CONTEÚDO

XVI OLIMPÍADA DE MAIO

PRIMEIRO NÍVEL

PROBLEMA 1

Um recipiente fechado com formato de paralelepípedo retangular contém 1 litro de água. Se o recipiente se apoia horizontalmente sobre três faces distintas, o nível da água é de 2cm, 4cm e 5cm.
Calcule o volume do paralelepípedo.

PROBLEMA 2

Na etapa 0 escrevem-se os números **1**, **1**.
Na etapa 1 intercala-se a soma dos números 1, **2**, 1.
Na etapa 2 entre cada par de números da etapa anterior intercala-se a soma deles: 1, **3**, 2, **3**, 1.
Uma etapa mais: 1, **4**, 3, **5**, 2, **5**, 3, **4**, 1.
Quantos números há na etapa 10?
Qual é a soma de todos os números que há na etapa 10?

PROBLEMA 3

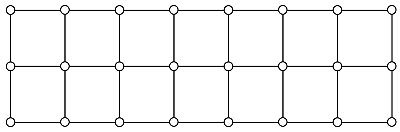
É possível pintar os inteiros positivos com três cores de modo que, sempre que se somam dois números de cores distintas, o resultado da soma seja da terceira cor? (Há que usar as três cores.) Se a resposta é afirmativa, indique um possível modo de pintar; se não é possível, explique o porquê.

PROBLEMA 4

Encontre todos os números naturais de 90 dígitos que são múltiplos de 13 e têm os primeiros 43 dígitos iguais entre si e distintos de zero, os últimos 43 dígitos iguais entre si, e os 4 dígitos do meio são 2, 0, 1, 0, nessa ordem.

PROBLEMA 5

Num tabuleiro de 2×7 quadriculado em casas de 1×1 se consideram os 24 pontos que são vértices das casas. João e Matias jogam sobre este tabuleiro. João pinta de vermelho uma quantidade igual de pontos em cada uma das três linhas horizontais. Se Matias pode escolher três pontos vermelhos que sejam vértices de um triângulo acutângulo, Matias vence o jogo. Qual é a máxima quantidade de pontos que João pode pintar para ter certeza de que Matias não vencerá? (Para o número encontrado, dê um exemplo de pintura que impeça que Matias vença e justifique por quê Matias vence sempre se o número é maior.)



SEGUNDO NÍVEL

PROBLEMA 1
Determine o menor inteiro positivo que tenha todos seus dígitos iguais a 4, e que seja múltiplo de 169.

PROBLEMA 2
Consideramos o retângulo *ABCD* e a circunferência de centro *D* e raio *DA*, que corta o prolongamento do lado *AD* no ponto *P*. A reta *PC* corta a circunferência no ponto *Q* e o prolongamento do lado *AB* no ponto *R*. Demonstre que $QB = BR$.

PROBLEMA 3
Encontre o menor $k > 2$ para o qual existem k números inteiros consecutivos, tais que a soma dos seus quadrados é um quadrado.

PROBLEMA 4
Seja n um inteiro tal que $1 < n < 2010$. Dado um polígono regular de 2010 lados e n moedas, devemos pintar os vértices do polígono utilizando n cores dadas, e logo colocar as n moedas em n vértices do polígono. Em seguida, a cada segundo, todas as moedas se deslocam para o vértice vizinho, girando no sentido dos ponteiros do relógio.
Determine os valores de n para os quais é possível pintar e escolher as posições iniciais das moedas, de forma que em todo momento as n moedas estejam todas em vértices de cores distintas.

PROBLEMA 5
Temos as seguintes peças: um retângulo de 4×1, dois retângulos de 3×1, três retângulos de 2×1 e quatro quadrados de 1×1. Ariel e Bernardo jogam o seguinte jogo num tabuleiro de $n \times n$, onde n é um número escolhido por Ariel. A cada movimento, Bernardo recebe de Ariel uma peça R. Em seguida Bernardo analisa se poderá colocar R no tabuleiro de modo que não tenha pontos em comum com nenhuma das peças colocadas anteriormente (nem sequer um vértice em comum). Se existe uma tal colocação para R, Bernardo deve escolher uma delas e colocar R.

O jogo para se é impossível colocar R da forma explicada, e Bernardo vence. Ariel vence somente se estão colocadas as 10 peças no tabuleiro.

a) Suponhamos que Ariel dá as peças a Bernardo em ordem decrescente de tamanho. Qual é o menor n que garante a vitória do Ariel?
b) Para o n encontrado em a), se Bernardo recebe as peças em ordem crescente de tamanho. Ariel tem garantida a vitória?

ESCLARECIMENTO: cada peça deve cobrir exatamente um número de quadrados unitários do tabuleiro igual ao seu próprio tamanho. Os lados das peças podem coincidir com partes da borda do tabuleiro.

RESULTADO BRASILEIRO

2010: Nível 1 (até 13 anos)

Nome	Cidade – Estado	Prêmio
Murilo Corato Zanarella	Amparo – SP	Medalha de Ouro
Daniel de Almeida Souza	Brasília – DF	Medalha de Prata
Viviane Silva Souza Freitas	Salvador – BA	Medalha de Prata
Carolina Lima Guimarães	Vitória – ES	Medalha de Bronze
Pedro Henrique Alencar Costa	Fortaleza – CE	Medalha de Bronze
Samuel Brasil de Albuquerque	Fortaleza – CE	Medalha de Bronze
Juliana Amoedo Plácido	Salvador – BA	Medalha de Bronze
Lucca Morais de Arruda Siaudjionis	Fortaleza – CE	Menção Honrosa
Antonio Wesley de Brito Vieira	Cocal dos Alves – PI	Menção Honrosa

2010: Nível 2 (até 15 anos)

Nome	Cidade – Estado	Prêmio
Rafael Kazuhiro Miyazaki	São Paulo – SP	Medalha de Ouro
Lucas Cauai Julião Pereira	Caucaia – CE	Medalha de Prata
Pedro Ivo Coêlho de Araújo	Caucaia – CE	Medalha de Prata
Francisco Markan Nobre de Souza Filho	Fortaleza – CE	Medalha de Bronze
Fellipe Sebastiam da Silva Paranhos Pereira	Rio de Janeiro – RJ	Medalha de Bronze
Tadeu Pires de Matos Belfort Neto	Fortaleza – CE	Medalha de Bronze
Henrique Gasparini Fiuza do Nascimento	Brasília – DF	Medalha de Bronze
Rafael Rodrigues Rocha de Melo	Caucaia – CE	Menção Honrosa
Mateus Henrique Ramos de Souza	Pirapora – MG	Menção Honrosa

XXI OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL

Enunciados e resultado brasileiro

O Brasil, e particularmente o Estado de São Paulo teve a honra de sediar a 21ª Olimpíada de Matemática do Cone Sul, que aconteceu até o dia 19 de junho na cidade de Águas de São Pedro, SP. A equipe foi liderada pelos professores Francisco Bruno Holanda, de Fortaleza – CE e Tertuliano Franco Santos Franco, de Rio de Janeiro – RJ.

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	**João Lucas Camelo Sá**	**Medalha de Ouro**
BRA2	**Gabriel Militão Vinhas Lopes**	**Medalha de Prata**
BRA3	**Maria Clara Mendes Silva**	**Medalha de Prata**
BRA4	**Caíque Porto Lira**	**Medalha de Bronze**

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Pedro tem que escolher duas frações irrredutíveis, cada uma com numerador e denominador positivos, tais que:

- A soma das duas frações seja igual a 2.
- A soma dos numeradores das duas frações seja igual a 1000.

De quantas maneiras Pedro pode fazer isso?

PROBLEMA 2

Marcam-se em uma reta 44 pontos, numerados 1, 2, 3, ..., 44 da esquerda para a direita. Vários grilos saltam na reta. Cada grilo parte do ponto 1, salta por pontos marcados e termina no ponto 44. Além disso, cada grilo sempre salta de um ponto marcado a outro marcado com um número maior.

Quando todos os grilos terminaram da saltar, notou-se que para cada par *i*, *j*, com $1 \leq i \leq j \leq 44,$ há um grilo que saltou diretamente do ponto *i* para o ponto *j*, sem pousar em nenhum dos pontos entre eles.

Determine a menor quantidade de grilos para que isso seja possível.

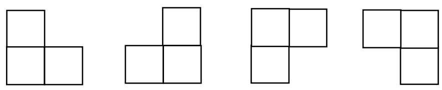
PROBLEMA 3

Recortar um polígono convexo de n lados significa escolher um par de lados consecutivos AB, BC do polígono e substituí-los por três segmentos AM, MN, e NC, sendo M o ponto médio de AB e N o ponto médio de BC. Em outras palavras, corta-se o triângulo MBN e obtem-se um polígono convexo de $n + 1$ lados.
Seja P_6 um hexágono regular de área 1. Recorta-se P_6 e obtém-se o polígono P_7. Então recorta-se P_7, de uma das sete maneiras possíveis, e obtém-se o polígono P_8, e assim sucessivamente. Prove que, independentemente de como sejam feitos os recortes, a área de P_n é sempre maior do que $2/3$.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Pablo e Sílvia jogam em um tabuleiro 2010 × 2010. Primeiro Pablo escreve um número inteiro em cada casa. Feito isso, Sílvia repete tantas vezes quanto quiser a seguinte operação: escolher três casas que formem um L, como uma figura, e somar 1 a cada número dessas três casas. Sílvia ganha se fizer com que todos os números do tabuleiro sejam múltiplos de 10.
Demonstre que Sílvia sempre pode escolher uma sequência de operações com as quais ela ganha o jogo.



PROBLEMA 5

O incírculo do triângulo ABC toca os lados BC, CA, e AB em D, E e F, respectivamente. Sejam ω_a, ω_b e ω_c os circuncírculos dos triângulos EAF, DBF e DCE, respectivamente. As retas DE e DF cortam ω_a em $E_a \neq E$ e $F_a \neq F$, respectivamente. Seja r_A a reta E_aF_a. Defina r_B e r_C de modo análogo. Prove que as retas r_A, r_B e r_C determinam um triângulo cujos vértices pertencem aos lados do triângulo ABC.

PROBLEMA 6

Determine se existe uma sequência infinita $a_0, a_1, a_2, a_3, ...$ de inteiros não negativos que satisfaz as seguintes condiciones:
(i) Todos os números inteiros não negativos aparecem na sequência uma única vez;
(ii) A sequência $b_n = a_n + n, \quad n \geq 0,$ é formada por todos os números primos, cada um aparecendo uma única vez.

LI OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA (IMO)

Enunciados e resultado Brasileiro

A LI Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) foi realizada na cidade de Astana, Cazaquistão entre os dias 2 e 14 de julho de 2010. A equipe foi liderada pelos professores Edmilson Luis Rodrigues Motta, de São Paulo – SP e Marcelo Mendes de Oliveira, de Fortaleza – CE.

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	**Marcelo Tadeu de Sá Oliveira Sales**	**Medalha de Prata**
BRA2	**Matheus Secco Torres da Silva**	**Medalha de Prata**
BRA3	**Gustavo Lisbôa Empinotti**	**Medalha de Bronze**
BRA4	**Deborah Barbosa Alves**	**Menção Honrosa**
BRA5	**Hanon Lima Rossi**	**Menção Honrosa**
BRA6	**João Lucas Camelo Sá**	**Menção Honrosa**

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Determine todas as funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tais que

$$f\left(\lfloor x\rfloor y\right)=f\left(x\right)\lfloor f(y)\rfloor$$

para os números $x,y\in\mathbb{R}$. ($\lfloor z\rfloor$ designa o maior inteiro que é menor ou igual a z).

PROBLEMA 2

Seja ABC um triângulo, I o seu incentro e Γ a sua circunferência circunscrita. A recta AI intersecta novamente Γ no ponto D. Sejam E um ponto do arco $\overset{\frown}{BDC}$ e F um ponto do lado BC tais que

$$B\hat{A}F=C\hat{A}E<\frac{1}{2}B\hat{A}C.$$

Seja G o ponto médio do segmento IF. Mostre que as rectas DG e EI se intersectam sobre Γ.

PROBLEMA 3

Seja $\mathbb{N}^*$ o conjunto dos inteiros positivos. Determine todas as funções $g:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ tais que

$$\left(g(m)+n\right)\left(m+g(n)\right)$$

é um quadrado perfeito para todos $m,n\in\mathbb{N}^*$.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Seja Γ a circunferência circunscrita ao triângulo *ABC* e *P* um ponto no interior do triângulo. As rectas *AP*, *BP* e *CP* intersectam novamente Γ nos pontos *K*, *L*, e *M*, respectivamente.
A recta tangente a Γ em *C* intersecta a recta *AB* em *S*. Supondo que *SC* = *SP*, mostre que *MK* = *ML*.

PROBLEMA 5

Em cada uma das seis caixas B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,B_6 há inicialmente só uma moeda.
Dois tipos de operações são possíveis:

Tipo 1: Escolher uma caixa não vazia B_j, com $1\le j\le 5$. Retirar uma moeda da B_j e adicionar duas moedas a B_{j+1}.

Tipo 2: Escolher uma caixa não vazia B_k, com $1\le k\le 4$. Retirar uma moeda da B_k e trocar os conteúdos das caixas (possivelmente vazias) B_{k+1} e B_{k+2}.
Determine se existe uma sucessão finita destas operações que deixa as caixas B_1,B_2,B_3,B_4,B_5 vazias e a caixa B_6 com exactamente $2010^{2010^{2010}}$ moedas. (Observe que $a^{b^c}=a^{\left(b^c\right)}$.)

PROBLEMA 6

Seja $a_1,a_2,a_3,...$ uma sucessão de números reais positivos. Sabe-se que para algum inteiro positivo *s*,
$a_n=\max\left\{a_k+a_{n-k}\ \text{ tal que } 1\le k\le n-1\right\}$
para todo *n* > *s*. Mostre que existem inteiros positivos ℓ e *N*, com $\ell\le s$, tais que $a_n=a_\ell+a_{n-\ell}$ para todo $n\ge N$.

XXV OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA

Enunciados e resultado Brasileiro

A XXV Olimpíada Iberoamericana de Matemática foi realizada na cidade de Assunção, Paraguai no período de 20 a 30 de setembro de 2010. A equipe brasileria foi liderada pelos professores Onofre Campos, de Fortaleza – CE e Luzinalva Miranda de Amorim, de Salvador – BA. A equipe brasileira ficou em primeiro lugar na soma dos pontos dos participantes.

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	Marcelo Tadeu de Sá Oliveira Sales	Medalha de Ouro
BRA2	Deborah Barbosa Alves	Medalha de Ouro
BRA3	Matheus Secco Torres da Silva	Medalha de Ouro
BRA4	Gustavo Lisboa Empinotti	Medalha de Prata

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Numa fila de dez moedas indistinguíveis há duas delas que são falsas, ocupando posições consecutivas. Para cada conjunto de posições, pode-se perguntar quantas moedas falsas ele contém. É possível determinar quais são as moedas falsas fazendo apenas duas destas perguntas? Não se sabe a resposta da primeira pergunta antes de se formular a segunda.

PROBLEMA 2

Determinar se existem números inteiros positivos a e b tais que todos os termos da sucesão definida por $x_1 = 2010,\ x_2 = 2011,$

$$x_{n+2} = x_n + x_{n+1} + a\sqrt{x_n x_{n+1} + b},\ n \geq 1,$$

sejam inteiros.

PROBLEMA 2

A circunferência Γ inscrita ao triângulo escaleno ABC é tangente aos lados BC, CA e AB nos pontos D, E e F respectivamente. A recta EF corta a recta BC em G. A circunferência de diâmetro GD corta Γ em R $(R \neq D)$. Sejam P e Q $(P \neq R,\ Q \neq R)$ as intersecções de BR e CR com Γ, respectivamente. As rectas BQ

e *CP* cortam-se em *X*. A circunferência circunscrita a *CDE* corta o segmento *QR* em *M* e a circunferência circunscrita a *BDF* corta o segmento *PR* em *N*. Demonstrar que as rectas *PM*, *QN* e *RX* são concorrentes.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

As médias aritmética, geométrica e harmônica de dois números inteiros positivos distintos são números inteiros. Encontrar o menor valor possível para a média aritmética.

Nota: Se a e b são números positivos, suas médias aritméticas, geométrica e harmônica são respectivamente: $\frac{a+b}{2}, \sqrt{a \cdot b}$ e $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

PROBLEMA 5

Seja *ABCD* um quadrilátero cíclico sujas diagonais *AC* e *BD* são perpendiculares. Sejam *O* o circuncentro de *ABDC*, *K* a intersecção das diagonais, $L \neq O$ a intersecção das circunferências circunscritas a *OAC* e *OBD,* e *G* a intersecção das diagonais do quadrilátero cujos vértices são os pontos médios dos lados de *ABCD.* Provar que *O*, *K*, *L* e *G* são colineares.

PROBLEMA 6

Ao redor de uma mesa circular sentam-se 12 pessoas e sobre a mesa há 28 vasos de flores. Duas pessoas podem ver-se uma à outra se, e somente se, não há nenhum vaso alinhado com elas. Provar que existem pelo menos duas pessoas que podem ver-se.

ASSOCIANDO UM POLINÔMIO A EXPRESSÕES ALGÉBRICAS E TRIGONOMÉTRICAS

Marcílio Miranda, IFRN (Caicó – RN)

♦ Nível Intermediário

O objetivo deste artigo é mostrar uma técnica que pode ser bastante útil na hora de resolver problemas de olimpíadas de Matemática.Tal técnica consiste em você associar um polinômio a uma determina expressão. Com isso você pode calcular o valor de expressões trigonométricas, expressões algébricas e mostrar que um determinado número é irracional.

Vejamos alguns exemplos disso:

I) EXPRESSÕES TRIGONOMÉTRICAS

Esse problema deixa bem clara a idéia de associarmos um polinômio a uma expressão trigonométrica:

EXERCÍCIO RESOLVIDO 1 (BÉLGICA 2006):

a) Encontre todos os números reais α tais que $\cos(4\alpha)=\cos(3\alpha)$

b) Determine inteiros a, b, c, d tais que $\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}$, $\cos\frac{6\pi}{7}$, são soluções da equação $ax^3+bx^2+cx+d=0$.

SOLUÇÃO:

a) $\cos(4\alpha)=\cos(3\alpha)\Leftrightarrow 4\alpha=3\alpha+2k\pi$ ou $4\alpha=-3\alpha+2k\pi\Leftrightarrow\alpha=2k\pi$ ou $\alpha=\frac{2k\pi}{7}$, logo $1,\cos\frac{2\pi}{7},\cos\frac{4\pi}{7}$, $\cos\frac{6\pi}{7}$ são as raízes dessa equação.

Por outro lado temos que $\cos(4\alpha)=8\cdot\cos^4\alpha-8\cdot\cos^2\alpha+1$ e $\cos(3\alpha)=4\cdot\cos^3\alpha-3\cdot\cos\alpha.$ Faça $\cos\alpha=t.$ Daí temos que

$\cos(4\alpha)=\cos(3\alpha)\Leftrightarrow(t-1)\cdot\left(8t^3+4t^2-4t-1\right)=8\cdot t^4-4\cdot t^3-8\cdot t^2+3\cdot t+1=0.$

Assim, a equação $\left(8t^3+4t^2-4t-1\right)=0$ tem como soluções $\cos\frac{2\pi}{7},\cos\frac{4\pi}{7},\cos\frac{6\pi}{7}$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 2 (MOCP, JULHO DE 2003): Prove que
sec 40^0 + sec 80^0 + sec $160^0 = 6$.

SOLUÇÃO: Note que 40^0, 80^0 e 160^0 satisfazem a equação $\cos 3\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow 8\cos^3\alpha - 6\cos\alpha + 1 = 0$, logo cos 40^0, cos 80^0, cos 160^0 são as raízes do polinômio $8\cos^3\alpha - 6\cos\alpha + 1$, e assim temos que:

$$\cos 40° \cdot \cos 80° + \cos 160° \cdot \cos 80° + \cos 40° \cdot 160° = \frac{-6}{8}$$

$$\cos 40° \cdot \cos 80° \cdot \cos 160° = \frac{-1}{8}$$

$$\sec 40° + \sec 80° + \sec 160° = \frac{1}{\cos 40°} + \frac{1}{\cos 80°} + \frac{1}{\cos 160°} =$$

$$\frac{\cos 40° \cdot \cos 80° + \cos 40° \cdot \cos 80° + \cos 40° \cdot \cos 80°}{\cos 160° \cos 80° \cdot \cos 40°} = 6.$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO 3 (IMO 1963): Prove que $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

SOLUÇÃO: Note que

$3 \cdot \frac{\pi}{7} + 4 \cdot \frac{\pi}{7} = \pi, 3 \cdot \frac{3\pi}{7} + 4 \cdot \frac{3\pi}{7} = 3\pi$ e $3 \cdot \frac{5\pi}{7} + 4 \cdot \frac{5\pi}{7} = 5\pi$, logo $\frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}$ são soluções da equação $\cos 4x = -\cos 3x$.

Essa equação equivale a $\cos 4x + \cos 3x = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \cos\frac{7x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos\frac{7x}{2} = 0$ ou $\cos\frac{x}{2} = 0$.

PARTE 1: Resolver a equação $\cos\frac{7x}{2} = 0$

$\frac{7x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{7} + \frac{2k\pi}{7} \Rightarrow x = \frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}, \pi, \frac{9\pi}{7}, \frac{11\pi}{7}, \frac{13\pi}{7}$, mas

$\cos\frac{\pi}{7} = \cos\frac{13\pi}{7}, \cos\frac{3\pi}{7} = \cos\frac{11\pi}{7}, \cos\frac{5\pi}{7} = \cos\frac{9\pi}{7}$, logo há 4 soluções distintas entre 0 e 2π: $\frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}, \pi$.

PARTE 2: Resolver a equação $\cos\frac{x}{2} = 0$

$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \pi + 2k\pi$, logo $x = \pi$ é a única solução entre 0 e 2π.
Por outro lado temos que $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$ e $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.
$\cos 4x = -\cos 3x \Leftrightarrow 8\cos^4 x + 4\cos^3 x - 8\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow 8t^4 + 4t^3 - 8t^2 - 3t + 1 = 0$,
onde $t = \cos x$.
Claramente -1 é raiz desse polinômio, e temos $8t^4 + 4t^3 - 8t^2 - 3t + 1 =$
$(t+1)\cdot(8t^3 - 4t^2 - 4t + 1)$, donde o polinômio $8t^3 - 4t^2 - 4t + 1$ tem como raízes $\cos\frac{\pi}{7}, \cos\frac{3\pi}{7}, \cos\frac{5\pi}{7}$. Logo temos pelas relações de Girard que:

$$\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{3\pi}{7}.$$

II) CALCULANDO O VALOR DE UMA EXPRESSÃO ALGÉBRICA:

EXERCÍCIO RESOLVIDO 4: Prove que $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt[2]{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt[2]{2}} = 4$.

SOLUÇÃO: Seja $x = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt[2]{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt[2]{2}}$. Temos $x^3 = 40 + 6x \Rightarrow x^3 - 6x - 40 = 0$. É fácil ver que 4 é raiz desse polinômio e $x^3 - 6x - 40 = (x-4).(x^2 + 4x + 10)$. Note que as raízes de $x^2 + 4x + 10$ não são reais e $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt[2]{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt[2]{2}}$ é real, logo $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt[2]{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt[2]{2}} = 4$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 5 (CROÁCIA 2001): Se $a + b + c = 0$, calcule o valor da expressão $\frac{a^7 + b^7 + c^7}{abc\cdot\left(a^4 + b^4 + c^4\right)}$.

SOLUÇÃO: Seja $x^3 + mx^2 + px + q = 0$. um polinômio de terceiro grau tal que suas raízes são a, b, c. Daí temos que $a + b + c = -m = 0$, $ab + ac + bc = p$ e $abc = -q$.
Assim temos que:
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\cdot(ab + ac + bc) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2p$
Por outro lado temos que:
$a^3 + pa + q = 0 \Rightarrow a^3 = -pa - q$ (i)
$b^3 + pb + q = 0 \Rightarrow b^3 = -pb - q$ (ii)
$c^3 + pc + q = 0 \Rightarrow a^3 = -pc - q$ (iii)
somando (i) + (ii) + (iii), temos que $a^3 + b^3 + c^3 = -p.(a + b + c) - 3q = -3q$

Da mesma forma temos que:
$a^4 + pa^2 + qa = 0 \Rightarrow a^4 = -pa^2 - qa$ (iv)

$b^4 + pb^2 + qb = 0 \Rightarrow b^4 = -pb^2 - qb$ (v)
$c^4 + pc^2 + qc = 0 \Rightarrow c^4 = -pc^2 - qc$ (vi)
somando (iv) + (v) + (vi), temos que $a^4 + b^4 + c^4 = -p.(a^2 + b^2 + c^2) - q.(a + b + c) = 2p^2$.

Analogamente temos que:
$a^5 + pa^3 + qa^2 = 0 \Rightarrow a^5 = -pa^3 - qa^2$ (vii)
$b^5 + pb^3 + qb^2 = 0 \Rightarrow b^5 = -pb^3 - qb^2$ (viii)
$c^5 + pc^3 + qc^2 = 0 \Rightarrow c^5 = -pc^3 - qc^2$ (ix)
somando (vii) + (viii) + (ix), temos que $a^5 + b^5 + c^5 = -p \cdot (a^3 + b^3 + c^3) - q \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = 5pq$.

Proseguindo do mesmo modo, temos que:
$a^7 + pa^5 + qa^4 = 0 \Rightarrow a^7 = -pa^5 - qa^4$ (x)
$b^7 + pb^5 + qb^4 = 0 \Rightarrow b^7 = -pb^5 - qb^4$ (xi)
$c^7 + pc^5 + qc^4 = 0 \Rightarrow c^7 = -pc^5 - qc^4$ (xii)
somando (x) + (xi) + (xii): $a^7 + b^7 + c^7 = -p \cdot (a^5 + b^5 + c^5) - q \cdot (a^4 + b^4 + c^4) = -7p^2q$.

Com isso temos que $\dfrac{a^7 + b^7 + c^7}{abc \cdot \left(a^4 + b^4 + c^4\right)} = \dfrac{-7p^2q}{-q \cdot \left(2p^2\right)} = \dfrac{7}{2}$.

III) PROVANDO A IRRACIONALIDADE DE UM NÚMERO:

Antes do próximo problema vamos provar o seguinte teorema:

TEOREMA (TESTE DA RAIZ RACIONAL): Se o número $\dfrac{p}{q}$, onde p e q são inteiros e mdc(p, q) = 1, é uma raiz do polinômio com coeficientes inteiros $a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$, então p é um divisor de a_0 e q é um divisor de a_n.

PROVA: Como $\dfrac{p}{q}$ é raiz do polinômio temos que

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\cdot\frac{p}{q} + a_0 = 0 \Rightarrow a_n \cdot p^n + a_{n-1}\cdot p^{n-1}\cdot q + \ldots + a_1\cdot p\cdot q^{n-1} + a_0\cdot q^n = 0,$$

logo temos que p é um divisor de a_0 e q é um divisor de a_n.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 6: Prove que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é irracional.

Solução: Seja $x = \sqrt{2}+\sqrt{3} \Rightarrow x - \sqrt{2} = \sqrt{3} \Rightarrow x^2 - 1 = 2\sqrt{2}\ x \Rightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = 8x^2$ $\Rightarrow x^4 - 10x^2 + 1 = 0$. Logo pelo teorema acima as raízes racionais da equação só podem ser 1 ou –1, que claramente não são soluções (em ambos os casos o valor numérico do polinômio é –8). Logo esse polinômio só possui raízes irracionais, portanto $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ é irracional.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS:

1) (EUA) Prove que $sen\dfrac{\pi}{7}\cdot sen\dfrac{2\pi}{7}\cdot sen\dfrac{3\pi}{7} = \dfrac{\sqrt{7}}{8}$.

2) (Vietnã 1982) Ache a, b, c inteiros tais que as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ são cos 72^0 e cos 144^0.

3) (Prova de Seleção da Romênia para a IMO 1970): Prove que para todo inteiro positivo n:

$$tg\frac{\pi}{2n+1}\cdot tg\frac{2\pi}{2n+1}\cdot tg\frac{3\pi}{2n+1}...tg\frac{(n-1)\pi}{2n+1}\cdot tg\frac{n\pi}{2n+1} = \sqrt{2n+1}.$$

4) (Prova de Seleção da Suíça para a IMO 2004): Sejam a, b, c, d números reais distintos satisfazendo as equações:

$a = \sqrt{45-\sqrt{21-a}}$, $b = \sqrt{45-\sqrt{21-b}}$, $c = \sqrt{45-\sqrt{21-c}}$, $d = \sqrt{45-\sqrt{21-d}}$

Prove que $abcd = 2004$.

5) (OBM 2003): Sejam a, b, c números reais não-nulos tais que $a + b + c = 0$. Calcule os possíveis valores de $\dfrac{\left(a^3+b^3+c^3\right)^2\cdot\left(a^4+b^4+c^4\right)}{\left(a^5+b^5+c^5\right)^2}$.

6) (Bélgica 1978): Encontre um polinômio com coeficientes inteiros tal que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ é raiz.

7) (Moldávia 2000): Os números a, b, c satisfazem a relação $a + b + c = 0$. Mostre que o número $2a^4 + 2b^4 + 2c^4$ é um quadrado perfeito.

8) Prove que $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ é irracional.

9) Prove que $x = 2\cos\dfrac{\pi}{7}$ satisfaz a equação: $x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0$.

Use este fato para provar que $\cos\dfrac{\pi}{7}$ é irracional.

10) Prove que $\text{tg}^2\, 1^0 + \text{tg}^2\, 3^0 + ... + \text{tg}^2\, 87^0 + \text{tg}^2\, 89^0 = 4005$.

11) Prove que cos 20^0. cos 40^0.cos 80^0 = $\frac{1}{8}$.

12) Prove que:

a) $tg\frac{\pi}{7}\cdot tg\frac{2\pi}{7}\cdot tg\frac{3\pi}{7}=\sqrt{7}$.

b) $tg\frac{\pi}{13}\cdot tg\frac{2\pi}{13}\cdot tg\frac{3\pi}{13}\cdot tg\frac{4\pi}{13}\cdot tg\frac{5\pi}{13}\cdot tg\frac{6\pi}{13}=\sqrt{13}$.

13) Prove que cossec 6° + cossec 78° − cossec 42° − cossec 66° = 8.

14) Calcule as expressões:

a) $tg^2\frac{\pi}{7}\cdot tg^2\frac{2\pi}{7}\cdot tg^2\frac{3\pi}{7}$.

b) $tg^2\frac{\pi}{7}+tg^2\frac{2\pi}{7}+tg^2\frac{3\pi}{7}$.

c) $tg^2\frac{\pi}{7}\cdot tg^2\frac{2\pi}{7}+tg^2\frac{3\pi}{7}\cdot tg^2\frac{\pi}{7}+tg^2\frac{2\pi}{7}\cdot tg^2\frac{3\pi}{7}$.

15) Prove que $\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}=-\frac{1}{8}$.

16) Ache uma equação do terceiro grau cujas raízes são $\cos\frac{\pi}{7},\cos\frac{3\pi}{7},\cos\frac{5\pi}{7}$.

17) Calcule as expressões:

a) $\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{3\pi}{7}\cdot\cos\frac{5\pi}{7}$.

b) $\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}\ \cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\cdot\cos\frac{5\pi}{7}$.

c) $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}$.

d) $\cos^2\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{3\pi}{7}+\cos^2\frac{5\pi}{7}$.

e) $\frac{1}{\cos\frac{\pi}{7}}+\frac{1}{\cos\frac{3\pi}{7}}+\frac{1}{\cos\frac{5\pi}{7}}$.

18) Prove que tg 81^0 – tg 63^0 + tg 9^0 – tg 27^0 = 4.

19) Sejam u, v, w as raízes do polinômio $x^3 - 10x + 11$. Determine o valor de arctg u + arctg v + arctg w.

20) Prove que cossec $\frac{\pi}{18}$ + cossec $\frac{5\pi}{18}$ + cossec $\frac{13\pi}{18}$ = 6.

21) Prove que tg 20^0. tg40^0. tg 60^0. tg 80^0 = 3.

22) Sejam a, b, c números reais tais que $a + b + c = 0$, prove que:

a) $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

b) $\frac{a^2+b^2+c^2}{2} \cdot \frac{a^5+b^5+c^5}{5} = \frac{a^7+b^7+c^7}{5}$.

23) Prove que $\operatorname{sen}20° \cdot \operatorname{sen}40° \cdot \operatorname{sen}80° = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

24) Prove que $\cot g^2 \frac{\pi}{7} + \cot g^2 \frac{2\pi}{7} + \cot g^2 \frac{3\pi}{7} = 5$.

25) Calcule o valor da expressão $tg\frac{\pi}{9} + tg\frac{4\pi}{9} + tg\frac{7\pi}{9}$.

REFERÊNCIAS

[1] MIRANDA, Marcílio. *Problemas Selecionados de Matemática ITA-IME – Olimpíadas*, Volume 1, Fortaleza (CE), Editora Vestseller, 2010.

[2] ANDREESCU, Titu; FENG , Zuming. *103 Trigonometry Problems from the Training of the USA IMO Team*, Birkhauser, 2004.

[3] ANDREESCU, Titu; GELCA, Razvan. *Putnam and Beyond*. New York: Springer-Verlag, 2006.

[4] DOMINGUES, Hygino. *Fundamentos de Aritmética*, São Paulo, Atual Editora, 1991.

SITES ACESSADOS

[1] The IMO Compendium, Disponível em <http://www.imomath.com/index.php?options=oth|other&p=0>, Acesso em: 10/08/2009.

[2] Treinamento do Cone Sul. Disponível em: < http://treinamentoconesul.blogspot.com/>, Acesso em: 12/08/2009.

[3]Notas de Aula de Kin Yin Li. Disponível em: <http://www.math.ust.hk/~makyli/190_2003Fa/lect-notes_03fa.pdf>, Acesso em: 15/08/2009.

[4] Página de Olimpíada da Sociedade Canadense de Matemática. Disponível em: < http://www.cms.math.ca/Olympiads/ >, Acesso em: 20/07/2009.

[5] Matemática Nick Puzzles. Disponível em: < http://www.qbyte.org/puzzles/>, Acesso em : 15/11/2009.

[6] Olimpíada Brasileira de Matemática. Disponível em: <http://www.obm.org.br >, Acesso em: 20 /11/2009.

SOMAS TRIGONOMÉTRICAS: DE PROSTAFÉRESE À FÓRMULA DE EULER

Rogério Possi Junior

♦ Nível Intermediário

INTRODUÇÃO

São apresentados fundamentos básicos da matemática elementar, cujos conceitos somados podem auxiliar na resolução de problemas mais elaborados, como os que podem aparecer quando se depara com o início do estudo das Variáveis Complexas e o uso dos teoremas de De Moivre.

Seja através das fórmulas de Transformação de Soma em Produto, conhecidas como Fórmulas de Prostaférese, ou através da Relação de Euler, são calculados alguns exemplos de somas de funções trigonométricas aparentemente complexas.

AS FÓRMULAS DE TRANSFORMAÇÃO TRIGONOMÉTRICAS.

Admitamos conhecidas as fórmulas da soma e diferença de arcos para as funções “seno” e “cosseno”, isto é

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a \qquad (a)$$
$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a \qquad (b)$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \qquad (c)$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \qquad (d)$$

Somando-se (a) e (b) tem-se
$$\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = 2\operatorname{sen} a \cos b \qquad (e)$$

Subtraindo-se (a) de (b) tem-se
$$\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) = 2\operatorname{sen} b \cos a \qquad (f)$$

Somando-se (c) e (d) teremos
$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b \qquad (g)$$

E por fim, subtraindo-se (c) de (d)

$$\cos(a+b)-\cos(a-b)=-2\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \qquad \text{(h)}$$

Fazendo $a+b=\alpha$ e $a-b=\beta$ teremos que $a=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ e $b=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, cujos valores substituídos nas relações (e), (f), (g) e (h) fornecerão as seguintes relações

$$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right),$$

que são as conhecidas Fórmulas de Transformação de soma em produto ou Fórmulas de Prostaférese.

A FÓRMULA DE EULER

Segundo GUIDORIZZI (1987), seja $f(x)$ uma função derivável até a ordem n em um intervalo aberto I e seja $x_0 \in I$. Define-se o polinômio $P(x)$ a seguir como o polinômio de Taylor, de ordem n, de $f(x)$ em torno do ponto x_0, isto é

$$P(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}=\sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!} \qquad \text{(i)}$$

que, se fixado em torno de $x_0=0$, também pode ser chamado de polinômio de Mac-Laurin. Tomando-se (i) $f(x)=e^x$ e $x_0=0$, pode-se demonstrar que

$$e^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\ldots \qquad \text{(j)}$$

A expressão da direita pode ser usada para definir e^x para x para x complexo.
Analogamente demonstra-se que

$$\operatorname{sen} x = \lim_{n\to\infty}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{x^n}{n!}\right) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \qquad \text{(k)}$$

e que

$$\cos x = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \qquad \text{(l)}$$

Para $x = Z = iY, Y \in R$ e observando-se (j), (k) e (l) teremos que

$$e^{iY} = \left(1 - \frac{Y^2}{2} + \frac{Y^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(Y - \frac{Y^3}{3!} + \frac{Y^5}{5!} - \ldots\right) = \cos Y + i \operatorname{sen} Y \qquad \text{(m)}$$

que é a conhecida fórmula de Euler.
Não obstante, também se demonstra que se $e^Z = e^{X+iY}$, onde $X \neq 0$, então

$$e^Z = e^X\left(\cos Y + i \operatorname{sen} Y\right) \qquad \text{(n)}$$

Se, alternativamente, adotássemos a expressão de (n) como definição de e^Z, não é difícil mostrar que $e^{Z+W} = e^Z \cdot e^W, \forall Z, W \in \mathbb{C}$ de fato, se $Z_1 = X_1 + iY_1$ e $Z_2 = X_2 + iY_2$, $e^{Z_1+Z_2} = e^{x_1+x_2}\left(cos\left(Y_1+Y_2\right) + isen\left(Y_1+Y_2\right)\right) = e^{x_1+x_2}$

$$\left(\cos Y_1 \cos Y_2 - \operatorname{sen} Y_1 \operatorname{sen} Y_2 + i\left|\left(\operatorname{sen} Y_1 \cos Y_2 + \operatorname{sen} Y_2 \cos Y_1\right)\right|\right) =$$

$$= e^{x_1}\left(\cos Y_1 + i \operatorname{sen} Y_1\right) \cdot e^{x_2}\left(\cos Y_2 + i \operatorname{sen} Y_2\right) = e^{Z_1} \cdot e^{Z_2}.$$

PROBLEMAS DE APLICAÇÃO

PROBLEMA 1: Começaremos com um exemplo de problema análogo ao proposto em um exame de admissão ao Instituto Militar de Engenharia (IME). O problema pede que se calcule as somas a seguir.

$$S_1 = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x + \ldots + \operatorname{sen} nx \qquad (1)$$

$$S_2 = cos\, x + cos\, 2x + \ldots + cos\, nx \qquad (2)$$

Utilizaremos a transformação de somas de funções trigonométricas em produto, conhecidas como "Fórmulas de Prostaférese". Observamos que

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}\frac{3x}{2}-\operatorname{sen}\frac{x}{2}=2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos x\\
&\operatorname{sen}\frac{5x}{2}-\operatorname{sen}\frac{3x}{2}=2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos 2x\\
&\operatorname{sen}\frac{7x}{2}-\operatorname{sen}\frac{5x}{2}=2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos 3x\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2}-\operatorname{sen}\frac{(2n-3)x}{2}=2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos(n-1)x\\
&\operatorname{sen}\frac{(2n+1)x}{2}-\operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2}=2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos nx
\end{aligned} \tag{3}$$

Somando-se as linhas acima encontraremos uma "Soma Telescópica", cujo valor será dado por

$$\operatorname{sen}\frac{(2n+1)x}{2}-\operatorname{sen}\frac{x}{2}=2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cdot\sum_{j=1}^{n}\cos jx$$

$$\Rightarrow S_2=\sum_{j=1}^{n}\cos jx=\frac{\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\cdot\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \tag{4}$$

Analogamente, para a soma das funções "seno" S_1 pode-se escrever que:

$$\begin{aligned}
&\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{x}{2}=-2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen}x\\
&\cos\frac{5x}{2}-\cos\frac{3x}{2}=-2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen}2x\\
&\cos\frac{7x}{2}-\cos\frac{5x}{2}=-2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen}3x\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\cos\frac{(2n-1)x}{2}-\cos\frac{(2n-3)x}{2}=-2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen}(n-1)x\\
&\cos\frac{(2n+1)x}{2}-\cos\frac{(2n-1)x}{2}=-2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen}nx
\end{aligned} \tag{5}$$

Somando-se as linhas acima encontraremos outra "Soma Telescópica", cujo valor é

$$\cos\frac{(2n+1)x}{2}-\cos\frac{x}{2}=-2\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}\cdot\sum_{j=1}^{n}\mathrm{sen}\,jx$$

$$\Rightarrow S_1=\sum_{j=1}^{n}\mathrm{sen}\,jx=\frac{\mathrm{sen}\,\frac{nx}{2}\cdot\mathrm{sen}\,\frac{(n+1)x}{2}}{\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}} \qquad (6),$$

que é a soma procurada.

Não obstante, este problema também pode ser resolvido utilizando-se a conhecida Relação de Euler. Seja $e^{\frac{ix}{2}}=C=\cos\frac{x}{2}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}$, onde $i^2=-1$; assim tem-se que

$$C^2=\left(\cos\frac{x}{2}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}\right)^2=\cos x+i\,\mathrm{sen}\,x$$

$$C^4=\left(\cos\frac{x}{2}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}\right)^4=\cos 2x+i\,\mathrm{sen}\,2x \qquad (7)$$

....

$$C^{2n}=\left(\cos\frac{x}{2}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}\right)^{2n}=\cos nx+i\,\mathrm{sen}\,nx$$

$$\Rightarrow C^2+C^4+\ldots+C^{2n}=\frac{C^2(C^{2n}-1)}{(C^2-1)}=C\cdot\frac{C^n\left(C^n-C^{-n}\right)}{\left(C-C^{-1}\right)}=\sum_{j=1}^{n}\left(\cos jx+i\,\mathrm{sen}\,jx\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n}\left(\cos jx+i\,\mathrm{sen}\,jx\right)=\left(\cos\frac{x}{2}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{nx}{2}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{nx}{2}\right)\frac{\mathrm{sen}\,\frac{nx}{2}}{\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}}=S_2+iS_1$$

$$\Rightarrow S_2+iS_1=\frac{\cos\frac{(n+1)x}{2}\cdot\mathrm{sen}\,\frac{nx}{2}}{\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}}+i\frac{\mathrm{sen}\,\frac{(n+1)x}{2}\cdot\mathrm{sen}\,\frac{nx}{2}}{\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}} \qquad (8)$$

de onde tiramos os valores de interesse S_1 e S_2 igualando-se as partes reais e imaginárias da igualdade acima respectivamente.

PROBLEMA 2: Considere agora o problema de se determinar as somas dadas por $S_1 = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{sen}^2 jx$ e $S_2 = \sum_{j=1}^{n} \cos^2 jx$. Para tal, observa-se inicialmente, da Trigonometria que $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$ e $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$, assim pode-se reescrever S_1 e S_2 como sendo

$$S_1 = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{sen}^2 jx = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \underset{"n"}{\dots} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\cos 2x + \cos 4x + \ldots + \cos 2nx\right) \qquad (9)$$

onde $S' = \cos 2x + \cos 4x + \ldots + \cos 2nx$.

Com o auxílio da Relação de Euler, seja $C = \cos x + i \operatorname{sen} x$, assim

$$C^2 + C^4 + \ldots + C^{2n} = C.\frac{C^n\left(C^n - C^{-n}\right)}{\left(C - C^{-1}\right)} = \sum_{j=1}^{n}\left(\cos 2jx + i \operatorname{sen} 2jx\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n}\left(\cos 2jx + i \operatorname{sen} 2jx\right) = \frac{\cos(n+1)x.\operatorname{sen} nx}{\operatorname{sen} x} + i\frac{\operatorname{sen}(n+1)x.\operatorname{sen} nx}{\operatorname{sen} x} = S' + iS'' \qquad (10)$$

onde $S'' = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{sen} 2jx$. Sendo $S_1 = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}S'$

$$\therefore S_1 = \frac{1}{2}\left[n - \frac{\cos(n+1)x.\operatorname{sen} nx}{\operatorname{sen} x}\right] \qquad (11)$$

Outra solução para o cálculo da soma S' consiste em transformá-la segundo as fórmulas de Prostaférese. Para este caso tem-se que,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} x \cos 2x \\
&\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x = 2 \operatorname{sen} x \cos 4x \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\operatorname{sen}(2n-1)x - \operatorname{sen}(2n-3)x = 2 \operatorname{sen} x \cos(2n-2)x \\
&\operatorname{sen}(2n+1)x - \operatorname{sen}(2n-1)x = 2 \operatorname{sen} x \cos 2nx
\end{aligned} \qquad (12)$$

Somando-se todas as linhas acima tem-se que $\operatorname{sen}(2n+1)x - \operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen} x \cdot S'$

$\therefore S' = \dfrac{\operatorname{sen} nx.\cos(n+1)x}{\operatorname{sen} x}$, que é exatamente o valor encontrado da parte real do somatório dado por (10).

Observando-se (9) e que $\cos^2 x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2x$

$$\Rightarrow S_2 = \sum_{j=1}^{n} \cos^2 jx = \frac{1}{2}\left[n + S'\right] = \frac{1}{2}\left[n + \frac{\cos(n+1)x.\operatorname{sen} nx}{\operatorname{sen} x}\right] \tag{13}$$

que resolve o problema do cálculo de S_2.

PROBLEMA 3: Considere a seguir o problema do cálculo das somas dadas por $S_1 = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}^3 kx$ e $S_2 = \sum_{k=1}^{n} \cos^3 kx$.

Seja $C = \cos x + i\operatorname{sen} x$. Sendo $C^{\pm K} = \cos kx \pm i \operatorname{sen} kx$ pode-se escrever que

$$\cos kx = \frac{C^k + C^{-k}}{2} \tag{14}$$

$$\operatorname{sen} kx = \frac{C^k - C^{-k}}{2i} \tag{15}$$

Elevando-se a relação (15) ao cubo tem-se que $\operatorname{sen}^3 kx = \left(\dfrac{C^k - C^{-k}}{2i}\right)^3 = \dfrac{\left(C^{3k} - C^{-3k}\right) - 3\left(C^k - C^{-k}\right)}{-8i}$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^3 kx = \frac{3\operatorname{sen} kx - \operatorname{sen} 3kx}{4} \tag{16}$$

$$\therefore S_1 = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}^3 kx = \frac{1}{4}\left(3\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx - \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} 3kx\right) \tag{17}$$

Por (6) tem-se que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx = \frac{\operatorname{sen}\frac{nx}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$ e observando-se que se $D = \cos 3x + i\operatorname{sen} 3x$ teremos que:

$D^2 = \cos 6x + i\,\text{sen}\,6x$

$D^3 = \cos 9x + i\,\text{sen}\,9x$

....

$D^n = \cos 3nx + i\,\text{sen}\,3nx$

$$\Rightarrow S_D = D + D^2 + D^3 + \ldots + D^n = \frac{D^{\frac{1}{2}}.D^{\frac{n}{2}}\left(D^{\frac{n}{2}} - D^{\frac{-n}{2}}\right)}{\left(D^{\frac{1}{2}} - D^{\frac{-1}{2}}\right)}$$

$$\Rightarrow S_D = \frac{\left[\cos\frac{(3n+1)x}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{(3n+1)x}{2}\right]}{\text{sen}\,\frac{3x}{2}} \cdot \text{sen}\,\frac{3nx}{2} \tag{18}$$

Tomando-se a parte imaginária da relação (18) tem-se que

$$\sum_{k=1}^{n} \text{sen}\,3kx = \left[\frac{\text{sen}\,\frac{(3n+1)x}{2} \cdot \text{sen}\,\frac{3nx}{2}}{\text{sen}\,\frac{3x}{2}}\right] \tag{19}$$

Logo, por (6) e (19) teremos que

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} \text{sen}^3\,kx = \frac{1}{4}\left[\frac{3\,\text{sen}\,\frac{nx}{2} \cdot \text{sen}\,\frac{(n+1)x}{2}}{\text{sen}\,\frac{x}{2}} - \frac{\text{sen}\,\frac{(3n+1)x}{2} \cdot \text{sen}\,\frac{3nx}{2}}{\text{sen}\,\frac{3x}{2}}\right] \tag{20}$$

Vale lembrar que a soma $S = \sum_{k=1}^{n} \text{sen}\,3kx$ também poderá ser calculada observando-se as igualdades a seguir, isto é

$$\cos\frac{9x}{2}-\cos\frac{3x}{2}=-2\operatorname{sen}\frac{3x}{2}\cdot\operatorname{sen}3x$$
$$\cos\frac{15x}{2}-\cos\frac{9x}{2}=-2\operatorname{sen}\frac{3x}{2}\cdot\operatorname{sen}6x$$

....

$$\cos\frac{3(2n-1)x}{2}-\cos\frac{3(2n-3)x}{2}=-2\operatorname{sen}\frac{3x}{2}\cdot\operatorname{sen}(3n-1)x$$
$$\cos\frac{3(2n+1)x}{2}-\cos\frac{3(2n-1)x}{2}=-2\operatorname{sen}\frac{3x}{2}\cdot\operatorname{sen}3nx$$

cuja soma resultará em

$$\cos\frac{3(2n+1)x}{2}-\cos\frac{3x}{2}=-2\operatorname{sen}\frac{3x}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen}3kx\,.$$

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen}3kx=\frac{\operatorname{sen}\frac{3nx}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{3(n+1)x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{3x}{2}}$, que é exatamente a expressão (19).

Para o cálculo de $S_2=\sum_{k=1}^{n}\cos^3 kx$ elevando-se a expressão (14) ao cubo teremos que $\cos^3 kx=\left(\dfrac{C^k+C^{-k}}{2}\right)^3=\dfrac{\left(C^{3k}+C^{-3k}\right)+3\left(C^k+C^{-k}\right)}{8}$

$$\Rightarrow \cos^3 kx=\frac{3\cos kx+\cos 3kx}{4} \qquad (21)$$

$$\therefore S_2=\sum_{k=1}^{n}\cos^3 kx=\frac{1}{4}\left(3\sum_{k=1}^{n}\cos kx+\sum_{k=1}^{n}\cos 3kx\right) \qquad (22)$$

Utilizando-se a relação (4) e a parte real da relação (18) e substituindo-as em (22) tem-se que

$$S_2=\sum_{k=1}^{n}\cos^3 kx=\frac{1}{4}\left[\frac{3\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\cdot\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}+\frac{\cos\frac{(3n+1)x}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{3nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{3x}{2}}\right] \qquad (23)$$

Ressaltamos que a soma $\sum_{k=1}^{n} \cos 3kx$ também pode ser calculada através das fórmulas de Prostaférese, ou seja, fazendo

$$\operatorname{sen}\frac{9x}{2} - \operatorname{sen}\frac{3x}{2} = 2\operatorname{sen}\frac{3x}{2}\cdot\cos 3x$$

$$\operatorname{sen}\frac{15x}{2} - \operatorname{sen}\frac{9x}{2} = 2\operatorname{sen}\frac{3x}{2}\cdot\cos 6x$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\operatorname{sen}\frac{3(2n-1)x}{2} - \operatorname{sen}\frac{3(2n-3)x}{2} = 2\operatorname{sen}\frac{3x}{2}\cdot\cos(3n-1)x$$

$$\operatorname{sen}\frac{3(2n+1)x}{2} - \operatorname{sen}\frac{3(2n-1)x}{2} = 2\operatorname{sen}\frac{3x}{2}\cdot\cos 3nx$$

e somando-se as linhas teremos uma "Soma Telescópica", cujo valor será $\operatorname{sen}\frac{3(2n+1)x}{2} - \operatorname{sen}\frac{3x}{2} = 2\operatorname{sen}\frac{3x}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\cos 3kx$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}\cos 3kx = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{3nx}{2}\cdot\cos\frac{3(n+1)x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{3x}{2}}$, que é exatamente a parte real da expressão (18).

PROBLEMA 4 (IMO-62): Aqui é proposto resolvermos a equação a seguir (observamos que o segundo problema resolvido trata desta questão de forma generalizada).

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1 \qquad \text{(A)}$$

Notando que $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$ segue que

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x\right)$$

Sendo $Z = \cos x + i\operatorname{sen} x$

$\Rightarrow Z^2 = \cos 2x + i\operatorname{sen} 2x$

$\Rightarrow Z^4 = \cos 4x + i\operatorname{sen} 4x$

$\Rightarrow Z^6 = \cos 6x + i\operatorname{sen} 6x$

$$\Rightarrow Z^2 + Z^4 + Z^6 = \frac{Z^2(Z^6-1)}{(Z^2-1)} = \left(\cos 4x + i\,\text{sen}\,4x\right)\frac{\text{sen}\,3x}{\text{sen}\,x} \qquad \text{(B)}$$

Tomando-se a parte real de (B) tem-se que

$$\left(\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x\right) = \frac{\cos 4x \cdot \text{sen}\,3x}{\text{sen}\,x} \qquad \text{(C)}$$

Como $\frac{1}{2}(\text{sen}\,7x - \text{sen}\,x) = \text{sen}\,3x.\cos 4x$, então teremos que a equação (A) reduz-se a $\text{sen}\,7x + \text{sen}\,x = 0$.

$$\Rightarrow 2\,\text{sen}\,4x.\cos 3x = 0$$

$$\therefore \text{sen}\,4x = 0 \vee \cos 3x = 0$$

Logo, a solução da equação proposta será dada pelo conjunto

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{k\pi}{2} \vee x = \frac{(2k+1)\pi}{4} \vee x = \frac{(2k+1)\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

PROBLEMA 5: Determinaremos agora o valor das somas

a) $\cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \ldots + n\cos nx$ e
b) $\text{sen}x + 2\text{sen}2x + 3\text{sen}3x + \ldots + n\text{sen}nx$

Sejam $S_1 = \cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \ldots + n\cos nx$ e
$S_2 = \text{sen}x + 2\text{sen}2x + 3\text{sen}3x + \ldots + n\text{sen}nx$

$$\Rightarrow S_1 + iS_2 = \left(\cos x + i\text{sen}x\right) + 2\left(\cos 2x + i\text{sen}2x\right) + \ldots + n\left(\cos nx + i\text{sen}nx\right)$$

Sendo $Z = \cos x + i\text{sen}x \;\; \Rightarrow S_1 + iS_2 = Z + 2Z^2 + 3Z^3 + \ldots + nZ^n$. Multiplicando-se ambos os termos por $(1-Z)$ teremos

$$S_1 + iS_2 = \frac{Z + Z^2 + Z^3 + \ldots Z^n - nZ^{n+1}}{(1-Z)} = \frac{nZ^{\frac{2n+1}{2}}}{(Z^{\frac{1}{2}} - Z^{-\frac{1}{2}})} - \frac{(Z^n - 1)}{(Z^{\frac{1}{2}} - Z^{-\frac{1}{2}})^2}$$

$$\Rightarrow S_1 + iS_2 = \frac{n\left[\cos\left(\frac{2n+1}{2}\right)x + i\text{sen}\left(\frac{2n+1}{2}\right)x\right]}{2i\text{sen}\frac{x}{2}} - \frac{\left(\cos nx + i\text{sen}nx - 1\right)}{4i^2\text{sen}^2\frac{x}{2}} \qquad (1)$$

Observando-se que a parte real de (1) nos dará o valor de S_1 e que a parte imaginária nos dará o valor de S_2 tem-se, após alguma manipulação algébrica que

$$S_1 = \sum_{j=1}^{n} j\cos jx = \frac{(n+1)\cos nx - n\cos(n+1)x - 1}{4\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}} \text{ , e}$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^{n} j\operatorname{sen} jx = \frac{(n+1)\operatorname{sen} nx - n\operatorname{sen}(n+1)x}{4\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}$$

PROBLEMAS PROPOSTOS:

1) (URSS) Calcule o valor das somas

a) $\cos x + C_n^1 \cos 2x + \ldots + C_n^n \cos(n+1)x$

b) $\operatorname{sen} x + C_n^1 \operatorname{sen} 2x + \ldots + C_n^n \operatorname{sen}(n+1)x$

Obs: $C_n^k = \binom{n}{k}$ denota o binomial "*n* escolhe *k*".

2) (URSS) Mostre que

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \cos\frac{6\pi}{2n+1} + \ldots + \cos\frac{2n\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2}.$$

3) (URSS) Prove que

a) $$\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}(\varphi+\alpha) + \operatorname{sen}(\varphi+2\alpha) + \ldots + \operatorname{sen}(\varphi+n\alpha) = \frac{\operatorname{sen}\frac{(n+1)\alpha}{2}\operatorname{sen}\left(\varphi+\frac{n\alpha}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$$

b) $$\cos\varphi + \cos(\varphi+\alpha) + \cos(\varphi+2\alpha) + \ldots + \cos(\varphi+n\alpha) = \frac{\operatorname{sen}\frac{(n+1)\alpha}{2}\cos\left(\varphi+\frac{n\alpha}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$$

4) Calcule o valor da soma $S = \dfrac{\cos\frac{\pi}{4}}{2} + \dfrac{\cos\frac{2\pi}{4}}{2^2} + \ldots + \dfrac{\cos\frac{n\pi}{4}}{2^n}$.

5) Mostre que

a) $1+a\cos\varphi+a^2\cos 2\varphi+\ldots+a^k\cos k\varphi=\dfrac{a^{k+2}\cos k\varphi-a^{k+1}\cos(k+1)\varphi-a\cos\varphi+1}{a^2-2a\cos\varphi+1}$

$\text{sen}\varphi+a\,\text{sen}(\varphi+h)+\ldots+a^k\text{sen}(\varphi+kh)=$

b) $\dfrac{a^{k+2}\text{sen}(\varphi+kh)-a^{k+1}\text{sen}\left[\varphi+(k+1)h\right]-a\,\text{sen}(\varphi-h)+\text{sen}\varphi}{a^2-2a\cos h+1}$

6) Mostre que 72^0 é o menor ângulo positivo que satisfaz simultaneamente às equações:

$$\begin{cases} 1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0 \\ \text{sen}x+\text{sen}2x+\text{sen}3x+\text{sen}4x=0 \end{cases}$$

7) (IME-92) Mostre que $\dfrac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\dfrac{\text{sen}\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\text{sen}\dfrac{x}{2}}$.

REFERÊNCIAS

[1] FADDEEV, D.; SOMINSKY, I. Problems in Higher Algebra, Moscou: Ed. MIR, 1968.
[2] GREITZER, S.L. International Mathematical Olympiads 1959-1977, Fifth Printing, Washington D.C.: The Mathematical Association of America, 1978.
[3] GUIDORIZZI, H.L. Um curso de cálculo – Vol. 1, 2ª Edição, São Paulo: Ed. Livros Técnicos e Científicos, 1987.
[4] IEZZI, G. Fundamentos de Matemática Elementar, Vol. 3 (Trigonometria), 6ª Edição, São Paulo: Editora Moderna, 1985.
[5] IEZZI, G. Fundamentos de Matemática Elementar, Vol. 6 (Complexos – Polinômios - Equações), 4ª Edição, São Paulo: Editora Moderna, 1983.
[6] LIDSKI, V. B.; OVSIANIKOV, L. V.; TULAIKOV, A. N.; SHABUNIN M. I. Problemas de Matematicas Elementales, Moscou: Ed. MIR, 1972.
[7] MORGADO, A. C; WAGNER, E.; DO CARMO, M. P., Trigonometria e Números Complexos, 4ª Edição, Rio de Janeiro: Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.
[8] SHKLARSKY, D.O., CHENTZOV, N.N., YAGLOM, I.M. The USSR Olympiad Problem Book, New York, Dover Publications, Inc., 1994.

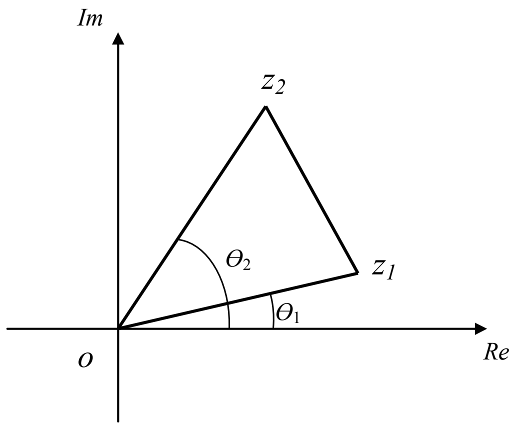
UMA INTERESSANTE DEDUÇÃO PARA A FÓRMULA DE HERÃO

Flávio Antonio Alves, Amparo – SP

♦ Nível Intermediário

Nesta nota sugerimos uma dedução para a fascinante *fórmula de Herão* por meio de aplicações dos números complexos à geometria.

Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ dois números complexos não nulos e distintos. Vamos considerar o triângulo de vértices o, z_1 e z_2 (*veja a figura abaixo*).



A área S do triângulo acima é dada por:

$$S = \frac{1}{2}|z_1||z_2|\, sen(\theta_2 - \theta_1) = \frac{1}{2} Im\{z_2\overline{z}_1\}.$$

Vamos multiplicar essa expressão, membro a membro, por 2 e elevar ao quadrado ambos os termos da igualdade. Assim,

$$4S^2 = \left[Im\{z_2\overline{z}_1\}\right]^2 = \frac{(z_2\overline{z}_1 - z_1\overline{z}_2)^2}{(2i)^2} = \frac{1}{4}\left(2|z_2|^2|z_1|^2 - \overline{z}_2^2 z_1^2 - \overline{z}_1^2 z_2^2\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[4\left|z_2\right|^2\left|z_1\right|^2-\left(\bar{z}_2 z_1+\bar{z}_1 z_2\right)^2\right]=\frac{1}{4}\left[2\left|z_2\right|\left|z_1\right|-\left(\bar{z}_2 z_1+\bar{z}_1 z_2\right)\right]\left[2\left|z_2\right|\left|z_1\right|+\left(\bar{z}_2 z_1+\bar{z}_1 z_2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\left|z_1-z_2\right|^2-\left(\left|z_1\right|-\left|z_2\right|\right)^2\right]\left[\left(\left|z_1\right|+\left|z_2\right|\right)^2-\left|z_1-z_2\right|^2\right].$$

Notemos que:

i) $\left|z_1-z_2\right|^2-\left(\left|z_1\right|-\left|z_2\right|\right)^2=\left(\left|z_1-z_2\right|+\left|z_2\right|-\left|z_1\right|\right)\left(\left|z_1-z_2\right|+\left|z_1\right|-\left|z_2\right|\right),$

E, do mesmo modo, temos que:

ii) $\left(\left|z_1\right|+\left|z_2\right|\right)^2-\left|z_1-z_2\right|^2=\left(\left|z_1\right|+\left|z_2\right|-\left|z_1-z_2\right|\right)\left(\left|z_1\right|+\left|z_2\right|+\left|z_1-z_2\right|\right).$

Substituindo (*i*) e (*ii*) na expressão acima, vem:

$$=\frac{1}{4}\left(\left|z_1-z_2\right|+\left|z_2\right|-\left|z_1\right|\right)\left(\left|z_1-z_2\right|+\left|z_1\right|-\left|z_2\right|\right)\left(\left|z_1\right|+\left|z_2\right|-\left|z_1-z_2\right|\right)\left(\left|z_1\right|+\left|z_2\right|+\left|z_1-z_2\right|\right)$$

Nesse caso, pondo-se $p=\dfrac{\left(\left|z_1\right|+\left|z_2\right|+\left|z_1-z_2\right|\right)}{2}$, onde p é o semi-perímetro,

concluímos que:

$$4S^2=\frac{1}{4}\left(2p-2\left|z_1\right|\right)\left(2p-2\left|z_2\right|\right)\left(2p-2\left|z_1-z_2\right|\right)\left(2p\right)\Rightarrow$$

$$4S^2=4\left(p-\left|z_1\right|\right)\left(p-\left|z_2\right|\right)\left(p-\left|z_1-z_2\right|\right)\left(p\right)\Rightarrow$$

$$S^2=\left(p-\left|z_1\right|\right)\left(p-\left|z_2\right|\right)\left(p-\left|z_1-z_2\right|\right)\left(p\right)\Rightarrow$$

$S=\sqrt{\left(p\right)\left(p-\left|z_1\right|\right)\left(p-\left|z_2\right|\right)\left(p-\left|z_1-z_2\right|\right)}$, que é a fórmula de Herão.

RAÍZES DA UNIDADE

Anderson Torres & Eduardo Tengan

♦ Nível Intermediário

Para $\theta \in \mathbb{R}$ a *Fórmula de Euler* nos permite escrever $e^{i\cdot\theta} = \cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta$. Ela nos fornece uma maneira prática de multiplicar números complexos. Por exemplo, o *Teorema de De Moivre*, normalmente escrito $(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \cdot \text{sen} n\theta,$ na notação exponencial fica bem mais conciso: $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{i(n\theta)}$. Mas, e as raízes da unidade? Elas são os complexos que zeram o polinômio $P(z) = z^n - 1$. Por De Moivre, sabemos que $\zeta_k = e^{2k\pi i/n}$ são raízes deste polinômio (com $0 \le k < n$), e, como são n no total, elas são todas as raízes.
E assim temos o primeiro resultado do artigo:

$$z^n - 1 = \prod_{0 \le k < n} \left(z - \zeta^k\right),$$

em que $\zeta = e^{2k\pi i/n}$.

Raízes da unidade têm um monte de aplicações. Uma das mais imediatas é simplificar contas com funções trigonométricas, usando estas fórmulas aqui:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}; \text{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

PROBLEMA 1: calcule a soma tenebrosa

$$\sum_{0 \le k < n} \text{sen}\frac{k\pi}{n}$$

SOLUÇÃO: Usando a nossa recente descoberta, esta soma se transforma numa progressão geométrica! Sendo $\zeta = e^{i\pi/n}$, temos

$$\sum_{0 \le k < n} sen\frac{k\pi}{n} = \sum_{0 \le k < n} \frac{\zeta^k - \zeta^{-k}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(\sum_{0 \le k < n} \zeta^k - \sum_{0 \le k < n} \left(\zeta^{-1}\right)^k\right)$$

$$\sum_{0\le k<n} \operatorname{sen}\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{2i}\left(\frac{\zeta^n - 1}{\zeta - 1} - \frac{\left(\zeta^{-1}\right)^n - 1}{\zeta^{-1} - 1}\right)$$

Talvez você deva estar pensando: "uma diferença de complexos dando um real? Mas como??" Simples: $\zeta^{-1} = \overline{\zeta},$ logo a soma acima é uma diferença de conjugados dividida por $2i$. É por isso que o resultado é real...

$$\sum_{0\le k<n} sen\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{2_i}\left(\frac{-2}{\zeta - 1} + \frac{2}{\zeta^{-1} - 1}\right) = i\cdot\frac{\zeta^{1/2} + \zeta^{-1/2}}{\zeta^{1/2} + \zeta^{-1/2}} = cotg\,\frac{\pi}{2n}$$

Agora, uma aplicação da fatoração de $z^n - 1$:

PROBLEMA 2: Prove que, para todo inteiro positivo n existem polinômios $f_n, g_n \in \mathbb{Z}[x]$ tais que

$$f_n(x)(x+1)^{2r} + g_n(x)\left(x^{2^n} + 1\right) = 2$$

SOLUÇÃO: Primeiro, testar alguns casos pequenos: $n = 1$

$$f_1(x)(x+1)^2 + g_1(x)\left(x^2 + 1\right) = 2$$

Para eliminar g_1, podemos aplicar $x = i$, o que nos dá

$$f_1(i)(i+1)^2 = 2 \Leftrightarrow f_1(i) = \frac{2}{(1+i)^2} = -i$$

Podemos tomar $f_1(x) = -x.$ Mas e quanto a $g_1(x)?$ Calma, coisas são feitas para funcionar! Veja que

$$2 - f_1(x)(x+1)^2 = 2 + x(x+1)^2$$

tem i com zero, e automaticamente $-i$ (conjugados, a-há!). Portanto o polinômio acima é múltiplo de $x^2 + 1$ e basta efetuar a divisão com Briot-Ruffini para achar g_1.

Para o caso geral, vamos considerar os zeros de $x^{2^n}+1$. Mas os zeros de $x^{2^n}+1=\frac{x^{2^{n+1}}-1}{x^{2^n}-1}$ são justamente as raízes 2^{n+1}-ésimas da unidade que não são raízes 2^n-ésimas da unidade. Logo, se escolhermos $\zeta=e^{2\pi i/2^{n+1}}$ uma raiz 2^{n+1}-ésima primitiva da unidade (isto é, que não é raiz *t*-ésima da unidade para nenhum *t* menor que 2^{n+1}), temos

$$x^{2^n}+1=\prod_{\substack{1\le k\le 2^n+1\\ k\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,2)}}\left(x-\zeta^k\right)$$

Escrevendo $x=-1$,

$$(-1)^{2^n}+1=\prod_{\substack{1\le k\le 2^n+1\\ k\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,2)}}\left(-1-\zeta^k\right)\Leftrightarrow 2=\prod_{\substack{1\le k\le 2^n+1\\ k\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,2)}}\left(-1-\zeta^k\right)$$

Basta demonstrar que cada $1+\zeta^k$ "é múltiplo" de $1+\zeta$. Moleza:

$$1+\zeta^k=(1+\zeta)\left(1-\zeta+\zeta^2-\zeta^3+\ldots-\zeta^{k-2}+\zeta^{k-1}\right)$$

Portanto, podemos escolher f_n tal que $2-f_n(x)(1+x)^{2^n}$ admite raízes ζ^k, k ímpar. Portanto, é divisível por $x^{2^n}+1$, o que acaba a demonstração.
Agora, um problema de Geometria:

PROBLEMA 3: *ABCDE* é um pentágono cíclico de circuncentro *O*. Os ângulos internos do pentágono são $\angle A=70°, \angle B=120°, \angle C=120°, \angle D=130°, \angle E=100°$. Demonstre que as diagonais *BD* e *CE* encontram-se em um ponto pertencente à reta *AO*.

SOLUÇÃO: Como em qualquer problema de geometria, um bom arrastão para começar. Inicialmente, vamos ligar o centro aos vértices do pentágono.
Esta é a melhor maneira de aproveitar a conciclicidade dos pontos.
Assim sendo, $\angle AOB=80°, \angle BOC=40°, \angle COD=80°, \angle DOE=20°, \angle EOA=140°$.
Mas $MDC(80,40,20,140)=20$ e portanto os vértices do pentágono estão entre os vértices de um 18-ágono regular (afinal, $\frac{360}{20}=18$)! Agora, vamos colocar as coisas nos eixos: inicialmente, $O=0, A=1$ (podemos fazer isto por homotetia: se

$OA \neq 1,$ aplicamos uma homotetia de centro O e razão $1/OA$). Seja $\omega = e^{i2\pi/18}$ uma raiz 18-ésima (primitiva, por sinal) da unidade. Com isto, os vértices estão determinados. Vamos usar minúsculas para os números complexos associados aos pontos.

$$a = 1, b = \omega^4, c = \omega^6, d = \omega^{10}, e = \omega^{11}$$

Temos que provar que AO, BD, CE são concorrentes. Dada a escolha esperta que fizemos, basta demonstrar que as retas BD e CE se intersectam em um ponto real puro. Ou, em outras palavras, que se z é o complexo comum a BD e CE então $z = \overline{z}$.

Bem, para calcular equações de retas, vamos a uma técnica, ou melhor, um teorema, bastante útil (e que fica como exercício para o leitor, haha!): Dados os complexos p, q do círculo unitário, a reta pq tem equação dada por

$$z + pq\overline{z} = p + q$$

Temos então:

$$\left| \begin{array}{l} AO : z \qquad\quad = \overline{z} \\ BD : z + bd\overline{z} = b + d \\ CE : z + ce\overline{z} = c + e \end{array} \right.$$

que equivale a

$$\left| \begin{array}{l} AO : z \qquad\quad = \overline{z} \\ BD : z + \omega^{14}\overline{z} = \omega^4 + \omega^1\omega^{10} \\ CE : z + \omega^{17}\overline{z} = \omega^6 + \omega^{11} \end{array} \right.$$

Basta provar que $AO \cap BD : z = \dfrac{\omega^4 + \omega^{10}}{1 + \omega^{14}}; AO \cap CE : z = \dfrac{\omega^6 + \omega^{11}}{1 + \omega^{17}}$

Antes de começar a calculeira, vamos estudar algumas propriedades interessantes de ω. Bem, sabemos que ele é zero do polinômio $x^{18} - 1,$ e $18 = 2 \cdot 3^2.$ A ideia será fatorar este polinômio até a exaustão... $x^{18} - 1 = \left(x^9 - 1\right)\left(x^9 + 1\right).$ Como ω é raiz 18-ésima primitiva da unidade, o primeiro fator não contém ω como raiz. Assim sendo, vamos pensar no outro fator: $x^9 + 1 = \left(x^3\right)^3 + 1 = \left(x^3 + 1\right)\left(x^6 - x^3 + 1\right).$ Pode-se demonstrar (mas não será necessário) que este último fator é irredutível. Então $\omega^6 - \omega^3 + 1 = 0,$ e de quebra $\omega^9 = -1.$

Depois dessa volta toda, vamos ao que interessa: comparar as duas expressões de z:

$$\frac{\omega^4 + \omega^{10}}{1+\omega^{14}} = \frac{\omega^6 + \omega^{11}}{1+\omega^{17}}$$

$$\left(\omega^4 + \omega^{10}\right)\left(1+\omega^{17}\right) = \left(\omega^6 + \omega^{11}\right)\left(1+\omega^{14}\right)$$

$$\left(\omega^4 - \omega^1\right)\left(1-\omega^8\right) = \left(\omega^6 - \omega^2\right)\left(1-\omega^5\right)$$

$$\omega^4 - \omega^1 - \omega^{12} + \omega^9 = \omega^6 - \omega^2 - \omega^{11} + \omega^7$$

$$\omega^4 - \omega^1 + \omega^3 - 1 = \omega^6 - \omega^2 + \omega^2 + \omega^7$$

$$\omega^4 - \omega^1 + \omega^3 - 1 = \omega^3 - 1 + \omega^7$$

$$\omega^4 - \omega^1 = \omega^7$$

$$\omega^3 - 1 = \omega^6$$

$$0 = 0$$

E fim!

Outra aplicação interessante das raízes da unidade é como "marcadores". Veja este problema:

PROBLEMA 4: Determine uma fórmula fechada para

$$\sum_{3|k} \binom{n}{k}$$

SOLUÇÃO: Bem, alguém aí conhece algo parecido? Que tal o Binômio de Newton?

$$\sum_{3|k} \binom{n}{k} z^k = (1+z)^n$$

Agora, já tem alguma ideia do que se pode fazer? Temos que filtrar os múltiplos de 3 desta expansão, e nada melhor que usar uma raiz cúbica da unidade $\omega = e^{2\pi i/3}$. Substituindo z por 1, ω e ω^2, temos

$$\begin{cases} \sum_k \binom{n}{k} = (1+1)^n \\ \sum_k \binom{n}{k} \omega^k = (1+\omega)^n \Rightarrow \sum_k \binom{n}{k} \left(1+\omega^k+\omega^{2k}\right) = 2^n + (1+\omega)^n + \left(1+\omega^2\right)^n \\ \sum_k \binom{n}{k} \omega^{2k} = \left(1+\omega^2\right)^n \end{cases}$$

Agora, se k é múltiplo de $3, 1+\omega^k+\omega^{2k}=3;$ caso contrário, temos uma progressão geométrica de razão $\omega^k \neq 1,$ e portanto $1+\omega^k+\omega^{2k}=\dfrac{\omega^{3k}-1}{\omega^k-1}=0.$
Ou seja, matamos todos os não múltiplos de 3!

$$3\sum_{3|k}\binom{n}{k} = 2^n + (1+\omega)^n + \left(1+\omega^2\right)^n = 2^n + \left(-\omega^2\right)^n + (-\omega)^n = 2^n + 2(-1)^n \frac{\omega^n+\omega^{-n}}{2}$$

$$\sum_{3|k}\binom{n}{k} = \frac{2^n + 2(-1)^n cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{3}$$

Esta última técnica tem um nome chique: *multisecção.* Vamos usá-la em um problema de, adivinha só, Combinatória Enumerativa!

PROBLEMA 5: (IMO 1995, Canadá) Seja p um primo ímpar, e seja $S=\{1,2,3...2p\}$. Determine o total de subconjuntos $A \in S$ que satisfazem as condições a seguir:

- $|A| = p;$
- $p \left| \sum_{x\in A} x. \right.$

SOLUÇÃO: Este foi o problema 6 da Olimpíada Internacional de 1995, em Montreal, Canadá. Ela foi tida como uma das mais interessantes pela riqueza de problemas "legais e divertidos" daquele ano, algo comparável apenas à IMO da Argentina, que aconteceria dois anos depois.

A solução aqui apresentada é uma pequena modificação daquela dada por Nikolai Nikolov, ganhador de um *Special Prize* (prêmio especial, dado pela originalidade).

Vamos pensar em uma raiz p-ésima da unidade, primitiva por sinal: $\varepsilon = e^{2\pi i/p}$. Veja que $\omega = \varepsilon^k$ também é uma raiz p-ésima da unidade, para $k \in \{1,2,3,\ldots,p-1\}$. Excluímos o 1 propositalmente, pois ele não terá propriedades tão interessantes quanto as outras raízes (logo verás o porquê).

Os complexos $\{\omega^0, \omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{p-1}\} = \{1, \varepsilon^k, \varepsilon^{2k}, \ldots, \varepsilon^{k(p-1)}\}$ são raízes p-ésimas da unidade. Elas são distintas: de fato, se $\varepsilon^{ik} = \varepsilon^{jk}$ para $0 \le i \le j < p,$ temos $e^{j-i}k = e^0 = 1 \Leftrightarrow p \mid (j-i)k$ e, como $0 < k < p, p \mid (j-i) \Leftrightarrow j-i = 0.$

Agora vamos ao bom e velho polinômio $f(z) = z^p - 1 = \prod_{0 \le j \le p-1} (z - \varepsilon^j) = \prod_{1 \le j \le p} (z - \omega^j).$

Pensando em Séries Formais, conseguimos trabalhar com este polinômio os elementos de 1 a p. Como podemos "alcançar" $2p$? Oras, eleva ao quadrado!

$$\left(f(z)\right)^2 = \left(z^p - 1\right)^2 = \prod_{0 \le j \le p-1} \left(z - \omega^j\right) \cdot \prod_{0 \le j \le p-1} \left(z - \omega^j\right) = \prod_{1 \le j \le p} \left(z - \omega^j\right) \cdot \prod_{p+1 \le j \le 2p} \left(z - \omega^j\right) =$$
$$= \prod_{1 \le j \le 2p} \left(z - \omega^j\right)$$

Vamos abrir $\left(f(z)\right)^2$: $\left(f(z)\right)^2 = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_p z^p + \ldots + a_{2p-1} z^{2p-1} + a_{2p} z^{2p}$

Agora, vamos observar como o a_p é produzido de uma maneira combinatória.

Primeiramente, escolhemos arbitrariamente p fatores, e coletamos o termo z deles; isto nos dará o expoente $2p$. Já dos outros p fatores, escolhemos o termo $\left(-\omega^j\right)$. O resultado será então

$$a_p = \prod_{1 \le j_1 \le j_2 < \ldots < j_p \le 2p} \left(-\omega^{j_1}\right)\left(-\omega^{j_2}\right)\ldots\left(-\omega^{j_p}\right) = -\sum_{0 \le r \le p-1} c_r \omega^r$$

em que c_r é o total de p-tuplas $j_1 < j_2 < \ldots < j_p$ tais que $j_1 + j_2 + \ldots + j_p \equiv r \pmod{p}$. A nossa tarefa é achar c_0!

Mas $\left(f(z)\right)^2 = z^{2p} - 2z^p + 1 \Rightarrow a_p = -2.$ Assim,

$$c_0 + c_1\omega + c_2\omega + \ldots + c_{p-1}\omega^{p-1} = 2$$

Em outras palavras, ω é zero do polinômio

$$g(z)=(c_0-2)+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_{p-1}\omega^{p-1}$$

Lembre-se que todo o raciocínio usado até aqui foi puramente combinatório, e é válido para qualquer ω que seja raiz p-ésima da unidade (exceto o 1). Logo, todas as raízes p-ésimas primitivas da unidade são raízes de g. Mas g tem grau p – 1, portanto:

$$g(z)=c_{p-1}\cdot\frac{f(z)}{z-1}=c_{p-1}\left(1+z+z^2+\ldots+z^{p-1}\right)$$

Igualando os coeficientes, $c_0-2=c_1=c_2=\ldots=c_{p-1}$.

Mas $c_0+c_1+c_2+\ldots+c_{p-1}=\binom{2p}{p}$. Contagem dupla: cada p-subconjunto de S é contado em exatamente um dos c_i, justamente aquele correspondente à soma de seus elementos módulo p.
Resolvendo as equações acima, concluímos que

$$c_0=2+\frac{1}{p}\left(\binom{2p}{p}-2\right)$$

E fim!
Bem, que tal uns exercícios?

EXERCÍCIOS PROPOSTOS:

1) Determine o valor numérico da série

$$\sum_{n\geq 1}\prod_{1\leq j\leq n}cos\frac{j\pi}{n}$$

2) Sejam x, y, z, A, B, C reais tais que $\frac{A+B+C}{\pi}$ é inteiro.
Defina $K_r=x^r sen(rA)+y^r sen(rB)+z^r sen(rC)$.
Prove que se $K_1=K_2=0$ então $K_n=0$ para todo $n>0$.

3) Fixe um dos vértices de um n-ágono regular inscrito numa circunferência de raio 1, e considere os segmentos que ligam este vértice a todos os outros. Prove que o produto das medidas de todos estes n – 1 segmentos é n.

4) Calcule $sen\frac{2\pi}{7}+sen\frac{4\pi}{7}+sen\frac{8\pi}{7}$.

Dica: sejam $\zeta=e^{2i\pi/7}, p=\zeta+\zeta^2+\zeta^4, q=\zeta^3+\zeta^5+\zeta^6$. O que queremos é calcular a parte real de *p*. Calcule *p* + *q* e *p* · *q* e seja feliz!

5) Se P, Q, R, S são polinômios tais que
$P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)S(x)$, prove que $P(1)=0$.

6) ***Fórmula de Multisecção:*** Sendo $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$, e $l,m\in\mathbb{N}$, com $0\le l\le m$, temos $\sum_{k\equiv l(\text{mod } m)} a_k=\frac{\sum_{0\le k\le m}\omega^{-lk}p(\omega^k)}{m}$ em que $\omega=e^{2i\pi/m}$.

7) Mostre que $\sum_{0\le k\le n}\binom{n}{k}cos(k\theta)=\left(2cos\frac{\theta}{2}\right)^2\left(cos\frac{n\theta}{2}\right)$

8) (Irlanda) Sabe-se que *a*, *b*, *c* são complexos tais que as raízes da equação $x^3+ax^2+bx+c=0$ têm módulo 1. Prove que as raízes de $x^3+|a|x^2+|b|x+|c|=0$ também têm módulo 1.

9) Seja $(1+x+x^2+x^3+x^4)^{496}=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{1984}x^{1984}$.

- Determine $MDC\ (a_3, a_8, \ldots, a_{1983})$
- Prove que $10^{340}<a_{992}<10^{347}$

10) Determine todos os polinômios *P* tais que $P(x^2)=P(x)P(x-1)$.

11) Determine o número de polinômios de grau 5 com coeficientes entre 1 e 9 inclusive e que sejam divisíveis por x^2-x+1.

12) Prove que o número $\sum_{0\le k\le n}\binom{2n+1}{2k+1}2^{3k}$ não é múltiplo de 5 para qualquer $n\ge 0$.

COMO É QUE FAZ?

✉ *Resolvermos aqui, a pedidos, três problemas propostos na seção "Olimpíadas ao redor do mundo".*

1) (Problema 109 – Suíça, 2000, proposto na Eureka! 11) Seja $q(n)$ a soma dos algarismos de *n*. Calcule $q\left(q\left(q\left(2000^{2000}\right)\right)\right)$ (Proposto por Cícero Soares Furtado, de Reriutaba – CE).

SOLUÇÃO: Como $2000^{2000} = 2^{2000} \cdot 10^{6000}$, sua representação decimal é a representação decimal de 2^{2000} seguida de 6000 zeros, e logo $q\left(2000^{2000}\right) = q\left(2^{2000}\right)$. Como $2^3 < 10, 2^{2000} < 2^{2001} = \left(2^3\right)^{667} < 10^{667}$, donde 2^{2000} tem no máximo 667 dígitos. Como cada dígito é no máximo 9, $q\left(2000^{2000}\right) = q\left(2^{2000}\right) \le 9 \cdot 667 = 6003.$

Portanto, $q\left(q\left(2000^{2000}\right)\right) \le 6+9+9+9 = 33,$ e logo $q\left(q\left(q\left(2000^{2000}\right)\right)\right) \le 3+9 = 12.$

Por outro lado, como *n* e *q*(*n*) sempre deixam o mesmo resto na divisão por 9, o resto da divisão de $q\left(q\left(q\left(2000^{2000}\right)\right)\right) = q\left(q\left(q\left(2000^{2000}\right)\right)\right)$ por 9 é igual ao resto da divisão de 2^{2000} por 9. Mas, como $2^6 = 64$ deixa resto 1 quando dividido por 9, $2^{2000} = 2^{6\cdot 333+2} = \left(2^6\right)^{333} \cdot 2^2 = 4$ quando dividido por 9. Como $q\left(q\left(q\left(2000^{2000}\right)\right)\right) \le 12$ e 4 + 9 = 13 > 12, concluímos que necessariamente $q\left(q\left(q\left(2000^{2000}\right)\right)\right) = 4.$

2) (Problema 110 – Grécia, 2000, proposto na Eureka! 11) Determine os números primo *p* para os quais o número $1+p+p^2+p^3+p^4$ é um quadrado perfeito. (proposto por Cícero Soares Furtado, de Rariutaba – CE).

Vamos encontrar todos os naturais *n* tais que $1+n+n^2+n^3+n^4$ é quadrado perfeito. Note que $\left(n^2+\frac{n+1}{2}\right)^2 = n^4+n^3+\frac{5n^2}{4}+\frac{n}{2}+\frac{1}{4} > n^4+n^3+n^2+n+1$ para todo $n > 3$ (pois $\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} - \frac{3}{4} > 0$ para todo n > 3). Por outro lado, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\left(n^2 + \frac{n}{4}\right)^2 = n^4 + n^3 + \frac{n^2}{4} < n^4 + n^3 + n^2 + n + 1.$

Como, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos $k \le n^2 + \frac{n}{2}$ ou $k \ge n^2 + \frac{n+1}{2}$, se n > 3 temos $k^2 < n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$ ou $k^2 > n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$ Assim, basta olhar os casos $n \in \{0, 1, 2, 3\}$. Para n = 0, $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 = 1 = 1^2$. Para n = 1, $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 = 5$, que não é quadrado perfeito. Para n = 2, $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 = 31$, que não é quadrado perfeito, e, para n = 3, $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 = 121 = 11^2$. Assim, o único primo p tal que $1 + p + p^2 + p^3 + p^4$ é quadrado perfeito é p = 3.

3) (Problema 188 – Rússia, 2002, proposto na Eureka! 15) No intervalo $\left(2^{2^n}, 3^{2^n}\right)$ são escolhidos $2^{2^{n-1}} + 1$ números ímpares. Mostre que podemos encontrar entre estes números dois números tais que o quadrado de cada um deles não é divisível pelo outro. (Proposto por Anderson Torres, de Santana de Parnaíba – SP).

SOLUÇÃO: Se $x < y$ são ímpares e y divide x^2, então $y \left| \left(\frac{y-x}{2}\right)^2 \right.$. Em particular, $\left(\frac{y-x}{2}\right)^2 \ge y$, donde $y - x \ge 2\sqrt{y}$, e logo $\left(\sqrt{y} - 1\right)^2 = y - 2\sqrt{y} + 1 > x$, donde $\sqrt{y} > \sqrt{x} + 1$. Assim, se $2^{2^n} < x_0 < x_1 < ... < x_{2^{2^{n-1}}} < 3^{2^n}$ são os números em questão, temos $\sqrt{x_{j+1}} > \sqrt{x_j} + 1$, para todo $j \ge 0$, e logo $\sqrt{x_j} > 2^n + j, \forall j \ge 0.$

Em particular, $\sqrt{x_{2^{2^{n-1}}}} > 2^n + 2^{2^{n-1}}$, donde $3^{2^n} > x_{2^{2^{n-1}}} > \left(2^n + 2^{2^{n-1}}\right)^2$, e logo $3^n > 2^n + 2^{2^{n-1}}$, mas isso é falso para todo $n \ge 1$ (para n = 1, 3 < 4, para $n = 2$, $9 < 4 + 8$ e, para $n \ge 3, 3^n < 2^{2^{n-1}}$: com efeito, $27 = 3^3 < 2^5 = 32$ e, se $3^n < 2^{2n-1}, 3^{n+1} = 3 \cdot 3^n < 3 \cdot 2^{2n-1} < 4 \cdot 2^{2n-1} = 2^{2n+1} = 2^{2(n+1)-1}$), absurdo.

4) (Problema 113 – Polônia, 2000, proposto na Eureka! 11) Uma sequência $p_1, p_{2,...}$ de números primos satisfaz à seguinte condição: para $n \ge 3, p_n$ é o maior divisor primo de $p_{n-1}+p_{n-2}+2000$. Mostre que a sequência (p_n) é limitada. (Proposto por Anderson Torres, de Santana de Parnaíba – SP).

SOLUÇÃO: Vamos mostrar a seguinte afirmação, que implica o resultado:
Para todo $k\geq 0$ existe j com $1\leq j\leq 40$ tal que $\max(p_{k+j},p_{k+j+1})\leq \frac{2}{3}\max(p_k,p_{k+1})+40000$ (de fato, a afirmação implica que existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $p_n\leq 160000$, para todo $n\geq n_0$; note que $p_{n+2}\leq \max(p_n,p_{n+1})+1000, \forall n\geq 1$).
Suponhamos inicialmente que, para todo r, com $0\leq r\leq 35, p_{k+r}$ é um primo ímpar. Então, para todo r, com $2\leq r\leq 36, p_{k+r}\leq \dfrac{p_{k+r-1}+p_{k+r-2}+2000}{2}$. Definindo $q_0=p_k$, $q_1=p_{k+1}$ e $q_j=\dfrac{q_{j-1}+q_{j-2}+2000}{2}$ para $2\leq j\leq 36$, temos $p_{k+r}\leq q_r$, para $0\leq r\leq 36$. Se, para algum $r\leq 36, p_{k+r}\neq q_r$, tomando um tal r mínimo temos $p_{k+r}\leq \dfrac{p_{k+r-1}+p_{k+r-2}+2000}{6}$, e a afirmação vale para $j=r$. Temos ainda que q_j é dado pela expressão $q_j=\left(\dfrac{p_k+2p_{k+1}}{3}-\dfrac{4000}{9}\right)+\left(\dfrac{2p_k-2p_{k+1}}{3}+\dfrac{4000}{9}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^j+\dfrac{2000j}{3}$, para $0\leq j\leq 42$. Assim,

$$9q_{6j}=(3p_k+6p_{k+1}-4000)+(6p_k-6p_{k+1}+4000)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{6j}+6000j\equiv 9p_k+6000j \pmod 7.$$

Portanto, existe s com $0\leq s\leq 6$ tal que $9q_{6s}$ (e logo q_{6s}) é múltiplo de 7. Se $s=0$, a afirmação já vale para $j=1$. Se tivéssemos $p_{k+r}=q_r$ para $0\leq r\leq 36$, tomamos s com $1\leq s\leq 6$ tal que q_{6s} é múltiplo de 7, e teríamos $p_{k+6j}\leq \dfrac{q_{6s}}{7}$, absurdo.
Se $p_k=2$, a afirmação já vale para $j=1$. Finalmente, se $p_{k+r}=2$ para algum r com $1\leq r\leq 35$, teremos $p_{k+r+1}\leq p_{k+r-1}+2002$ e $p_{k+2+2}\leq p_{k+1-1}+4004$, mas um desses números $(p_{k+r-1}, p_{k+r-1}+2002 \text{ e } p_{k+r-1}+4004)$ é múltiplo de 3, logo a afirmação vale para $j=r+2$.

SOLUÇÕES DE PROBLEMAS PROPOSTOS

Publicamos aqui algumas das respostas enviadas por nossos leitores.

131) a) Considere o seguinte jogo: no início um jogador A entrega um número $k \geq 2$ ao jogador B. Quando A entrega um número $m \geq 2$ a B, B pode devolver $m - 1$ ou $m+1$ a A. Quando A recebe um número $n \geq 2$ deve, se n for ímpar devolver $3n$ a B; se n for par mas não múltiplo de 4, pode devolver $\frac{n}{2}$ ou $3n$ a B, e, se n for múltiplo de 4, pode devolver $\frac{n}{4}, \frac{n}{2}$ ou $3n$ a B. Qualquer jogador ganha o jogo se devolver 1 ao adversário. Caso algum jogador devolva ao adversário um número maior que $1000k$, o jogo empata. Determine, para cada valor de $k \geq 2$, se algum dos jogadores tem estratégia vencedora, e, nesses casos, qual deles.

b) Resolva o item anterior supondo que A, ao receber um número $n \geq 2$, deve devolver $3n$ a B se n for ímpar, deve devolver $\frac{n}{2}$ a B se n for par mas não múltiplo de 4 e deve devolver $\frac{n}{4}$ a B se n for múltiplo de 4.

SOLUÇÃO DE JOSÉ DE ALMEIDA PANTERA (RIO DE JANEIRO – RJ)

a) Naturalmente A perde se entregar o número $k = 2$ ao jogador B, pois B poderá devolver 1 imediatamente a A.

Vamos mostrar que A ganha se entregar a B um número de k da forma $\frac{2 \cdot 4^n + 1}{3}$ ou da forma $\frac{4^n - 1}{3}$, para algum $n \geq 1$, e se $k > 2$ não for de nenhuma dessas formas nenhum dos jogadores tem estratégia vencedora.

Para isso, note que, se A entrega $3 = \frac{2 \cdot 4^1 + 1}{3}$ a B, B pode devolver 2 ou 4 a A, e, em qualquer caso, A pode devolver 1 a B e ganhar o jogo. Se A entrega $5 = \frac{4^{1+1} - 1}{3}$ a B, B pode devolver 4 ou 6 a A.

Se devolve 4, A pode devolver 1 a B e ganhar. Se devolve 6, A pode devolver 3 a B, e ganhar a seguir, como vimos antes.

Em geral, podemos argumentar por indução: se *A* entrega $\frac{2\cdot 4^{n+1}+1}{3}$ a *B*, com $n\geq 1$, *B* pode devolver $\frac{2\cdot 4^{n+1}-2}{3}$ a *A*, caso em que *A* pode devolver $\frac{4^{n+1}-1}{3}$ a *B*, ganhando o jogo, ou *B* pode devolver $\frac{2\cdot 4^{n+1}+4}{3}$ a *A*, caso em que *A* pode devolver $\frac{2\cdot 4^{n}+1}{3}$ a *B*, ganhando o jogo. De modo similar, se *A* entrega $\frac{4^{n+2}-1}{3}$ a *B*, com $n\geq 1$, *B* pode devolver $\frac{4^{n+2}-4}{3}$ a *A*, caso em que *A* pode devolver $\frac{4^{n+1}-1}{3}$ a *B*, ganhando o jogo, ou *B* pode devolver $\frac{4^{n+2}+2}{3}$ a *A* , caso em que *A* pode devolver $\frac{2\cdot 4^{n+1}+1}{3}$ a *B*, ganahndo o jogo.

Notemos que *A* sempre pode no mínimo empatar o jogo se $k\geq 3$. De fato, se em algum momento do jogo *A* entrega $m\geq 3$ a *B*, *B* devolve no mínimo *m* – 1, e *A* pode devolver o triplo, que é no mínimo $3(m-1)>m$.

Assim, *A* pode devolver números cada vez maiores, que em algum momento ultrapassarão 1000*k*, empatando o jogo.

Veremos agora que *B* pode garantir o empate se *A* entrega um número que não é das formas descritas anteriormente. Mais precisamente, veremos que, se *A* envia um número que não pertence ao conjunto $X:=\left\{\frac{2\cdot 4^{n}+1}{3}, n\geq 0\right\}\cup\left\{\frac{4^{n+1}-1}{3}, n\geq 1\right\}$, então *B* pode devolver um número a partir do qual *A* não pode devolver nenhum número pertencente a X (note que $1\in X$). Temos $X=\{1,3,5,11,21,...\}$. Se *A* envia a *B* um número par *m*, *B* pode devolver *m* – 1 ou *m* + 1, que são ímpares, a *A*, que deve devolver o triplo a *B*. Como não é possível que $3(m-1)$ e $3(m+1)$ pertençam ambos a *X*, isso mostra nossa afirmação no caso *m* par. Se *A* envia a *B* um número ímpar *m*, que não pertence a *X*, não é difícil ver que $m-1\notin\{2k,k\in X\}\cup\{4k,k\in X\}$ ou $m+1\notin\{2k,k\in X\}\cup\{4k,k\in X\}$. Isso implica a afirmação no caso *m* par.

b) No meio do jogo, *B* só recebe um número par se *A* tiver acabado de dividir um número (necessariamente múltiplo de 8) por 4. E, se *B* recebe um ímpar, devolverá um par, o que forçará *A* a dividi-lo por 2 ou por 4. Assim, os números tendem a decrescer, e , nos casos que empatavam, *B* ganha o jogo. Por outro lado, *A* ganha o jogo, com a mesma estratégia, nos mesmos casos que no item *A,* pois nesses casos sempre devolve números ímpares.

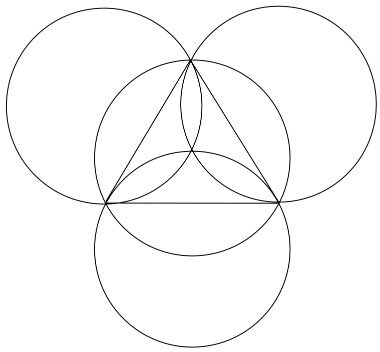
132) a) Considere uma família $\Im$ de 2000 círculos de raio 1 no plano tal que dois círculos de $\Im$ nunca são tangentes e cada círculo de $\Im$ intersecta pelo menos dois outros círculos de $\Im$. Determine o número mínimo possível de pontos do plano que pertencem a pelo menos dois círculos de $\Im$.

SOLUÇÃO DE ZOROASTRO AZAMBUJA NETO (RIO DE JANEIRO – RJ)

Mostraremos que esse número mínimo é igual a 2000.

Para isso, consideramos um triângulo equilátero de lado $\sqrt{3}$ e os seguintes quatro círculos: o círculo circunscrito ao triângulo e os três círculos que contêm o circuncentro do triângulo e dois de seus vértices. Esses quatro círculos têm raio 1, e cada um deles intersecta os outros três.

Considerando 500 cópias disjuntas dessa configuração de círculos, obtemos 2000 círculos como no enunciado tais que há 2000 pontos que pertencem a pelo menos dois deles.



Para concluir, vamos mostrar que, numa configuração de *n* círculos de raio 1 no plano $(n \geq 2)$ em que cada círculo intersecta pelo menos outro círculo e não há dois círculos tangentes, há sempre pelo menos *n* pontos que pertencem a pelo menos dois dos círculos. Vamos mostrar, por indução em *n*, que, na situação acima, não apenas há pelo menos *n* pontos que pertencem a pelo menos dois dos círculos, mas também que existe uma função injetiva do conjunto dos *n* círculos no conjunto dos pontos que pertencem a pelo menos dois dos círculos tal que a imagem de cada círculo pertence a ele.

Para isso, note que se n = 2 isso é claramente verdadeiro. Suponha agora que $m \geq 2$ e que isso vale para todo n com $2 \leq n \leq m,$ e considere uma configuração de m + 1 círculos como antes.
Suponha inicialmente que algum desses círculos, digamos $C_1,$ intersecta só um dos outros círculos, digamos C_2, seja $C_1 \cap C_2 = \{p, q\}$.
Temos dois casos: no primeiro, C_2 só intersecta C_1. Então associamos p a C_1, q a C_2 e usamos a hipótese de indução para os m – 1 círculos restantes. No segundo caso, C_2 intersecta algum dos outros círculos. Então associamos P a C_1 e usamos a hipótese de indução para os m círculos $C_2, C_3, ..., C_{m+1}$.
Se, por outro lado, cada um desses m + 1 círculos intersecta pelo menos dois dos outros, temos de novo dois casos:
Se há no total pelo menos m + 1 pontos que pertencem a pelo menos dois dos círculos, podemos separar um dos círculos, digamos C_{m+1}, e fixar uma injecção de $\{C_1, C_2, ..., C_m\}$ no conjunto dos pontos que pertencem a pelo menos dois dos círculos $C_j, j \leq m$ tal que a imagem de cada C_i, que chamaremos de P_i, pertence a C_i.
Para cada $X \subset \{C_1, ..., C_m\}$, o conjunto dos pontos que pertencem a pelo menos dois círculos de $X \cup \{C_{m+1}\}$ tem pelo menos $|X| + 1$ elementos. Se algum ponto $P \notin \{P_1, ..., P_m\}$ pertence a C_{m+1} e a algum dos outros círculos, simplesmente estendemos a injeção associando P a C_{m+1}. Senão, construímos uma sequência de conjuntos $A_1, A_2, ...$ do seguinte modo: $A_1 = \{i \leq m | P_i \in C_{m+1}\}$. Se $A_1, A_2, ..., A_r$ já estão definidos, se o conjunto (de pelo menos $|A_r| + 1$) pontos que pertencem a pelo menos dois círculos de $\{C_{m+1}\} \cup \{C_j, j \in A_r\}$ está contido em $\{P_1, ..., P_m\}$, definimos $A_{r+1} = A_r \cup \{j \leq m | P_j$ pertence a pelo menos dois círculos de $\{C_{m+1}\} \cup \{C_j, j \in A_r\}\}$. Note que $|A_{r+1}| > |A_r|$. Em algum momento, haverá um ponto P fora de $\{P_1, ..., P_m\}$ que pertence a pelo menos dois círculos de $C_{m+1} \cup \{C_j, j \in A_r\}$, e logo a dois círculos $C_{\tilde{j}}$ e $C_{\hat{j}}$, com $\tilde{j}, \hat{j} \in A_r, \tilde{j} \notin A_{r-1}$. Podemos então alterar a injeção associando $C_{\tilde{j}}$ a P; como existe algum $j_{r-1} \in A_{r-1} \setminus A_{r-2}$ tal que $P_{\tilde{j}}$ pertence a $C_{j_{r-1}}$, associamos $C_{j_{r-1}}$ a $P_{\tilde{j}}$, e, em geral, para cada s com $1 < s \leq r - 1,$ se já definimos $j_s \in A_s \setminus A_{s-1}$, existe $j_{s-1} \in A_{s-1} \setminus A_{s-2}$

tal que P_{j_s} pertence a $C_{j_{s-1}}$; associamos então $C_{j_{s-1}}$ a P_{j_s}. Fazemos isso até associar C_{j_1} a P_{j_2}. Como $j_1 \in A_1$, podemos associar C_{m+1} a P_{j_1}, estendendo nossa injeção a $\{C_1, C_2, ..., C_m, C_{m+1}\}$, o que prova nossa afirmação.

Finalmente, suponhamos que há apenas *m* pontos que pertencem a pelo menos dois dos círculos. Observamos que, como os círculos têm raio 1, se um par de pontos está contido em dois círculos de família, não estará contido em nenhum outro círculo de família, e portanto, se um ponto pertence a $r \geq 2$ círculos da família, cada um desses *r* círculos intersecta os outros *r* – 1 em outros *r* – 1 pontos distintos, e distintos do ponto comum aos *r* círculos. Assim, cada um desses *r* círculos contém pelo menos *r* pontos que pertecem a pelo menos dois círculos da família.

Podemos considerar uma injeção que leva $\{C_1, C_2, ..., C_m\}$ no conjunto desses pontos, a qual será uma bijeção. Sendo P_i a imagem de C_i, podemos considerar a matriz $(a_{ij}), 1 \leq i \leq m+1, 1 \leq j \leq m,$ onde $a_{ij} = 1$ se P_j pertence a C_i e $a_{ij} = 0,$ caso contrário. Se, para $j \leq m,\ n_j = \left|\{i \mid P_j \in C_i\}\right| = \left|\{i \mid a_{ij} = 1\}\right|$ e, para $i \leq m+1, s_i := \left|\{j \mid P_j \in C_i\}\right| = \left|\{j \mid a_{ij} = 1\}\right|,$ temos, pelo que observamos acima, $s_i \geq n_i, \forall i \leq m,$ donde $\sum_{i=1}^{m} s_i \geq \sum_{i=1}^{m} n_i,$ mas $\sum_{i=1}^{m+1} s_i = \sum_{j=1}^{m} n_j = \left|\{(i,j) \mid a_{ij} = 1\}\right|,$ e $s_{m+1} > 0,$ pois C_{m+1} intersecta outros círculos, absurdo.

133) Considere um *n*–ágono regular inscrito em um círculo unitário, fixe um vértice *i* e denote por d_j a distância entre este vértice *i* e o vértice *j*. Prove que

$$\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n-1} \left(5 - d_j^2\right) = F_n^2 \quad \text{onde } F_1 = 0, F_1 = 1 \text{ e } F_n = F_{n-1}, F_{n-2} \text{ se } n \geq 2.$$

SOLUÇÃO DE ASDRUBAL PAFÚNCIO SANTOS (BOTUCATU – SP)

Podemos supor sem perda de generalidade que $i = 0$ e que o vértice *j* é $e^{2j\pi i/n}$, para $0 \leq j \leq n-1$. Queremos então provar que $\prod_{j=1}^{n-1}\left(3 + 2\cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right)\right) = F_n^2.$

Temos $\left|e^{2j\pi i/n} - 1\right|^2 = \left(e^{2j\pi i/n} - 1\right)\left(e^{-2j\pi i/n} - 1\right) = 2 - e^{2j\pi i/n} - e^{-2j\pi i/n} = 2 - 2\cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right);$

queremos provar portanto que

$\prod_{j=1}^{n-1}\left(3+2\cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right)\right)=F_n^2.$ Considere agora a sequência de polinômios $\left(f_n(x)\right)_{n\geq 0}$ dada por $f_0(x)=2, f_1(x)=x$ e $f_{n+1}(x)=xf_n(x)-f_{n-1}(x), \forall n\geq 1.$ Temos, para todo $n\geq 0$ e todo $\theta\in\mathbb{R}, f_n(2\cos\theta)=2\cos(n\theta).$ De fato isso vale para $n = 0$ e $n = 1$ e, por indução,

$f_{n+1}(2\cos\theta)=2\cos\theta f_n(2\cos\theta)-f_{n-1}(2\cos\theta)=4\cos\theta\cos(n\theta)-2\cos((n-1)\theta)=$
$=2\cos((n+1)\theta).$ Além disso, para todo $n\geq 1, f_n(x)$ é um polinômio mônico de grau n. Como as solução de $2\cos(n\theta)=2$ são dadas por $\theta=\frac{2k\pi}{n}, k\in\mathbb{Z},$ temos $f_n(x)-2=\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right), \forall n\geq 1,$ donde $\prod_{j=1}^{n-1}\left(x-2\cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right)\right)=\frac{f_n(x)-2}{x-2}.$

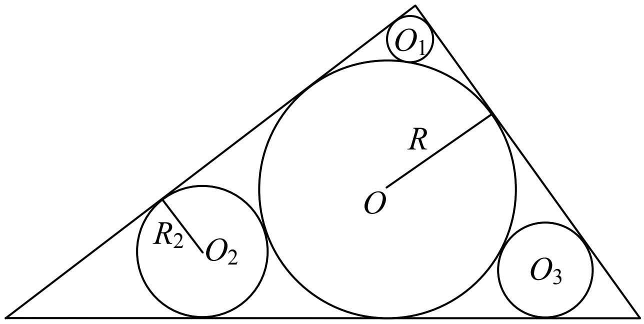
O que queremos provar equivale a

$(-1)^{n-1}F_n^2=\prod_{j=1}^{n-1}\left(-3-2\cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right)\right)=\frac{f_n(-3)-2}{-3-2}=-\frac{1}{5}\left(f_n(-3)-2\right),$ o que é equivalente a $f_n(-3)=2+(-1)^n\cdot 5F_n^2.$ Como

$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \forall n\geq 0,$ temos

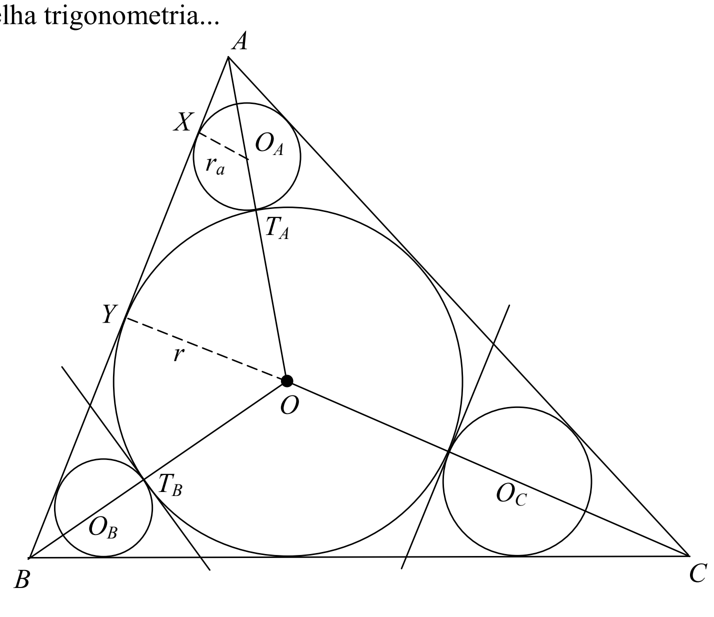
$2+(-1)^n\cdot 5F_n^2=\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$ Por outro lado, a sequência $x_n=f_n(-3)$ satisfaz $x_0=2, x_1=-3$ e $x_{n+1}=-3x_n-x_{n-1}, \forall n\geq 1,$ e logo (usando o fato de as raízes de $x^2+3x+1=0$ serem $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$), $x_n=\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \forall n\geq 0,$ o que prova a igualdade desejada.

136) Sejam R, r_1, r_2 e r_3 os raios dos círculos de centro O, O_1, O_2 e O_3, respectivamente, conforme a figura abaixo. Prove que: $R=\sqrt{r_1r_2}+\sqrt{r_1r_3}+\sqrt{r_2r_3}$.



SOLUÇÃO DE ANDERSON TORRES (SANTANA DE PARNAÍBA – SP)

A boa e velha trigonometria...



Como sempre, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ e $\angle C = \gamma$, $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

Vamos calcular r_a , para começar:

$$AO_A + O_AT_A + T_AO = AO \Leftrightarrow AO_A + O_AT_A = AO - OT_A$$

$\Delta AO_AX : AO_A = \dfrac{r_a}{sen\dfrac{\alpha}{2}}; \Delta AOY; AO = \dfrac{r}{sen\dfrac{\alpha}{2}}$. Substituindo:

$$\frac{r_a}{sen\frac{\alpha}{2}}+r_a=\frac{r}{sen\frac{\alpha}{2}}-r \Leftrightarrow r_a=r\cdot\left(\frac{1-sen\frac{\alpha}{2}}{1+sen\frac{\alpha}{2}}\right), \text{ ou } \frac{r_a}{r}=\frac{1-sen\frac{\alpha}{2}}{1+sen\frac{\alpha}{2}}$$

Como precisaremos de um "quadrado", vamos aplicar um truque: a tangente do meio arco.

$$\frac{1-sen\frac{\alpha}{2}}{1+sen\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\frac{2\tan\frac{\alpha}{4}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{4}}}{1+\frac{2\tan\frac{\alpha}{4}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{4}}}=\frac{1-2\tan\frac{\alpha}{4}+\tan^2\frac{\alpha}{4}}{1+2\tan\frac{\alpha}{4}+\tan^2\frac{\alpha}{4}}=\left(\frac{1-\tan\frac{\alpha}{4}}{1+\tan\frac{\alpha}{4}}\right)^2.$$

Com isto, já podemos substituir na igualdade que queremos demonstrar:

$$\frac{1-\tan\frac{\alpha}{4}}{1+\tan\frac{\alpha}{4}}\cdot\frac{1-\tan\frac{\beta}{4}}{1+\tan\frac{\beta}{4}}+\frac{1-\tan\frac{\alpha}{4}}{1+\tan\frac{\alpha}{4}}\cdot\frac{1-\tan\frac{\gamma}{4}}{1+\tan\frac{\gamma}{4}}+\frac{1-\tan\frac{\beta}{4}}{1+\tan\frac{\beta}{4}}\cdot\frac{1-\tan\frac{\gamma}{4}}{1+\tan\frac{\gamma}{4}}=1$$

Para escrever menos, seja $a=\tan\frac{\alpha}{4}, b=\tan\frac{\beta}{4}, c=\tan\frac{\gamma}{4}$. Abrindo os denominadores,

$$(1-a)(1-b)(1+c)+(1-a)(1+b)(1-c)+(1+a)(1-b)(1-c)=(1+a)(1+b)(1+c)$$

$$3-(a+b+c)-(ab+ac+bc)+3(abc)=1+(a+b+c)+(ab+ac+bc)+(abc)$$

$$1-(a+b+c)-(ab+ac+bc)+(abc)=0.$$

Mas isto é fácil?

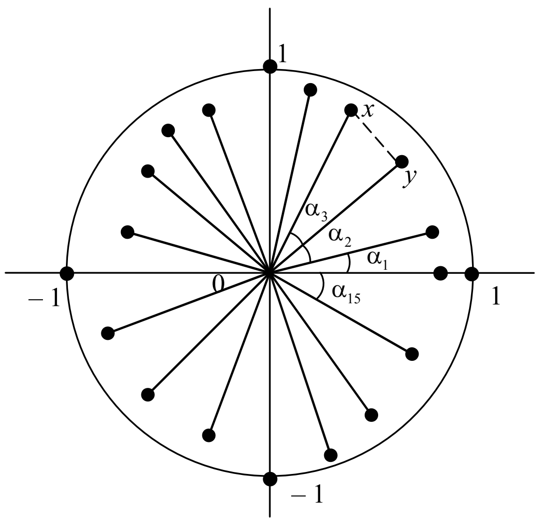
$$1=\tan\frac{\pi}{4}=\tan\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\beta}{4}+\frac{\gamma}{4}\right)=\frac{\tan\frac{\alpha}{4}+\tan\left(\frac{\beta}{4}+\frac{\gamma}{4}\right)}{1-\tan\frac{\alpha}{4}\tan\left(\frac{\beta}{4}+\frac{\gamma}{4}\right)}=$$

$$=\frac{\tan\frac{\alpha}{4}+\dfrac{\tan\frac{\beta}{4}+\tan\frac{\gamma}{4}}{1-\tan\frac{\beta}{4}\tan\frac{\gamma}{4}}}{1-\tan\frac{\alpha}{4}\dfrac{\tan\frac{\beta}{4}+\tan\frac{\gamma}{4}}{1-\tan\frac{\beta}{4}\tan\frac{\gamma}{4}}}=\frac{\tan\frac{\alpha}{4}+\tan\frac{\beta}{4}+\tan\frac{\gamma}{4}-\tan\frac{\alpha}{4}\tan\frac{\beta}{4}\tan\frac{\gamma}{4}}{1-\tan\frac{\alpha}{4}\tan\frac{\beta}{2}-\tan\frac{\alpha}{4}\tan\frac{\gamma}{4}-\tan\frac{\beta}{4}\tan\frac{\gamma}{4}}$$

$\Rightarrow a+b+c-abc=1-\left(ab+ac+bc\right)$, como esperado.

137) Seja A um conjunto de quinze pontos de $\mathbb{R}^2$ tal que a distância de cada ponto à origem é positiva e menor do que 1 e que quaisquer dois deles nunca sejam colineares com a origem. Mostre que existe um triângulo com dois vértices em A e um na origem cuja área é menor que $\frac{1}{4}$.

SOLUÇÃO DE ITAMAR SALES DE OLIVEIRA FILHO (CEDRO – CE)



Distribuímos aleatoriamente os 15 pontos. Como a distância à origem é sempre menor do que 1, com certeza todos esses pontos são interiores à circunferência de raio 1 e centro na origem.

Pelo fato de não existerem dois colineares com o centro, temos os 15 ângulos representados na figura $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{15})$. Obviamente:
$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{15} = 360°.$
Vamos provar que existe pelo menos um ângulo menor do que ou igual a $24°$. Para isso, suponha o contrário, ou seja, $\alpha_n > 24,$ para todo *n* Então:
$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{15} > 15 \times 24° = 360° \rightarrow$ absurdo.
Então realmente existe pelo menos um ângulo $\alpha \leq 24°.$ Suponha $\alpha_i = \angle XOY.$
Olhando para o triângulo *XOY*:

Área $XOY = \frac{1}{2} \cdot OX \cdot OY \cdot \text{sen}\alpha_1.$ Contudo, OX e OY são menores do que 1 e $\text{sen}\alpha_i \leq \text{sen}24° < \text{sen}30°,$ substituindo:

$$A < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \text{sen}30° \rightarrow A < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow A < \frac{1}{4}.$$

Então existe um triângulo como no enunciado cuja área é menor do que $\frac{1}{4}$.

138) Calcule o máximo divisor comum entre todos os números da forma $x \cdot y \cdot z,$ onde (x, y, z) percorre todas as soluções inteiras da equação $x^2 + y^2 = z^2$ com $x \cdot y \cdot z \neq 0.$

SOLUÇÃO DE MARCÍLIO MIRANDA DE CARVALHO (TERESINA – PI)

Seja *d* mdc entre todos os inteiros da forma $x \cdot y \cdot z$ onde (*x*, *y*, *z*) percorre todas as soluções inteiras da equação $x^2 + y^2 = z^2$ com $x \cdot y \cdot z \neq 0.$
Note que (3, 4, 5) é solução, logo temos que $d \leq 60.$

AFIRMAÇÃO 1: Se uma tripla (x, y, z) é solução da equação $x^2 + y^2 = z^2$ então $x \cdot y \cdot z$ é múltiplo de 3.

PROVA: Suponhamos, por absurdo, que x e y não são múltiplos de 3. Então $z^2 = x^2 + y^2 \equiv 2(\text{mod}\,3)$, absurdo!. Logo *x* ou *y* tem que ser múltiplo de 3. Assim temos que $x \cdot y \cdot z$ é múltiplo de 3.

AFIRMAÇÃO 2: Se uma tripla (x, y, z) é solução da equação $x^2 + y^2 = z^2$ então $x \cdot y \cdot z$ é múltiplo de 5.

PROVA: Suponhamos, por absurdo, que x e y não são múltiplos de 5. Então $x^2 + y^2 \equiv 0$ ou 2 ou 3 (mod 5). No primeiro caso temos que z é múltiplo de 5, portanto $x \cdot y \cdot z$ é múltiplo de 5. No segundo e terceiro casos temos um absurdo, pois um número quadrado perfeito só pode deixar restos 0, 1 ou 4 módulo 5. Assim, temos que se (x, y, z) é solução da equação $x^2 + y^2 = z^2$ então $x \cdot y \cdot z$ é múltiplo de 5.

AFIRMAÇÃO 3: Se uma tripla (x, y, z) é solução da equação $x^2 + y^2 = z^2$ então $x \cdot y \cdot z$ é múltiplo de 4.

PROVA: Suponhamos, por absurdo, que x e y são ímpares. Então $x^2 + y^2 \equiv 2(\text{mod}\, 4)$, absurdo. Portanto x ou y tem que ser par. Se x for par, mas não for múltiplo de 4, então $x^2 \equiv 4(\text{mod}\, 8) \Rightarrow x^2 + y^2 \equiv 4$, 5 ou 0 (mod 8). No primeiro e terceiro casos temos que y é par, portanto $x \cdot y \cdot z$ é múltiplo de 4. No segundo caso temos um absurdo, pois um número quadrado perfeito só pode deixar restos 0, 1 ou 4 módulo 8. E se y for par é análogo. Assim, temos que $x \cdot y \cdot z$ é múltiplo de 4.

Portanto d é múltiplo de $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$, logo $d = 60$.

139) Determine todos os inteiros positivos x, y, z satisfazendo $x^3 - y^3 = z^2$, onde y é primo, z não é divisível por 3 e z não é divisível por y.

SOLUÇÃO DE ADRIANO CARNEIRO TAVARES (CAUCAIA – CE)

Suponha que exista uma solução.

Então $z^2 = x^3 - y^3 = (x - y)\ (x^2 + xy + y^2) = (x - y)((x - y)^2 + 3xy)$ (I)

Como z não é divisível por 3 e nem por y, e y é um número primo, teremos por (I) $\text{mdc}(x,\ y) = 1$ e $\text{mdc}(x - y,\ 3) = 1$.

Então $\text{mdc}\,(x^2 + xy + y^2,\ x - y) = \text{mdc}\ (3xy,\ x - y) = 1$ (II)

Agora (I) e (II) implicam que $x - y = m^2$, $x^2 + xy + y^2 = n^2$ e $z = mn$, para certos inteiros positivos m e n.

Temos $4n^2 = 4x^2 + 4xy + 4y^2 = (2x + y)^2 + 3y^2$.

Então $3y^2 = (2n + 2x + y)(2n - 2x - y)$. Sendo y um primo, então existem três possibilidades:

a) $2n + 2x + y = 3y^2, 2n - 2x - y = 1$

b) $2n+2x+y=3y, 2n-2x-y=y$

c) $2n+2x+y=y^2,\ 2n-2x-y=3$

Em (a), após a subtração das equações temos:

$3y^2-1\ =\ 2(2x+y)=2(2m^2+3y).$

Daí, $m^2+1=3y^2-6y-3m^2\equiv 0$ (mod 3).

Por outro lado, temos sempre $m^2+1\equiv 1$ ou 2 (mod 3). Nós chegamos a uma contradição.

Em (b), subtraindo as equações chegamos $x = 0$, o que é absurdo!

Subtraindo as equações em (c), chegamos em $y^2-3\ =\ 2(2x+y)=2(2m^2+3y)$, que pode ser escrito assim:

$(y-3)^2-4m^2=12,$ ou seja, $(y-3+2m)(y-3-2m)=12.$

Da equação chegamos a $y = 7$ e $m = 1$, pois devemos ter $y-3+2m=6$ e $y-3-2m=2$. Segue que $x = y + m^2 = 8$ e $z = 13$ $mn=m\sqrt{x+xy+y^2}$.

Veja que de fato $8^3-7^3\ =\ 13^2$. Esta é a única solução.

140) Mostre que $2903^n-803^n-464^n+261^n$ é divisível por 1897, para todo $n\in\mathbb{N}$.

SOLUÇÃO DE MARCELO RIBEIRO DE SOUZA (RIO DE JANEIRO – RJ)

LEMA: Sejam p_1, p_2 dois números inteiros primos entre si. Então, se $p_1|a$ e $p_2|a$, ter-se-á $p_1p_2|a$.

DEMONSTRAÇÃO: $p_1|a\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}|a=kp_1$. No entanto, deve-se ter $p_2|a=kp_1$, ora, como $(p_1,p_2)=1,$ conclui-se que $p_2|k\Leftrightarrow\exists k_1\in\mathbb{Z}|^k=k_1p_2$. Finalmente, $a=k_1p_1p_2\Rightarrow p_1p_2|a$.

Note-se, inicialmente, que $1897=7\times 271$. Escreva-se, então:

$$2903^n-464^n-803^n+261^n\equiv(-78)^n-(-78)^n-(-10)^n+(-10)^n\equiv 0(\mathrm{mod}\,271),\forall n\in\mathbb{N}\ \text{(i)}$$

$$2903^n-464^n-803^n+261^n\equiv 5^n-2^n-5^n+2^n\equiv 0(\mathrm{mod}\,7),\forall n\in\mathbb{N}\ \text{(ii)}$$

Assim, temos, pelo Lema, que $2903^n-464^n-803^n+261^n\equiv 0(\mathrm{mod}\,1897),\forall n\in\mathbb{N}$, como se quis demonstrar.

141) Dado $a \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, seja $X \neq \varnothing$ um conjunto finito de inteiros positivos, tal que nenhum dos seus elementos possui o algarismo a em sua representação decimal. Prove que $\sum_{n \in X} \frac{1}{n} < 80.$

SOLUÇÃO DE FABRÍCIO VASCONCELLOS PUPPI (SÃO PAULO – SP)

Por um simples raciocínio combinatório, nota-se que a quantidade de inteiros positivos com k algarismos que não apresentam algum dígito a em sua representação decimal é $8 \cdot 9^{k-1}$, caso $a \neq 0$, e 9^k, caso $a = 0$.

Seja $N = \max(X)$ e d o número de dígitos de N. Seja $S(T)$ a operação definida sobre um subconjunto finito T qualquer de $\mathbb{N}^*$, tal que:

$$S(T) = \sum_{n \in T} \frac{1}{n}$$

Pela definição de S, como cada elemento de T tem contribuição positiva no valor da soma que caracteriza a operação, claramente S é monótona em relação ao seu argumento, de tal modo que $T \subseteq Q \Rightarrow S(T) \leq S(Q)$. Assim, para $\overline{X} = \{1,2,3,...,N,...,10^d - 1\} \cap \{n | a \text{ não é dígito de } n\}, X \subseteq \overline{X}$. Para todo inteiro positivo n de k dígitos, $n \geq 10^{k-1} \therefore 1/n \leq 1/10^{k-1}$, sendo que a desigualdade estrita vale para todos os n de k dígitos exceto para um deles. Considerando inicialmente o caso em que $a \neq 0$, tem-se:

$$\sum_{n \in \overline{X}} \frac{1}{n} < \left[\left(8 \cdot 9^{1-1}\right) \cdot \frac{1}{10^{1-1}}\right] + \left[\left(8 \cdot 9^{2-1}\right) \cdot \frac{1}{10^{2-1}}\right] + ... + \left[\left(8 \cdot 9^{d-1}\right) \cdot \frac{1}{10^{d-1}}\right] = \sum_{k=1}^{d} \frac{8 \cdot 9^{k-1}}{10^{k-1}}$$

$$\therefore S(X) \leq S\left(\overline{X}\right) < 8 \sum_{k=1}^{d} \frac{9^{k-1}}{10^{k-1}}$$

Como a somatória à direita é uma série geométrica, trivialmente tem-se que:

$$S(X) < 8 \cdot \frac{1-(9/10)^d}{1-(9/10)} = 80 \cdot \left[1-(9/10)^d\right] < 80$$

Para o caso a = 0 é necessário um refinamento de análise, pois o uso de processo idêntico ao acima só permitiria afirmar que $S(X) < 90.$ Pra este caso, separou-se cada conjunto dos números de k algarismos em dois subconjuntos disjuntos: um dos $4 \cdot 9^{k-1}$ inteiros que satisfazem $10^{k-1} \leq n < 5 \cdot 10^{k-1}$ e outro dos $5 \cdot 9^{k-1}$ inteiros que satisfazem $5 \cdot 10^{k-1} \leq n < 10^k.$ Assim, por um raciocionio análogo ao do caso anterior:

$$S(X) \leq S(\overline{X}) < 4\sum_{k=1}^{d} \frac{9^{k-1}}{10^{k-1}} + 5\sum_{k=1}^{d} \frac{9^{k-1}}{5 \cdot 10^{k-1}} = 5\sum_{k=1}^{d} \frac{9^{k-1}}{10^{k-1}}$$

$$\therefore S(X) < 5 \cdot \frac{1-(9/10)^d}{1-(9/10)} = 50 \cdot \left[1-(9/10)^d\right] < 50 < 80\,.$$

Agradecemos o envio de soluções e a colaboração de:

Adriano Carneiro Tavares (Caucaia – CE)	Prob. 140
Anderson Torres (Santana de Parnaíba – SP)	Prob. 133, 137, 138, 139, 140, 141
Douglas Oliveira de Lima (Brasília – DF)	Prob. 140
Fabrício Vasconcellos Puppy (São Paulo – SP)	Prob. 137, 138, 140.
Flávio Antonio Alves (Amparo – SP)	Prob. 136
Itamar Sales de Oliveira Fiolho (Cedro – CE)	Prob. 136
Jean Pierre Youyoute (Rio de Janeiro – RJ)	Prob. 138
Lucas Alves, Douglas Oliveira de Lima, Danillo Leal, Gustavo Campelo, Júlio Castro (Brasília – DF)	Prob. 136
Lucas Colucci	Prob. 138 e 140
Marcelo Ribeiro de Souza (Rio de Janeiro – RJ)	Prob. 136
Marcílio Miranda de Carvalho (Teresina – PI)	Prob. 140
Marcos Martinelli (Brasília – DF)	Prob. 133 e 136
Matheus Henrique Alves Moura (Fortaleza – CE)	Prob. 136
Renato Carneiro (Belo Horizonte – MG)	Prob. 140

Continuamos aguardando soluções para os problemas 134 e 135.

PROBLEMAS PROPOSTOS

✉ *Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e sugestões de novos problemas para próximos números.*

142) Seja $A=\{4,8,9,16,25,27,36,64,...\}$ o conjunto das potências não triviais (números da forma a^b, com $a\geq 2,\ b\geq 2$ naturais). Prove que, para todo natural $n\geq 1,$ existe um natural k tal que todos os termos da progressão aritmética $k,2k,3k,...,nk$ pertencem a A.

143) Determime todas as funções $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tais que $f(xy)=g(x^3+y)+h(x+y^3), \forall x,y\in\mathbb{R}.$

144) Seja $x\geq 1$ um número racional tal que existe uma constante $c\neq 0$ e uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ de inteiros tal que $\lim\limits_{n\to\infty}(cx^n-a_n)=0.$ Prove que x é inteiro.

145) Encontre todos os números racionais p, q, r de modo que $p\ \cos\dfrac{\pi}{7}+q\ \cos\dfrac{2\pi}{7}+r\ \cos\dfrac{3\pi}{7}=1$.

146) Determine todos os subconjuntos não-vazios A, B, C de $\mathbb{N}$ de modo que:

a) $A\cap B=B\cap C=C\cap A=\varnothing.$
b) $A\cup B\cup C=\mathbb{N}.$
c) para quaisquer $a\in A, b\in B$ e $c\in C,$ temos: $a+c\in A, b+c\in B$ e $a+b\in C.$

147) Demonstre que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k}{sen\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{4n-2}\right)}=n+\frac{(-1)^n-1}{2},$ para todo inteiro $n\geq 2.$

148) Sejam m e n inteiros positivos. Calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left\lceil\frac{n-k}{m}\right\rceil.$

149) a) Deseja-se organizar um torneio de futebol com n times $(n\geq 2)$ em que cada time joga uma vez contra cada um dos outros, dividido em um certo número de rodadas. Em cada rodada cada time joga no máximo uma partida.

Prove que, se n é ímpar, é possível organizar um tal torneio com n rodadas e, se n é par, é possível organizar um tal torneio com n – 1 rodadas.

b) Uma matriz $n \times n$ é preenchida com elementos do conjunto $S = \{1, 2, 3, ..., 2n-1\}$. Sabe-se que, para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$, a i-ésima linha e a i-ésima coluna contêm juntas todos os elementos de S.
Quais os possíveis valores de n?

150) Sejam a, b e c números reais tais que $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 9$.
Prove que $\dfrac{1}{(a-b)^2} + \dfrac{1}{(a-b)^2} + \dfrac{1}{(c-a)^2} \geq \sqrt[3]{3}$.

Problema 142 adaptado de um problema proposto por Anderson Torres (Santana de Parnaíba – SP); 143 proposto por Anderson Torres (Santana de Parnaíba – SP); 144, 145 e 146 propostos por Carlos da Silva Ramos (Belém – PA); 147 e 148 propostos por Marcos Martinelli; 149 adapatado de um problema proposto por Anderson Torres (Santana de Parnaíba – SP); 150 adaptado de um problema proposto por Adriano Carneiro (Caucaia – CE).

AGENDA OLÍMPICA

XXXIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

NÍVEIS 1, 2 e 3
Primeira Fase – sábado, 18 de junho de 2011
Segunda Fase – sábado, 3 de setembro de 2011
Terceira Fase – sábado, 15 de outubro de 2011 (níveis 1, 2 e 3)
domingo, 16 de outubro de 2011 (níveis 2 e 3 - segundo dia de prova)

NÍVEL UNIVERSITÁRIO
Primeira Fase – sábado, 3 de setembro de 2011
Segunda Fase – sábado, 15 e domingo, 16 de outubro de 2011

IV ROMANIAN MASTER OF MATHEMATICS (RMM)
23 a 28 de fevereiro de 2011(Bucareste, Romênia)

ASIAN PACIFIC MATH OLYMPIAD (APMO)
12 de março de 2011

XVII OLIMPÍADA DE MAIO
7 de maio de 2011

XXII OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL
14 a 20 de agosto de 2011(La Paz, Bolívia)

LII OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA
13 a 24 de julho de 2011(Amsterdam, Holanda)

I OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DA LUSOFONIA
20 a 31 de julho de 2011(Coimbra, Portugal)

XVII OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA (IMC)
24 a 30 de julho de 2011(Blagoevgrad, Bulgária)

XXV OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA
23 de setembro a 1 de outubro de 2011(São José, Costa Rica)

II COMPETIÇÃO IBEROAMERICANA INTERUNIVERSITÁRIA DE MATEMÁTICA
2 a 8 de outubro de 2011(Quito, Equador)

XIII OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA

COORDENADORES REGIONAIS

Alberto Hassen Raad	(UFJF)	Juiz de Fora – MG
Américo López Gálvez	(USP)	Ribeirão Preto – SP
Antonio Carlos Nogueira	(UFU)	Uberlândia – MG
Benedito Tadeu Vasconcelos Freire	(UFRN)	Natal – RN
Bruno Holanda	(CAEN – UFC)	Fortaleza – CE
Carmen Vieira Mathias	(UNIFRA)	Santa María – RS
Claus Haetinger	(UNIVATES)	Lajeado – RS
Cláudio de Lima Vidal	(UNESP)	S.J. do Rio Preto – SP
Denice Fontana Nisxota Menegais	(UNIPAMPA)	Bagé – RS
Disney Douglas Lima de Oliveira	(UFAM)	Manaus – AM
Edson Roberto Abe	(Colégio Objetivo de Campinas)	Campinas – SP
Edney Aparecido Santulo Jr.	(UEM)	Maringá – PR
Fábio Brochero Martínez	(UFMG)	Belo Horizonte – MG
Florêncio Ferreira Guimarães Filho	(UFES)	Vitória – ES
Francinildo Nobre Ferreira	(UFSJ)	São João del Rei – MG
Genildo Alves Marinho	(Centro Educacional Leonardo Da Vinci)	Taguatingua – DF
Herivelto Martins	(USP – São Carlos)	São Carlos – SP
Gilson Tumelero	(UTFPR)	Pato Branco – PR
Ivanilde Fernandes Saad	(UC. Dom Bosco)	Campo Grande – MS
João Benício de Melo Neto	(UFPI)	Teresina – PI
João Francisco Melo Libonati	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Diogo Diniz	(UFPB)	Campina Grande – PB
José Luiz Rosas Pinho	(UFSC)	Florianópolis – SC
José Vieira Alves	(UFPB)	Campina Grande – PB
José William Costa	(Instituto Pueri Domus)	Santo André – SP
Krerley Oliveira	(UFAL)	Maceió – AL
Licio Hernandes Bezerra	(UFSC)	Florianópolis – SC
Luciano G. Monteiro de Castro	(Sistema Elite de Ensino)	Rio de Janeiro – RJ
Luzinalva Miranda de Amorim	(UFBA)	Salvador – BA
Marcelo Dias	(Grupo Educacional Etapa)	São Paulo – SP
Marcelo Antonio dos Santos	FACOS	Osório – RS
Marcelo Rufino de Oliveira	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Newman Simões	(Cursinho CLQ Objetivo)	Piracicaba – SP
Nivaldo Costa Muniz	(UFMA)	São Luis – MA
Osnel Broche Cristo	(UFLA)	Lavras – MG
Uberlândio Batista Severo	(UFPB)	João Pessoa – PB
Raul Cintra de Negreiros Ribeiro	(Colégio Anglo)	Atibaia – SP
Reginaldo de Lima Pereira	(Escola Técnica Federal de Roraima)	Boa Vista – RR
Reinaldo Gen Ichiro Arakaki	(UNIFESP)	SJ dos Campos – SP
Ricardo Amorim	(Centro Educacional Logos)	Nova Iguaçu – RJ
Ronaldo Alves Garcia	(UFGO)	Goiânia – GO
Rogério da Silva Ignácio	(Col. Aplic. da UFPE)	Recife – PE
Rosangela Ramon	(UNOCHAPECÓ)	Chapecó – SC
Sérgio Cláudio Ramos	(IM-UFRGS)	Porto Alegre – RS
Seme Gebara Neto	(UFMG)	Belo Horizonte – MG
Tadeu Ferreira Gomes	(UEBA)	Juazeiro – BA
Tomás Menéndez Rodrigues	(U. Federal de Rondônia)	Porto Velho – RO
Valdenberg Araújo da Silva	(U. Federal de Sergipe)	São Cristóvão – SE
Vânia Cristina Silva Rodrigues	(U. Metodista de SP)	S.B. do Campo – SP
Wagner Pereira Lopes	(CEFET – GO)	Jataí – GO
Wanderson Breder	(CEFET – RJ)	Nova Friburgo – RJ
William Serafim dos Reis	(UFT – TO)	Arraias – TO