CONTEÚDO

Esta edição da Revista Eureka! é dedicada à memoria do professor Sérgio Cláudio Ramos da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), que colaborou como coordenador regional da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) desde 1998, e que nos deixou neste ano de 2012.

A comunidade da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM)

XVII OLIMPÍADA DE MAIO

PRIMEIRO NÍVEL

PROBLEMA 1

As quatro palavras codificadas

□*⊗ ⊕#● *□● ⊗♦⊕

são em alguma ordem

AMO SUR REO MAS

Decifrar ⊗♦□*⊕#□●⊗.

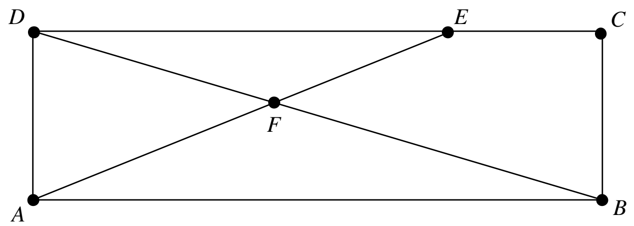
PROBLEMA 2

Utilizando apenas uma vez cada um dos dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 se escrevem o quadrado e o cubo de um número inteiro positivo. Determine quanto pode valer este número.

PROBLEMA 3

No retângulo $ABCD$, $BC = 5$, $EC = \frac{1}{3}$ CD e F é o ponto onde se cortam AE e BD.

O triângulo DFE tem área 12 e o triângulo ABF tem área 27. Encontre a área do quadrilátero $BCEF$.



PROBLEMA 4

Utilizando vários cubinhos brancos de aresta 1, Guille monta um cubo grande. Em seguida, escolhe quatro faces do cubo grande e as pinta de vermelho. Finalmente desmonta o cubo grande e observa que os cubinhos com pelo menos uma face pintada de vermelho são 431. Encontre a quantidade de cubinhos que Guille utilizou para montar o cubo grande.

Analise todas as possibilidades.

SEGUNDO NÍVEL

PROBLEMA 1

Encontre um número inteiro positivo x tal que a soma dos dígitos de x seja maior que 2011 vezes a soma dos dígitos do número $3x$ (3 vezes x).

PROBLEMA 2

Dizemos que um número de quatro dígitos $abcd$ ($a \neq 0$) é *porá* se valem as seguintes condições:

$a \geq b;$

$ab - cd = cd - ba.$

por exemplo, 2011 é porá porque 20 – 11 = 11 – 02.

Encontre todos os números porá.

PROBLEMA 3

Num triângulo retângulo ABC tal que $AB = AC$, M é o ponto médio de BC. Seja P um ponto da mediatriz de AC que pertence ao semiplano determinado por BC que não contém A. As retas CP e AM se cortam em Q. Calcule o ângulo que formam AP e BQ.

PROBLEMA 4

Dados n pontos em uma circunferência se escreve ao lado de um deles um 1 e ao lado de cada um dos outros um 0. A operação permitida consiste em escolher um ponto que tenha um 1 e trocar o número desse ponto e também os números dos seus dois vizinhos, o da esquerda e o da direita (onde há 1 se escreve 0 e onde há 0 se escreve 1).

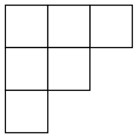
a) Se $n = 101$, mostre que se pode conseguir, mediante uma sucessão de operações permitidas, que cada um dos n pontos tenha escrito 0.

b) Se $n = 102$, mostre que é impossível obter todos 0.

PROBLEMA 5

Determine para quais números naturais n é possível cobrir completamente um tabuleiro de $n \times n$ dividido em casas de 1×1 com peças como a da figura, sem

buracos nem superposições e sem sair do tabuleiro. Cada uma das peças cobre exatamente seis casas.
Nota: As peças podem girar.



RESULTADO BRASILEIRO

2011: Nível 1 (até 13 anos)

Nome	Cidade – Estado	Prêmio
Nathan Bonetti Teodoro	Curitiba - PR	Medalha de Ouro
Júlia Bertelli	Joinville - SC	Medalha de Prata
Lucas Pereira Galvão de Barros	São Paulo - SP	Medalha de Prata
Pedro Henrique Sacramento de Oliveira	Vinhedo - SP	Medalha de Bronze
Pedro Henrique da Silva Dias	Porto Alegre - RS	Medalha de Bronze
Jiang Zhi	São Paulo - SP	Medalha de Bronze
Lucki Li	São Paulo - SP	Medalha de Bronze
Lucca Morais de Arruda Siaudzionis	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Helena Veronique Rios	São Carlos - SP	Menção Honrosa
Cristóbal Sciutto	São Paulo - SP	Menção Honrosa

2011: Nível 2 (até 15 anos)

Nome	Cidade – Estado	Prêmio
Murilo Corato Zanarella	Amparo - SP	Medalha de Ouro
Dimas Macedo de Albuquerque	Fortaleza - CE	Medalha de Prata
Rodrigo Sanches Angelo	São Paulo - SP	Medalha de Prata
Rafael Rodrigues Rocha de Melo	Fortaleza - CE	Medalha de Bronze
Liara Guinsberg	São Paulo - SP	Medalha de Bronze
Luize Mello D'Urso Viana	Rio de Janeiro - RJ	Medalha de Bronze
Lincoln de Queiroz Vieira	Fortaleza - CE	Medalha de Bronze
Tadeu Pires de Matos Belfort Neto	Caucaia - CE	Menção Honrosa
Pedro Henrique Alencar Costa	Fortaleza - CE	Menção Honrosa
Michel Rozenberg Zelazny	São Paulo - SP	Menção Honrosa

XXII OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL

Enunciados e resultado brasileiro

Os estudantes brasileiros tiveram uma participação destacada na Olimpíada de Matemática do Cone Sul que foi realizada entre os dias 14 e 20 de agosto na cidade de La Paz, Bolívia. A equipe foi liderada pelos professores Francisco Bruno Holanda e Régis Barbosa Feitosa, ambos de Fortaleza (CE).

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	Rafael Kazuhiro Miyazaki	Medalha de Prata
BRA2	Henrique Gasparini Fiuza do Nascimento	Medalha de Prata
BRA3	Rafael Rodrigues Rocha de Melo	Medalha de Prata
BRA4	Vinícius Canto Costa	Medalha de Prata

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Encontrar todas as ternas de inteiros positivos (x, y, z) tais que

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2011$$

PROBLEMA 2

Em uma lousa estão escritos os números inteiros positivos de 1 até 4^n inclusive. Em cada momento, Pedro apaga dois números da lousa, a e b, e escreve o número $\frac{ab}{\sqrt{2a^2+2b^2}}$. Pedro repete o procedimento até que sobre apenas um número. Demostrar que este número será menor que $\frac{1}{n}$, sem importar quais números Pedro escolha em cada momento.

PROBLEMA 3

Seja ABC um triângulo equilátero. P é um ponto interior tal que a raiz quadrada da distancia de P até um dos lados seja igual à soma das raízes quadradas das distancias de P até os outros dois lados. Encontre o lugar geométrico do ponto P.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Dizemos que um número de 4 dígitos $\overline{abcd}$ é equilibrado se $a + b = c + d$. Encontre todos os números equilibrados de quatro dígitos que podem ser expresos como a soma de dois números palíndromos.

PROBLEMA 5

Seja ABC um triângulo e D um ponto sobre o lado AC. Se $\angle CBD - \angle ABD = 60^\circ$, $\angle BDC = 30^\circ$ e, além disso $AB \cdot BC = BD^2$, encontre as medidas dos ângulos do triângulo ABC.

PROBLEMA 6

Algumas casas de um tabuleiro Q $(2n+1)\times(2n+1)$ são pintadas de preto, de modo que qualquer quadrado 2×2 de Q contenha, no máximo, 2 casas pretas. Achar o número máximo de casas pretas que o tabuleiro pode ter.

LII OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA (IMO)

Enunciados e resultado brasileiro

O Brasil obteve um ótimo resultado na 52ª Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), que aconteceu até o dia 24 de julho na cidade de Amsterdã na Holanda, conquistando três medalhas de prata e três de bronze. A equipe foi liderada pelos professores Nicolau Corção Saldanha do Rio de Janeiro (RJ) e Eduardo Tengan de São Carlos (SP).

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	**João Lucas Camelo Sá**	**Medalha de Prata**
BRA2	**André Macieira Braga Costa**	**Medalha de Prata**
BRA3	**Henrique Gasparini Fiúza do Nascimento**	**Medalha de Prata**
BRA4	**Deborah Barbosa Alves**	**Medalha de Bronze**
BRA5	**Gustavo Lisbôa Empinotti**	**Medalha de Bronze**
BRA6	**Maria Clara Mendes Silva**	**Medalha de Bronze**

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Para qualquer conjunto $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ de quatro inteiros positivos distintos, a soma $a_1+a_2+a_3+a_4$ é denotada por s_A. Seja n_A o número de pares de índices (i,j), com $1\le i<j\le 4$, para os quais a_i+a_j divide s_A.

Encontre todos os conjuntos *A* de quatro inteiros positivos para os quais n_A alcança o seu valor máximo.

PROBLEMA 2

Seja *S* um conjunto finito de dois ou mais pontos do plano. Em *S* não há três pontos colineares. Um *moinho de vento* é um processo que começa com uma reta ℓ que passa por um único ponto $P\in S$. Roda-se ℓ no sentido dos ponteiros do relógio ao redor do *pivot P* até que a reta encontre pela primeira vez um outro ponto de *S*, que denotaremos por *Q*. Com *Q* como novo pivot, a reta continua sem parar, sendo sempre o pivot algum ponto de *S*.

Demonstre que se pode escolher um ponto $P\in S$ e uma reta ℓ que passa por *P* tais que o moinho de vento resultante usa cada ponto de *S* como pivot infinitas vezes.

PROBLEMA 3

Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função real definida no conjunto dos números reais que satisfaz

$$f(x+y)\le yf(x)+f(f(x))$$

para quaisquer números reais *x* e *y*.

Demonstre que $f(x)=0$ para todo $x\le 0$.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Seja *n* um inteiro positivo. Temos uma balança de dois pratos e *n* pesos cujas massas são $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$. Devemos colocar os pesos na balança, um por um, de tal forma que o prato direito nunca seja mais pesado do que o prato esquerdo. A cada passo, devemos escolher um dos pesos que ainda não estejam na balança e colocá-lo sobre o prato esquerdo ou sobre o prato direito, procedendo assim até que todos os pesos tenham sido colocados nela.

Determine o número de maneiras em que isso pode ser feito.

PROBLEMA 5

Seja $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}^*$ uma função do conjunto dos inteiros para o conjunto dos inteiros positivos. Supomos que para quaisquer inteiros *m* e *n*, a diferença $f(m)-f(n)$ é divisível por $f(m-n)$.

Demonstre que, para todos os inteiros *m* e *n* com $f(m)\le f(n)$, o número $f(n)$ é divisível por $f(m)$.

PROBLEMA 6

Seja ABC um triângulo acutângulo cuja circunferência circunscrita é Γ. Seja ℓ uma reta tangente a Γ e sejam ℓ_a, ℓ_b e ℓ_c as retas obtidas ao refletir ℓ em relação às retas *BC*, *CA* e *AB*, respectivamente.

Demonstre que a circunferência circunscrita ao triângulo determinado pelas retas ℓ_a, ℓ_b e ℓ_c é tangente à circunferência Γ.

LIII OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA (IMO)

Enunciados e resultado brasileiro

O estudante Rodrigo Sanches Ângelo (SP) conquistou medalha de ouro na 53ª Olimpíada Internacional de Matemática (IMO). O evento foi realizado entre os dias 4 e 16 de julho na cidade de Mar del Plata, na Argentina reunindo 551 estudantes de 100 países. Além da medalha de ouro o Brasil conquistou uma medalha de prata e três de bronze. Com este resultado o Brasil se classificou em 19º lugar entre os países participantes.

A equipe foi liderada pelos professores Luciano Guimarães Castro, do Rio de Janeiro (RJ) e Carlos Yuzo Shine, de São Paulo (SP).

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	Rodrigo Sanches Angelo	Medalha de Ouro
BRA2	João Lucas Camelo Sá	Medalha de Prata
BRA3	Franco Matheus de Alencar Severo	Medalha de Bronze
BRA4	Henrique Gasparini Fiúza do Nascimento	Medalha de Bronze
BRA5	Rafael Kazuhiro Miyazaki	Medalha de Bronze
BRA6	Maria Clara Mendes Silva	Menção Honrosa

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Dado um triângulo ABC, o ponto J é o centro da circunferência ex-inscrita oposta ao vértice A. Esta circunferência ex-inscrita é tangente ao lado BC em M, e às retas AB e AC em K e L, respectivamente. As retas LM e BJ intersectam-se em F, e as retas KM e CJ intersectam-se em G. Seja S o ponto de intersecção das retas AF e BC, e seja T o ponto de intersecção das retas AG e BC.
Prove que M é o ponto médio de ST.
(A circunsferência ex-inscrita de ABC oposta ao vértice A é a circunferência tangente ao segmento BC, ao prolongamento do segmento AB no sentido de A para B e ao prolongamento do segmento AC no sentido de A para C.)

PROBLEMA 2

Seja $n \geq 3$ um inteiro e sejam $a_2, a_3, ..., a_n$ números reais positivos tais que $a_2 a_3 ... a_n = 1$. Prove que

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3\ldots(1+a_n)^n > n^n.$$

PROBLEMA 3

O *desafio do mentiroso* é um jogo para dois jogadores *A* e *B*. As regras do jogo dependem de dois inteiros positivos *k* e *n* conhecidos por ambos os jogadores.

No início do jogo, o jogador *A* escolhe inteiros *x* e *N* com $1 \le x \le N$. O jogador *A* mantém *x* em segredo, e diz a *B* o verdadeiro valor de *N*. Em seguida, o jogador *B* tenta obter informação sobre *x* fazendo perguntas a *A* da seguinte maneira: em cada pergunta, *B* especifica um conjunto arbitrário *S* de inteiros positivos (que pode ser um dos especificados em alguma pergunta anterior), e pergunta a *A* se *x* pertence a *S*. O jogador *B* pode fazer tantas perguntas desse tipo como deseje. Depois de cada pergunta, o jogador *A* deve responder imediatamente com *sim* ou *não*, mas pode mentir tantas vezes como queira. A única restrição é que dadas quaisquer *k* + 1 respostas consecutivas, pelo menos uma deve ser verdadeira.

Quando *B* tenha feito tantas perguntas como pretenda, deve especificar um conjunto *X* com no máximo *n* inteiros positivos. Se *x* pertencer a *X* então ganha *B*; caso contrário, *B* perde. Prove que:

1. Se $n \ge 2^k$, então *B* pode garantir a sua vitória.
2. Para todo *k* suficientemente grande, existe um inteiro $n \ge 1{,}99^k$ tal que *B* não pode garantir a sua vitória.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Determine todas funções $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ tais que, para todos os inteiros *a*, *b*, *c* que satisfazem $a+b+c=0$, a seguinte igualdade é verdadeira:

$$f(a)^2+f(b)^2+f(c)^2=2f(a)f(b)+2f(b)f(c)+2f(c)f(a).$$

($\mathbb{Z}$ designa o conjunto dos números inteiros.)

PROBLEMA 5

Seja *ABC* um triângulo tal que $\angle BCA = 90°$, e seja *D* o pé da altura relativa a *C*. Seja *X* um ponto no interior do segmento *CD*. Seja *K* o ponto do segmento *AX* tal

que $BK = BC$. Analogamente, seja L o ponto do segmento BX tal que $AL = AC$. Seja M o ponto de intersecção de AL com BK.
Prove que $MK = ML$.

PROBLEMA 6

Determine todos os inteiros positivos n para os quais existem inteiros não negativos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tais que

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \ldots + \frac{n}{2^{a_n}} = 1.$$

II OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DA COMUNIDADE DOS PAÍSES DE LÍNGUA PORTUGUESA

Enunciados e resultado brasileiro

O Brasil conquistou duas medalhas de ouro e duas de prata na 2ª Olimpíada de Matemática da Comunidade dos Países de Língua Portuguesa, realizada de 20 a 28 de julho, na cidade de Salvador (BA). Com este resultado o país ficou pelo segundo ano consecutivo com a primeira posição na classificação geral, com 160 pontos, seguido pela equipe de Portugal, que obteve 149 pontos. A equipe foi liderada pelos professores Marcelo Mendes de Oliveira, de Fortaleza (CE) e Guilherme Philippe Figueiredo, de São Paulo (SP).

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	Daniel Santana Rocha	Medalha de Ouro
BRA2	Murilo Corato Zanarella	Medalha de Ouro
BRA3	Daniel Lima Braga	Medalha de Prata
BRA4	Victor Oliveira Reis	Medalha de Prata

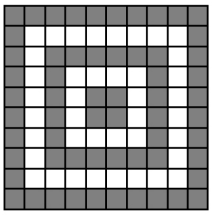
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Arnaldo e Bernaldo treinam para uma maratona ao longo de uma pista circular, a qual possui em seu centro um mastro com uma bandeira hasteada. Arnaldo corre mais rápido que Bernaldo, de modo que a cada 30 minutos de corrida, enquanto Arnaldo dá 15 voltas na pista, Bernaldo só consegue dar 10 voltas completas. Arnaldo e Bernaldo partiram no mesmo instante da linha e correram com velocidades constantes, ambos no mesmo sentido. Entre o minuto 1 o o minuto 61 da corrida, quantas vezes Arnaldo, Bernaldo e o mastro ficaram colineares?

PROBLEMA 2

Maria dispõe de um tabuleiro de tamanho $n \times n$, inicialmente com todas as casas pintadas de cor branca. Maria decide pintar algumas casas do tabuleiro de preto, formando um mosaico, como mostra a figura abaixo, da seguinte maneira: ela pinta todas as casas do bordo do tabuleiro de preto, e em seguida deixa pintadas de branco as casas do bordo do tabuleiro que ainda não foi pintado. Então, pinta novamente de preto as casas do bordo do próximo tabuleiro restante, e assim sucessivamente.



a) Determine um valor de n para que o número de casas pretas seja igual a 200.
b) Determine o menor valor de n para que o número de casas pretas seja maior que 2012.

PROBLEMA 3
Seja n um inteiro positivo. Abigail e Berenice disputam o seguinte jogo, que utiliza n bolas numeradas de 1 até n. Elas dispõem de duas caixas, rotuladas com os símbolos $\prod$ e $\sum$, respectivamente.
Na sua vez, cada jogador escolhe uma bola e a coloca em uma das caixas. Ao final, os números das bolas que estão na caixa $\prod$ são multiplicados, obtendo-se um valor P e os números das bolas que estão na caixa $\sum$ são somados, obtendo-se um valor S (se a caixa $\prod$ estiver vazia, então adotamos $P = 1$; se a caixa $\sum$ estiver vazia, adotamos $S = 0$). Elas jogam alternadamente, iniciando por Abigail, até que não haja mais bolas fora das caixas.
Se o valor de $P + S$ for par, Abigail ganha. Caso contrário, Berenice ganha.

a) Qual jogador possui estratégia vencedora para $n = 6$?
b) Qual jogador possui estratégia vencedora para $n = 2012$?

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4
Uma formiga decide passear sobre o perímetro de um triângulo ABC. A formiga pode começar em qualquer vértice. Sempre que a formiga está num vertice, ela escolhe um dos vértices adjacentes e caminha diretamente (em linha reta) até o vértice escolhido.

a) De quantos modos a formiga pode passear visitando cada vértice exatamente duas vezes?

b) De quantos modos a formiga pode passear visitando cada vérice exatamente três vezes?

Observação: Em cada item, considere que o vértice inicial é visitado.

PROBLEMA 5

Arnaldo e Bernaldo estão brincando no quadro da sala de aula da seguinte maneira: eles escrevem inicialmente no quadro um número inteiro positivo n. Então, alternadamente, começando com Arnaldo, apagam o número que está no quadro e escrevem um novo número que pode ser:

- o que acabou de ser apagado menos a maior potência de 2 (com expoente inteiro não-negativo) menor do que ou igual ao número apagado;
- o que acabou de ser apagado dividido por 2, caso o número apagado seja par.

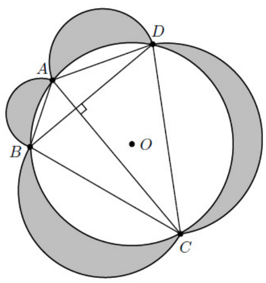
Vence a brincadeira quem obtiver primeiro o número zero.

a) Determine qual dos jogadores possui uma estratégia vencedora para $n = 40$ e descreva-a.
b) Determine qual dos jogadores possui uma estratégia vencedora para $n = 2012$ e descreva-a.

PROBLEMA 6

Um quadrilátero $ABCD$ está inscrito numa circunferência de centro O. Sabe-se que as diagonais AC e BD são perpendiculares. Sobre cada um dos lados construímos semicírculos, externamente, como mostra a figura.

a) Mostre que os triângulos AOB e COD têm a mesma área.
b) Se $\overline{AC} = 8\ cm$ e $\overline{BD} = 6\ cm$, determine a área da região sombreada.



XXVI OLIMPÍADA IBERO–AMERICANA DE MATEMÁTICA

Enunciados e resultado brasileiro

A equipe brasileira formada por quatro estudantes do ensino médio conquistou três medalhas de prata e uma de bronze na 26ª Olimpíada Ibero-americana de Matemática (OIM), realizada entre os dias 23 e 30 de setembro na cidade de San José, Costa Rica. A equipe foi liderada pelos professores Onofre Campos, de Fortaleza (CE) e Carlos Moreira, do Rio de Janeiro (RJ).

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	Henrique Gasparini Fiúza do Nascimento	Medalha de Prata
BRA2	Maria Clara Mendes Silva	Medalha de Prata
BRA3	João Lucas Camelo Sá	Medalha de Prata
BRA4	André Macieira Braga Costa	Medalha de Bronze

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

No quadro está escrito o número 2. Ana e Bruno jogam alternadamente, começando por Ana, da seguinte maneira: cada um na sua vez substitui o número escrito pelo que se obtém multiplicando-o por 2, ou por 3, ou somando-lhe 1. O primeiro que obtenha um resultado maior ou igual a 2011 ganha. Mostre que um dos dois tem uma estratégia vencedora e descreva-a.

PROBLEMA 2

Encontrar todos os inteiros positivos n para os quais existem três números inteiros não nulos x, y, z tais que

$$x+y+z=0 \text{ e } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{n}.$$

PROBLEMA 3

Seja ABC um triângulo acutângulo e X, Y, Z os pontos da tangência de sua circunferência inscrita com os lados BC, CA, AB, respectivamente. Sejam C_1, C_2, C_3 circunferências com cordas YZ, ZX, XY, respectivamente, de maneira que C_1 e C_2 se intersectem sobre a reta CZ e que C_1 e C_3 se intersectem sobre a reta BY. Suponha que C_1 intersecta XY em J e intersecta ZX em M; que C_2 intersecta YZ

em *L* e intersecta *XY* em *I*; e que C_3 intersecta *YZ* em *K* e intersecta *ZX* em *N*. Demonstrar que *I*, *J*, *K*, *L*, *M*, *N* estão sobre uma mesma circunferência.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Seja *ABC* um triângulo acutângulo e *O* o seu circuncentro. Sejam *P* e *Q* pontos tais que *BOAP* e *COPQ* são paralelogramos. Demonstrar que *Q* é o ortocentro de *ABC*.

PROBLEMA 5

Sejam $x_1,...,x_n$ números reais positivos. Demonstrar que existem $a_1,...,a_n \in \{-1,1\}$ tais que

$$a_1x_1^2 + ... + a_nx_n^2 \geq (a_1x_1 + ... + a_nx_n)^2.$$

PROBLEMA 6

Sejam $k \geq 2$ e *n* inteiros positivos. Temos *kn* caixas em linha reta e em cada caixa coloca-se uma pedra de uma de *k* cores diferentes de tal forma que haja *n* pedras de cada cor. Uma *troca* consiste em trocar de caixa duas pedras que se encontrem em caixas adjacentes. Encontrar o menor inteiro positivo *m* para o qual sempre é possível conseguir mediante *m* trocas que as *n* pedras de cada cor fiquem em caixas consecutivas se:

a) *n* é par.

b) *n* é ímpar e $k = 3$.

PARIDADE DO NÚMERO BINOMIAL MÉDIO

J.C.S. de Miranda, USP/SP
Iesus C. Diniz, UFRN

♦ Nível Avançado

1. INTRODUÇÃO

Apresentaremos duas soluções ao problema da *paridade do número binomial médio,* isto é, mostrar que $2\left|\binom{2n}{n}\right.$ para todo $n\in\mathbb{N}^*$. Uma delas é baseada em um argumento combinatório, enquanto que a outra será obtida de maneira aritmética. Outras soluções deste problema são dadas em [6] e [8]. Ademais, como consequência dos métodos de solução dados nas seções 2 e 3, respectivamente, resolveremos os problemas olímpicos internacionais dados em [5] e [4].

O *número binomial médio* aparece em várias áreas da matemática, por exemplo: teoria dos números [1], análise [2] e combinatória [7].

A segunda solução mostra quão interessantes podem ser as resoluções de determinados problemas quando utilizamos argumentos combinatórios para estabelecê-las. A primeira é obtida a partir de uma conveniente fatoração do número binomial médio observando-se o expoente do fator 2.

Por fim, para exemplificar o uso de argumentos combinatórios na solução de problemas apresentamos uma série de exercícios na seção 5; ver também em [3] e [8]. Além disso, calculamos de maneira aproximada a série cujos termos são os recíprocos dos números binomiais médios.

2. SOLUÇÃO ARITMÉTICA

Indicaremos por $f(n)$, para todo $n\in\mathbb{N}^*$, o expoente do fator 2 na decomposição de $\binom{2n}{n}$ em fatores primos, isto é, $f(n)$ é tal que:

$$2^{f(n)}\left|\binom{2n}{n}\right. \text{ e } 2^{f(n)+1}\nmid\binom{2n}{n} \quad (1)$$

Note que

$$\binom{2n}{n} = \left(\frac{2^n}{n!}\right)\prod_{i=1}^{n}(2i-1). \quad (2)$$

Pois,

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)...2.1}{n!n!} = \frac{\left[(2n)(2n-2)...2\right](2n-1)(2n-3)...1}{n!n!} =$$

$$\frac{\left[2(n)2(n-1)...2(1)\right](2n-1)(2n-3)...1}{n!n!} = \frac{\left[2^n n!\right](2n-1)(2n-3)...1}{n!n!} =$$

$$\left(\frac{2^n}{n!}\right)(2n-1)(2n-3)...1 = \left(\frac{2^n}{n!}\right)\prod_{i=1}^{n}(2i-1).$$

Seja $k \in \mathbb{N}$ o máximo expoente de 2 tal que $2^k \leq n$, isto é, $2^k \leq n < 2^{k+1}$.
Assim,

$$k \leq \log_2 n < k+1, \text{ isto é, } k = \lfloor \log_2 n \rfloor.$$

Note que em $n!$ há $k = \left\lfloor \frac{n}{2^j} \right\rfloor$ fatores que são múltiplos de 2^j, para todo $j \in \{1,...,k\}$. Logo o expoente do fator 2 em $n!$ é dado por,

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + ... + \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor = \sum_{j=1}^{k} \left\lfloor \frac{n}{2^j} \right\rfloor = \sum_{j=1}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{2^j} \right\rfloor. \quad (3)$$

Portanto, da definição dada em (1) e das equações (2) e (3) temos:

$$f(n) = n - \sum_{j=1}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{2^j} \right\rfloor \quad (4)$$

e podemos escrever

$$\binom{2n}{n} = 2^{f(n)}c, \text{ em que } 2 \nmid c. \quad (5)$$

Agora,

$$\sum_{j=1}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{2^j} \right\rfloor < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{n}{2^j} = n \Rightarrow \sum_{j=1}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{2^j} \right\rfloor \leq n-1,$$

donde, da equação (4), resulta que

$$f(n) \geq n - (n-1) = 1.$$

Logo, da equação (5), $2 \left| \binom{2n}{n} \right.$ pois $f(n) \geq 1$.

3. SOLUÇÃO POR ARGUMENTO COMBINATÓRIO

Teorema 1 *Para todo* $n \in \mathbb{N}^*, 2 \left| \binom{2n}{n} \right.$.

Prova: Para todo $n \in \mathbb{N}^*$, o número de partições não-ordenadas de um conjunto de $2n$ elementos em dois subconjuntos de n elementos cada, é dado por $\dfrac{\binom{2n}{n}\binom{n}{n}}{2!}$.

Claramente, o referido número de partições é um inteiro positivo, donde segue que

$$\frac{\binom{2n}{n}\binom{n}{n}}{2!} \in \mathbb{N}^*, \text{ e portanto, } 2 \left| \binom{2n}{n} \right. .$$

4. COMENTÁRIOS

A solução por argumento combinatório é claramente mais objetiva; por outro lado, da solução aritmética podem ser obtidos os seguintes resultados:

O expoente da maior potência de um primo p que divide $n!$ é

$$\sum_{j=1}^{\lfloor \log_p n \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor = \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor, \quad (6)$$

pois o argumento do qual se obtém a equação (3) pode ser repetido para um primo p qualquer. Este resultado foi provado por Legendre em 1808.

O expoente r da maior potência, de um número não nulo $m = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ que divide $n!$, isto é, r tal que $m^r \mid n!$ e $m^{r+1} \nmid n!$, é o maior valor de r que satisfaz às desigualdades $r\alpha_i \le r_i$ para todo $i \in \{1,...,k\}$, nas quais r_i é o expoente da potência máxima de p_i em $n!$. Assim,

$$r = \min_{1 \le i \le k} \left\{ \frac{r_i}{\alpha_i} \right\} = \min_{1 \le i \le k} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p_i^j} \right\rfloor / \alpha_i \right\}. \quad (7)$$

Na prova da paridade do número binomial médio dada em [8], exercício 39 página 235, é usado um argumento combinatório juntamente com propriedades aritméticas da fatoração do número binomial médio. Ei-la:

$$\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{n!n!}=\frac{2n\cdot(2n-1)!}{n\cdot(n-1)!n!}=2\frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!}=2\binom{2n-1}{n} \text{ é par.}$$

5. EXERCÍCIOS

Prove via argumentos combinatórios que:

a) $\binom{n+m}{r}=\binom{n}{0}\binom{m}{r}+\binom{n}{1}\binom{m}{r-1}+\ldots+\binom{n}{r}\binom{m}{0}$

Solução: Consideremos um grupo de $n + m$ pessoas em que há n homens e m mulheres.

O número de subconjuntos de tamanho r do grupo das $n + m$ pessoas é $\binom{n+m}{r}$.

Por outro lado, particionando os subconjuntos em relação à quantidade de homens e mulheres neles presentes, temos um total de $\binom{n}{0}\binom{m}{r}$ deles em que não há nenhum homem presente e r mulheres, $\binom{n}{1}\binom{m}{r-1}$ em que há 1 homem presente e $r-1$ mulheres ... $\binom{n}{r}\binom{m}{0}$ em que há r homens presentes e nenhuma mulher.

b) $\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}$

c) $\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$ (Fórmula de Lagrange)

Solução: Do item a com m e r iguais a n e do uso da identidade dada em b, segue-se o resultado, pois:

$$\binom{n+n}{n}=\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\ldots+\binom{n}{n}\binom{n}{0}$$

$$=\binom{n}{0}\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}\binom{n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$$

d) $k\binom{n}{k}=(n-k+1)\binom{n}{k-1}=n\binom{n-1}{k-1}$

Solução: Considere um grupo de *n* pessoas pertencentes a uma empresa, dentre as quais *k* constituem uma diretoria em que há um único diretor-presidente e todos os demais membros têm iguais poderes. Podemos configurar a diretoria das três seguintes formas, em que o total de possibilidades de cada uma delas representa, respectivamente, cada um dos termos das igualdades dadas no item *d*.

1. Escolher a diretoria e depois o diretor-presidente;

2. Escolher os $k-1$ membros de iguais poderes pertencentes a diretoria e depois o diretor-presidente.

3. Escolher o diretor-presidente entre as *n* pessoas pertencentes a empresa e depois os $k-1$ indivíduos que completarão a diretoria.

e) $\binom{n}{k}=\sum_{i=k}^{n}\binom{i-1}{k-1}$ (Identidade Combinatória de Fermat)

Solução: O lado esquerdo da igualdade é o número de amostras não ordenadas de tamanho *k*, extraídas sem reposição de uma população de tamanho *n*, que sem perda de generalidade suporemos numerada de 1 a *n*. Por outro lado, se considerarmos a partição de todas essas amostras com relação à presença de seu maior elemento, temos que existem $\binom{k-1}{k-1},\binom{k}{k-1},\ldots,\binom{n-1}{k-1}$ de tais amostras cujo maior elemento é respectivamente k, $k+1,\ldots,n$.

f) $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}$

Solução: Considere uma empresa formada por n funcionários dentre os quais será formada uma diretoria de no máximo n pessoas, a qual é constituída de um único diretor-presidente escolhido entre os membros pertencentes à diretoria.
O lado esquerdo da igualdade representa o total de configurações das diretorias possíveis, obtidas primeiramente a partir da determinação dos k membros pertencentes à diretoria, seguindo-se da determinação de seu diretor-presidente entre os k membros da diretoria.
O lado direito da igualdade representa o total de configurações das diretorias possíveis, obtidas primeiramente escolhendo-se o diretor-presidente e em seguida determinando-se para cada um dos demais $n - 1$ membros se pertencerão ou não à diretoria.

g) $\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = 2^{n-2} n(n+1)$

h) $\sum_{k=1}^{n} k^3 \binom{n}{k} = 2^{n-3} n^2 (n+3)$

i) $\sum_{j=i}^{n} \binom{n}{j}\binom{j}{i} = \binom{n}{i} 2^{n-i}$

j) ("British Mathematical Olympiad" – [4]) Para todo $(m,n) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$

$$(m!)^{n+1} (n!)^{m+1} \Big| \{(mn)!\}^2$$

Solução: Sejam P_1 e P_2, respectivamente, o número de maneiras de dividir mn pessoas em n grupos de m pessoas e m grupos de n pessoas. Tem-se que:

$$P_1 = \frac{(mn)!}{(m!)^n n!} \in \mathbb{Z}^+, P_2 = \frac{(mn)!}{(n!)^m m!} \in \mathbb{Z}^+ \text{ e, portanto,}$$

$$P_1 \cdot P_2 = \frac{\{(mn)!\}^2}{(m!)^{n+1} (n!)^{m+1}} \in \mathbb{Z}^+, \text{isto é, } (m!)^{n+1} (n!)^{m+1} \Big| \{(mn)!\}^2$$

k) (XIV Olimpíada Internacional de Matemática – [5]) Quaisquer que sejam os inteiros naturais m e n, temos:

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!} \in \mathbb{N}.$$

Solução: Seja *p* um primo arbitrário. A maior potência de *p* que divide o numerador da fração acima é p^a onde

$$a=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left\lfloor \frac{2m}{p^i}\right\rfloor+\left\lfloor \frac{2n}{p^i}\right\rfloor\right)$$

ao passo que a maior potência de *p* que divide seu denominador é p^b com

$$b=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left\lfloor \frac{m}{p^i}\right\rfloor+\left\lfloor \frac{n}{p^i}\right\rfloor+\left\lfloor \frac{m+n}{p^i}\right\rfloor\right).$$

Basta mostrar que $a \ge b.$

Para qualquer k inteiro maior ou igual a 1 podemos escrever $m=m_1k+r$ e $n=n_1k+s$ em que $0\le r\le k-1, 0\le s\le k-1,$ m_1 e n_1 são inteiros.

Assim,

$$\left\lfloor \frac{2m}{k}\right\rfloor+\left\lfloor \frac{2n}{k}\right\rfloor=2m_1+2n_1+\left\lfloor \frac{2r}{k}\right\rfloor+\left\lfloor \frac{2s}{k}\right\rfloor \qquad (8)$$

e

$$\left\lfloor \frac{m}{k}\right\rfloor+\left\lfloor \frac{n}{k}\right\rfloor+\left\lfloor \frac{m+n}{k}\right\rfloor=m_1+n_1+(m_1+n_1)+\left\lfloor \frac{r}{k}\right\rfloor+\left\lfloor \frac{s}{k}\right\rfloor+\left\lfloor \frac{r+s}{k}\right\rfloor \qquad (9)$$

$$=2m_1+2n_1+\left\lfloor \frac{r+s}{k}\right\rfloor.$$

Como

$$\left\lfloor \frac{r+s}{k}\right\rfloor\le\left\lfloor \frac{2\max\{r,s\}}{k}\right\rfloor\le\left\lfloor \frac{2r}{k}\right\rfloor+\left\lfloor \frac{2s}{k}\right\rfloor,$$

por (8) e (9) temos

$$\left\lfloor \frac{2m}{k}\right\rfloor+\left\lfloor \frac{2n}{k}\right\rfloor\ge\left\lfloor \frac{m}{k}\right\rfloor+\left\lfloor \frac{n}{k}\right\rfloor+\left\lfloor \frac{m+n}{k}\right\rfloor$$

para todo $k\ge 1$ e, em particualr, para k da forma $k=p^i$, donde segue imediatamente que $a \ge b.$

l) Dada a série $S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\binom{2k}{k}}$:

l.1) mostre que a série é convergente, isto é, $S<\infty;$

Solução: A partir da Fórmula de Lagrange, apresentada no item *c*) desta seção, tem-se que

$$\binom{2n}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 > \binom{n}{1}^2 = n^2, \quad (10)$$

e portanto, segue de (10) que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ou ainda, da equação (2) tem-se que, para $n > 1$,

$\binom{2n}{n} > 2^n$, donde segue que $\dfrac{1}{\binom{2n}{n}} < \dfrac{1}{2^n}$, e se $n = 1$, resulta que $\dfrac{1}{\binom{2n}{n}} = \dfrac{1}{2^n}$.

Portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

l.2) prove também que $\dfrac{2}{3} < S < \dfrac{8}{9}$;

Solução: A partir da equação (2) tem-se que

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} (2i-1)}{n!} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^n}, \text{ logo, para } n > 1,$$

$$\frac{2^{n-1}}{n} = \frac{1.2.4...(2n-2)}{1.2.3...n} < \frac{\binom{2n}{n}}{2^n} < \frac{1.4.6...(2n)}{1.2.3...n} = 2^{n-1}. \quad (11)$$

De (11) resulta que

$$\frac{1}{2^{2n-1}} < \frac{1}{\binom{2n}{n}} < \frac{n}{2^{2n-1}},$$

e portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n-1}} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\binom{2n}{n}} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{2n-1}}. \quad (12)$$

Os limitantes são obtidos a partir do cálculo das somas dadas em (12).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n-1}} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}} = 2\left(\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}\right) = \frac{2}{3} \text{ e}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{2n-1}} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{2n}} = 2\left\{\left[\frac{1}{2^2}\right]+\left[\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}\right]+\left[\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^6}\right]+\dots\right\} =$$

$$2\left\{\left[\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\dots\right]+\left[\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\dots\right]+\left[\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^8}+\dots\right]\right\} =$$

$$2\left\{\frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2^2}}+\frac{\frac{1}{2^4}}{1-\frac{1}{2^2}}+\frac{\frac{1}{2^6}}{1-\frac{1}{2^2}}+\dots\right\} = \frac{8}{3}\left\{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\dots\right\} =$$

$$\frac{8}{3}\left\{\frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2^2}}\right\} = \frac{8}{9}.$$

l.3) Finalmente, prove que $0,73639 < S < 0,73641$.

Solução: Das desigualdades estabelecidas em (12), resulta que $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{\binom{2n}{n}} + \sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n-1}} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\binom{2n}{n}} < \sum_{n=1}^{k}\frac{1}{\binom{2n}{n}} + \sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{n}{2^{2n-1}}. \quad (13)$$

Analogamente ao que foi feito no item 12, temos que:

$$\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n-1}} = \frac{1}{2^{2k+1}}+\frac{1}{2^{2k+3}}+\dots = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{2k-1}}\right) \quad (14)$$

e também

$$\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{n}{2^{2n-1}} = \left(\frac{k}{3}+\frac{4}{9}\right)\left[\frac{1}{2^{2k-1}}\right]. \quad (15)$$

Pois,

$$\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{n}{2^{2n-1}}=\frac{k+1}{2^{2k+1}}+\frac{k+2}{2^{2k+3}}+\frac{k+3}{2^{2k+5}}\ldots=$$

$$(k+1)\left[\frac{1}{2^{2k+1}}+\frac{1}{2^{2k+3}}+\ldots\right]+\left[\frac{1}{2^{2k+3}}+\frac{1}{2^{2k+5}}+\ldots\right]+\left[\frac{1}{2^{2k+5}}+\frac{1}{2^{2k+7}}+\ldots\right]+\ldots=$$

$$(k+1)\left[\frac{\frac{1}{2^{2k+1}}}{1-\frac{1}{4}}\right]+\left[\frac{\frac{1}{2^{2k+3}}}{1-\frac{1}{4}}\right]+\left[\frac{\frac{1}{2^{2k+5}}}{1-\frac{1}{4}}\right]+\ldots=$$

$$\frac{4}{3}(k+1)\left[\frac{1}{2^{2k+1}}\right]+\frac{4}{3}\left[\frac{1}{2^{2k+3}}+\frac{1}{2^{2k+5}}+\ldots\right]=$$

$$\frac{1}{3}(k+1)\left[\frac{1}{2^{2k-1}}\right]+\frac{4}{3}\left[\frac{\frac{1}{2^{2k+3}}}{1-\frac{1}{4}}\right]=$$

$$\frac{1}{3}(k+1)\left[\frac{1}{2^{2k-1}}\right]+\frac{1}{9}\left[\frac{1}{2^{2k-1}}\right]=$$

$$\left(\frac{k}{3}+\frac{4}{9}\right)\left[\frac{1}{2^{2k-1}}\right].$$

De (14) e (15) resulta que

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{\binom{2n}{n}}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{2k-1}}\right)<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\binom{2n}{n}}<\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{\binom{2n}{n}}+\left(\frac{k}{3}+\frac{4}{9}\right)\left[\frac{1}{2^{2k-1}}\right].\quad(16)$$

Para estabelecermos o resultado no item *l*.3, é suficiente tomarmos $k = 10$ em (16).

Observação: A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\binom{2n}{n}}$ pode ser estimada por

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{\binom{2n}{n}}+\left(\frac{3k+7}{9}\right)\left(\frac{1}{2^{2k}}\right)\text{ com um erro de no máximo }\left(\frac{3k+1}{9}\right)\left(\frac{1}{2^{2k}}\right).$$

Assim, se quisermos um erro não superior a *e* em nossa estimativa da série, é suficiente escolhermos $k=\min\left\{m\in\mathbb{N}:\left(\frac{3m+1}{9}\right)\left(\frac{1}{2^{2m}}\right)\le\varepsilon\right\}$.

Terminamos com um problema proposto.

Problema (Harvey Abbott e Murray Klamkin)

Sabe-se que

$$\frac{(3m)!(3n)!}{m!n!(m+n)!(n+m)!}, \frac{(4m)!(4n)!}{m!n!(2m+n)!(2n+m)!} \text{ e } \frac{(5m)!(5n)!}{m!n!(3m+n)!(3n+m)!}$$

são todos inteiros para quaisquer inteiros positivos *m*, *n*.

a) Encontre inteiros positivos *m*, *n* tais que $I(m,n) = \dfrac{(6m)!(6n)!}{m!n!(4m+n)!(4n+m)!}$ não seja inteiro.

b) Seja *A* o conjunto dos pares (*m*, *n*) com $m \le n,$ para os quais $I(m,n)$ não é inteiro, e seja $A(x)$ o número de pares em *A* para os quais $1 \le m \le n \le x.$
Prove que *A* contém uma proporção positiva dos pares de naturais, no sentido de que existem uma constante $c > 0$ e um inteiro positivo n_0 tal que, para todo $x \ge n_0$, $A(x) \ge c \cdot x^2$.

Obs.: Para o item b) pode-se usar o chamado Postulado de Bertrand, um teorema segundo o qual, para todo $n \ge 2,$ existe um primo *p* com $n < p < 2n.$

Referências

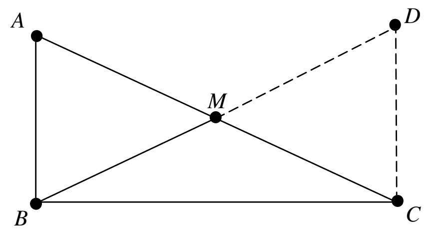
[1] Berend, D.; Harmse, J.E. On some arithmetical properties of middle binomial coefficients. *Acta arith.* **84** (1998), no. 1, 31-41.
[2] Bloom, D. M.; Swanson, C.N; Schilling, K. A. Convolution of Middle Binomial Coefficients; 10921 *The American Mathematical Monthly* **Vol 110** (Dec., 2003), no. 10, 958-959.
[3] Ross, S. M. *A first course in probability.* 8th. ed. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 2008.
[4] *British Mathematical Olympiad* -16/02/2005 – Exercice 4 – item b- http://www.bmoc.maths.org/home/bmolot.pdf
[5] *XIV Olimpíada Internacional de Matemática. Cracóvia, Polônia, 1972* – Exercice 3 – http://imo.math.ca/Exams/1972imo.html
[6] Gardiner, A. Four Problems on Prime Power Divisibility. *The American Mathematical Monthly* **Vol 95** (Dec., 1998), no. 10, 926-931.
[7] Knuth D. E.; Vardi I.; Richberg R. The asymptotic expansion of the middle binomial coefficient. *The Amer. Math. Monthly* **Vol 97** (1990), 626-630.
[8] Morgado, A. C. O.; Carvalho, J. B. P.; Carvalho, P. C. P.; Fernandez, P. *Análise combinatória e probabilidade.* 9. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. (Coleção do Professor de Matemática).

PONTO MÉDIO LEMBRA? OUTRO PONTO MÉDIO! DOIS PONTOS MÉDIOS LEMBRAM? BASE MÉDIA!

Cícero Thiago Magalhães

♦ Nível Iniciante

Propriedade 1 Num triângulo retângulo ABC, a mediana BM relativa à hipotenusa mede metade da hipotenusa AC.



Prova

Seja D o ponto sobre o prolongamento da mediana BM tal que $BM = MD$. Os triângulos AMB e CMD são congruentes, pelo caso LAL. Daí, $AB = CD$ e $\angle BAM = \angle DCM$, ou seja, AB e CD são segmentos iguais e paralelos e portanto

$$\angle ABC = \angle DCB = 90°.$$

Assim, os triângulos ABC e DCB são congruentes, pelo caso LAL, e portanto

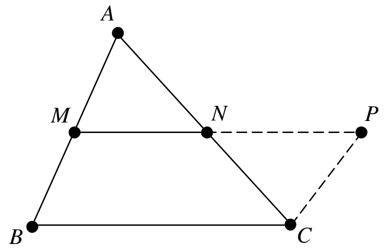
$$BD = AC \Rightarrow 2 \cdot BM = AC \Rightarrow BM = \frac{AC}{2}.$$

Definição 1 Uma base média de um triângulo é um segmento que une os pontos médios de dois de seus lados.

Assim, todo triângulo possui exatamente três bases médias.

Propriedade 2 Sejam ABC um triângulo e M, N os pontos médios dos lados AB, AC, respectivamente. Então

$$MN \parallel BC \text{ e } MN = \frac{BC}{2}.$$



Prova
Inicialmente, prolonguemos a base média MN até um ponto P tal que $MN = NP$. Em seguida, construímos o triângulo CNP. Note que os triângulos ANM e CNP são congruentes, pelo caso LAL. Daí, $CP = AM$ e $\angle MAN = \angle PCN$ e portanto

$$CP \parallel AM \Rightarrow CP \parallel BM.$$

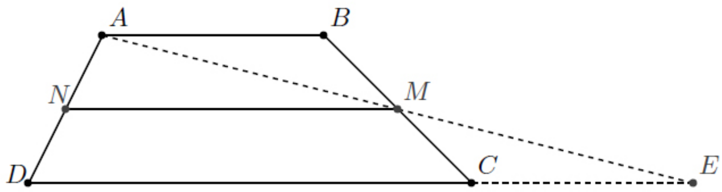
Assim, $MBCP$ é um paralelogramo, pois CP e BM são segmentos paralelos e iguais. Mas então $MP \parallel BC$ e

$$MP = BC \Rightarrow 2MN = BC \Rightarrow MN = \frac{BC}{2}.$$

Definição 2 A base média de um trapézio é o segmento que une os pontos médios de seus lados não paralelos.

Propriedade 3 Sejam $ABCD$ um trapézio de bases AB e CD, e sejam M e N os pontos médios dos lados BC e AD, respectivamente. Então,

$$MN \parallel AB, MN \parallel CD \text{ e } MN = \frac{AB + CD}{2}.$$



Prova
Inicialmente, prolonguemos AM até encontrar DC no ponto E. É fácil ver que

$$\Delta ABM \equiv \Delta CME(ALA) \Rightarrow AM = ME.$$

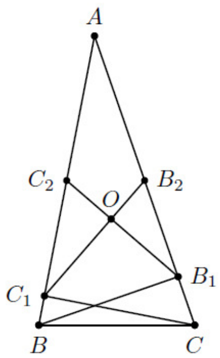
Portanto, MN é base média do triângulo ADE. Assim,

$$MN \parallel DE \Rightarrow MN \parallel DC, \text{ e } MN = \frac{DE}{2}.$$

Finalmente, $MN = \dfrac{DC+CE}{2} = \dfrac{DC+AB}{2}.$

Problema 1 (OBM)

Considere um triângulo acutângulo ABC com $\angle BAC = 30°$. Sejam B_1, C_1 os pés das alturas relativas aos lados AC, AB, respectivamente, e B_2, C_2 os pontos médios dos lados AC, AB, respectivamente. Mostre que os segmentos B_1C_2 e B_2C_1 são perpendiculares.



Solução

Seja O a interseção entre B_1C_2 e B_2C_1. O segmento B_1C_2 é uma mediana do triângulo retângulo AB_1B e portanto

$$AC_2 = B_1C_2 \text{ e } \angle C_2B_1A = \angle BAB_1 = 30°.$$

Analogamente, $AC_1B_2 = 30°$. Daí,

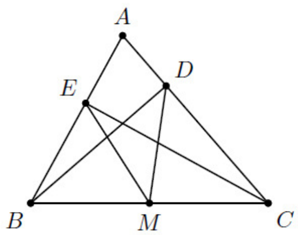
$$\angle BC_2B_1 = \angle C_2B_1A + \angle BAB_1 = 60°$$

e portanto

$$\angle C_1OC_2 = 180° - \angle BC_2B_1 - \angle AC_1B_2 = 90°.$$

Problema 2 Sejam ABC um triângulo e M o ponto médio do lado BC. Se D, E são os pés das alturas relativas aos lados AC, AB, respectivamente, prove que $ME = MD$.

Solução



Note que ME é mediana relativa à hipotenusa do triângulo BEC. Daí,

$$ME = BM = CM$$

e, analogamente,

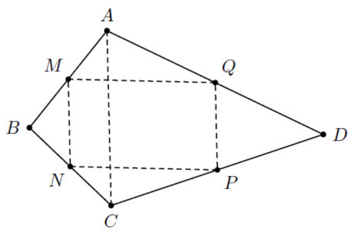
$$MD = BM = CM.$$

Assim, $ME = MD$.

Comentários M é o centro da circunferência circunscrita ao quadrilátero inscritível $BCDE$.

Problema 3 Dado um quadrilátero $ABCD$, prove que os pontos médios M, N, P, Q dos lados AB, BC, CD, DA formam um paralelogramo.

Solução



Temos

- Triângulo $ABC : MN \| AC$ e $MN = AC/2$.
- Triângulo $DAC : PQ \| AC$ e $PQ = AC/2$.

Assim, $MN \| PQ$ e $MN = PQ$, isto é, $MNPQ$ é paralelogramo.

Problema 4 Sejam ABC um triângulo e M o ponto médio de BC. Se $AM = BM = CM$, prove que $\angle BAC = 90°$.

Problema 5 (Torneio das Cidades) Sejam $ABCD$ um paralelogramo, M o ponto médio de CD e H o pé da perpendicular baixada de B a AM. Prove que BCH é um triângulo isósceles.

Problema 6 Em um triângulo ABC, retângulo em A e isósceles, sejam D um ponto no lado $AC(A \neq D \neq C)$ e E o ponto no prolongamento de BA tal que o triângulo ADE é isósceles. Se P é o ponto médio de BD, R o ponto médio de CE e Q a intersecção entre ED e BC, prove que o quadrilátero $ARQP$ é um quadrado.

Problema 7 No triângulo acutângulo ABC, CF é altura e BM é mediana. Sabendo que $BM = CF$ e $\angle MBC = \angle FCA$, prove que o triângulo ABC é equilátero.

Problema 8 Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que $\angle ABC = \angle CDA = 90°$ e $\angle BCD > \angle BAD$. Prove que $AC > BD$.

Problema 9 Seja ABC um triângulo acutângulo tal que $\angle B = 2\angle C, AD$ é perpendicular a BC, com D sobre BC, e E o ponto médio de BC. Prove que $AB = 2DE$.

Problema 10 Seja ABC um triângulo e D um ponto sobre o lado AC tal que $AB = CD$. Sejam E e F os pontos médios de AD e BC, respectivamente. Se a reta BA intersecta a reta FE em M, prove que $AM = ME$.

Problema 11 Uma reta r passa pelo baricentro de um triângulo ABC. As projeções de A, B e C sobre a reta r são M, N e P, respectivamente. Prove que $AM = BN + CP$.

Problema 12 (OBM) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, onde N é o ponto médio de DC, M é o ponto médio de BC e O é a interseção entre as diagonais AC e BD. Mostre que O é o baricentro do triângulo AMN se, e somente se, $ABCD$ é um paralelogramo.

Problema 13 (China) Seja $ABCD$ um trapézio, $AB // BC$, $\angle B = 30°$, $\angle B = 60°$, E, M, F, N os pontos médios de AB, BC, CD, DA respectivamente. Se $BC = 7$, $MN = 3$, determine a medida de EF.

Problema 14 (China) Seja $ABCD$ um trapézio, $AB // CD, \angle DAB = \angle ADC = 90°,$ e o triângulo ABC é equilátero. Se a base média do trapézio $EF = \frac{3}{4}a,$ determine o comprimento da menor base AB, em função de a.

Problema 15 (Moscou) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, O um ponto em seu interior tal que $\angle AOB = \angle COD = 120°, AO = OB, CO = OD.$ Sejam K, L, M os pontos médios de AB, BC, CD respectivamente, prove que ΔKLM é equilátero.

Problema 16 (China) Seja $ABCD$ um quadrilátero tal que $AD // BC.$ Se a bissetriz do ângulo $\angle DAB$ intersecta CD em E, e BE bissecta o ângulo $\angle ABC$, prove que $AB = AD + BC.$

Problema 17 (China) Seja $ABCD$ um quadrilátero tal que $AD > BC.$ Sejam E e F os pontos médios de AB e CD respectivamente. Se as retas AD e BC intersectam FE em H e G respectivamente, prove que $\angle AHE < \angle BGE.$

Problema 18 Seja ABC um triângulo e sejam D e E pontos sobre os lados AB e AC, respectivamente, tais que $AD = DB, AE = 2EC$ e BE intersecta CD em F. Prove que $4EF = BE.$

Problema 19 (OBM) Num quadrilátero convexo, a reta que passa pelos pontos médios de dois lados opostos forma ângulos iguais com ambas as diagonais. Mostre que as duas diagonais têm o mesmo comprimento.

Problema 20 Se um segmento paralelo a um lado de um triângulo tem uma extremidade no ponto médio de um lado e a outra extremidade no terceiro lado, prove que esta extremidade é ponto médio do terceiro lado.

Problema 21 (OBM) No triângulo ABC, D é ponto médio de AB e E é um ponto sobre o lado BC tal que $BE = 2 \cdot EC.$ Sabendo que $\angle ADC = \angle BAE$, calcule o valor de $\angle BAC.$

Problema 22 (Austrália) Sejam ABC um triângulo e P um ponto em seu interior de modo que $\angle PAC = \angle PBC.$ Se L, M são os pés das perpendiculares por P aos lados BC, AC, respectivamente, e D é o ponto médio de AB, prove que $DL = DM$.

Problema 23 (Romênia) Sejam ABC um triângulo isósceles com $AB = AC$, D o ponto médio de BC, M o ponto médio de AD e N a projeção de D sobre BM. Prove que $\angle ANC = 90°.$

Problema 24 (Eslovênia) Seja $ABCD$ um trapézio, com AB paralelo a CD. Sabendo que a distância entre os pontos médios das bases é igual à distância entre os pontos médios das diagonais, prove que $\angle DAC$ e $\angle DBC$ são ângulos obtusos.

Problema 25 Em um triângulo isósceles ABC, com $AB = BC$, sejam K, L pontos sobre AB, BC, respectivamente, tais que $AK + LC = KL$. A reta paralela a BC passando pelo ponto médio M de KL intersecta AC em N. Ache a medida de $\angle KNL$.

Problema 26 Sejam ABC um triângulo e D, E, F os pontos médios de BC, CA, AB, respectivamente. Prove que

$$\angle DAC = \angle ABE \Leftrightarrow \angle AFC = \angle ADB.$$

Problema 27 Seja $ABCD$ um trapézio com bases $AB = a$ e $CD = b$. Sejam também M, N os pontos médios dos lados AB, CD, respectivamente. Sabendo que $\angle DAB + \angle ABC = 90°$, determine o comprimento de MN.

Problema 28 (OBM) Sejam $ABCD$ um quadrilátero convexo, N o ponto médio de DC, M o ponto médio de BC e O a interseção entre as diagonais AC e BD. Mostre que O é o baricentro do triângulo AMN se e somente se $ABCD$ é um paralelogramo.

Problema 29 (Cone Sul) Seja ABC um triângulo acutângulo e sejam NA, BM e CP as alturas relativas aos lados BC, CA e AB, respectivamente. Sejam R, S as projeções de N sobre os lados AB, CA, respectivamente, e Q, W as projeções de N sobre as alturas BM, CP, respectivamente.

a) Mostre que R, Q, W e S são colineares.
b) Mostre que $MP = RS - QW$.

Problema 30 (TST Brasil) Sejam Q o ponto médio de lado AB de um quadrilátero inscritível $ABCD$ e S a interseção das diagonais AC e BD. Sejam P, R as projeções ortogonais de S sobre AD, BC, respectivamente. Prove que $PQ = QR$.

Bibliografia

[1]. Lecture Notes on Mathematical Olympiad Courses, for section vol. 1.
Xu Jiagu, World Scientific.
[2]. Problems and solutions in euclidean geometry.
M.N. Aref e William Wernick, Dover.
[3]. Challenging problems in geometry.
Alfred Pasamentier e Charles Salkind, Dover.

CAMPEONATOS

José Armando Barbosa Filho

♦ Nível Iniciante

Há uma grande variedade de problemas de olimpíadas que envolvem campeonatos. A principio, para simplificar o problema, vamos analisar casos onde cada partida acontece entre somente 2 entidades (pessoas, times,...). Por exemplo, há situações em que:

1. O vencedor ganha 3 pontos e, em caso de empate, cada time ganha 1 ponto.
2. O vencedor ganha 1 ponto e, em caso de empate, cada time ganha 0,5 ponto.
3. Não há empates. Nesse caso, o vencedor pode ganhar x pontos, onde x é uma variável a ser definida pelo problema.

Em cada caso, expressões diferentes podem ser obtidas. Por exemplo, no caso 2, pode-se deduzir que, em qualquer momento:

Número de jogos = soma dos pontos de todos os jogadores.

No entanto, essa relação não é válida para o caso 1. Porém, nem tudo é tão específico. Existem conclusões que podem ser facilmente deduzidas. Por exemplo, em qualquer instante:

Número de vitórias = número de derrotas (pois, sempre que um time ganha, um time perde) (1)
Número de empates sempre é par (afinal cada empate é contado duas vezes: uma para cada time envolvido) (2)
Número de vitórias + número de empates + números de derrotas = 2 × (número de jogos) (pois para cada partida em que houve vencedor, o número de vitórias e derrotas aumenta um e para cada partida que terminou empate, o número de empates aumenta dois) (3)
Em situações que envolvam futebol, de forma análoga, podemos concluir as mesmas equações acima para números de gols, sendo que em vez de números de vitórias seriam números de gols a favor e, em vez de números de derrotas, seriam números de gols contra. No caso da contagem de gols, falar em empates fica sem sentido. Portanto, poderíamos ter as equações abaixo:

Número de gols a favor = número de gols contra (4)
Número de gols a favor + número de gols contra = 2 × (número total de gols) (5)

Muito mais pode ser comentado sobre o assunto. No entanto, a abordagem por meio de exemplos pode ser bem mais interessante.

A primeira questão foi adaptada para adequar-se melhor à realidade.

Problema 1: (Rioplatense – Nível A - 2003)

Os cinco melhores times de futebol da América participaram de um torneio, onde todos jogam contra todos, uma única vez. De forma usual, em caso de vitória, o time vencedor ganha 3 pontos, em caso de empate, cada time ganha 1 ponto e, em caso de derrota, o time perdedor ganha 0 pontos. No final do torneio, faz-se uma tabela que mostra o total de pontos obtidos (Ptos), o número de vitórias (V), a quantidade de gols a favor (GF) e a quantidade de gols contra (GC). Porém, faltam alguns dados:

Time	Ptos	V	GF	GC
Ceará	10	3	4	0
Palmeiras	8	2	7	1
Boca Juniors	5	1	2	?
América	3	1	1	4
Alianza Lima	?	?	0	6

a) Indique o total de pontos, o número de vitórias do time Alianza Lima e a quantidade de gols recebidos pelo Boca Juniors. Justifique.

b) Determine o resultado de cada partida indicando o número de gols de cada equipe. Justifique.

Solução:
a) Para saber o número de pontos do time Alianza Lima, precisamos saber quantas vitórias e quantos empates ele teve. Desse modo, o nosso ponto de partida será encontrar quantas vitórias e quantos empates ele teve.
Se soubermos quantos jogos aconteceram, poderemos aplicar as equações (1), (2) e

(3) do começo.

Então, tentemos, inicialmente, descobrir quantos jogos aconteceram. Sendo 5 times, jogando todos contra todos, uma única vez, teremos que cada time joga 4 vezes, pois um time não joga contra si mesmo. No entanto, nessa contagem, cada jogo é contado duas vezes: uma para cada time. Por isso, temos que dividir por 2. Logo, a quantidade de jogos é igual a:

$$\text{número de jogos} = \frac{5\times 4}{2} = 10.$$

Agora, busquemos tentar descobrir quantos empates os outros times tiveram. Como cada vitória vale 3 pontos e cada empate vale 1 ponto, descobrir a quantidade de empates fica fácil. Veja por que:

3 × (vitórias) + empates = pontos
Empates = pontos – 3 × (vitórias) (6)

Daí, aplicando a equação (6) para os times, exceto o Alianza Lima, temos que:

Ceará: 10 – 3 × 3 = 1 empate
Palmeiras: 8 – 3 × 2 = 2 empates
Boca Juniors: 5 – 3 × 1 = 2 empates
America = 3 – 3 × 1 = 0 empates.

Os times, exceto o Alianza Lima, possuem: 3 + 2 + 1 + 1 = 7 vitórias.
Daí, sendo x e y, respectivamente, a quantidade de vitórias e empates do Alianza Lima, temos, pelas equações anteriores, que:

Pela equação (1), derrotas = vitórias = $x + 7$
Pela equação (2), empates = $y + 1 + 2 + 2 = y + 5$ é par, y é ímpar
Pela equação (3), $(x + 7) + (y + 5) + (x + 7) = 2 \times 10 = 20$
$2x + y + 19 = 20$
$2x + y = 1$

Sabemos que x e y são números positivos. Logo, $x = 0$ e $y = 1$.
Em outras palavras, o Alianza Lima venceu 0 jogos e empatou 1 jogo. Logo, ele fez 1 ponto.

Para saber quantos gols o Boca Juniors fez, basta aplicar a equação (4) do começo.

Sendo z a quantidade de gols que o Boca Juniors fez, temos que:

Pela equação (4), $4 + 7 + 2 + 1 + 0 = 0 + 1 + z + 4 + 6 \Rightarrow 14 = z + 11 \Rightarrow z = 3$

b) Para começar, calculemos o número de derrotas de cada time, sabendo que cada um jogou 4 jogos. Para facilitar, façamos a tabela abaixo, sabendo que já calculamos o número de empates de cada time no item anterior:

Time	Ptos	Jogos	V	E	D	GF	GC
Ceará	10	4	3	1	4 – 3 –1 = 0	4	0
Palmeiras	8	4	2	2	4 – 2 – 2 = 0	7	1
Boca Juniors	5	4	1	2	4 – 1 – 2 = 1	2	3
América	3	4	1	0	4 – 1 – 0 = 3	1	4
Alianza Lima	1	4	0	1	4 – 0 – 1 = 3	0	6

Daí, como Ceará e Palmeiras não perderam e, além disso, o Ceará não tomou gol, logo teremos que o jogo entre Ceará e Palmeiras terminou empate e, além disso:

Ceará 0 × 0 Palmeiras

Além do empate com o Ceará, o Palmeiras empatou outra partida. Além desse empate, houve mais 2 empates em jogos do Boca Juniors e outro empate do Alianza Lima. Se Palmeiras e Alianza Lima empataram, o Boca Juniors terá empatado 2 vezes contra não se sabe quem, o que é absurdo. Logo, houve empates entre Palmeiras e Boca Juniors e entre Boca Juniors e Alianza Lima. Como o Alianza Lima não fez gol, logo temos que:

Boca Juniors 0 × 0 Alianza Lima

Além do empate com o Boca Juniors, o Alianza Lima perdeu todas as outras partidas. Inclusive o jogo contra o América. O América só fez um gol, logo só há um resultado possível para o jogo entre América e Alianza Lima:

América 1 × 0 Alianza Lima

Logo, nos jogos entre Alianza Lima ou América contra Ceará, Palmeiras ou Boca Juniros, os times Alianza Lima e América não fizeram gol. Portanto, o gol que o Palmeiras levou foi contra o Boca Juniors em jogo que terminou empate. Logo, temos mais um resultado:

Palmeiras 1 × 1 Boca Juniors

O Boca Juniors fez 2 gols e levou 3. Considerando que o Boca Juniors teve 1 gol a favor e 1 gol contra, no jogo contra o Palmeiras e um empate de 0 a 0 contra o Alianza Lima, falta considerar a derrota contra o Ceará e a vitória contra o América. A única forma disso acontecer é:

Ceará 2 × 0 Boca Juniors
Boca Juniors 1 × 0 América

O Ceará fez 4 gols e levou 0. Sendo que ele venceu Alianza Lima e América e fez 2 gols contra o Boca Juniors, logo só há uma possibilidade:

Ceará 1 × 0 Alianza Lima
Ceará 1 × 0 América

Faltam apenas os jogos do Palmeiras contra o Alianza Lima e o América. Como sabemos os placares de Alianza Lima e de América contra dos demais e o resultado do jogo entre eles, logo temos que:

Palmeiras 4 × 0 Alianza Lima
Palmeiras 2 × 0 América

Portanto, os 10 jogos estão com os resultados especificados.

A questão 1 é um exemplo de uma idéia importante: dividir o problema em casos e resolvê-los. Algumas outras idéias podem ser aplicadas para resolver propriamente o problema ou apenas para conseguir novas equações para resolver o problema. Outras idéias importantes podem ser necessárias para resolução dos problemas. Vejamos mais 2 problemas cujas soluções dependiam um pouco de algum conhecimento sobre campeonatos e mais algumas outras idéias.

Problema 2: (OBM – Nível 1 – 2ª fase – 2009)
Um campeonato de xadrez de 7 rodadas, com 4 jogos por rodada, tem 8 participantes, cujas pontuações por jogo são as usuais: um ponto por vitória, meio ponto por empate e nenhum ponto por derrota. Cada par de jogadores se enfrenta exatamente uma vez.

a) Ao término da terceira rodada, é possível que um grupo de jogadores esteja em primeiro lugar e o restante dos jogadores esteja em segundo lugar? Explique por meio de um exemplo.

b) Ao término da terceira rodada, é possível que todos os jogadores tenham pontuações diferentes? Explique.

Solução:
a) Sim, basta na primeira rodada 4 jogadores vencerem e nas seguintes rodadas ser tudo empate.

b) Cada jogador fez no máximo $3 \times 1 = 3$ pontos (vencendo todas) e no mínimo 0 pontos.

As possibilidades de pontuação de cada jogador são: 0; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3. São 7 possibilidades para 8 jogadores, logo haverá, pelo menos, 2 jogadores com a mesma quantidade de pontos, pelo Princípio das Casas dos Pombos.

Na questão acima, vemos que uma forma interessante é pensar nos casos de todos empatarem todas as vezes ou, pelo menos, em uma determinada rodada. Isso pode nos ajudar a entender ou resolver uma questão.

Na próxima questão, note que não importa a pontuação atribuída a uma vitória. Importa apenas que não há empates, ou seja, há apenas vitórias e derrotas.

Problema 3: (OBM – Nível 2 – 3ª fase – 2006)
Em um torneio de tênis de mesa (no qual nenhum jogo termina empatado), cada um dos n participantes jogou uma única vez contra cada um dos outros. Sabe-se que, para todo $k > 2$, não existem k jogadores $J1$, $J2$, …, Jk tais que $J1$ ganhou de $J2$, $J2$ ganhou de $J3$, $J3$ ganhou de $J4$, …, $J(k-1)$ ganhou de Jk, Jk ganhou de $J1$.

Prove que existe um jogador que ganhou de todos os outros e existe um jogador que perdeu de todos os outros.

Solução: Seja Jv o jogador que mais venceu. Suponhamos que o jogador Jv não venceu todas. Então, existe um jogador Jx que o venceu. Note que se existe um jogador Ji que perdeu para Jv e venceu Jx, logo teremos que Jv ganhou de Ji que ganhou de Jx que ganha de Jv, fato que não é permitido pelo enunciado.
Logo todos os jogadores que Jv venceu, Jx venceu também. Mas, Jx venceu todos os jogadores vencidos por Jv e o Jv, ou seja, ele venceu mais jogadores do que o Jv. Absurdo! Portanto, se Jv é o jogador que mais venceu, ele venceu todas.
A idéia para mostrar que o jogador que mais perdeu, perdeu todas é totalmente análoga e fica como exercício para o leitor.

Na questão acima, a ideia crucial para resolução do problema é olhar para os casos de máximo e mínimo. Em questões além desse assunto, essa idéia, também, pode fazer sentido e, por isso, ela é de extrema importância.

Em outras questões parecidas, podemos ter situações onde pessoas conseguem pontuações em determinadas avaliações. Geralmente, nesses casos, deve-se tentar achar relações, por meio de equações. Nem sempre é necessário achar o valor das variáveis. Para exemplificar, veja o exemplo abaixo:

Problema 4: (Rioplatense – Nível A – 2000)
As possíveis pontuações para um exame são 0, 1, 2, 3, 4. Depois da correção, observou-se que o número de estudantes que obtiveram 3 pontos foi igual ao número de estudantes que obtiveram 2 pontos. Além disso, todos conseguiram, pelo menos, 1 ponto. A soma de todos os pontos obtidos por todos os estudantes no exame foi igual ao número de estudantes aumentado em 30. Encontre o número de estudantes que conseguiram, pelo menos, 3 pontos.

Solução:
Lembre-se que todo estudante fez, ao menos, 1 ponto.
Seja x o número de estudantes que conseguiram 1 ponto.
Seja y o número de estudantes que conseguiram 2 pontos.
Seja z o número de estudantes que conseguiram 3 pontos.
Seja w o número de estudantes que conseguiram 4 pontos.

Pelo enunciado, temos que:

$y = z$
$x + 2y + 3z + 4w = x + y + z + w + 30$

Substituindo a primeira equação acima na segunda acima, temos que:

$x + 2z + 3z + 4w = x + z + z + w + 30 \Rightarrow 5z + 4w = 2z + w + 30 \Rightarrow 3z + 3w = 30 \Rightarrow z + w = 10$

Logo, foram, pelo menos, 10 estudantes que conseguiram, pelo menos, 3 pontos.

Por último, façamos mais uma questão que envolve achar relações e equações. Note que na questão abaixo o resultado em gols de cada equipe não importa.

Problema 5: (Rioplatense – Nível A – 2000)
Quatro equipes A, B, C e D disputam um torneio de futebol. Todos jogam contra todos, uma única vez. Em caso de vitória, a equipe vencedora obtém 3 pontos e o perdedor 0 pontos. Em caso de empate, cada equipe obtém 1 ponto.
Ao final do torneio, as pontuações das equipes A, B, C e D foram a, b, c e d.
Observou-se que $a \geq b \geq c \geq d$ e que $a - b = b - c = c - \text{d}$

Encontre todas as possíveis pontuações finais das 4 equipes. Para cada uma dessas possibilidades, construa uma tabela com os resultados dos jogos e justifique porque estas são as únicas possíveis pontuações.

Por exemplo, uma pontuação final possível é: $a = 3$, $b = 3$, $c = 3$ e $d = 3$ e a tabela é:

A empata com B	B empata com C
A empata com C	B empata com D
A empata com D	C empata com D

Solução: Note que temos exatamente 6 partidas. Seja $S = a + b + c + d$; em outras palavras, S é igual à soma total de pontos. Note que cada empate diminui o valor de S, pois ao invés de somar 3 pontos, pontuação em caso de vitória, soma-se 2 pontos, 1 para cada time que empatou. Daí, temos que S máximo acontece quando não há empates e S mínimo acontece quando há somente empates. Ajeitando tudo numa equação, temos que:

$$6 \times 2 = 12 \leq a + b + c + d \leq 18 = 6 \times 3 \qquad (7)$$

Além disso, temos que:

$a - b = b - c \Rightarrow a = 2b - c$
$b - c = c - d \Rightarrow d = 2c - b$

Substituindo as equações acima na equação (7) e fazendo as contas, tem-se que:

$12 \leq 2 \times (b + c) \leq 18$
$6 \leq b + c \leq 9$

Agora, temos 4 casos:

1) $b + c = 6$. É o caso onde tudo é empate, pois corresponde à minimalidade na equação (7).
O caso que dá certo aqui é do enunciado.

2) $b + c = 7$. Como $b \geq c$, temos só 1 possibilidade:

2.1) $b = 4$, $c = 3$. Nesse caso, como $a - b = b - c = c - d = 1$, logo temos que $a = 5$ e $d = 2$. Como há, no máximo, 3 empates para cada equipe, logo, nesse caso, podemos perceber que A tem 2 empates, B tem 1 empate, D tem 2 empates e há uma quantidade par de empates (equação (2) lá no começo), logo C tem 3 empates. Portanto, A tem 1 vitória, B tem 1 vitória e 1 derrota e D tem 1 derrota. O caso A vence D é absurdo, pois B não pode vencer a si mesmo. Logo A vence B e B vence D. O resto das partidas termina empatado.

2.2) b=5, c=2. Nesse caso, d= -1. Absurdo. Logo, não temos mais casos.

3) $b + c = 8$. Como $b \geq c$, temos 2 possibilidades.

3.1) $b = 4$, $c = 4$. Nesse caso, como $a - b = b - c = c - d = 0$, logo temos $a = 4$ e $d = 4$. Nesse caso, há 1 vitória, 1 empate e 1 derrota para cada equipe. Nesse caso, podemos fazer, por exemplo, *A* vence *B*, que vence *C*, que vence *D*, que vence *A* e empates entre *A* e *C* e entre *B* e *D*.

3.2) $b = 5$, $c = 3$. Nesse caso, como $a - b = b - c = c - d = 2$, logo temos $a = 7$ e $d = 1$. Nesse caso, *A* tem 1 empate, *B* tem 2 empates e *D* tem 1 empate. *C* ter 3 empates geraria uma quantidade ímpar de empates, o que é absurdo com a paridade de empates (equação (2) do começo). Logo, *C* não tem empates. Se *A* empata com *D*, *B* fica sem ter com quem empatar, o que geraria um absurdo. Logo, *A* empata com *B* e vence *C* e *D*, pois *A* faz 7 pontos. Além disso, *B* vence *C* e empata com *A* e *D*, pois *B* faz 5 pontos. Por último, *C* vence *D*.

3.3) $b = 6$, $c = 2$. Nesse caso, $d = -2$. Absurdo. Logo, não temos mais casos.

4) $b + c = 9$. É o caso onde tudo é vitória e derrota, pois corresponde a maximalidade da equação (7).
Sabendo que $a \geq b \geq c \geq d$, logo temos que A vence todas, B vence C e D e, por último, C vence D.

Mais problemas:

Problema 6: Na questão anterior, seria possível A fazer 8 pontos? Justifique sua resposta.

Problema 7: Considere um campeonato brasileiro de futebol com 20 times. Pelas regras de futebol, sabe-se que, em caso de vitória, o time vencedor soma 3 pontos e o time perdedor soma 0 pontos. Em caso de empate, os times que empataram somam 1 ponto cada um. No começo do campeonato, todos começam com nenhum ponto ganho. Cada rodada é composta por 10 jogos, com cada time jogando uma única vez por rodada. Sabe-se que ao final de 7 rodadas, nenhum time venceu todas e nenhum time perdeu todas. Prove que, após 7 rodadas, haverá, ao menos, dois times com a mesma pontuação.

Problema 8: Um campeonato de basquete acontece no estilo todos jogam contra todos, uma única vez. Prove que acontece, pelo menos, uma das situações abaixo:
1. Um time vence todas.
2. Um time perde todas.
3. Dois times vencem uma quantidade igual de partidas.

Problema 9: (Olímpiada de Maio – Nível 1 – 1999)
Ana, Beatriz, Carlos, Diego e Emilia participam de um torneio de xadrez.
Cada jogador enfrenta só uma vez cada um dos outros quatro jogadores.
Cada jogador soma 2 pontos se vence a partida, 1 ponto se empata e 0 ponto se perde.
No final do torneio, nota-se que as pontuações dos 5 jogadores são todas distintas.
Ache o número máximo de empates que pode haver acontecido no torneio e justifique por que não pode haver um número maior de empates.

Problema 10: (Olímpiada de Maio – Nível 1 – 2008)
No colégio Olímpico, as notas dos exames são, sempre, números inteiros, sendo a menor nota igual a 0 e a maior nota igual a 10. Na classe de aritmética, o professor aplica dois exames na sua turma de 15 alunos. Quando um de seus alunos obtém menos que 3 no primeiro exame e mais que 7 no segundo, ele é chamado de aluno superado. O professor ao terminar de corrigir os exames, fez a média das 30 notas e

obteve a nota 8 de média. Qual é a maior quantidade de alunos superados que pode ter havido nessa classe?

Problema 11: (OBM – Nivel 1 – 2ª fase – 2002)
No jogo pega-varetas, as varetas verdes valem 5 pontos cada uma, as azuis valem 10 pontos, as amarelas valem 15, as vermelhas, 20 e a preta, 50. Existem 5 varetas verdes, 5 azuis, 10 amarelas, 10 vermelhas e 1 preta. Carlinhos conseguiu fazer 40 pontos numa jogada. Levando em conta apenas a quantidade de varetas e suas cores, de quantas maneiras diferentes ele poderia ter conseguido essa pontuação, supondo que em cada caso fosse possível pegar as varetas necessárias?

Problema 12: (Seletiva de Fortaleza para a Olímpiada Rioplatense de Matemática – 2001)
Quatro problemas são propostos em uma Olímpiada de Matemática. Cada problema vale 4 pontos. Após todas as provas terem sido corrigidas, notou-se que quaisquer dois participantes não obtiveram mesma pontuação em mais de um problema. (Cada estudante pode obter 0, 1, 2, 3 ou 4 pontos em cada problema).

a) Mostre que o número de participantes não pode ser igual a 26.
b) Dê um exemplo mostrando que podemos ter 25 estudantes.

SOLUÇÕES DE PROBLEMAS PROPOSTOS

Publicamos aqui algumas das respostas enviadas por nossos leitores.

134) Considere a operação $\cdot$ entre dois vetores do $\mathbb{R}^3$ definida por: $(x,y,z)\cdot(u,v,w)=(xu+yw+zv,xw+zu+yv,xv+yu+zw)$.

Prove que, para todo $k\geq 1,$ se $(x,y,z)^k=(0,0,0)$ então $x=y=z=0.$

Obs.: Para qualquer $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,(x,y,z)^1=(x,y,z)$ e, para todo $k>1,$ $(x,y,z)^k=(x,y,z)\cdot(x,y,z)^{k-1}.$

SOLUÇÃO DE ZOROASTRO AZAMBUJA NETO (RIO DE JANEIRO – RJ)

Se $s(x,y,z)=x+y+z,$ temos

$s((x,y,z)\cdot(u,v,w))=xu+yw+zv+xw+zu+yv+xv+yu+zw=(x+y+z)(u+v+w)=$
$=s(x,y,z)\cdot s(u,v,w).$ Assim, se $(x,y,z)^k=(0,0,0),$ temos
$0=s(0,0,0)=s(x,y,z)^k$, donde $s(x,y,z)=0.$

Se $X=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | s(x,y,z)=0\}=\{(x,y,-x-y),x,y\in\mathbb{R}\},$ temos
$(x,y,z),(u,v,w)\in X\Rightarrow(x,y,z)\cdot(u,v,w)\in X.$

De fato, $(x,y,-x-y)\cdot(u,v,-u-v)=(a,b,-a-b),$ onde
$a=xu-y(u+v)-v(x+y)$ e $b=-x(u+v)-u(x+y)+yv.$ Considere a transformação linear $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por
$T(u,v)=(xu-y(u+v)-v(x+y),-x(u+v)-u(x+y)+yv).$

Se as duas primeiras coordenadas de um elemento $\alpha\in X$ são $(u,v),$ as duas primeiras coordenadas de $(x,y,-x-y)\cdot\alpha$ são dadas por $T(u,v).$ Assim, para $k\geq 1,$ temos $(x,y,z)^k=(0,0,0)$ se e somente se $z=-x-y$ e $T^{k-1}(x,y)=(0,0).$

A matriz de T é $\begin{pmatrix} x-y & -(x+2y) \\ -(2x+y) & y-x \end{pmatrix},$ cujo determinante é

$-(x-y)^2-(2x+y)(x+2y)=-3(x^2+xy+y^2)=-3\left(\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3y^2}{4}\right),$ que só se anula quando $x=y=0.$ Assim, se $(x,y)\neq(0,0),$ temos det $T\neq 0$ e logo

$\det\left(T^{k-1}\right)=\left(\det T\right)^{k-1}\neq 0,$ para todo $k\geq 1,$ donde $T^{k-1}\left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)$ (pois $\left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)$), e logo $\left(x,y,-x-y\right)^{k}\neq\left(0,0,0\right)$, o que resolve o problema.

135) Considere um hemisfério cuja base é um círculo $\left(C_1\right)$. Um círculo $\left(C_2\right)$ do hemisfério é paralelo a $\left(C_1\right)$, de forma que existem *n* círculos do hemisfério, congruentes, tangentes entre si, a $\left(C_1\right)$ e a $\left(C_2\right)$. Mostre que a razão *K*(*n*) entre os raios de $\left(C_2\right)$ e $\left(C_1\right)$ é igual a: $K\left(n\right)=\dfrac{\cos^2\pi/n}{1+sen^2\,\pi/n}.$

SOLUÇÃO DE JOSÉ DE ALMEIDA PANTERA (RIO DE JANEIRO – RJ)

Sejam $\widetilde{C}_j, 0\leq j\leq n-1,$ os *n* círculos tangentes a C_1 e a C_2. Podemos supor sem perda de generalidade que o hemisfério é $H=\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,z\geq 0 \text{ e } x^2+y^2+z^2=1\right\}$, $C_1=\left\{\left(\cos\theta, sen\theta, 0\right), \theta\in\left[0,2\pi\right]\right\}$ e $C_2=\left\{\left(\cos\alpha\cos\theta,\cos\alpha sen\theta, sen\alpha\right),\theta\in\left[0,2\pi\right]\right\}$, para um certo $\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ (e logo o raio de C_2 é $\cos\alpha$). Podemos também supor que $\widetilde{C}_j$ é tangente a C_1 em $\left(\cos\dfrac{2j\pi}{n}, sen\dfrac{2j\pi}{n},0\right)$, e (logo) a C_2 em $\left(\cos\alpha\cos\dfrac{2j\pi}{n},\cos\alpha sen\dfrac{2j\pi}{n}, sen\alpha\right)$.

Assim, o centro de $\widetilde{C}_j$ é $\left(\left(\dfrac{1+\cos\alpha}{2}\right)\cos\dfrac{2j\pi}{n},\left(\dfrac{1+\cos\alpha}{2}\right)sen\dfrac{2j\pi}{n},\dfrac{sen\alpha}{2}\right)$.

Considere os círculos $\widetilde{C}_0$ e $\widetilde{C}_1$.

Seus raios são iguais a $\left|\left(\dfrac{1-\cos\alpha}{2},0,\dfrac{sen\alpha}{2}\right)\right|=\sqrt{\left(\dfrac{1-\cos\alpha}{2}\right)^2+\left(\dfrac{sen\alpha}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}=sen\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$

(que é a distância entre o centro de $\widetilde{C}_0$ e o ponto de tangência entre $\widetilde{C}_0$ e C_1), e as distâncias entre o centro $0=\left(0,0,0\right)$ da esfera e os centros de $\widetilde{C}_0$ e $\widetilde{C}_1$ são iguais a

$$\sqrt{\left(\frac{1+\cos\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{sen\alpha}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Considerando a reta *r*, interseção dos planos que contêm os círculos $\widetilde{C}_0$ e $\widetilde{C}_1$, temos que *r* é tangente à esfera e aos círculos $\widetilde{C}_0$ e $\widetilde{C}_1$. O plano perpendicular a *r* passando por *P* contém os centros Q_1 e Q_2 de $\widetilde{C}_0$ e de $\widetilde{C}_1$ e o centro *O* da esfera.

Os triângulos OQ_1P e OQ_2P são retângulos com hipotenusa OP, e logo $\overline{Q_1Q_2}$ é o dobro da altura do triângulo retângulo OQ_1P, que, como $OP=1, OQ_1=\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ e $Q_1P=sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, é igual a $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Big/1$. Assim, $\overline{Q_1Q_2}=2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, mas $\overline{Q_1Q_2}$ é a distância entre os pontos $\left(\frac{1+\cos\alpha}{2},0,\frac{sen\alpha}{2}\right)$ e $\left(\left(\frac{1+\cos\alpha}{2}\right)\cos\frac{2\pi}{n},\left(\frac{1+\cos\alpha}{2}\right)sen\frac{2\pi}{n},\frac{sen\alpha}{2}\right)$, a qual é igual a $\left(\frac{1+\cos\alpha}{2}\right)\sqrt{\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)^2+sen^2\frac{2\pi}{n}}=\left(\frac{1+\cos\alpha}{2}\right)\sqrt{2-2\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}=\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot 2sen\left(\frac{\pi}{n}\right)$,

e logo $2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)sen\left(\frac{\pi}{n}\right)$, donde $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=sen\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Assim, o raio de C_2 é $\cos\alpha=\frac{1-\tan^2(\alpha/2)}{1+\tan^2(\alpha/2)}=\frac{1-sen^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1+sen^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}=\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1+sen^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}$, cqd.

142) Seja $A=\{4,8,9,16,25,27,32,36,49,64,...\}$ o conjunto das potências não triviais (números da forma a^b, com $a\geq 2,\ b\geq 2$ naturais). Prove que, para todo natural $n\geq 1$, existe um natural k tal que todos os termos da progressão aritmética $k,2k,3k,...,nk$ pertencem a A.

SOLUÇÃO DE MARCELO RIBEIRO (RIO DE JANEIRO – RJ)

Lema: $\left(\exists b\in\mathbb{Z}\,\middle|\,ab\equiv 1(\mathrm{mod}\,n)\right)\Leftrightarrow mdc(a,n)=1.$

Demonstração: Artigo "Divisibilidade, Congruências e Aritmética Módulo *n*", Eureka Nº2, ou qualquer texto sobre Teoria dos Números.

Mostraremos que, dado $n\geq 2, n\in\mathbb{N}$, podemos escolher (n – 1) números naturais, digamos $\alpha_1,...,\alpha_{n-1}$, de forma a termos $k=2^{\alpha_1}\times 3^{\alpha_2}\times...\times n^{\alpha_{n-1}}$ satisfazendo o enunciado.

Tomemos, para isso, $p_1, p_2, ..., p_n$ números primos, distintos. Basta, agora, mostrar que o sistema de equações

$$\begin{cases} \alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv ... \equiv \alpha_{n-1} \equiv 0 \pmod{p_1} \\ \alpha_1 + 1 \equiv \alpha_2 \equiv ... \equiv \alpha_{n-1} \equiv 0 \pmod{p_2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv ... \equiv \alpha_{n-1} + 1 \equiv 0 \pmod{p_n} \end{cases}$$

Apresenta solução em inteiros.

De fato, $\forall i \in \{1, 2, ..., n-1\}$, tomemos

$$\alpha_i = \left(\prod_{j=1,\, j \neq i+1}^{n} p_j \right) \times k_i, k_i \in \mathbb{Z}^+.$$

Este valor satisfará a todas as equações, a menos talvez de

$$\alpha_i + 1 \equiv 0 \pmod{p_{i+1}}.$$

Contudo, pelo lema, podemos escolher k_i, de forma a termos

$$\alpha_i = \left(\prod_{j=1,\, j \neq i+1}^{n} p_j \right) \times k_i \equiv -1 \pmod{p_{i+1}},$$

já que mdc $\left(\left(\prod_{j=1,\, j \neq i}^{n} p_j \right), p_{i+1} \right) = 1$. (Podemos supor k_i naturais senão somamos um múltiplo conveniente de p_{i+1}).

145) Encontre todos os números racionais p, q, r de modo que $p \cos\frac{\pi}{7} + q \cos\frac{2\pi}{7} + r \cos\frac{3\pi}{7} = 1$.

SOLUÇÃO DE MICHEL FALEIROS MARTINS (CAMPINAS – SP)

Considere os polinômios p_n tais que $P_n(2\cos\theta) = 2\cos(n\theta), n \geq 0$.

Como $\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta \cdot \cos(n\theta)$, temos que

$P_{n+1}(x) = x \cdot P_n(x) - P_{n-1}(x)$, onde $x = 2\cos\theta$ e $n \geq 1$.

Agora, $P_0(x) = 2$ e $P_1(x) = x \Rightarrow$

$P_2(x) = x^2 - 2, P_3(x) = x^3 - 3x, P_4(x) = x^4 - 4x^2 + 2, ...$

Afirmamos que, sendo $\alpha = 2\cos\frac{\pi}{7}$,

(I) α é raiz da equação $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$;

(II) α é irracional;

(III) $2\cos\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{2\pi}{7}+2\cos\frac{3\pi}{7}=1.$

Prova das afirmações:

(I) $\frac{3\pi}{7}=\pi-\frac{4\pi}{7}\Rightarrow\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}=0\Rightarrow P_3(\alpha)+P_4(\alpha)=0$

$\Rightarrow(\alpha^3-3\alpha)+(\alpha^4-4\alpha^2+2)=0\Rightarrow\alpha^4+\alpha^3-4\alpha^2-3\alpha+2=0$

$\Rightarrow(\alpha+2)\cdot(\alpha^3-\alpha^2-2\alpha+1)=0\Rightarrow\alpha^3-\alpha^2-2\alpha+1=0.$

(II) Pelo Teorema da Raiz Racional, as possíveis raízes racionais não nulas de $x^3-x^2-2x+1=0$ são ±1. No entanto, nenhum desses dois valores é, de fato, raiz.

(III) Como $2sen\phi\cdot\cos\theta=sen(\phi+\theta)+sen(\phi-\theta)$, temos que

$$2sen\frac{\pi}{7}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\right)$$

$$=\left(sen\frac{2\pi}{7}+sen\ 0\right)-\left[sen\frac{3\pi}{7}+sen\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right]+\left[sen\frac{4\pi}{7}+sen\left(-\frac{2\pi}{7}\right)\right]=sen\frac{\pi}{7}$$

$$\Rightarrow 2\cos\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{2\pi}{7}+2\cos\frac{3\pi}{7}=1.$$

Lema: (0, 0, 0) é o único terno de racionais (p',q',r') que satisfaz

$$2p'\cos\frac{\pi}{7}-2q'\cos\frac{2\pi}{7}+2r'\cos\frac{3\pi}{7}=0 \qquad (1).$$

Prova: $2\cos\frac{2\pi}{7}=P_2(\alpha)=\alpha^2-2$

$2\cos\frac{3\pi}{7}=P_3(\alpha)=\alpha^3-3\alpha=\alpha^2+2\alpha-1-3\alpha=\alpha^2-\alpha-1$

(1) $\Leftrightarrow\alpha p'-(\alpha^2-2)q'+(\alpha^2-\alpha-1)r'=0$

$\Leftrightarrow\alpha^2\cdot(r'-q')+\alpha(p'-r')+(2q'-r')=0$

Temos os dois casos:

(i) $r'-q'=0.$

- Se $p'-r'\neq0$, então $\alpha=\frac{r'-2q'}{p'-r'}\in\mathbb{Q}$, absurdo.

- Se $p'-r'=0$, então $2q'-r'=0 \Rightarrow p'=q'=r'=0$ e obtemos a solução trivial de (1).

(ii) $r'-q'\neq 0$.

Resolvendo a equação de segundo grau temos que $\alpha \in \left\{s+\sqrt{t}, s-\sqrt{t}\right\}$ com $s,t \in \mathbb{Q}$.

- Se $t<0, \alpha$ é complexo, absurdo.
- Se $t=0$ ou $t>0$ e $\sqrt{t} \in \mathbb{Q}, \alpha$ é racional, absurdo.

Portanto, $t>0$ e $\sqrt{t} \notin \mathbb{Q}$. Mas

$$\left(s \pm \sqrt{t}\right)^3 - \left(s \pm \sqrt{t}\right)^2 - 2\left(s \pm \sqrt{t}\right) + 1 =$$
$$\left(s^3 - s^2 + 3st - 2s - t + 1\right) \pm \sqrt{t}\left(3s^2 - 2s - 2 + t\right)$$

Como $\alpha^3 - \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$ e $\sqrt{t} \notin \mathbb{Q}^*$,

$$3s^2 - 2s - 2 + t = 0 \ (2) \quad \text{e} \quad s^3 - s^2 + 3st - 2s - t + 1 = 0 \quad (3).$$

$(2) \Rightarrow t = -3s^2 + 2s + 2.$ Substituindo em (3),

$$s^3 - s^2 + 3s\left(-3s^2 + 2s + 2\right) - 2s - \left(-3s^2 + 2s + 2\right) + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (2s)^3 - 2(2s)^2 - (2s) + 1 = 0.$$

Pelo Teorema da Raiz Racional, $2s = \pm 1$ são as únicas possibilidades de raiz racional não nula, mas nenhum desses dois valores é, de fato, raiz.

Portanto, $p'=q'=r'=0$ é a única solução racional de (1).

Voltando ao problema original, se $p\cos\frac{\pi}{7} + q\cos\frac{2\pi}{7} + r\cos\frac{3\pi}{7} = 1$ então, de (III), obtemos

$$(p-2)\cos\frac{\pi}{7} + (q+2)\cos\frac{2\pi}{7} + (r-2)\cos\frac{3\pi}{7} = 0.$$

Pelo Lema, $p-2 = q+2 = r-2 = 0 \Leftrightarrow p=2, q=-2$ e $r=2$.

Portanto, a equação dada tem uma única solução racional: $(p,q,r) = (2,-2,2)$.

146) Determine todos os subconjuntos não-vazios A, B, C de $\mathbb{N}$ de modo que:

a) $A \cap B = B \cap C = C \cap A = \varnothing$.

b) $A \cup B \cup C = \mathbb{N}$.

c) para quaisquer $a \in A, b \in B$ e $c \in C$, temos: $a+c \in A, b+c \in B$ e $a+b \in C$.

SOLUÇÃO DE MICHEL FALEIROS MARTINS (CAMPINAS – SP)

$A=\{1,4,7,...\}, B=\{2,5,8,...\}$ e $C=\{0,3,6,...\}$

ou

$A=\{2,5,8,...\}, B=\{1,4,7,...\}$ e $C=\{0,3,6,...\}$.

Lema: Se S e T são dois subconjuntos não vazios dos naturais com a propriedade que $s+t\in S$ se $s\in S$ e $t\in T$, então $s+k\cdot t\in S$ para todo $k\in\mathbb{N}=\{0,1,2,...\}$, se $s\in S$ e $t\in T$.

Prova: Por indução sobre k: para $k = 0$, $s\in S$ é verdadeiro. Supondo que $s+k\cdot t\in S$ para algum $k\in\mathbb{N}$, então $s+(k+1)\cdot t=(s+k\cdot t)+t\in S$, o que completa a indução.

Considere $a\in A$, $b\in B$ e $c\in C$ elementos quaisquer. Sejam α,β e γ os menores elementos de A, B e C, respectivamente. Se $\alpha=0, 0+b\in C\Rightarrow b\in C$, absurdo. Analogamente se $\beta=0$. Logo, $\gamma=0$. Como $\alpha+\beta\in C$ e $\alpha+\beta\geq 3$ então C admite um elemento mínimo $m\geq 1$.

Se $m=1$, pelo lema, $\alpha+k\cdot m=\alpha+k\in A$ e $\beta+l\in B$ para quaisquer $k,l\in\mathbb{N}\Rightarrow\alpha+\beta\in A$ e $\beta+\alpha\in B$, absurdo.

Pela simetria do problema em relação a A e B, suponha $\alpha=1$.

Se $m = 2$, pelo lema, A é o conjunto dos naturais ímpares e então β é par. Mas aí $\alpha+\beta\in C$ e como $\alpha+\beta=1+\beta$ é ímpar $\Rightarrow\alpha+\beta\in A$, absurdo.

Se $m = 3$, temos dois casos:

(i) $2\in A\Rightarrow 3k+1, 3k+2\in A$ para todo $k\in\mathbb{N}$, pelo lema. Então, $\beta=3l$ para algum $l\geq 1\Rightarrow\alpha+\beta=1+3l\in A$, mas $\alpha+\beta\in C$, absurdo.

(ii) $2\in B\Rightarrow 3k+2\in B$ para todo $k\in\mathbb{N}$, pelo lema; e $1\in A\Rightarrow 3l+1\in A$ para todo $l\in\mathbb{N}$, pelo lema. Então, $a+b=(3k+2)+(3l+1)=3(k+l+1)\in C$ para quaisquer $k,l\in\mathbb{N}$. Assim, $A=\{1,4,7,...\}, B=\{2,5,8...\}$ e $C=\{0,3,6,...\}$. Esses conjuntos satisfazem as condições dadas e, pela simetria, $A=\{2,5,8,...\}$, $B=\{1,4,7,...\}$ e $C=\{0,3,6,...\}$ também cumprem as condições do problema.

Se $m\geq 4$, $\alpha+\beta\geq m\Rightarrow\beta\geq m-1\geq 3\Rightarrow\{1,2,3,...m-2\}\subset A$. Temos dois casos:

(i) $m-1\in A$, pelo lema, todo natural $n=r+k\cdot m$ com $1\leq r\leq m-1$ e $k\in\mathbb{N}$ pertence a A. Assim, $\beta=l\cdot m$ para algum $l\geq 2\Rightarrow\alpha+\beta=1+m\cdot(k+l)\in A$, mas $\alpha+\beta\in C$, absurdo.

(ii) $m-1\in B$. Então $\beta=m-1\geq 3$ e $2\in A\Rightarrow 2+(m-1)\in C$, mas $2+(m-1)=1+m\in A$, absurdo.

147) Demonstre que $\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{sen\left(\frac{(2k+1)\pi}{4n-2}\right)} = n + \frac{(-1)^n - 1}{2}$, para todo inteiro $n \geq 2.$

SOLUÇÃO DE MICHEL FALEIROS MARTINS (CAMPINAS – SP)

Seja $S_n = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{sen\left(\frac{(2k+1)\pi}{4n-2}\right)}, n \geq 2.$ Então,

$$\sum_{k=0}^{2n-2} \frac{(-1)^k}{sen\left(\frac{(2k+1)\pi}{4n-2}\right)} = \left(\frac{(-1)^0}{sen\left(\frac{\pi}{4n-2}\right)} + \ldots + \frac{(-1)^{n-3}}{sen\left(\frac{(2n-5)\pi}{4n-2}\right)} + \frac{(-1)^{n-2}}{sen\left(\frac{(2n-3)\pi}{4n-2}\right)} \right) +$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1}}{sen\left(\frac{(2n-1)\pi}{4n-2}\right)} + \left(\frac{(-1)^n}{sen\left(\frac{(2n+1)\pi}{4n-2}\right)} + \frac{(-1)^{n+1}}{sen\left(\frac{(2n+3)\pi}{4n-2}\right)} + \ldots + \frac{(-1)^{2n-2}}{sen\left(\frac{(4n-3)\pi}{4n-2}\right)} \right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{(-1)^k}{sen\left(\frac{(2k+1)\pi}{4n-2}\right)} = 2 \cdot S_n + (-1)^{n-1}.$$

pois $\frac{(2n+1)\pi}{4n-2} + \frac{(2n-3)\pi}{4n-2} = \pi, \frac{(2n+3)\pi}{4n-2} + \frac{(2n-5)}{4n-2} = \pi, \ldots, \frac{(4n-3)\pi}{4n-2} + \frac{\pi}{4n-2} =$
$= \pi, (-1)^{n+a} = (-1)^{n-2-a}$ para $0 \leq a \leq n-2,$ e $sen(\pi - \theta) = sen(\theta).$

Façamos $m = 4n - 2$. Então,

$$\frac{1}{sen\left(\frac{\pi}{m}\right)} - \frac{1}{sen\left(\frac{3\pi}{m}\right)} + \ldots - \frac{1}{sen\left(\frac{(m-3)\pi}{m}\right)} + \frac{1}{sen\left(\frac{(m-1)\pi}{m}\right)}$$

$$= -\frac{1}{sen\left(\frac{(m+1)\pi}{m}\right)} + \frac{1}{sen\left(\frac{(m+3)\pi}{m}\right)} - \ldots + \frac{1}{sen\left(\frac{(2m-3)\pi}{m}\right)} - \frac{1}{sen\left(\frac{(2m-1)\pi}{m}\right)}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{sen\left(\frac{(2k+1)\pi}{m}\right)} = 2 \cdot \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{(-1)^k}{sen\left(\frac{(2k+1)\pi}{4n-2}\right)} = 4S_n + 2(-1)^{n-1}.$$

Já que

$$\frac{(m+1)\pi}{m} + \frac{(m-1)\pi}{m} = 2\pi, \frac{(m+3)\pi}{m} + \frac{(m-3)\pi}{m} = 2\pi, \ldots, \frac{(2m-1)\pi}{m} + \frac{\pi}{m} = 2\pi, sen(2\pi - \theta) =$$

$sen(-\theta) = -sen(\theta)$ e m é par.

Seja $\varepsilon_k = e^{i\left(\frac{k\pi}{m}\right)}$ com $k \geq 1$. Como $sen(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$, temos que

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{sen\left(\frac{(2k+1)\pi}{m}\right)} = 2i \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k \varepsilon_{2k+1}}{\varepsilon_{2k+1}^2 - 1} = i \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \left[\frac{(-1)^k}{\varepsilon_{2k+1} - 1} + \frac{(-1)^k}{\varepsilon_{2k+1} + 1} \right].$$

Mas, $\varepsilon_{2k+1+m} = e^{i\left(\frac{(2k+1+m)\pi}{m}\right)} = e^{i\left(\frac{(2k+1)\pi}{m}\right) + \pi i} = -\varepsilon_{2k+1} \Rightarrow \varepsilon_{2k+1} = -\varepsilon_{2\cdot\left(\frac{m}{2}+k\right)+1}$.

Assim,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2\cdot 0+1} &= -\varepsilon_{2\cdot\left(\frac{m}{2}+0\right)+1} \\ \varepsilon_{2\cdot 1+1} &= -\varepsilon_{2\cdot\left(\frac{m}{2}+1\right)+1} \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ \varepsilon_{2\cdot\left(\frac{m}{2}-1\right)+1} &= -\varepsilon_{2\cdot\left(\frac{m}{2}+\frac{m}{2}-1\right)+1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}-1} \frac{(-1)^k}{\varepsilon_{2k+1} - 1} = \sum_{k=\frac{m}{2}}^{m-1} \frac{(-1)^{k+1}}{-\varepsilon_{2k+1} - 1} \quad \text{e} \quad \sum_{k=\frac{m}{2}}^{m-1} \frac{(-1)^k}{\varepsilon_{2k+1} - 1} = \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}-1} \frac{(-1)^{k+1}}{-\varepsilon_{2k+1} - 1}.$$

Como $\dfrac{m}{2} = 2n - 1$ é ímpar, o expoente k teve de ser trocado por $k + 1$ em ambas as igualdades, pois os índices dos somatórios começam em paridades diferentes.

Logo,

$$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^k}{\varepsilon_{2k+1}-1}=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^k}{\varepsilon_{2k+1}+1}\Rightarrow 4S_n+2(-1)^{n-1}=2i\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^k}{\varepsilon_{2k+1}-1}$$

e $$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^k}{\varepsilon_{2k+1}-1}=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^k\cdot e^{-i\left(\frac{\pi}{m}\right)}}{e^{i\left(\frac{2k\pi}{m}\right)}-e^{-i\left(\frac{\pi}{m}\right)}}=e^{-i\left(\frac{\pi}{m}\right)}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^{k+1}}{e^{-i\left(\frac{\pi}{m}\right)}-e^{i\left(\frac{2k\pi}{m}\right)}}$$

Sejam $S_+(x)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{x-\omega_k}$ e $S_-(x)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^{k+1}}{x-\omega_k}$, onde $\omega_k=e^{i\left(\frac{2k\pi}{m}\right)}$ com $0\le k\le m-1$ são as m–ésimas raízes da unidade.

Observe que, para um polinômio $P(x)=(x-r_0)(x-r_1)...(x-r_j)$,

$$\sum_{k=0}^{j}\frac{1}{x-r_k}=\sum_{k=0}^{j}(\ln|x-r_k|)'=\left(\sum_{k=0}^{j}(\ln|x-r_k|)\right)'=(\ln|P(x)|)'=\frac{P'(x)}{P(x)}.$$

Agora, sendo $P(x)=x^m-1=\left(x^{\frac{m}{2}}-1\right)\left(x^{\frac{m}{2}}+1\right)=\left(x^{\frac{m}{2}}-1\right)\cdot Q(x)$, as raízes de $x^{\frac{m}{2}}-1=\frac{P(x)}{Q(x)}$ são $\omega_{2k},0\le k\le\frac{m}{2}-1,$ e as raízes de $Q(x)$ são $\omega_{2k+1},0\le k\le\frac{m}{2}-1,$ pois

$$(\omega_{2k+1})^{\frac{m}{2}}=\left(e^{i\left(\frac{2(2k+1)\pi}{m}\right)}\right)^{\frac{m}{2}}=e^{i(2k+1)\pi}=-1,0\le k\le\frac{m}{2}-1.$$

Então, $S_+(x)+S_-(x)=2\cdot\sum_{k=0}^{\frac{m}{2}-1}\frac{1}{x-\omega_{2k+1}}$

$$\Rightarrow S_-(x)=2\cdot\frac{Q'(x)}{Q(x)}-\frac{P'(x)}{P(x)}=\frac{2\cdot\frac{m}{2}\cdot x^{\frac{m}{2}-1}}{x^{\frac{m}{2}}+1}-\frac{m\cdot x^{m-1}}{x^m-1}=\frac{m\cdot x^{\frac{m}{2}-1}}{1-x^m}$$

$$\Rightarrow 4\cdot S_n+2(-1)^{n-1}=2i\cdot e^{-\frac{i\pi}{m}}\cdot S_-\left(e^{-\frac{i\pi}{m}}\right)=2i\cdot\left(e^{-\frac{i\pi}{m}}\right)\cdot\frac{m\cdot\left(e^{-\frac{i\pi}{m}}\right)^{\frac{m}{2}-1}}{1-\left(e^{-\frac{i\pi}{m}}\right)^m}=m=4n-2.$$

Portanto, $S_n = n + \frac{(-1)^n - 1}{2}$ para todo $n \geq 2.$

148) Sejam *m* e *n* inteiros positivos. Calcule $\sum_{k=0}^{n-1} \left\lceil \frac{n-k}{m} \right\rceil.$

SOLUÇÃO DE CARLOS ALBERTO DA SILVA VICTOR (NILÓPOLIS – RJ)

$s = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lceil \frac{n-k}{m} \right\rceil$ onde *m* e *n* são inteiros positivos:

i) Seja $n \leq m$

$$s = \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil + \left\lceil \frac{n-1}{m} \right\rceil + \ldots \left\lceil \frac{1}{m} \right\rceil$$

Tomando: $\lceil x \rceil =$ menor inteiro maior do que ou igual a *x*, teremos:

$s = 1 + 1 + \ldots + 1 = n \cdot 1 = n.$

ii) Seja $n > m,$ logo $\boxed{n = q \cdot m + r}$ com $r \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$

Logo

$$s = \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil + \left\lceil \frac{n-1}{m} \right\rceil + \ldots + \left\lceil \frac{m}{m} \right\rceil + \left\lceil \frac{m-1}{m} \right\rceil + \ldots + \left\lceil \frac{1}{m} \right\rceil$$

$$s = r \cdot (q+1) + m(q + q - 1 + \ldots + 2 + 1)$$

$$s = r(q+1) + m \cdot q \cdot \frac{(q+1)}{2}$$

$$s = (q+1)\left(\frac{m \cdot q}{2} + r\right).$$

Se quisermos escrever esta expressão em termos apenas de *m* e *n*, obtemos $s = \left(\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor + 1\right)\left(\frac{m}{2} \cdot \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor + n - m\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor\right) = \left(\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor + 1\right)\left(n - \frac{m}{2}\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor\right).$ Note que essa fórmula também vale se $n \leq m.$

150) Sejam *a*, *b* e *c* números reais tais que $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 9.$

Prove que $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\geq\sqrt[3]{3}.$

SOLUÇÃO DE RENATO CARNEIRO (BELO HORIZONTE – MG)

Fazendo $a-b=x, b-c=y$ e $z=c-a,$ então teremos que provar que $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\geq\sqrt[3]{3}.$

Para isso, temos que $\begin{cases} x^3+y^3+z^3=9 \\ x+y+z=0 \end{cases}$, então vamos lá:

Fazendo $z=-(x+y)$, teremos

$$x^3+y^3+z^3=x^3+y^3-(x+y)^3=-3x^2y-3xy^2=-3xy(x+y)=3xyz=9\Rightarrow xyz=3.$$

Agora basta usar a famosa desigualdade das médias:

$$\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{y^2}\cdot\frac{1}{z^2}}\Rightarrow\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{1}{xyz}\right)^2}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^2}\Rightarrow\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\geq\sqrt[3]{3}.$$

Agradecemos o envio de soluções e a colaboração de:

Marcos Ferreira (Eunápolis – BA)	Prob. 134
Besaleel Júnior (Teresina – PI)	Prob. 144
Renato Carneiro (Belo Horizonte – MG)	Prob. 145, 146
Marcelo Ribeiro (Rio de Janeiro – RJ)	Prob. 150
Jean-Pierre Youyoute (Rio de Janeiro – RJ)	Prob. 150
Itamar Sales (Fortaleza – CE)	Prob. 150
Samuel Abdalla (Sorocaba – SP)	Prob. 150
Douglas Oliveira de Lima (Brasília – DF)	Prob. 150
Lucas Justo de Freitas Neto (Mossoró – RN)	Prob. 149
José Armando Barbosa Filho (Fortaleza – CE)	Prob. 134
Carlos Alberto da Silva Victor (Nilópolis – RJ)	Prob. 146, 150

Continuamos aguardando soluções para os problemas 143, 144, 149.

PROBLEMAS PROPOSTOS

Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e sugestões de novos problemas para próximos números.

151) Encontre todas as soluções reais positivas de $x^{x^{1/2}} = \frac{1}{2}$.

152) Sejam a, b, c números reais positivos tais que $a + b + c = 1$.
Prove que $\frac{a-bc}{a+bc} + \frac{b-ca}{b+ca} + \frac{c-ab}{c+ab} \le \frac{3}{2}$.

153) Quatro pontos *P,* Q, *R*, *S* pertencem a um círculo de tal forma que o ângulo $P\hat{S}R$ é reto. Sejam *H* e *K* as projeções de *Q* nos segmentos *PR* e *PS,* respectivamente. Prove que a reta *HK* divide o segmento *QS* ao meio.

154) Determine todas as funções $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \cap [0, +\infty)$ tais que $f(xy) = f(x) f(y)$ e $f(x+y) \le f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{Q}$.

155) Sejam a, b e c inteiros positivos, tais que existe um triângulo *T* de lados $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ e $\sqrt{c}$. Prove que são equivalentes:
i) Existe um triângulo congruente a *T* cujos vértices têm coordenadas inteiras em $\mathbb{R}^2$.
ii) *T* tem área racional e existem x, y inteiros com $a = x^2 + y^2$.
iii) *T* tem área racional e existem *u*, *v* inteiros com $mdc(a, b, c) = u^2 + v^2$.

156) Denominamos Máquina de Conway o par $C = (e; S)$ formado por uma entrada $e = 2^{\alpha_1}, a_1 \in \mathbb{N},$ e uma sequência finita $S = (s_i)_{1 \le i \le n}$ de racionais não nulos, com $s_n \in \mathbb{N}$.
Dada uma máquina de Conway *C*, construímos a sequência p_i definida por:

(1) $p_1 = e;$

(2) $p_k = p_{k-1} \cdot s_i$, onde *i* é o menor número inteiro positivo tal que $p_{k-1} \cdot s_i \in \mathbb{N}$.

Dizemos que $a \in \mathbb{N}$ é uma saída de *C* se, e somente se, existe um inteiro positivo *k* tal que $p_k = 2^a$.
O conjunto de todas as saídas é denominado conjunto gerado por *C*.
Exemplo: A máquina de Conway formada pela entrada 2^2 e pela sequência

$$\frac{17}{91},\frac{78}{85},\frac{19}{51},\frac{23}{38},\frac{29}{33},\frac{77}{29},\frac{95}{23},\frac{77}{19},\frac{1}{17},\frac{11}{13},\frac{13}{11},\frac{15}{14},\frac{15}{2},55$$

gera os números primos.
Mostre que é possível construir uma Máquina de Conway que gere o conjunto dos quadrados perfeitos.

Problema 151 proposto por Douglas Oliveira de Lima, de Brasília (DF). Problemas 152 e 153 propostos por Adriano Carneiro Tavares, de Caucaia (CE). Problema 156 proposto em uma prova de seleção para a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) de 1996.

AGENDA OLÍMPICA

XXXIV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

NÍVEIS 1, 2 e 3
Primeira Fase – sábado, 16 de junho de 2012
Segunda Fase – sábado, 22 de setembro de 2012
Terceira Fase – sábado, 27 de outubro de 2011 (níveis 1, 2 e 3)
domingo, 28 de outubro de 2012 (níveis 2 e 3 - segundo dia de prova)

NÍVEL UNIVERSITÁRIO
Primeira Fase – sábado, 22 de setembro de 2012
Segunda Fase – sábado, 27 e domingo, 28 de outubro de 2012

V ROMANIAN MASTER OF MATHEMATICS (RMM)
29 de fevereiro a 4 de março de 2012 (Bucareste, Romênia)

ASIAN PACIFIC MATH OLYMPIAD (APMO)
12 de março de 2012

XVIII OLIMPÍADA DE MAIO
12 de maio de 2012

XXIII OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL
27 de outubro a 03 de novembro (Lima, Peru)

LIII OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA
4 a 16 de julho de 2012 (Mar del Plata, Argentina)

II OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DA LUSOFONIA
20 a 28 de julho de 2012 (Salvador, Bahia)

XVIII OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA (IMC)
26 de julho a 1º de agosto de 2012 (Blagoevgrad, Bulgária)

XXVI OLIMPÍADA IBERO-AMERICANA DE MATEMÁTICA
29 de setembro a 6 de outubro de 2012 (Cochabamba, Bolívia)

IV COMPETIÇÃO IBERO-AMERICANA INTERUNIVERSITÁRIA DE MATEMÁTICA
1º a 5 de outubro de 2012 (Guanajuato, México)

XIV OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
A confirmar

COORDENADORES REGIONAIS

Alberto Hassen Raad	(UFJF)	Juiz de Fora – MG
Américo López Gálvez	(USP)	Ribeirão Preto – SP
Antonio Carlos Nogueira	(UFU)	Uberlândia – MG
Benedito Tadeu Vasconcelos Freire	(UFRN)	Natal – RN
Bruno Holanda	(CAEN – UFC)	Fortaleza – CE
Carmen Vieira Mathias	(UNIFRA)	Santa María – RS
Claus Haetinger	(UNIVATES)	Lajeado – RS
Cláudio de Lima Vidal	(UNESP)	S.J. do Rio Preto – SP
Denice Fontana Nisxota Menegais	(UNIPAMPA)	Bagé – RS
Disney Douglas Lima de Oliveira	(UFAM)	Manaus – AM
Edson Roberto Abe	(Colégio Objetivo de Campinas)	Campinas – SP
Edney Aparecido Santulo Jr.	(UEM)	Maringá – PR
Fábio Brochero Martínez	(UFMG)	Belo Horizonte – MG
Florêncio Ferreira Guimarães Filho	(UFES)	Vitória – ES
Francinildo Nobre Ferreira	(UFSJ)	São João del Rei – MG
Genildo Alves Marinho	(Centro Educacional Leonardo Da Vinci)	Taguatingua – DF
Herivelto Martins	(USP – São Carlos)	São Carlos – SP
Gilson Tumelero	(UTFPR)	Pato Branco – PR
Ivanilde Fernandes Saad	(UC. Dom Bosco)	Campo Grande – MS
João Benício de Melo Neto	(UFPI)	Teresina – PI
João Francisco Melo Libonati	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Diogo Diniz	(UFPB)	Campina Grande – PB
José Luiz Rosas Pinho	(UFSC)	Florianópolis – SC
José Vieira Alves	(UFPB)	Campina Grande – PB
José William Costa	(Instituto Pueri Domus)	Santo André – SP
Krerley Oliveira	(UFAL)	Maceió – AL
Licio Hernandes Bezerra	(UFSC)	Florianópolis – SC
Luciano G. Monteiro de Castro	(Sistema Elite de Ensino)	Rio de Janeiro – RJ
Luzinalva Miranda de Amorim	(UFBA)	Salvador – BA
Marcelo Dias	(Grupo Educacional Etapa)	São Paulo – SP
Marcelo Antonio dos Santos	FACOS	Osório – RS
Marcelo Rufino de Oliveira	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Newman Simões	(Cursinho CLQ Objetivo)	Piracicaba – SP
Nivaldo Costa Muniz	(UFMA)	São Luis – MA
Osnel Broche Cristo	(UFLA)	Lavras – MG
Uberlândio Batista Severo	(UFPB)	João Pessoa – PB
Raul Cintra de Negreiros Ribeiro	(Colégio Anglo)	Atibaia – SP
Reginaldo de Lima Pereira	(Escola Técnica Federal de Roraima)	Boa Vista – RR
Reinaldo Gen Ichiro Arakaki	(UNIFESP)	SJ dos Campos – SP
Ricardo Amorim	(Centro Educacional Logos)	Nova Iguaçu – RJ
Ronaldo Alves Garcia	(UFGO)	Goiânia – GO
Rogério da Silva Ignácio	(Col. Aplic. da UFPE)	Recife – PE
Rosangela Ramon	(UNOCHAPECÓ)	Chapecó – SC
Seme Gebara Neto	(UFMG)	Belo Horizonte – MG
Tadeu Ferreira Gomes	(UEBA)	Juazeiro – BA
Tomás Menéndez Rodrigues	(U. Federal de Rondônia)	Porto Velho – RO
Valdenberg Araújo da Silva	(U. Federal de Sergipe)	São Cristóvão – SE
Wagner Pereira Lopes	(CEFET – GO)	Jataí – GO
Wanderson Breder	(CEFET – RJ)	Nova Friburgo – RJ
William Serafim dos Reis	(UFT – TO)	Arraias – TO