e em *I**X* aparecem em ordem, teremos $\left|\pi_1\left(\sum_{i=1}^{m} v_{\sigma(i)}\right)\right| \le \left|\pi_1\left(\sum_{i \le i \le m} v_{\sigma(i)}\right)\right| + \left|\pi_1\left(\sum_{\substack{i \le i \le m \\ \sigma(i) \in I\setminus X}} v_{\sigma(i)}\right)\right| \le 1+1=2, \forall m \le n,$ e logo $\left|\sum_{i=1}^{m} \forall_{\sigma(i)}\right| \le \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}, \forall m \le n.$

PROBLEMA 4:
SOLUÇÃO DE DIÊGO VELOSO UCHÔA (RIO DE JANEIRO – RJ)
Primeiro recorde a expansão binomial de Newton:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}\cdot b^k .$$

Agora usando isso verifique as seguintes contas:

$$(a+b)^{2006}=\left(a_n+\frac{1}{(a_n)^{2005}}\right)^{2006}=(a_n)^{2006}+\binom{2006}{1}a_n^{2005}\cdot\frac{1}{(a_n)^{2005}}+\ldots>(a_n)^{2006}+2006.$$

(pois a_n é sempre positivo)
Logo:

$$\begin{array}{l} a_2^{2006}>a_1^{2006}+2006\\ a_3^{2006}>a_2^{2006}+2006\\ \vdots \qquad \vdots\\ (a_{n+1})^{2006}>(a_n)^{2006}+2006.\\ \hline (a_{n+1})^{2006}>(a_1)^{2006}+(2006)\cdot n>(n+1)\end{array}$$

$$\Rightarrow a_{n+1}>(n+1)^{1/2006}\Rightarrow (n+1)a_{n+1}>(n+1)^{1+1/2006}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{(n+1)a_{n+1}}<\frac{1}{(n+1)^{1+1/2006}}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot a_n}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n)^{1+1/2006}}$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ com $\alpha>1$ converge segue que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{na_n}$ também converge.

PROBLEMA 5:
SOLUÇÃO DE LUÍS DANIEL BARBOSA COELHO (RIO DE JANEIRO - RJ)

$$x^{-x}=e^{\ln(x^{-x})}=e^{(-x)\cdot\ln x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n\cdot(\ln x)^n}{n!}\rightarrow\int_0^1 x^{-x}\cdot dx=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n\cdot(\ln x)^n}{n!}\cdot dx$$

devido ao tipo de convergência monótona da série de potências $e^y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}$, podemos fazer troca da integral com o somatório, obtendo:

$$\int_0^1 x^{-x}\cdot dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 x^n\cdot(\ln x)^n\cdot dx$$

denotemos por $I_n^{(p)}$ a seguinte integral: $I_n^{(p)}=\int_0^1 x^p(\ln x)^n\cdot dx,$ para todo p inteiro não negativo.

Integrando por partes: $u=(\ln x)^n \to du=\frac{n}{x}\cdot(\ln x)^{n-1}\cdot dx; dv=x^p\cdot dx\to v=\frac{x^{p+1}}{p+1}$

$$\to I_n^{(p)}=\frac{x^{p+1}}{p+1}\cdot(\ln x)^n\cdot dx\Big|_0^1-\int_0^1\frac{n}{(p+1)}\cdot x^p\cdot(\ln x)^{n-1}\cdot dx=\frac{(1)^{p+1}}{p+1}\cdot(\ln 1)^n-$$

$$-\lim_{x\to0^+}\frac{x^{p+1}}{p+1}\cdot(\ln x)^n-\frac{n}{p+1}\cdot I_{n-1}^{(p)}=-\frac{n}{p+1}\cdot I_{n-1}^{(p)},\ \text{pois}\ \lim_{x\to0^+}x^{p+1}\cdot(\ln x)^n=0.$$

$$I_n^{(p)}=\left(\frac{-n}{p+1}\right)I_{n-1}^{(p)}$$

$$\vdots$$

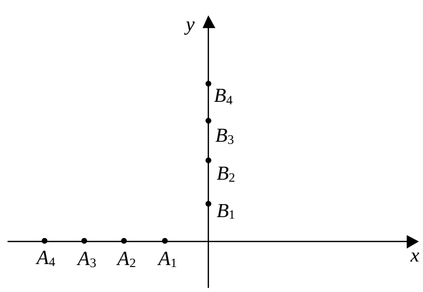
$$I_1^{(p)}=\left(\frac{-1}{p+1}\right)I_0^{(p)}$$

$$I_n^{(p)}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{(p+1)^n}\cdot I_0^{(p)}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{(p+1)^n}\cdot\int_0^1x^p\cdot dx=\frac{(-1)^n\cdot n!}{(p+1)^{n+1}},\text{tomando } p=n \text{ temos:}$$

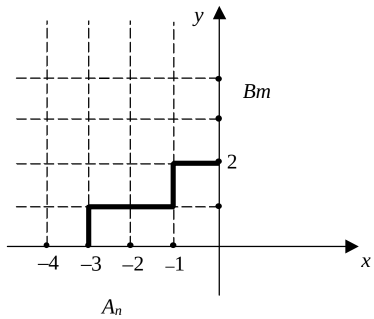
$$\int_0^1x^{-x}\cdot dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\left[\frac{(-1)^n\cdot n!}{(n+1)^{n+1}}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}.$$

PROBLEMA 6:
SOLUÇÃO DE HUMBERTO SILVA NAVES (S.J. DOS CAMPOS – SP)

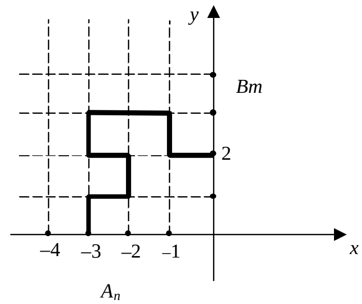
Considere os seguintes pontos no reticulado: $A_n=(-i_n;0)$ e $B_n=(0;j_n)$, onde $1\le n\le k$.



Um caminho ligando A_n com B_m é um caminho no reticulado partindo de A_n e chegando em B_m que só pode ir para cima ou para a direita. Exemplos:



É caminho!



Não é caminho!

Um fato interessante é que existem $\binom{i_n + j_m}{i_n}$ caminhos ligando A_n com B_m.

Uma rota é uma coleção de k caminhos (de cada A_n parte exatamente um caminho e em cada B_m chega exatamente um caminho) e dizemos que uma rota é bem feita se os caminhos não se cruzam em nenhum ponto do reticulado.

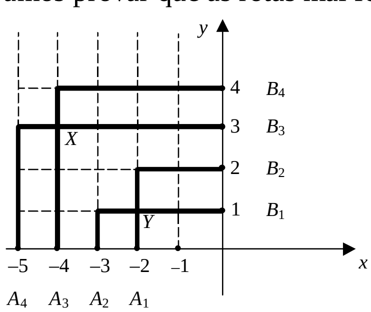
Vamos provar que o número de rotas bem feitas é igual a det(A).

Pela definição de determinante, temos:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{I(\sigma)} \cdot \prod_{n=1}^{k} \binom{i_n + j_{\sigma(n)}}{i_n}.$$

Mas $(-1)^{I(\sigma)} \prod_{n=1}^{k} \binom{i_n + j_{\sigma(n)}}{i_n}$ é exatamente o número de rotas ligando A_n com $B_{\sigma(n)}$, para $1 \le n \le k$, multiplicando pela paridade $I(\sigma)$ da permutação σ.

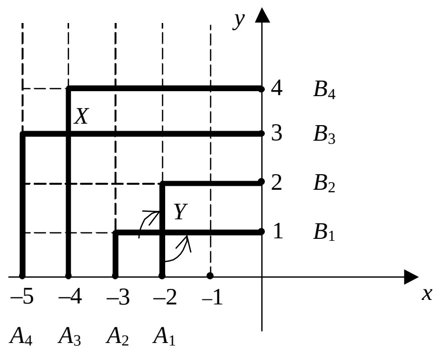
Vamos provar que as rotas mal feitas se cancelam neste somatório:



σ = {(4 ; 4) ; (3 ; 3) ; (2 ; 1) ; (2 ; 2)}

Considere uma rota mal feita R e seja Y o ponto de intersecção com maior coordenada x (se existir mais de um, tome Y cuja coordenada y seja a menor possível).

Vamos trocar os respectivos caminhos que se cruzam em Y (se existir mais de 2 caminhos que se cruzam em Y, troque os caminhos que começam em A_n's de mais maior coordenada x).

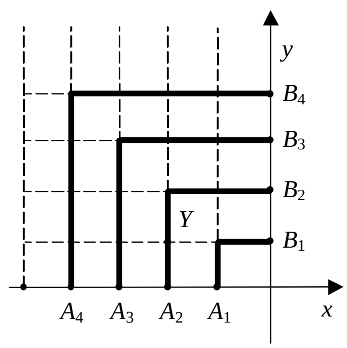


$\tilde{\sigma} = \{(4\,;4)\,;(3\,;3)\,;(2\,;1)\,;(2\,;2)\}$

Assim obtemos uma nova rota mal feita, só que com a paridade de permutação correspondente trocada $(-1)^{I(\tilde{\sigma})} = -(-1)^{I(\sigma)}$

Como a relação entre rotas mal feitas que acabamos de definir é bijetora, então provamos que as rotas mal feitas não contribuem para o somatório, e como uma rota bem feita possui a identidade como permutação associada, provamos que: det (A) = número de rotas bem feitas.

Como $0 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ e $0 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_k$, certamente o número de rotas bem feitas é diferente de 0, pois



é uma rota bem feita.

Errata: O item *b*) do problema No. 112 (Eureka! 23, p.60) foi proposto equivocadamente: ao contrário do que pensávamos, parece não haver soluções simples para ele.
Gostaríamos portanto de manter apenas o item *a*) do problema proposto No. 112. Pedimos desculpas pelos inconvenientes causados.

XXVII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Resultado – Nível 1 (5ª. e 6ª. Séries)

NOME	CIDADE - ESTADO	PRÊMIO
Matheus Barros de Paula	Taubaté – SP	Ouro
Guilherme Vieira Melo	Fortaleza – CE	Ouro
Luis Musso Gualandi	Vitória – ES	Ouro
Rafael Dias da Fonsêca	Arapiraca – AL	Ouro
Rodrigo Rolim Mendes de Alencar	Fortaleza – CE	Ouro
Gustavo Lisbôa Empinotti	Florianópolis – SC	Prata
Iuri Rezende Souza	Mineiros – GO	Prata
Eduardo Cintra Simões	Recife – PE	Prata
João Mendes Vasconcelos	Fortaleza – CE	Prata
Gabriel Lima Guimarães	Vitória – ES	Prata
Jonas Rocha Lima Amaro	Fortaleza – CE	Prata
Bruno Cesar da Silva Guedes	Recife – PE	Prata
Kelve Torres Henrique	Recife – PE	Prata
Igor Rosiello Zenker	São Paulo – SP	Prata
Daniel Lucas Filgueira	Fortaleza – CE	Prata
Cleiton Vilela Figueiredo da Silva	Recife – PE	Prata
Andreza Lais da Silva Nascimento	Recife – PE	Prata
Ivan Seki Hellmeister	São Paulo – SP	Prata
Matheus Henrique Botelho Cordeiro	Curitiba – PR	Bronze
Breno Rocha Comin	Leme – SP	Bronze
Henrique Lopes de Mello	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
Leonardo Henrique Caldeira Pires Ferrari	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
Leonardo Gonçalves Fischer	Fraiburgo – SC	Bronze
Francisco Vagner Dantas Leite Filho	Fortaleza – CE	Bronze
Elder Massahiro Yoshida	São Paulo – SP	Bronze
Alex Lordello Magario	Salvador – BA	Bronze
Rafael Sussumu Yamaguti Miada	Campinas – SP	Bronze
Deborah Barbosa Alves	São Paulo – SP	Bronze
Diogo Silva Freitas	Recife – PE	Bronze
Matheus Barbosa Santos de Miranda	João Pessoa – PB	Bronze
Augusto dos Santos Morgan	S. J. do Rio Pardo – SP	Bronze
André Bandeira Pinheiro	Fortaleza – CE	Bronze
Fernando Fonseca Andrade Oliveira	Belo Horizonte – MG	Bronze
Eduardo F. Freire Neto	Salvador – BA	Menção Honrosa
Wellington Biing Jung Lee	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Mac'simus Alec'sander de Castro Duarte	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Alessandro Macêdo de Araújo	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Camila Miraglia Ribeiro	Curitiba – PR	Menção Honrosa
Douglas Barbosa da Fonsêca	Arapiraca – AL	Menção Honrosa
Pedro Montebello Milani	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Gabriel Ricardo Loecsh Siebiger	Sobradinho – DF	Menção Honrosa
Tiago Yparraguirre Viégas	Niterói – RJ	Menção Honrosa
Rafael de Melo Andrade	Boituba – SP	Menção Honrosa
Priscilla Lie Sato Yamaguti	São Paulo – SP	Menção Honrosa
João Lucas Camelo Sá	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Franciely Juliani Chutti	Itajobi – SP	Menção Honrosa
Frederico Nascimento Dutra	Porto Alegre – RS	Menção Honrosa
Isaac Jerônimo Moreira	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Anne Wang	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Rafael Farias Marinheiro	Recife – PE	Menção Honrosa
Rafael Fernandes Paixão	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Filipe da Gama Martin	Nanuque – MG	Menção Honrosa
Humberto Lopes Tabatinga Neto	Teresina – PI	Menção Honrosa
Gregory Cosac Daher	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Renata Aimi Fukuda	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Fabrício Catani de Freitas	Sorocaba – SP	Menção Honrosa
Bruno Giordano Leite	Recife – PE	Menção Honrosa
Victor Gonçalves Elias	João Pessoa – PB	Menção Honrosa
Letícia Duchein Ferreira	Londrina – PR	Menção Honrosa
Larissa Firakawa Tamashiro	Jundiaí – SP	Menção Honrosa
Douglas Souza Alves Junior	Vassouras – RJ	Menção Honrosa
Lara Guimarães Fernandes Peres	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa

Nível 2 (7^a. e 8^a. Séries)

NOME	CIDADE – ESTADO	PRÊMIO
Henrique Pondé de Oliveira Pinto	Salvador – BA	Ouro
Marcelo Matheus Gary	S. J. do Rio Preto – SP	Ouro
Rafael Tupynambá Dutra	Belo Horizonte – MG	Ouro
Pollyanna Stéfani Borges Freitas	Fortaleza – CE	Ouro
Iuri Souza Ramos Barbosa	Brasília – DF	Ouro
Guilherme Philippe Figueiredo	Fortaleza – CE	Ouro
Marcelo Tadeu de Oliveira Sá	Barreiras – BA	Prata
Marlen Lincoln da Silva	Fortaleza – CE	Prata
Henrique Watanabe	São Paulo – SP	Prata
Grazielly Muniz da Cunha	Fortaleza – CE	Prata
James Jun Hong	São Paulo – SP	Prata
Pedro Pinheiro de Negreiros Bessa	Fortaleza – CE	Prata
Marilia Valeska Costa Medeiros	Fortaleza – CE	Prata
Camilla Matias Morais	Fortaleza – CE	Prata
Márcio Rabello de Freitas	Mesquita – RJ	Prata
Alex Atsushi Takeda	Londrina – PR	Bronze
Renan Lima Novais	Niterói – RJ	Bronze
Rafael Horimoto de Freitas	São Paulo – SP	Bronze
Dielson de Britto Junior	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
Hugo Fonseca Araújo	Juiz de Fora – MG	Bronze
Vitor Mori	São Paulo – SP	Bronze
Cindy Yuchi Tsai	São Paulo – SP	Bronze
Thiago Ribeiro Ramos	Varginha – MG	Bronze
Gabriel Moreira Francisco	Santo André – SP	Bronze
Tales Augusto Gonçalves Alphonse	Paraguaçu Paulista – SP	Bronze
Nathana Alcântara Lima	Fortaleza – CE	Bronze
Illan Feiman Halpern	Itatiaia – RJ	Bronze
Thiago da Silva Pinheiro	São Paulo – SP	Bronze
Júlio Cézar Batista de Souza	Salvador – BA	Bronze
Thiago Ide Sousa	Suzano – SP	Bronze
Danilo Marcolongo Afonso	S. B. do Campo – SP	Bronze
Caio José Fonseca Santos	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Caio Sérgio Parente Silva	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Isabella Amorim Gonçalez	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Ana Luísa de Almeida Losnak	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Yuri Bastos Pereira	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Mateus Sampaio de Mendonça	Belo Horizonte – MG	Menção Honrosa
Alisson de Brito Ninomia	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Alan Eduardo dos Santos Góes	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
José Cabadas D. Neto	Salvador – BA	Menção Honrosa
Marcelo Rafael Silva Rempel	Maringá – PR	Menção Honrosa
Rafael Rabelo de Carvalho	Brasília – DF	Menção Honrosa
Davi Lopes Alves de Medeiros	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Gabriella Fonseca Ribeiro	Betim – MG	Menção Honrosa
Christian Eduardo de Umeki e Saiki	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Marco Antonio Lopes Pedroso	Santa Isabel – SP	Menção Honrosa
Catarina Yu Na Kim	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Rafael Alves da Silva	Teresina – PI	Menção Honrosa
Pedro Henrique Azevedo Damacena	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Renan Henrique Finder	Joinville – SC	Menção Honrosa
Ricardo Bioni Liberalquino	Maceió – AL	Menção Honrosa
Dalen Chen Kuang	Osasco – SP	Menção Honrosa
Izabela Karennina Travizani Maffra	Belo Horizonte – MG	Menção Honrosa
Jennifer Katherine Koshiba Yu	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Felipe Onório da Silva Oliveira	Botucatu – SP	Menção Honrosa

Nível 3 (Ensino Médio)

NOME	CIDADE – ESTADO	PRÊMIO
Gabriel Tavares Bujokas	São Paulo – SP	Ouro
Guilherme Rodrigues Nogueira de Souza	São Paulo – SP	Ouro
Thomás Yoiti Sasaki Hoshina	Rio de Janeiro – RJ	Ouro
Regis Prado Barbosa	Fortaleza – CE	Ouro
Luty Rodrigues Ribeiro	Fortaleza – CE	Ouro
Rafael Mendes de Oliveira	Rio de Janeiro – RJ	Ouro
Cesar Ryudi Kawakami	São Paulo – SP	Prata
Jose Marcos Andrade Ferraro	São Paulo – SP	Prata
José Armando Barbosa Filho	Fortaleza – CE	Prata
Anderson Hoshiko Aiziro	São Paulo – SP	Prata
Leandro Farias Maia	Fortaleza – CE	Prata
André Linhares Rodrigues	Fortaleza – CE	Prata
Levi Máximo Viana	Fortaleza – CE	Prata
Leonardo Ribeiro de Castro Carvalho	São Paulo – SP	Prata
Wilson Camara Marriel	Rio de Janeiro – RJ	Prata
Fabiano Edson Carlos	Fortaleza – CE	Prata
Adenilson Arcanjo de Moura Junior	Fortaleza – CE	Bronze
Edson Augusto Bezerra Lopes	Fortaleza – CE	Bronze
Rodrigo Viana Soares	Fortaleza – CE	Bronze
Eduardo Fischer	Encantado – RS	Bronze
Rafael Sampaio de Rezende	Fortaleza – CE	Bronze
Rafael Montezuma Pinheiro Cabral	Fortaleza – CE	Bronze
Gustavo Sampaio Sousa	Fortaleza – CE	Bronze
Ramon Moreira Nunes	Fortaleza – CE	Bronze
Hector Kenzo Horiuti Kitahara	São Paulo – SP	Bronze
Francisco Tarcísio Guedes Lima Verde Neto	Fortaleza – CE	Bronze
Alexandre Hideki Deguchi Martani	São Paulo – SP	Bronze
Enzo Haruo Hiraoka Moriyama	São Paulo – SP	Bronze
Rafael Morioka Oda	São Paulo – SP	Bronze
André Lucas Ribeiro dos Santos	Pindamonhangaba – SP	Bronze
Michel Faleiros Martins	Campinas – SP	Bronze
Antônio Felipe Cavalcante Carvalho	Fortaleza – CE	Bronze
Rafael Moura e Sucupira	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Artur de Almeida Losnak	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Tiago Porto Barbosa	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Willy George do Amaral Petrenko	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Douglas Bokliang Ang Cunha	S. J. dos Campos – SP	Menção Honrosa
Breno Vieira de Aguiar	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Beatriz Laiate	Sorocaba – SP	Menção Honrosa
Vinicius Gripp Barros Ramos	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Lucio Eiji Assaoka Hossaka	Curitiba – PR	Menção Honrosa
Mateus Oliveira de Figueiredo	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Marcus Edson Barreto Brito	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Flávio Henrique Moura Stakoviak	Belém – PA	Menção Honrosa
Ricardo Turolla Bortolotti	Rio Claro – SP	Menção Honrosa
Pedro Henrique Silva Belisário	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Filipe Alves Tomé	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Frederico de Souza Frydman	Salvador – BA	Menção Honrosa
Heytor Bruno Nobre Pitombeira das Virgens	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Daniel Lopes Alves de Medeiros	Fortaleza – CE	Menção Honrosa

Nível Universitário

NOME	CIDADE – ESTADO	PRÊMIO
Humberto Silva Naves	S. J. dos Campos – SP	Ouro
Bernardo Freitas Paulo da Costa	Rio de Janeiro – RJ	Ouro
Alex Corrêa Abreu	Niterói – RJ	Ouro
Rafael Daigo Hirama	Campinas – SP	Ouro
Diêgo Veloso Uchôa	Teresina – PI	Ouro
Fábio Dias Moreira	Rio de Janeiro – RJ	Ouro
Luís Daniel Barbosa Coelho	Rio de Janeiro – RJ	Prata
Carlos Stein Naves de Brito	S.J. dos Campos – SP	Prata
Yuri Gomes Lima	Fortaleza – CE	Prata
Rafael Marini Silva	Vila Velha – ES	Prata
Murilo Vasconcelos Andrade	Maceió – AL	Prata
Thiago Barros Rodrigues Costa	Fortaleza – CE	Prata
Felipe Rodrigues Nogueira de Souza	São Paulo – SP	Prata
Leonardo Augusto Zão	Nilópolis – RJ	Prata
Vitor Gabriel Kleine	Mogi das Cruzes – SP	Prata
Estillac Lins Maciel Borges Filho	Belém – PA	Bronze
Rodrigo Roque Dias	São Paulo – SP	Bronze
Eduardo de Moraes Rodrigues Poço	São Paulo – SP	Bronze
Gustavo Gomes de Araujo	Ribeirão Preto – SP	Bronze
Raphael Constant da Costa	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
Davi Maximo Alexandrino Nogueira	Fortaleza – CE	Bronze
Jorge Peixoto de Morais Neto	Goiânia – GO	Bronze
Eduardo Ferraz Castelo Branco Ferreira	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
Eduardo Famini Silva	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
Moyses Afonso Assad Cohen	Rio de Janeiro – RJ	Bronze
Kellem Corrêa Santos	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Evandro Makiyama	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Thiago da Silva Sobral	S.J. dos Campos – SP	Menção Honrosa
Pedro Paiva Zühlke Dioliveira	Brasília – DF	Menção Honrosa
Helder Oliveira de Castro	Mogi das Cruzes – SP	Menção Honrosa
Thiago Costa Leite Santos	São Paulo – SP	Menção Honrosa
Marcos Francisco Ferreira Martinelli	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Rogério de Assis Medeiros	Franco da Rocha – SP	Menção Honrosa
Samuel Barbosa Feitosa	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Elder Rodrigo Barbosa Campos	Rio de Janeiro – RJ	Menção Honrosa
Francisco Bruno de Lima Holanda	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Giovana Siracusa Gouveia	Recife – PE	Menção Honrosa
Henrique Roscoe de Oliveira	Brasília – DF	Menção Honrosa

AGENDA OLÍMPICA

XXVIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

NÍVEIS 1, 2 e 3
Primeira Fase – Sábado, 10 de junho de 2006
Segunda Fase – Sábado, 2 de setembro de 2006
Terceira Fase – Sábado, 28 de outubro de 2006 (níveis 1, 2 e 3)
Domingo, 29 de outubro de 2006 (níveis 2 e 3 - segundo dia de prova).

NÍVEL UNIVERSITÁRIO
Primeira Fase – Sábado, 2 de setembro de 2006
Segunda Fase – Sábado, 28 e Domingo, 29 de outubro de 2006

♦

XII OLIMPÍADA DE MAIO
13 de maio de 2006

♦

XVII OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL
5 a 11 de maio de 2006
Escobar, Argentina

♦

XLVII OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA
8 a 19 de julho de 2006
Ljubljana - Eslovênia.

♦

XIII OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
20 a 26 de julho de 2006
Odessa, Ucrânia

♦

XXI OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA
22 de setembro a 01 de outubro de 2006
Equador

♦

IX OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
18 de novembro de 2006

♦ ♦ ♦

COORDENADORES REGIONAIS

Alberto Hassen Raad	(UFJF)	Juiz de Fora – MG
Américo López Gálvez	(USP)	Ribeirão Preto – SP
Amarísio da Silva Araújo	(UFV)	Viçosa – MG
Andreia Goldani	FACOS	Osório – RS
Antonio Carlos Nogueira	(UFU)	Uberlândia – MG
Ali Tahzibi	(USP)	São Carlos – SP
Benedito Tadeu Vasconcelos Freire	(UFRN)	Natal – RN
Carlos Alexandre Ribeiro Martins	(Univ. Tec. Fed. De Paraná)	pato Branco - PR
Carlos Frederico Borges Palmeira	(PUC-Rio)	Rio de Janeiro – RJ
Claus Haetinger	(UNIVATES)	Lajeado – RS
Cleonor Crescêncio das Neves	(UTAM)	Manaus – AM
Cláudio de Lima Vidal	(UNESP)	S.J. do Rio Preto – SP
Edson Roberto Abe	(Colégio Objetivo de Campinas)	Campinas – SP
Élio Mega	(Colégio Etapa)	São Paulo – SP
Éder Luiz Pereira de Andrade	(UNESPAR/FECILCAM)	Campo Mourão – PR
Eudes Antonio da Costa	(Univ. do Tocantins)	Arraias – TO
Florêncio Ferreira Guimarães Filho	(UFES)	Vitória – ES
Ivanilde Fernandes Saad	(UC. Dom Bosco)	Campo Grande– MS
Janice T. Reichert	(UNOCHAPECÓ)	Chapecó – SC
João Benício de Melo Neto	(UFPI)	Teresina – PI
João Francisco Melo Libonati	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Jorge Costa Duarte Filho	(UFPB)	João Pessoa - PB
José Cloves Saraiva	(UFMA)	São Luis – MA
José Luiz Rosas Pinho	(UFSC)	Florianópolis – SC
José Vieira Alves	(UFPB)	Campina Grande – PB
José William Costa	(Instituto Pueri Domus)	Santo André – SP
Krerley Oliveira	(UFAL)	Maceió – AL
Licio Hernandes Bezerra	(UFSC)	Florianópolis – SC
Luzinalva Miranda de Amorim	(UFBA)	Salvador – BA
Mário Rocha Retamoso	(UFRG)	Rio Grande – RS
Marcelo Rufino de Oliveira	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Marcelo Mendes	(Colégio Farias Brito, Pré-vestibular)	Fortaleza – CE
Newman Simões	(Cursinho CLQ Objetivo)	Piracicaba – SP
Raúl Cintra de Negreiros Ribeiro	(Colégio Anglo)	Atibaia – SP
Ronaldo Alves Garcia	(UFGO)	Goiânia – GO
Rogério da Silva Ignácio	(Col. Aplic. da UFPE)	Recife – PE
Reginaldo de Lima Pereira	(Escola Técnica Federal de Roraima)	Boa Vista – RR
Reinaldo Gen Ichiro Arakaki	(LAC - Laboratório Associado de Computação)	SJ dos Campos – SP
Ricardo Amorim	(Centro Educacional Logos)	Nova Iguaçu – RJ
Sérgio Cláudio Ramos	(IM-UFRGS)	Porto Alegre – RS
Seme Guevara Neto	(UFMG)	Belo Horizonte – MG
Tadeu Ferreira Gomes	(UEBA)	Juazeiro – BA
Tomás Menéndez Rodrigues	(U. Federal de Rondônia)	Porto Velho – RO
Turíbio José Gomes dos Santos	(UFPB)	João Pessoa – PB
Valdenberg Araújo da Silva	(U. Federal de Sergipe)	São Cristovão – SE
Valdeni Soliani Franco	(U. Estadual de Maringá)	Maringá – PR
Vânia Cristina Silva Rodrigues	(U. Metodista de SP)	S.B. do Campo – SP
Wagner Pereira Lopes	(CEFET – GO)	Jataí – GO