CONTEÚDO

AOS LEITORES 2

XV OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DE MAIO
Problemas e Resultado Brasileiro 3

XX OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL
Problemas e Resultado Brasileiro 7

L OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA (IMO)
Problemas e Resultado Brasileiro 9

XXIV OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA
Problemas e Resultado Brasileiro 11

ARTIGOS

PAR OU ÍMPAR? EIS A QUESTÃO
Samuel Barbosa Feitosa e Einstein do Nascimento Júnior 13

GEOMETRIA DO TRIÂNGULO: FATOS E PROBLEMAS
Carlos Yuzo Shine 28

SÉRIE HARMÔNICA DE NÚMEROS PRIMOS
Lenimar Nunes de Andrade 45

COMO É QUE FAZ? 50

SOLUÇÕES DE PROBLEMAS PROPOSTOS 52

PROBLEMAS PROPOSTOS 59

AGENDA OLÍMPICA 61

COORDENADORES REGIONAIS 62

AOS LEITORES

Por mais um ano consecutivo estamos iniciando a realização da Olimpíada Brasileira de Matemática.

A Olimpíada Brasileira de Matemática – OBM tem crescido substancialmente nos últimos anos, contando, em 2009, com a adesão ao evento de mais de 3.700 escolas, sendo 2.180 da rede pública e 1.608 da rede privada de ensino, o que implicou em uma participação efetiva de cerca de 180.000 jovens estudantes e seus professores. Além disso, a iniciativa contou com a colaboração de professores universitários em 155 instituições de ensino superior: eles participaram de todas as atividades, inclusive aquelas referentes à OBM Nível Universitário em atividades de coordenação, divulgação, treinamento de alunos, aperfeiçoamento de professores e aplicação das distintas fases da Olimpíada Brasileira de Matemática. Paralelamente, o projeto apóiou a realização de Olimpíadas Regionais de Matemática, contando com a participação de 165.148 estudantes das escolas públicas e privadas em todo o Brasil nas competições estaduais.
No que se refere à participação em competições internacionais, os resultados foram excelentes: Em particular, Henrique Ponde conquistou a oitava medalha de Ouro do Brasil na IMO. Além disso, nesta IMO, todos os alunos da equipe brasileria ganharam medalhas.

Durante 2009 a CAPES e o CNPq lançaram o Programa de Iniciação Científica – Mestrado (PICME) para medalhistas da OBMEP e OBM, beneficiando 19 estudantes premiados na Olimpíada Brasileira de Matemática – OBM, com o objetivo de aumentar o número de matemáticos no país, e oferecer uma formação matemática mais sólida a jovens profissionais de outras áreas científicas e tecnológicas.

Todos estes resultados nacionais e internacionais demonstram que, além de influenciar positivamente o ensino da Matemática nas instituições de ensino fundamental, médio e superior, conseguimos detectar jovens muito talentosos que são estimulados a seguir uma carreira científica, o que é fundamental para o crescimento da Ciência e Tecnologia no país. A Olimpíada Brasileira de Matemática é um projeto conjunto da Sociedade Brasileira de Matemática, do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e conta com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e do Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Matemática (INCTMat).

Os editores

XV OLIMPÍADA DE MAIO

PRIMEIRO NÍVEL

PROBLEMA 1

A cada número natural de dois algarismos associamos um dígito da seguinte forma: Multiplicam-se seus algarismos. Se o resultado é um dígito, este é o dígito associado. Se o resultado é um número de dois dígitos, multiplicam-se estes dois algarismos, e se o resultado é um dígito, este é o dígito associado. Caso contrario, repetimos a operação. Por exemplo, o dígito associado a 32 é o 6 pois $3 \cdot 2 = 6$; o dígito associado a 93 é o 4 pois $9 \cdot 3 = 27$, $2 \cdot 7 = 14$, $1 \cdot 4 = 4$.
Encontre todos os números de dois algarismos aos que se associa o dígito 8.

PROBLEMA 2

Encontre números primos p, q, r para os quais $p + q^2 + r^3 = 200$. Diga todas as possibilidades.
Obs: Lembre-se que o número 1 não é primo.

PROBLEMA 3

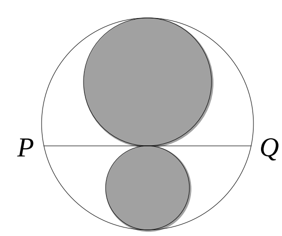
Temos 26 cartões e cada um tem escrito um número. Há dois com o número 1, dois com o número 2, dois com o 3, e assim por diante até dois com o 12 e dois com o 13. Deve-se distribuir os 26 cartões em pilhas de maneira que sejam cumpridas as duas condições a seguir:

- Se dois cartões têm o mesmo número estão na mesma pilha.
- Nenhuma pilha contém um cartão cujo número é igual à soma dos números de dois cartões dessa mesma pilha.

Determine qual é o número mínimo de pilhas que temos que formar. Dê um exemplo com a distribuição dos cartões para esse número de pilhas e justifique por quê é impossível ter menos pilhas.

PROBLEMA 4

Três circunferências são tangentes entre si, tal como mostramos na figura.
A região do círculo exterior que não está coberta pelos dois círculos interiores tem área igual a 2π.
Determine o comprimento do segmento PQ.



PROBLEMA 5

Pelas linhas de um tabuleiro quadriculado formado por 55 linhas horizontais e 45 linhas verticais caminha uma formiga. Queremos pintar alguns trechos de linhas para que a formiga possa ir de qualquer cruzamento até outro cruzamento qualquer, caminhando exclusivamente pelos trechos pintados. Se a distância entre linhas consecutivas é de 10 cm, qual é a menor quantidade possível de centímetros que deverão ser pintados?

SEGUNDO NÍVEL

PROBLEMA 1

Inicialmente no quadro está escrito o número 1. Em cada passo, apaga-se o número do quadro e se escreve outro, que é obtido aplicando alguma das seguintes operações:

- Operação A: Multiplicar o número escrito no quadro por $\frac{1}{2}$.
- Operação B: Trocar o número escrito no quadrado pela diferença entre 1 e ele.

Por exemplo, se no quadro está escrito o número $\frac{3}{8}$ podemos substituí-lo por $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}=\frac{3}{16}$ ou por $1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$.

Encontre uma sequência de passos ao fim dos quais o número do quadro seja $\frac{2009}{2^{2009}}$.

PROBLEMA 2

Seja *ABCD* um quadrilátero convexo tal que o triângulo *ABD* é equilátero e o triângulo *BCD* é isósceles, com $\widehat{C}=90^{\circ}$. Se *E* é o ponto médio do lado *AD*, determine a medida do ângulo $C\widehat{E}D$.

PROBLEMA 3

Na seguinte soma: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6, se suprimirmos os dois primeiros sinais de "+" obtemos a nova soma 123 + 4 + 5 + 6 = 138. Suprimindo três sinais de "+" podemos obter 1 + 23 + 456 = 480.

Consideremos agora a soma 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13, na qual serão suprimidos alguns sinais de "+". Quais são os três menores múltiplos de 100 que podemos obter desta forma?

PROBLEMA 4

Cada casa de um tabuleiro 5×5 é pintada de vermelho ou de azul, de tal forma que seja cumprida a seguinte condição: "Para quaisquer duas filas e duas colunas, das 4 casas que estão em suas interseções, há 4, 2 ou 0 pintadas de vermelho." De quantas formas podemos pintar o tabuleiro?

PROBLEMA 5

Um jogo de paciência se inicia com 25 cartas em fila. Algumas estão viradas para cima, e outras viradas para baixo.

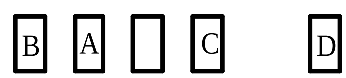
Em cada movimento devemos escolher uma carta que esteja virada para cima, retirá-la e virar as cartas vizinhas à que foi retirada (se houver).

Ganha-se o jogo de paciência quando conseguimos, repetindo este movimento, retirar as 25 cartas da mesa.

Se inicialmente há n cartas viradas para cima, encontre todos os valores de n para os quais se pode ganhar o jogo. Explique a estratégia vencedora, independentemente da localização inicial das cartas viradas para cima, e justifique por quê é impossível ganhar para os outros valores de n.

Duas cartas são vizinhas quando uma está imediatamente ao lado de outra, à direita ou à esquerda.

Por exemplo: a carta marcada com A tem duas cartas vizinhas e a marcada com B apenas uma. Depois de retirar uma carta fica um espaço, de modo que a marcada com C tem unicamente uma carta vizinha, e a marcada com D não tem nenhuma.



RESULTADO BRASILEIRO

2009: Nível 1 (até 13 anos)

Nome	Cidade - Estado	Pontos	Prêmio
Luis Fernando Veronese Trivelatto	Cascavel - PR	30	Medalha de Ouro
Lucas Carvalho Daher	Anápolis - GO	29	Medalha de Prata
Guilherme Renato Martins Unzer	São Paulo - SP	27	Medalha de Prata
Elias Brito Oliveira	Brasília - DF	26	Medalha de Bronze
Lucas Cardoso Zuccolo	São Paulo - SP	25	Medalha de Bronze
Gustavo Lima Lopes	Barra de São Fco. - ES	24	Medalha de Bronze
Rafael Rodrigues Rocha de Melo	Fortaleza - CE	24	Medalha de Bronze
Igor Albuquerque Araújo	Rio de Janeiro - RJ	23	Menção Honrosa
Liara Guinsberg	São Paulo - SP	23	Certificado
Fellipe Sebastiam da Silva Paranhos Pereira	Rio de Janeiro - RJ	23	Certificado

2009: Nível 2 (até 15 anos)

Nome	Cidade - Estado	Pontos	Prêmio
João Lucas Camelo Sá	Fortaleza - CE	50	Medalha de Ouro
César Ilharco Magalhães	Barbacena - MG	42	Medalha de Prata
Bruno Silva Mucciaccia	Vitória - ES	40	Medalha de Prata
Daniel dos Santos Bossle	Porto Alegre - RS	40	Medalha de Bronze
Gustavo Haddad Francisco e Sampaio Braga	S.J. dos Campos - SP	38	Medalha de Bronze
Otávio Araújo de Aguiar	Fortaleza - CE	38	Medalha de Bronze
Gabriel Militão Vinhas Lopes	Fortaleza - CE	35	Medalha de Bronze
Lara Timbó Araújo	Fortaleza - CE	33	Menção Honrosa
Artur A. Scussel	Fortaleza - CE	32	Menção Honrosa
Bruno Ferri de Moraes	São Paulo - SP	31	Menção Honrosa

XX OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL

Enunciados e resultado brasileiro

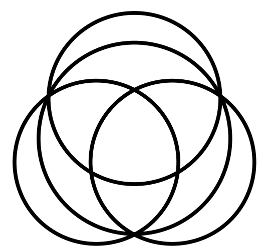
A XX Olimpíada de Matemática do Cone Sul foi realizada na cidade de Mar del Plata, Argentina entre os dias 16 e 17 de abril de 2009. A equipe foi liderada pelos professores Pablo Rodrigo Ganassim, de São Paulo – SP e Alex Correa Abreu, de Niterói – RJ.

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	**Deborah Barbosa Alves**	**Medalha de Prata**
BRA2	**Gabriel Militão Vinhas Lopes**	**Medalha de Bronze**
BRA3	**Matheus Barros de Paula**	**Medalha de Prata**
BRA4	**Matheus Secco Torres da Silva**	**Medalha de Bronze**

PROBLEMA 1

Os quatro círculos da figura determinam 10 regiões limitadas. Nessas regiões são escritos 10 números inteiros positivos distintos cuja soma é 100, um número em cada região. A soma dos números contidos em cada círculo é igual a S (a mesma para os quatro círculos). Determine o maior e o menor valor possível de S.



PROBLEMA 2

Um *corchete* é composto por três segmentos de comprimento 1, que formam dois ângulos retos como mostra a figura.

É dado um quadrado de lado n dividido em n^2 quadradinhos de lado 1 por meio de retas paralelas aos seus lados. Corchetes são colocados sobre esse quadrado de modo que cada segmento de um corchete cubra um lado de algum quadradinho. Dois segmentos de corchete não podem ficar sobrepostos.

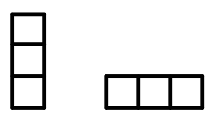
Determine todos os valores de n para os quais é possível cobrir os lados dos n^2 quadradinhos.

PROBLEMA 3

Sejam A, B e C três pontos tais que B é ponto médio do segmento AC e seja P um ponto tal que $\angle PBC = 60º$. São construídos o triângulo equilátero PCQ tal que B e Q estão em semiplanos diferentes em relação a PC, e o triângulo equilátero APR tal que B e R estão no mesmo semiplano em relação a AP. Seja X o ponto de interseção das retas BQ e PC; seja Y o ponto de interseção das retas BR e AP. Demonstre que XY e AC são paralelos.

PROBLEMA 4

Ana e Beto jogam em um tabuleiro de 11 linhas e 9 colunas. Primeiro Ana divide o tabuleiro em 33 *zonas*. Cada zona é formada por 3 casas adjacentes alinhadas vertical ou horizontalmente, como mostra a figura.



Depois, Beto escreve em cada casa um dos números 0, 1, 2, 3, 4, 5, de modo que a soma dos números de cada zona seja igual a 5. Beto ganha se a soma dos números escritos em cada uma das 9 colunas do tabuleiro é um número primo; caso contrário, Ana ganha. Demonstre que Beto tem uma estratégia vencedora.

PROBLEMA 5

Dada uma sequência S de 1001 números reais positivos não necessariamente distintos, e dado um conjunto A de números inteiros positivos distintos, a operação permitida é: eleger um $k \in A$ ($k = 1001$), selecionar k números de S, calcular a média dos k números (média aritmética) e substituir cada um dos k números selecionados por essa média.
Se A é um conjunto tal que para cada S pode-se conseguir, mediante uma sucessão de operações permitidas, que os números sejam todos iguais, determine o menor valor possível do maior elemento de A.

PROBLEMA 6

Pablo tem uma certa quantidade de retângulos cujas áreas somam 3 e cujos lados são todos menores ou iguais a 1. Demonstre que com esses retângulos é possível cobrir um quadrado de lado 1 de modo que os lados dos retângulos sejam paralelos aos lados do quadrado.
Nota: Os retângulos podem estar sobrepostos e podem sair parcialmente do quadrado.

L OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA (IMO)

Enunciados e resultado Brasileiro

A L Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) foi realizada na cidade de Bremen, Alemanha entre os dias 14 e 21 de julho de 2009. A equipe foi liderada pelos professores Carlos Yuzo Shine, de São Paulo – SP e Ralph Costa Teixeira, de Niterói – RJ.

RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	**Henrique Ponde de Oliveira Pinto**	**Medalha de Ouro**
BRA2	**Renan Henrique Finder**	**Medalha de Prata**
BRA3	**Marcelo Tadeu de Sá Oliveira Sales**	**Medalha de Prata**
BRA4	**Matheus Secco Torres da Silva**	**Medalha de Prata**
BRA5	**Marco Antonio Lopes Pedroso**	**Medalha de Bronze**
BRA6	**Davi Lopes Alves de Medeiros**	**Medalha de Bronze**

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Seja n um inteiro positivo e sejam $a_1,...,a_k\ (k \geq 2)$ inteiros distintos do conjunto $\{1,...,n\}$ tais que n divide $a_i(a_{i+1}-1)$, para $i = 1,...,k-1$. Demonstre que n não divide $a_k(a_1-1)$.

PROBLEMA 2

Seja *ABC* um triângulo cujo circuncentro é *O*. Sejam *P* e *Q* pontos interiores dos lados *CA* e *AB*, respectivamente. Sejam *K*, *L*, e *M* os pontos médios dos segmentos *BP*, *CQ* e *PQ*, respectivamente, e Γ a circunferência que passa por *K*, *L*, e *M*. Suponha que a recta *PQ* é tangente à circunferência Γ. Demonstre que *OP* = *OQ*.

PROBLEMA 3

Seja $s_1, s_2, s_3,...$ uma sucessão estritamente crescente de inteiros positivos tal que as subsucessões

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3},... \text{ e } s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1},...$$

são ambas progressões aritméticas. Demonstre que a sucessão $s_1, s_2, s_3,...$ também é uma progressão aritmética.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Seja ABC um triângulo com $AB = AC$. As bissectrizes dos ângulos $\angle CAB$ e $\angle ABC$ intersectam os lados BC e CA em D e E, respectivamente. Seja K o incentro do triângulo ADC.

Suponha que $B\widehat{E}K = 45°.$ Determine todos os possíveis valores de $C\widehat{A}B$.

PROBLEMA 5

Determine todas as funções f do conjunto dos inteiros positivos no conjunto dos inteiros positivos tais que, para todos os inteiros positivos a e b, existe um triângulo não degenerado cujos lados medem,

$$a,\ f(b) \text{ e } f(b + f(a) - 1).$$

(Um triângulo é *não degenerado* se os seus vértices não são colineares).

PROBLEMA 6

Sejam $a_1, a_2, ..., a_n$ inteiros positivos distintos e M um conjunto de $n - 1$ inteiros positivos que não contém o número $s = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Um gafanhoto pretende saltar ao longo da recta real. Ele começa no ponto 0 e dá n saltos para a direita de comprimentos $a_1, a_2, ..., a_n$, em alguma ordem.

Prove que essa ordem pode ser escolhida de modo que o gafanhoto nunca caia num ponto de M.

XXIV OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA

Enunciados e resultado Brasileiro

A XXIV Olimpíada Iberoamericana de Matemática foi realizada na cidade de Santiago de Queretaro, México no período de 17 a 27 de setembro de 2009. A equipe brasileria foi liderada pelos professores Onofre Campos, de Fortaleza – CE e Luzinalva Miranda de Amorim, de Salvador – BA.

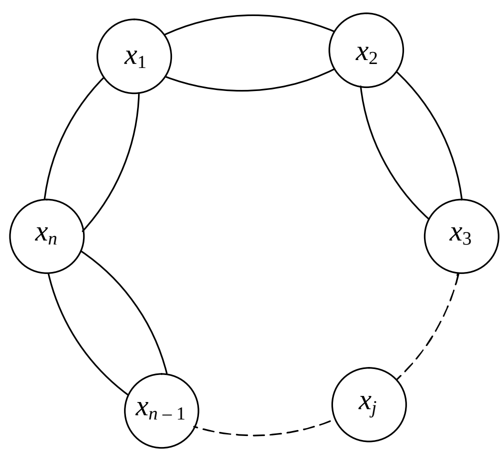
RESULTADOS DA EQUIPE BRASILEIRA

BRA1	**Renan Henrique Finder**	**Medalha de Ouro**
BRA2	**Matheus Secco Torres da Silva**	**Medalha de Ouro**
BRA3	**Marco Antonio Lopes Pedroso**	**Medalha de Prata**
BRA4	**Marcelo Tadeu de Sá Oliveira Sales**	**Medalha de Prata**

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Seja n um natural maior que 2. Suponhamos que n ilhas estejam localizadas ao redor de um círculo e que entre cada duas ilhas vizinhas haja duas pontes, como na figura:



Partindo da ilha x_1, de quantas maneiras se podem percorrer as $2n$ pontes passando por cada ponte exatamente uma vez?

PROBLEMA 2
Para cada inteiro positivo n definimos $a_n = n + m$, onde m é o maior inteiro tal que $2^{2^m} \leq n2^n$. Determinar quais inteiros positivos não aparecem na sequência a_n.

PROBLEMA 3
Sejam C_1 e C_2 duas circunferências de centros O_1 e O_2, com o mesmo raio, que se intersectam em A e B. Seja P um ponto sobre o arco AB de C_2 que está dentro de C_1. A reta AP intersecta C_1 em C, a reta CB intersecta C_2 em D e a bissetriz de $\angle CAD$ intersecta C_1 em E e C_2 em L. Seja F o simétrico do ponto D em relação ao ponto médio de PE. Demonstrar que existe um ponto X que satisfaz $\angle XFL = \angle XDC = 30°$ e $CX = O_1O_2$.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4
Seja ABC um triângulo com $AB \neq AC$. Sejam I o incentro de ABC e P o outro ponto de interseção da bissetriz externa do ângulo A com o circuncírculo de ABC. A reta PI intersecta o circuncírculo de ABC no ponto J. Demonstrar que os circuncírculos dos triângulos JIB e JIC são tangentes às retas IC e IB, respectivamente.

PROBLEMA 5
A sequência a_n está definida por

$$a_1 = 1,\ a_{2k} = 1 + a_k \text{ e } a_{2k+1} = \frac{1}{a_{2k}},\ \text{para todo inteiro } k \geq 1.$$

Demonstrar que todo número racional positivo aparece exatamente uma vez nesta sequência.

PROBLEMA 6
Ao redor de uma circunferência marcam-se 6000 pontos, cada um dos quais se pinta com uma de 10 cores dadas, de modo que entre quaisquer 100 pontos consecutivos sempre figuram as 10 cores. Achar o menor inteiro k com a seguinte propriedade: para toda coloração deste tipo existem k pontos consecutivos nos quais se encontram as 10 cores.

PAR OU ÍMPAR? EIS A QUESTÃO

Einstien do Nascimento Jr e Samuel Barbosa Feitosa

Paridade

Quando duas pessoas estão indecisas sobre uma escolha, muitas vezes elas utilizam uma brincadeira chamada Par ou ímpar para se decidirem. Por trás desse simples critério, podem se resolver problemas que parecem ser bastante complicados. Dizemos que um númreo tem paridade par se ele for par, e paridade ímpar, se ele for ímpar. Observar a paridade de um número é algo bem simples mas com aplicações fantásticas em problemas de olimpíadas. Vejamos um exemplo:

Paridade como invariante

Vamos começar com um problema bastante famoso que já foi utilizado até em entrevistas para grandes empresas de computação.

Problema 1. 100 pessoas são postas em uma fila e cada uma delas recebe um chapéu, que pode ser preto ou branco. Cada pessoa só consegue ver os chapéus das pessoas que estão a sua frente. É pedido que cada uma delas tente adivinhar a cor do seu chapéu. Qual o máximo número de acertos que se pode garantir, dado que as pessoas podem combinar uma estratégia antes de recebê-los.

Solução: Facilmente consegue-se 50 acertos. Podemos dividir as pessoas em pares: (100,99), (98, 97),...(2, 1) e assim o maior número de cada par falar a cor da pessoa da frente. Que apenas precisa repeti-lo, para garantir 1 acerto por par. De uma forma um pouco mais elaborada, se garante 66 acertos. Separando em trios: (100, 99, 98),...(4, 3, 2). O maior número de cada trio pode falar BRANCO caso os dois da sua frente tenham a mesma cor e PRETO, caso as cores sejam distintas.
Assim, após o maior número falar, o número do meio pode acertar sua cor e em seguida, o primeiro do trio pode acertar a dele. Curiosamente esse número pode chegar a 99 acertos utilizando esse poderoso argumento que é a paridade. Notemos que ninguém sabe a cor do último da fila. Então não importa a estratégia de ordem das pessoas, nenhuma informação pode ser obtida para esse chapéu. O que não ocorre com os 99 chapéus restantes. Note ainda que a diferença de conhecimentos entre a pessoa e a pessoa que encontra atrás dela é apenas o seu chapéu. Então, basta seguir a estratégia: As cores serão faladas das pessoas de trás para as da frente. E a última pessoa vai falar BRANCO caso a quantidade de chapéus brancos a sua frente seja par e PRETO, caso contrário. Como a 99ª. pessoa sabe a paridade da quantidade de chapéus brancos estritamente à sua frente, e a paridade da

quantidade de chapéus brancos à sua frente, incluindo ela mesma, que foi informada pela 100ª. pessoa, ela acertará o seu chapéu. A 98ª., computando ambas as informações pode acertar o dela, e assim sucessivamente.

Problema 2. Em cada casa de um tabuleiro de 5 x 5 está escrito 1 ou –1. Em cada passo troca-se o número de cada uma das 25 casas pelo resultado da multiplicação dos números de todas as suas casas vizinhas. Inicialmente se tem o tabuleiro da figura. Mostre como fica o tabuleiro ao final de 2004 passos.

Observação: Duas casas são vizinhas se tiverem um lado em comum.

1	1	–1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Dica: Muitas vezes, quando não se tem ideia de como será a solução de uma questão, pode-se obter várias pistas fazendo alguns casos iniciais do enunciado, esperando observar algum padrão. Meus números da sorte são 5 e 9. Ao achar um padrão repetitivo, basta analisar em que caso cairá o número 2004.

Problema 3. Em cada um dos 10 degraus de uma escada existe uma rã. Cada rã pode, de um pulo, colocar-se em outro degrau, mas quando uma rã faz isso, ao mesmo tempo, uma outra rã pulará a mesma quantidade de degraus em sentido contrário: uma sobe e outra desce. Conseguirão as rãs colocar-se todas juntas num mesmo degrau?

Solução: Uma maneira muito utilizada para atacar problemas onde é dada uma condição inicial e um conjunto de operações para manipulá-la é tentar procurar o que não muda, independentemente dos movimentos que utilizamos. Note que se uma rã vai de um degrau par para um ímpar (muda de paridade), a outra rã que se movimenta com ela também pulará um número ímpar de degraus, mudando também a paridade. Caso a primeira não mude, a sua parceira de movimento também permanecerá num degrau de mesma paridade. UM INVARIANTE: Paridade da quantidade de rãs em degraus de número par (comprove testando os movimentos possíveis). Como na posição inicial há 5 rãs nos degraus de posição par e na posição final há ou dez ou zero rãs nos degraus de posição par, a posição final NÃO pode ser obtida da posição inicial apenas fazendo essas operações permitidas.

Essa estratégia de invariantes é utilizada principalmente para provar a impossibilidade de ocorrer algum evento.

Definiremos uma peça **príncipe** (que não existe no jogo de xadrez) como uma que só pode andar na horizontal e vertical, uma casa por vez. Um jeito comum de fazer notações em um tabuleiro de xadrez é nomear as colunas da esquerda para a direita de **a** a **h** e as linhas de baixo para cima de 1 a 8 tomando o referencial da pessoa que joga com as casas brancas.

Problema 4. Sobre um tabuleiro de xadrez, um príncipe começa do quadrado a1 e retorna após fazer alguns movimentos. Mostre que o príncipe fez um número par de movimentos.

Solução: veja que em cada movimento, o príncipe muda para uma casa de cor oposta. Como a casa a1 é preta, após um número ímpar de movimentos o príncipe estará numa casa da cor branca. Para ele ter retornado até a casa preta do início, ele deverá ter feito um número par de movimentos.

Problema 5. Pode um príncipe começar do quadrado a1 de um tabuleiro de xadrez, ir até o quadrado h8, visitando cada um dos quadrados restantes exatamente uma vez?

Solução: A resposta é não. Em cada movimento, o príncipe pula para um quadrado da cor oposta. Como o príncipe tem que fazer 63 movimentos, o último movimento irá deixá-lo em uma casa da cor oposta a cor de a1.
Entretanto, a1 e h8 têm a mesma cor. Isto é um absurdo.

O último problema nos conduz a um tipo muito importante de demonstração: **prova por absurdo**. Suponha que lhe perguntaram se é possível somar cinco números ímpares e obter o número 100. Após algumas tentativas você começa a desconfiar que isto não é possúvel. Mas como provar que não é possível? Se realmente fosse possível somar 5 números ímpares e obter 100 o que aconteceria? Como a soma de cinco números ímpares é sempre ímpar obteríamos que 100 é um número ímpar. Mas 100 não é ímpar! Logo **não é possível** existirem tais 5 números. Para provar que algo não é possível, basta supormos que é possível e chegarmos a um absurdo.

Problema 6. Uma linha poligonal fechada é composta por 11 segmentos. Pode uma reta (não contendo um vértice da linha poligonal) intersectar cada um desses segmentos?

Problema 7. Três bolas de gude, A, B, e C estão no chão. Um movimento permitido é passar uma bola entre as outras duas. É possível, após 25 movimentos, que todas as bolas estejam nas suas posições originais?

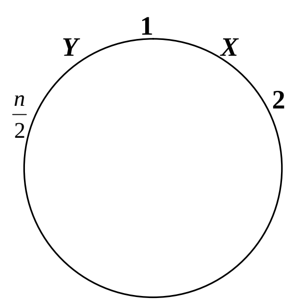
Dica: Que horas são? (Sentidos horário e anti-horário...)

Problema 8. Kátia e seus amigos estão em um círculo. Sabemos qua ambos os vizinhos de cada criança são do mesmo sexo. Determine o número de garotas sabendo que existem 5 garotos no círculo.

Dica: Comece a analisar por um vizinho da Kátia.

Problema 9. (Rússia 1970) O rei Luis estava desconfiado de alguns de seus cortesãos. Ele fez uma lista completa de cada um dos seus cortesãos e disse a cada um deles para espionar um outro cortesão. O primeiro da lista foi espionar o cortesão que estava espionando o segundo da lista, o segundo da lista foi espionar o cortesão que estava espionando o terceiro da lista, e assim sucessivamente; o penúltimo foi espionar o cortesão que estava espionando o último e o último foi espionar o cortesão que estava espionando o primeiro. Prove que o rei Luis tinha um número ímpar de cortesãos.

Solução. Seja n o número de cortesão da lista e suponha que n é par. Coloque-os sentados ao redor de uma mesa circular de modo que cada um esteja espionando o seu vizinho da direita.



O cortesão 1 espia o cortesão X que espia o cortesão 2, o cortesão 2 espia o cortesão Z que espia o cortesão 3, e assim sucessivamente até que o cortesão $\frac{n}{2}$ espia o cortesão Y que espia o cortesão $\frac{n}{2}+1$. Como os números 1, 2, 3,...,n devem se alternar sobre o círculo, concluímos que o cortesão $\frac{n}{2}+1$ é igual ao cortesão 1, ou seja, $n = 0$. Esse absurdo mostra que n é ímpar.

Problema 10. Um cubo $1\times1\times1$ está posicionado em um plano quadriculado de modo que uma de suas faces coincide com um dos quadradinhos do plano. Em cada movimento podemos "tombar" o cubo por uma de suas arestas, fazendo coincidir uma face, que tinha essa aresta, com um dos quadradinhos do plano. È possível fazer o cubo voltar a sua posição inicial após 2005 movimentos?
Dica: Alguém aí joga xadrez?

Paridade e Contagens

Nesta seção, abordaremos duas ideias muito simples:

1. Se contamos os elementos de um conjunto de duas maneiras diferentes, os valores obtidos devem ter a mesma paridade (Porque são iguais!)

2. Se os elementos de um conjunto podem ser pareados então o conjunto tem uma quantidade par de elementos.

Problema 11. Em Brasilândia existem apenas 9 casas muito distantes entre si. È possível que cada casa esteja ligada a exatamente 7 outras casas através de estradas?
Solução: Não é possível. Some a quantidade de estradas que saem de cada casa. Bem, facilmente obtemos 9×7 estradas. Como cada estrada liga duas cidades, a contagem que fizemos contou cada estrada duas vezes. Logo o número obtido teria que ser par.
Você deve ter ficado com uma pulga atrás da orelha. Será que cada casa ligada a exatamente 7 outras foi realmente crucial? É possível revolvermos o problema anterior com um eneunciado mais geral:

Problema 12. Prove que numa festa com n pessoas, o número de pessoas que conhecem um número ímpar de outras pessoas na festa á par.

Solução: Numere as pessoas de 1 até n e denote por d_i o número de amigos da pessoa i. Imagine que existe um fio entre duas pessoas que se conhecem. Se E denota a quantidade de fios, temos

$$d_1+d_2+...+d_n=2E,$$

pois cada fio é contado duas vezes, um para cada ponta. Como o lado direito é par, no lado esquerdo devemos ter uma quantidade par de números ímpares.

Problema 13. (Olimpíada de Maio 2000) O conjunto {1, 2, 3, 4} pode ser dividido em dois subconjuntos $A=\{1,4\}$ e $B=\{3,2\}$ sem elementos comuns e tais que a soma dos elementos de *A* seja igual à soma dos elementos de *B*. Essa divisão é impossível para o conjunto $\{1,2,3,4,5\}$ e também para o conjunto $\{1,2,3,4,5,6\}$. Determine todos os valores de *n* para os quais o conjunto dos primeiros *n* números naturais pode ser dividido em dois subconjuntos sem elementos comuns tais que a soma dos elementos de cada subconjunto seja a mesma.

Solução. Como a soma dos elementos de *A* deve ser igual à soma dos elementos de *B*, a soma dos números do conjunto $\{1,2,3,...,n\}$ deve ser o dobro da soma dos elementos de *A*, ou seja, deve ser um número par. Você já deve saber que

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Você não sabia disso? Não fique aí parado! Tente descobrir porque isso é verdade! Veja que $\frac{n(n+1)}{2}$ é par se $n(n+1)$ é múltiplo de 4. Como estamos interessados no resto na divisão por 4 de algum número, talvez seja interessante procurar quais os possíveis restos de *n* na divisão por 4. Podemos escrever *n* na forma $n=4q+r$ onde $r=0,1,2$ ou 3. Mãos à obra!

1. Se $n=4q$ então $\frac{n(n+1)}{2}=2q(4q+1)$ é par.
2. Se $n=4q+1$ então $\frac{n(n+1)}{2}=(2q+1)(4q+1)$ é ímpar.
3. Se $n=4q+2$ então $\frac{n(n+1)}{2}=(2q+1)(4q+1)$ é ímpar.
4. Se $n=4q+3$ então $\frac{n(n+1)}{2}=(2q+2)(4q+3)$ é par.

Podemos concluir que *n* deve ser da forma 4*q* ou 4*q* + 3. Acabou? Não! Precisamos construir EXEMPLOS para cada uma dessas possibilidades mostrando que realmente esses valores satisfazem as condições do problema.
Para *n* = 4*q*, considere os conjuntos

$$A=\{(1,4),(5,8),(9,12),...,(4q-3,4q)\}.$$
$$B=\{(2,3),(6,7),(10,11),...,(4q-2,4q-1)\}.$$

Para $n = 4q + 3$, considere os conjuntos

$$A=\{(4,7),(8,11),(12,15),...,(4q,4q+3)\}\cup\{(1,2)\}.$$
$$B=\{(5,6),(9,10),(13,14),...,(4q+1,4q+2)\}\cup\{(3)\}.$$

Note que os conjuntos foram divididos em parêntesis. Cada parêntese de *A* possui correspondente em *B* com a mesma soma, facilitando a construção de um exemplo generalizado.

Problema 14. Podemos desenhar uma linha poligonal fechada feita por 9 segmentos de reta, cada um deles intersectando exatamente outro segmento?

Solução. Se tal construção é possível, então todos os segmentos podem ser agrupados em pares de segmentos intersectantes.
Mas o número de segmentos é ímpar! Absurdo!

Os próximos dois problemas tratam de dominós. Um dominó consiste de um tabuleiro 1 x 2 com pontos em cada casinha.
A quantidade de pontos varia de 0 até 6. Então, o número total de dominós distintos é 28.

Problema 15. Todos os dominós são arranjados em uma cadeia de duas pontas (a quantidade de pontos na extremidade de dois dominós consecutivos é a mesma). Se em uma ponta existe o número 5, qual é o número de outra ponta?

Problema 16. Em um conjunto de dominós, descartamos todos aqueles que possuem pelo menos uma casinha vazia. É possível arranjarmos todos os restantes em uma cadeia?

Problema 17. (Eslovênia 1992) Prove que para quaisquer inteiros positivos $a_1, a_2, ..., a_n$ o número:

$$|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+...+|a_n-a_1|$$

é par.

Observação: $|x-y|$ é chamado de valor absoluto da diferença entre *x* e *y* e denota o máximo entre $x - y$ e $y - x$. Na reta real, ele representa a distância entre os números *x* e *y*.

Solução: Perceba que $|x-y| = \pm x \pm y$ para alguma escolha de sinais. Então a soma total é

$$\pm a_1 \pm a_2 \pm a_2 \pm a_3 \pm ... \pm a_n \pm a_1.$$

Como cada número a_i aparece duas vezes, basta mostrarmos que cada uma das expressões $\pm a_1 \pm a_i$ é par para qualquer escolha de sinais. Vejamos os casos:

1. $\pm a_i \pm a_i = +a_i + a_i = 2a_i$ é par.
2. $\pm a_i \pm a_i = -a_i + a_i = 0$ é par.
3. $\pm a_i \pm a_i = +a_i - a_i = 0$ é par.
4. $\pm a_i \pm a_i = -a_i - a_i = -2a_i$ é par.

1.3 Miscelânia

Problema 18. Podemos trocar uma nota de 25 reais usando dez notas que podem assumir os valores 1, 3, 5?

Solução. Não. Como a soma de um número par de números ímpares é par, a soma dos valores dessas 10 notas só pode ser um número par. Mas 25 é ímpar.

Problema 19. Peter comprou um caderno com 96 folhas, e numerou com os números de 1 até 192. Victor rasgou 25 folhas consecutivas do caderno, e adicionou os 50 números. Victor pode ter obtido o número 1990 como resultado da soma?

Problema 20. Prove que a igualdade $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}=1$ não admite soluções com todos os números sendo ímpares.
Dica: Faça o produto dos denominadores.

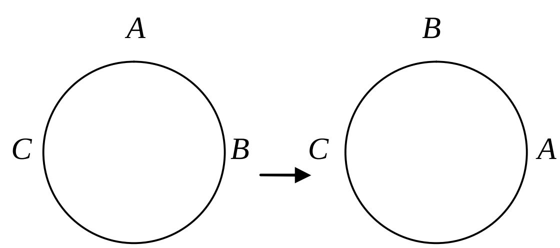
Problema 21. O produto de 21 inteiros é igual a 1. Mostre que sua soma não pode ser zero.
Dica: compare as quantidades de números positivos e negativos.

Problema 22. Três gafanhotos estão brincando ao longo da uma linha. Na sua vez, cada gafanhoto pode pular sobre um outro gafanhoto, mas não sobre os outros dois. Eles podem retornar para suas posições iniciais após 1991 movimentos?

Solução. Sejam A, B, C os três gafanhotos. Estaremos interessados apenas na ordem em que os gafanhotos se dispõem ao longo da reta, digamos que inicialmente eles estão na ordem (A, B, C). Podemos fazer os seguintes movimentos:

$$(A,\overset{1}{B},C)\to(B,\overset{2}{A},C)\to(B,\overset{3}{C},A)\to(C,\overset{4}{B},A)\to\ldots$$

Em cada passo, disponha as letras A, B e C em um círculo (como mostra a figura) e leia a palavra ABC. Percebeu alguma coisa? Antes de efetuarmos nosso primeiro movimetno, a leitura estava no sentido "horário" e logo em seguida passou para o sentido "anti-horário". Como cada movimento alternar os sentidos, após 1991 movimentos estaremos em um sentido diferente do original. Logo, não é possível retornarmos para a posição original.



Observação: Compare com o problema 7.

Problema 23. Os números de 1 até 10 são escritos em uma linha. Podemos colocar os sinais + e – entre eles de modo que o resultado da expressão resultante seja 0?

Solução: Não é possível. Perceba que quando escolhemos um número para trocarmos de sinal, por exemplo, de + para –, a soma total varia o dobro do número escolhido, ou seja, a paridade da soma não muda. Basta ver agora que $1+2+\ldots+10=55$ não tem a mesma paridade que 0. Um INVARIANTE é a paridade da soma.

Problema 24. Um gafanhoto pula ao longo de uma linha. No seu primeiro pulo, ele anda 1cm, no segundo 2cm, e assim sucessivamente. Ele pode pular para a esquerda ou para a direita. Mostre que após 1985 pulos, o gafanhoto não pode retornar ao ponto em que começou.
Dica: Perceba que você pode associar aos pulos do gafanhoto um número com

sinal (+ se o pulo é para a esquerda e – se é para a direita). Agora use o problema anterior.

Problema 25. Os números 1, 2,...,1984, 1985 são escritos em um tabuleiro. A operação permitida é apagar dois números e colocar sua diferença positiva. Após algumas operações, resta apenas um único número no tabuleiro. Pode este número ser 0?

Problema 26. Pode um tabuleiro 8×8 ser coberto com dominós 1×2 de modo que somente os quadrados a1 e h8 não sejam cobertos?

Solução. Não é possível. Pinte o tabuleiro de preto e branco da maneira usual. Cada dominó cobre exatamente um quadrado preto e outro branco (Invariante), portanto, a quantidade de quadrados pretos cobertos é igual à quantidade de quadrados brancos cobertos. Como a1 e h8 têm a mesma cor, sobrariam 30 quadrados de uma cor e 32 de outra para serem cobertos. Absurdo!

Problema 27. 45 pontos são escolhidos sobre a reta *AB*, todos fora do segmento de reta $\overline{AB}$. Prove que a soma das distâncias desses pontos ao ponto *A* não pode ser igual à soma das distâncias ao ponto *B*.

Solução. Sejam *A* e *B* dispostos, sem perda de generalidade como na figura abaixo. Tomemos um ponto *X*.

X pode estar à direita de *B* ou à esquerda de *A*. Ou ocorre: $\overline{AX} + \overline{AB} = \overline{BX}$ ou $\overline{BX} + \overline{AB} = \overline{AX}$. Assim, se estivéssemos somando em *x* as distâncias dos 45 pontos para *A* e em *y* para *B*, estaríamos na verdade, só somando uma diferença de *AB* em *x* ou em *y*. Como 45 é ímpar, não podemos “distribuir” uma igual quantidade de $\overline{AB}$´*s* para o grupo de *A* e o de *B*. Assim, segue que não é possível.

Problema 28. Um número de 17 dígitos é somado com o seu reverso (um número com os mesmo dígitos mas escritos na ordem inversa). Mostre que sua soma contém pelo menos um dígito par.

Problema 29. Existem 100 soldados em um quartel. Toda noite, três deles ficam de guarda. Após um certo período de tempo, é possível que cada soldado tenha ficado de guarda exatamente uma vez com cada outro soldado?

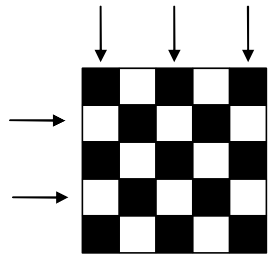
Solução: Suponha, por absurdo, que seja possível. Tomemos o Soldado Ryan, ele possui 99 companheiros. Suponha que ele em particular tenha conseguido ficar exatamente uma vez de pernoite com cada um dos outros. A cada dia, Ryan formava 2 duplas diferentes, que não poderiam se repetir nos dias posteriores. Caso Ryan tivesse pernoitado x vezes, a quantidade de duplas que ele teria formado seria $2x$, que por hipótese, deve ser igual a 99. Chegando à conclusão que 99 é par. Absurdo!

Problema 30. 25 garotos e 25 garotas estão sentados ao redor de uma mesa. Prove que é sempre possível encontrar uma pessoa tal que ambos os seus vizinhos são garotas.

Solução: Suponha, por absurdo, que não necessariamente haja uma pessoa que possua duas garotas como vizinhas. Denotemos h para garoto e m para garota. Cada pessoa ou possui como vizinho $2h$ ou $h+m$. Somando todas as 50 possibilidades, devemos estar contando cada pessoa duas vezes (já que essa é vizinho de duas pessoas). Assim: $x(2h)+y(h+m)=50h+50m$ onde x é o número de pessoas que têm 2 garotos como vizinhos e y é o número de pessoas que têm um garoto e uma garota. Notemos ainda que $x + y = 50$. Obtemos $xh=(50-y)m$ assim $xh=xm.$ Mas x garotos só serão iguais a x garotas, se x for nulo. Assim, todas as pessoas têm um garoto e uma garota como vizinhos. Pintemos as 50 posições do círculo apenas de branco e preto. E analisemos apenas as pretas. Todas as pretas terão que ter vizinhos sendo um garoto e uma garota. Logo, as casas brancas serão alternadas: garoto, garota, garoto... Absurdo. Pois com 25 casas brancas, na última e na primeira brancas haverá 2 garotos. Absurdo! Segue o resultado.

Problema 31. (Ucrânia 1997) Um tabuleiro é colorido de branco e preto da maneira usual, e cada casa contém um inteiro. Sabemos que a soma dos números em cada coluna e a soma dos números em cada linha é par. Mostre que a soma dos números nas casas pretas é par.

Solução. Suponha sem perda de generalidade que o quadrado do canto esquerdo superior é preto. A partir desse quadrado, numere as colunas da esquerda para a direita e as linhas de cima para baixo. Some os números das colunas em posições ímpares e os números das linhas em posições pares. Perceba que cada quadrado preto do tabuleiro é contado apenas uma vez nessa soma enquanto que os quadrados brancos das linhas e colunas mencionadas são contados duas vezes. Logo, esse soma tem a mesma paridade que a soma de todos os números escritos nos quadrados pretos. Como a soma de quaisquer linhas e colunas é par, a soma dos números nos quadrados pretos é par.



Problema 32. Considere um tabuleiro 1998×2002 pintado alternadamente de preto e branco da maneira usual. Em cada casa do tabuleiro, escrevemos 0 ou 1, de modo que a quantidade de 1´s em cada linha e em cada coluna do tabuleiro é ímpar. Prove que a quantidade de 1´s escritos nas casa brancas é par.
Dica: Tente imitar a solução anterior.

Problema 33. (Austrália 2007) Em cada casa de um tabuleiro 2007×2007 escrevemos um número inteiro ímpar. Sejam Z_i a soma dos números na *i*-ésima linha e S_j a soma dos números na j-ésima coluna, para $1 \le i, j \le 2007$. Além disso, sejam $A = Z_i \cdot Z_2 ... Z_{2007}$ e $B = S_1 \cdot S_2 ... S_{2007}$. Mostre que $A + B$ não pode ser igual a zero.

Problema 34. (China 1986) É possível arranjar os números 1, 1, 2, 2, 3, 3,...,1986, 1986 em fila de modo que entre quaisquer dois *i*´s hajam $(i - 1)$ números?

Solução: Vamos tentar fazer alguns casos pequenos. É fácil ver que não conseguimos fazer o que o enunciado pede com os números 1, 1, 2, 2 mas com os números 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 temos um exemplo:

1º.	2º.	3º.	4º.	5º.	6º.	7º.	8º.
a_3	a_4	a_2	b_3	b_2	b_4	a_1	b_1
3	**4**	**2**	**3**	**2**	**4**	**1**	**1**

Contados da squerda para a direita, denotemos por a_i e b_i as posições do primeiro e segundo número *i*, respectivamente. No nosso exemplo, $a_2 = 3$ e $b_2 = 5$.
Como existem $i - 1$ números entre dois números *i´s*, devemos ter $b_i - a_i = i$. Se é possível escrever os números 1, 1, 2, 2, ..., *n*, *n* em linha como no enunciado,

obtemos:

$$(a_1+a_2+...a_n)+(b_1+b_2+...b_n)=1+2+...+2n=n(2n+1)$$

$$(b_1-a_1)+(b_2-a_2)+...(b_n-a_n)=1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Somando as duas linhas,

$$2(b_1+b_2+...b_n)=\frac{n(5n+3)}{2}$$

Como o lado esquerdo é sempre par, a fração $\frac{n(5n+3)}{2}$ deve ser um inteiro par. Isso já restringe os possíveis valores de *n*.

Para *n* = 1986,

$$\frac{n(5n+3)}{2}=9863469$$

é ímpar e conseqüentemente não é possível dispormos esses números em linha. Uma pergunta natural que você deve tentar responder é: para quais *n* tal distribuição é possível?

Problema 35. É possível arranjar os números de 1 até 9 em uma sequência, de modo que exista uma quantidade ímpar de números entre 1 e 2, entre 2 e 3,..., e entre 8 e 9?

Problema 36. (Rússia 1984) O número de todos os inteiros positivos de 64 dígitos sem zeros em sua representação e que são divisíveis por 101 é par ou ímpar?

Solução: Precisamos bolar alguma maneira de agrupar os números em pares. Seja $A=\underbrace{11...11}_{64 vezes}0$ repetições do número 1.

Como 1111 é múltiplo de 101 é fácil ver que *A* é múltiplo de 101. Para todo número de 64 dígitos $a=\overline{a_1a_2...a_{63}a_{64}}$, sem zeros em sua representação decimal, considere o seu conjugado $b=\overline{b_1b_2...b_{63}b_{64}}=\overline{(10-a_1)(10-a_2)...(10-a_{64})}$. Nenhum dígito de *a* é igual a zero, portanto, cada número $10-a_i$ pertence ao conjunto $\{1,2,..,9\}$. Da equação *a* + *b* = *A* obtemos que *a* é divisível por 101 se e somente se *b* é divisível por 101 (lembre-se que *A* é múltiplo de 101). Como o único número que é igual ao seu conjugado é o número $\underbrace{55...55}_{64\ vezes}$ (que é múltiplo de 101) e os demais números que satisfazem o enunciado podem ser pareados, concluímos que a quantidade procurada é ímpar.

Problema 37. (Putnam 1997) Seja B_n a quantidade de n – uplas ordenadas de inteiros positivos $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ tais que

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}=1$$

B_{10} é par ou ímpar?

Solução: Uma ideia natural é tentar agrupar as soluções em pares. Qualquer solução com $a_1 \neq a_2$ pode ser pareada com a outra solução obtida pela troca de posição entre a_1 e a_2. Logo, B_{10} tem a mesma paridade que o número de soluções com $a_1 = a_2$. Das soluções com $a_1 = a_2$, podemos parear aquelas que tem $a_3 \neq a_4$ da mesma maneira. Repetindo esse argumento com $(a_5, a_6), (a_7, a_8)$ e (a_9, a_{10}), concluímos que a paridade de B_{10} é a mesma do número de soluções com $a_5 = a_6, a_7 = a_8$ e $a_9 = a_{10}$, ou seja, das soluções de:

$$\frac{2}{a_1}+\frac{2}{a_3}+\frac{2}{a_5}+\frac{2}{a_7}+\frac{2}{a_9}=1.$$

Como anteriormente, podemos nos restrigir à quantidade de soluções com $a_1 = a_3$ e $a_5 = a_7$, que é igual ao número de soluções da equação:

$$\frac{4}{a_1}+\frac{4}{a_5}+\frac{2}{a_9}=1.$$

Mais uma vez, podemos nos restringir à quantidade de soluções com $a_1 = a_5$, que é igual ao número de soluções da equação:

$$\frac{8}{a_1}+\frac{2}{a_9}=1.$$

Agora ficou fácil! Basta contar explicitamente o número de soluções da equação anterior. Como fazer isso? Bem, ela pode ser fatorada como:

$$(a_1 - 8)(a_9 - 2) = 16$$

que admite 5 soluções correspondendo às fatorações de 16 como $2^i \times 2^{4-i}$ para $i = 0,1,2,3,4.$ Então B_{10} é ímpar.

Problema 38: Prove que numa festa com $2n$ pessoas existem duas com um número par de amigos em comum.

Solução: Suponha que quaisquer duas pessoas tenham um número ímpar de amigos em comum e seja *A* um dos participantes da festa. Seja $M = \{F_1, F_2, ..., F_k\}$ o conjunto dos amigos de *A*. Considere uma nova festa restrita apenas ao conjunto *M*. Como cada F_i tem um número ímpar de amigos em comum com *A*, na nova festa, cada F_i possui um número ímpar de amigos. Pelo problema 12, *k* deve ser par. O mesmo argumento vale para qualquer pessoa na festa e conseqüentemente todos têm um número par de amigos. Peça para cada um dos amigos de *A* fazerem uma lista de seus amigos diferentes de *A*. A soma da quantidade de nomes listados é par, pois é uma soma de uma quantidade par (igual a *k*) de números ímpares (cada F_i possui um número ímpar de amigos diferentes de *A*). Agora comparemos o número de aparições de cada uma das $2n-1$ pessoas diferentes de *A* nessas listas. Se cada uma delas aparecer em um número ímpar de listas, a soma total de todos os nomes em todas as listas seria ímpar. (Lembre-se que a soma de uma quantidade ímpar de números ímpares é ímpar!). Mas isso é uma contradição. Logo, existe uma pessoa diferente de *A* que aparece em um número par de listas, e portanto tem um número par de amigos em comum com *A*.

Problema 39. Alex desenhou uma coleção de *K* retas no plano em posição geral (quaisquer duas retas se intersectam em um ponto e quaisquer três definem um triângulo não degenerado). Para quais valores de *K* é sempre possível (não importa como as retas são desenhadas) colocar um elemento do conjunto $\{1, 2, ..., K-1\}$ em cada ponto de interseção das retas de modo que em toda reta não existam números iguais.

Problema 40. (Rússia) Em cada planeta de um sistema solar existe um astrônomo observando o planeta mais próximo. As distâncias entre os planetas são distintas duas a duas. Demonstre que se a quantidade de planetas é ímpar, então existe pelo menos um planeta que não é observado.
Dica: Procure as cadeias de planetas que um olha para o outro que olha para o outro com mais de 2 planetas.

REFERÊNCIAS

[1] D. Fomin, S. Genkin e I. Itenberg, Mathematical Circles, MAS (1996).
[2] C. Augusto, S. Feitosa, B. Holanda e Y. Lima, treinamento Cone Sul 2007, Fortaleza, Realce (2007).
[3] P. J. Taylor, Tournament of the Towns 1980 to 1984, Australian Mathematical Trust (1993).
[4] D. Fomin e A. Kirichenko, Leningrand Mathematical Olympiadas 1987-1991, MathPro Press (1994).
[5] E. Wagner, Paridade, Eureka! No. 2, pp. 32-38, (1998).

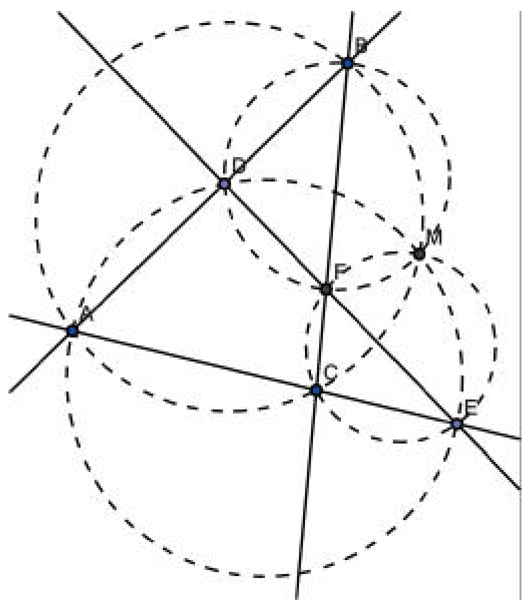
GEOMETRIA DO TRIÂNGULO: FATOS E PROBLEMAS

Carlos Yuzo Shine

1. O Teorema de Miquel

Começamos com o teorema em si, que é um dos vários pequenos milagres dos chamados *quadriláteros completos* (veja um pouco mais desses "milagres" nos exercícios!), que são os quadriláteros conhecidos unidos com as retas que contêm os lados. Isto é, um quadrilátero completo é a união de quatro *retas* em vez de quatro *segmentos*.

Teorema de Miquel. Sejam a, b, c, d quatro retas coplanares, de modo que não há duas paralelas nem três concorrentes. Os circuncírculos dos quatro triângulos determinados pelas quatro retas passam por um mesmo ponto, denominado ponto de Miquel das quatro retas.



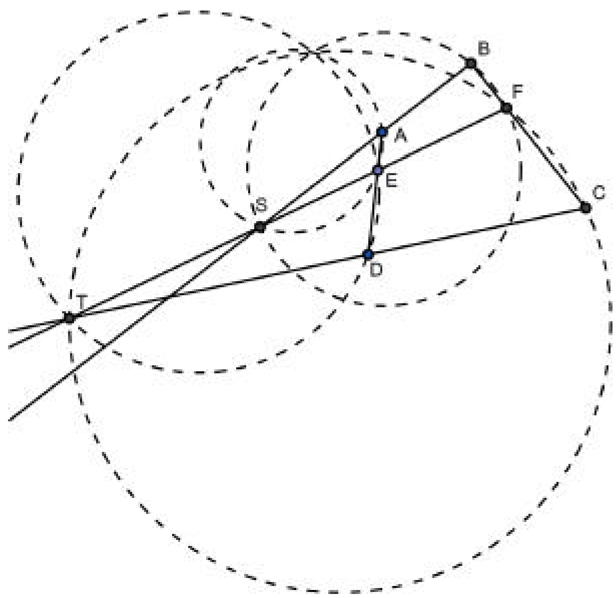
Demonstração:

Seja M a intersecção dos circuncírculos de CEF e BDF na figura acima. Então $\angle MEA = \angle MEC = 180° - \angle MFC = \angle BFM = \angle BDM = 180° - \angle ADM$, de modo que $\angle MEA + \angle ADM = 180°$ e, portanto, $MDAE$ é inscritível. Isso quer dizer que M pertence ao circuncírculo de ADE. Analogamente, prova-se que M pertence ao

circuncírculo de *ABC*.
Vamos resolver, a título de exemplo, o problema 6 da olimpíada norteamericana de 2006.

Exemplo 1.1.
(USAMO 2006, Problema 6) Seja *ABCD* um quadrilátero e *E* e *F* os pontos sobre os lados *AD* e *BC*, respectivamente, tal que $AE/ED = BF/FC$. A semirreta *FE* corta as semirretas *BA* e *CD* em *S* e *T*, respectivamente. Prove que os circuncírculos dos triângulos *SAE*, *SBF*, *TCF* e *TDE* passam por um mesmo ponto.

Resolução:
Ao fazer a figura, você provavelmente vai notar uma certa semelhança com a figura anterior.

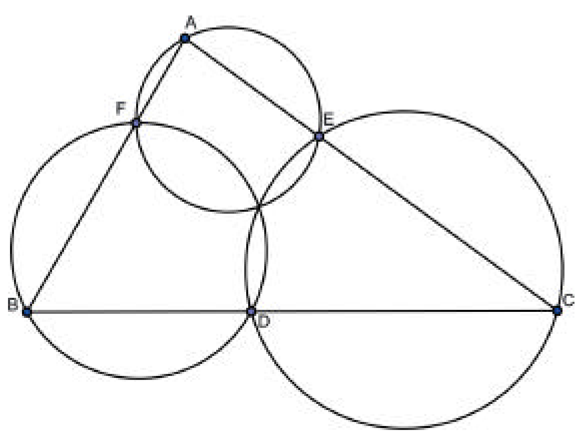


Queremos provar que os pontos de Miquel de *ADTS* e *BCTS* coincidem! Isso não é difícil, na verdade: seja *M* a intersecção dos circuncírculos de *SAE* e *SBF*. Mostraremos que os circuncírculos de *TED* e *TFC* também passam por *M*.
Um arrastão e uma semelhança dão conta do recado: primeiro, note que $\angle AME = \angle ASE = \angle BSF = \angle BMF$ *e* $\angle MEA = \angle MSA = \angle MSB = \angle MFB$. Então os triângulos *AME* e *BMF* são semelhantes, e da igualdade $AE/ED = BF/FC$ os triângulos *MAD* e *MBC* são semelhantes também. Uma rápida verificação mostra que *MAB* e *MDC* também são semelhantes: de fato (pois como *MAD* e *MBC* são

semelhantes então $\angle DMA = \angle CMB$) e $\dfrac{AM}{BM} = \dfrac{DM}{CM}$ (novamente da semelhança).
Você pode imaginar que o triângulo *MAD* "gira" em torno de *M* e, após um "acerto de escala", é transformado no triângulo *MBC*. Isso é uma transformação geométrica conhecida como roto-homotetia de centro *M*. Assim, *A* é levado em *B* e *D* é elevado em *C*. Note que a semelhança obtida anteriormente envolve o centro de roto-homotetia *M*, os pontos e suas imagens na transformação. Isso na verdade sempre acontece (é uma das semelhanças automáticas).
Agora podemos terminar o problema: da semelhança entre *MAB* e *MDC*, os ângulos externos $\angle MDT$ e $\angle MAS$ são congruentes. Como *M* pertence ao circuncírculo de *SAE*, $\angle MAS = \angle MES = \angle MET$, ou seja, $\angle MDT = \angle MET$, o que significa que *MEDT* é cíclico e, portanto, *M* pertence ao circuncírculo de *TED*. Utilizando outra semelhança automática, entre *MEF* e *MDC* (pois *E* é levado em *F*!), prova-se que *M* pertence também ao circuncírculo de *TFC*.
Note que se *U* é a interseção de *AB* e *CD*, então pelo teorema de Miquel *M* também pertence ao circuncírculo de *STU*. Então na vaerdade cinco círculos passam pelo ponto *M*!

A seguinte versão do teorema de Miquel também é útil:

Teorema de Miquel para triângulos. Seja *ABC* em triângulo e *D*, *E*, *F* pontos sobre as retas *BC*, *CA*, *AB*, respectivamente. Então os circuncírculos de *AEF*, *BFD* e *CDE* têm um ponto em comum. Esse ponto também é chamado de ponto de Miquel.



Demonstração:
Seja *M* a segunda interseção dos circuncírculos de *AEF* e *BFD*. Então $\angle CDM = \angle BFM = \angle AEM = 180° - \angle CEM$.

Exercícios:

01. Demonstre o teorema de Miquel para quadriláteros utilizando o teorema de Miquel para triângulos.

02. Seja *ABCDE* um pentágono convexo e *F*, *G*, *H*, *I*, *J* as interseções dos prolongamentos de *EA*, *AB*, *AB*, *BC*, *CD*, *DE* e *DE*, *EA* respectivamente. Prove que as segundas interseções dos circuncírculos de *ABF*, *BCG*, *BCG*, *CDH*, *DEI*, *DEI*, *EAJ*, e *EAJ*, *ABF* pertencem a uma mesma circunferência.

03. Considere um quadrilátero completo. Seja *M* o seu ponto de Miquel. Prove que:
(a) os circuncentros dos quatro triângulos determinados pelo quadrilátero e *M* estão sobre uma mesma circunferência.
(b) as projeções ortogonais de *M* sobre as quatro retas do quadrilátero pertencem a uma mesma reta *r*; além disso, *M* é o único ponto do plano com essa propriedade.
(c) os ortocentros dos quatro triângulos pertencem a uma mesma reta *s*.
(d) as retas *r* e *s* são paralelas, e a distância de *M* e *r* é metade da distância de *M* a *s*.

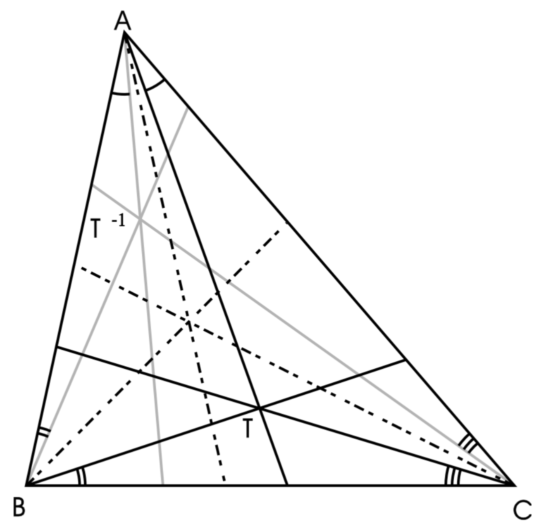
04. Seja *ABCD* um quadrilátero convexo e *X* e *Y* as interseções dos lados opostos *AD* e *BC* e *AB* e *CD*, respectivamente. Prove que os pontos médios de *AC*, *BD* e *XY* são colineares.

Observação: a reta que passa pelos três pontos é a reta de Gauss do quadrilátero completo.

2. Conjugados isogonais

A ideia de *conjugado* é fazer uma associação entre objetos. Objetos conjugados supostamente têm propriedades semelhantes. Isso é bastante comum em equações: se um número é raiz, então o conjugado também é raiz. Em geometria, também existe a ideia de conjugado. De fato, dado um triângulo, cada ponto tem um *conjugado isogonal* e um *conjugado isotômico*. Aqui, trataremos somente de conjugados isogonais.

Definição 2.1. Dado um triângulo *ABC*, o conjugado isogonal em relação a *ABC* de um ponto *T* do plano de *ABC* é obtido refletindo as retas *TA*, *TB* e *TC* em relação às bissetrizes internas de *ABC* que passam por *A*, *B*, e *C*, respectivamente. As retas resultados são concorrentes no isogonal T^{-1} de *T*.
A seguir, as linhas pontilhadas são as bissetrizes, e as cevianas cinzas são as reflexões das cevianas pretas.



O fato de que as retas isogonais são concorrentes é extremamente importante, tanto que será enunciado novamente.

Teorema fundamental dos conjugados isogonais. Dados um triângulo e três retas que passam pelos respectivos vértices e concorrem em um ponto P, as retas isogonais a elas, obtidas através da reflexão em relação à bissetriz interna correspondente, são concorrentes no conjugado isogonal P^{-1} de P.

Demonstração

Por que as cevianas cinzas são concorrentes? Isso decorre de duas aplicações do teorema de Ceva trigonométrico: primeiro com as cevianas concorrentes em T e depois, com as cevianas concorrentes em T^{-1}, que formam os mesmos ângulos que as outras cevianas, porém no sentido contrário.

Na verdade, pode ocorrer de as três cevianas serem paralelas. Isso ocorre se, e somente se, T está sobre o circuncírculo de ABC; nesse caso, pensamos projetivamente, ou seja, o conjugado isogonal é um ponto do infinito.

2.1 para que servem isogonais?

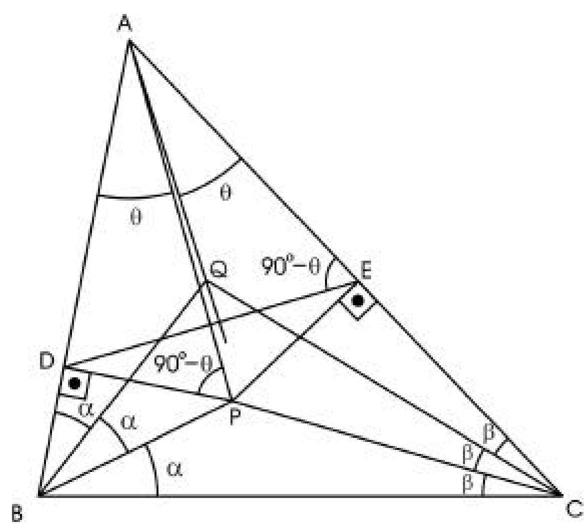
O que é mais útil em conjugados isogonais é simplesmente que as cevianas são reflexões umas das outras em relação às bissetrizes, e isso costuma levar a algumas igualdades entre ângulos um pouco mais difíceis de obter ou mesmo de se imaginar com contas.

Exemplos 2.1

No triângulo ABC, P e Q são pontos no interior de ABC tais que $\angle CBP = \angle PBQ = \angle QBA = \angle ABC/3$ e $\angle BCP = \angle PCQ = \angle QCA = \angle ACB/3.$ Sejam D e E as projeções ortogonais de P sobre AB e AC, respectivamente. Prove que AQ é perpendicular a DE.

Resolução

Seja $\theta = \angle PAD$. Então $\angle APD = 90° - \theta$ e, como $\angle ADP$ e $\angle AEP$ são retos, o quadrilátero $ADPE$ é inscritível. Logo $\angle AED = \angle APD = 90° - \theta.$



Olhando a figura, note que basta provarmos que $\angle QAC = \theta.$ Aí é que entram os conjugados isogonais.

Como $\angle PBC = \angle QBA$ e $\angle BCP = \angle QCA,$ os pares de retas $BP;BQ$ e $CP;CQ$ são simétricos entre si em relação às bissetrizes de $\angle ABC$ e $\angle ACB,$ respectivamente. Ou seja, P e Q são conjugados isogonais e, portanto, $\angle PAB$ e $\angle QAC$ também são iguais. Logo $\angle QAC = \theta$ e o ângulo entre as retas AQ e DE é $180° - \theta - (90 - \theta) = 90°.$

Note que para provar o resultado na conta, bastaria repetir a demonstração do teorema fundamental dos conjugados isogonais. Mas o mais interessante é que, sabendo da existência dos conjugados isogonais, é natural pensar nessa solução. Em contraste, fazer a conta sem pensar em conjugados isogonais não parece ser tão natural. Então dá para pensar que os conjugados isogonais nos economizaram não só fazer a conta, mas mostraram onde fazer as contas relevantes.

2.2. Conjugados isogonais dos pontos notáveis

Você já deve estar familiarizado com os pontos notáveis do triângulo: o baricentro (encontro das medianas), o incentro (encontro das bissetrizes internas), o ortocentro (encontro das alturas) e o circuncentro (encontro das mediatrizes). Quais são os conjugados isogonais desses pontos? Vamos aproveitar e conhecer mais um ponto notável (mas não tão conhecido).
Vamos fazer isso em ordem de dificuldade.

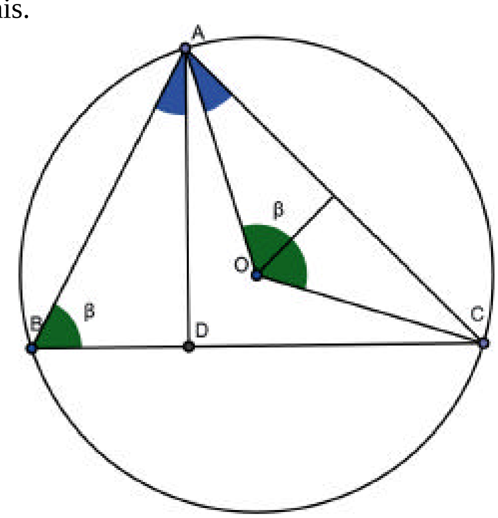
Incentro

As reflexões coincidem com as próprias bissetrizes. Logo o conjugado isogonal do incentro, que é o encontro das bissetrizes internas, é ele mesmo.

O mesmo vale para os ex-incentros (encontros de duas bissetrizes externas e uma bissetriz interna e centros dos ex-incírculos, que são tangentes externamente aos lados ou seus prolongamentos). Pense sobre o assunto!

Ortocentro e circuncentro

A figura a seguir deve convencê-lo de que o ortocentro e o circuncentro são conjugados isogonais.

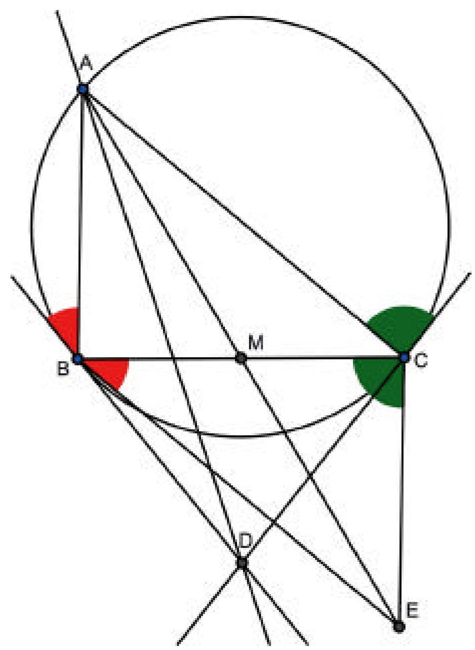


Baricentro

Os isogonais das medianas são as simedianas (**SI**métrico + **MEDIANA**). O ponto de encontro das simedianas é o ponto de Lemoine, também conhecido como ponto *simediano*. O ponto de Lemoine é costumeiramente denotado por *K*.
Primeiro, vamos aprender a traçá-las de modo mais prático.

Lema: Seja D a interseção das retas tangentes ao circuncírculo do triângulo ABC por B e C. Então a reta AD contém a simediana que passa por A.

Demonstração



Construa o paralelogramo $ABEC$. Então AD contém a mediana AM. Afirmamos que D e E são conjugados isogonais. De fato, $\angle BCE = \angle B$ e o ângulo entre AC e CD, pela tangência, é igual a $\angle B$.
Assim, as retas CD e CE são conjugadas isogonais. Analogamente, BD e BE também são, e o resultado segue do teorema fundamental dos conjugados isogonais.

Exercícios

05. Sejam P e Q pontos no interior do ângulo $\angle BAC$ tais que $BP = CP, BQ = CQ$ e $\angle ABP + \angle AQC = 180°$. Prove que $\angle BAP = \angle CAQ$.

06. As retas obtidas através das reflexões da diagonal BD do quadrilátero $ABCD$ em relação às bissetrizes de $\angle B$ e $\angle D$ passam pelo ponto médio de AC. Prove que as reflexões da diagonal AC do quadrilátero $ABCD$ em relação às bissetrizes de

$\angle A$ e $\angle C$ passam pelo ponto médio de *BD*.

07. (Prova de Seleção EUA, 2008) Seja *ABC* um triângulo e *G* o seu baricentro. O ponto *P* varia sobre o segmento *BC*. Os pontos *Q* e *R* pertencem aos lados *AC* e *AB* respectivamente, e são tais que *PQ* é paralelo a *AB* e *PR* é paralelo a *AC*. Prove que, ao variar *P* sobre *BC*, o circuncírculo de *AQR* passa por um ponto fixado *X* tal que $\angle BAG = \angle CAX$.

08. (IMO 2004, Problema 5) Num quadrilátero convexo *ABCD* a diagonal *BD* não é bissetriz do ângulo $\angle ABC$ nem do ângulo $\angle CDA$. Um ponto *P* no interior de *ABCD* satisfaz

$$\angle PBC = \angle DBA \text{ e } \angle PDC = \angle BDA.$$

Prove que os vértices do quadrilátero *ABCD* pertencem a uma mesma circunferência se, e somente se, $AP = CP$.

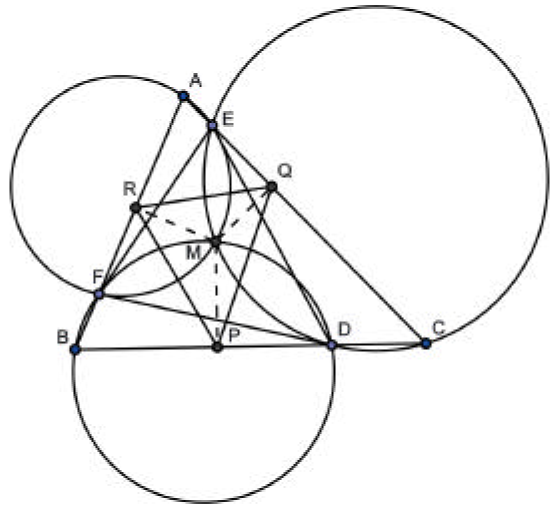
3. Triângulo Pedal

Definição 3.1. Seja *P* um ponto no plano do triângulo *ABC* e *D*, *E* e *F* as projeções de *P* sobre as retas *BC*, *CA* e *AB*. O triângulo *DEF* é o triângulo pedal de *P* em relação ao triângulo *ABC*.

O que triângulos pedais têm de especial? Primeiro, aparecem muitos ângulos retos, o que propicia o aparecimento de quadriláteros inscritíveis. Segundo, eles normalmente minimizam áreas.

Teorema do mínimo. Dados dois triângulos *T* e *ABC*, considere todos os triângulos *DEF* semelhantes a *T*, todos na mesma ordem, com *D* sobre o lado *BC*, *E* sobre o lado *CA* e *F* sobre o lado *AB*. Dentre todos esses triângulos, o de menor área é o triângulo pedal de algum ponto *P*.

Demonstração
Não provaremos aqui a existência de um triângulo de área mínima (caso você esteja curioso, estude topologia e depois volte!).
Seja *DEF* o triângulo de área mínima. Seja *M* o ponto de Miquel de *ABC* e *DEF*, e sejam *P*, *Q* e *R* as projeções de *M* sobre os lados.



Note que o quadrilátero *CPMQ* é inscritível (pois $\angle MPC$ e $\angle MQC$ são retos), de modo que $\angle DME = \angle PMQ = 180° - \angle C$. Portanto, $\angle PMD = \angle QME$ *:* imagine o ângulo $\angle DME$ girando em torno de *M* para coincidir com $\angle PMQ; MD$ vira *MP* e *ME* vira *MQ*. Analogamente, $\angle RMF = \angle QME$.

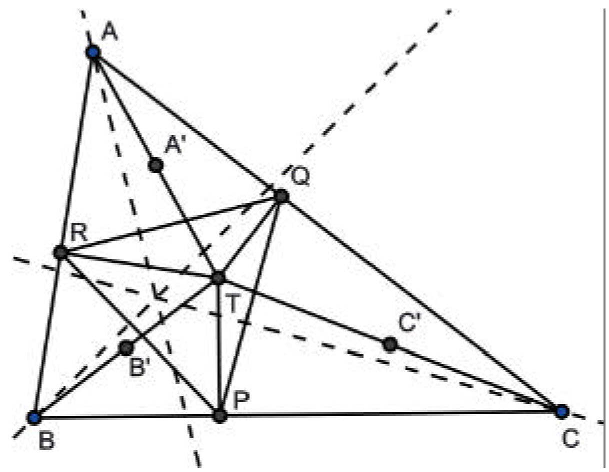
Portanto os triângulos *PMD*, *QME* e *RMF* são semelhantes e induzem uma roto-homotetia (você se lembra o que é isso?) que leva *DEF* a *PQR*. A razão de homotetia é $\frac{MP}{MD} \le 1$, de modo que a área de *PQR* é menor ou igual à área de *DEF*. Como *DEF* tem área mínima, os triângulos devem ser congruentes e deste modo *MP* = *MD*, ou seja, *P* = *D*. Analogamente, *Q* = *E* e *R* = *F*, de modo que *DEF* é o triângulo pedal de *P*.

Exemplo 3.1.

(Prova de seleção EUA, 2008) Sejam *P*, *Q*, *R* pontos sobre os lados *BC*, *CA*, *AB* de um triângulo acutângulo *ABC* tais que *PQR* é equilátero e tem área mínima entre todos tais triângulos equiláteros. Prove que a reta perpendicular a *QR* que passa por *A*, a reta perpendicular a *RP* que passa por *B* e a reta perpendicular a *PQ* que passa por *C* têm um ponto comum.

Resolução

Pelo teorema do mínimo, *PQR* é triângulo pedal de algum ponto *T*.



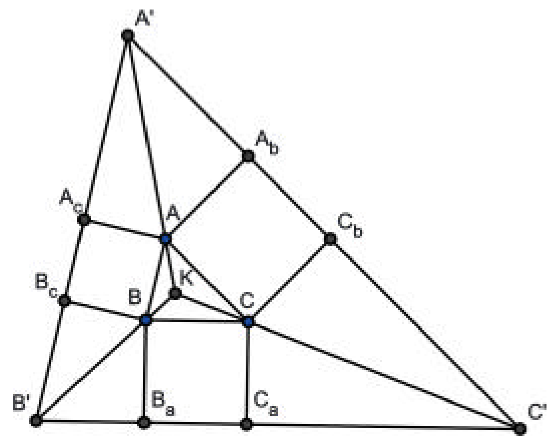
Como os ângulos $\angle TQA$ e $\angle TRA$ são ambos retos, o quadrilátero $AQTR$ é inscritível, e o seu circuncentro é o ponto médio A' de AT. Assim, a reta perpendicular a QR e que passa por A, que contém a altura relativa a QR, é isogonal a AT, que contém o circuncentro, em relação ao triângulo AQR. Como os ângulos $\angle BAC$ e $\angle QAR$ são iguais, a perpendicular e AT são isogonais em relação ao triângulo ABC também. O análogo para as perpendiculares a PR por B e a PQ por C. Como AT, BT e CT são concorrentes em T, seus isogonais são concorrentes no conjugado isogonal de T.

A título de curiosidade, o ponto T é o primeiro ponto isodinâmico. Os dois pontos isodinâmicos (adivinhe o nome do outro ponto!) são os pontos de interseção dos *círculos de Apolônio* de A, B e C (que passam pelos vértices, o pé da bissetriz interna e têm centro sobre o lado oposto). Os seus conjugados isogonais são os pontos de Fermat. O primeiro ponto de Fermat é o ponto cuja soma das distâncias aos vértices é mínima (supondo que os ângulos internos do triângulo são todos menores do que $120°$). Veja [5] para aprender isso e muito, muito mais.

3.1. Voltando às simedianas

Uma aplicação interessante da ideia de triângulo pedal está relacionada às simedianas. Uma outra maneira de construir as simedianas é a seguinte:

Lema. Construa quadrados ABB_cA_c, BCC_aB_a e CAA_bC_b externamente sobre os lados do triângulo ABC. Prolongue A_cB_c, B_aC_a e C_bA_b para obter o triângulo $A'B'C'$. Então as retas AA', BB' e CC' concorrem no ponto simediano K de ABC.



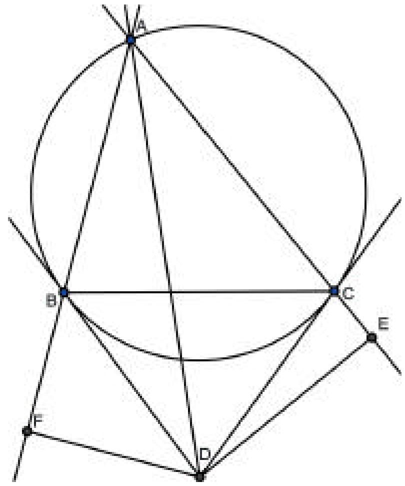
Demonstração

Por simplicidade, sejam $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$ e L o encontro de AA', BB', CC'. Queremos provar que $L = K$.

Primeiro, como os pares de retas $AB; A'B', BC; B'C'$ e $CA; C'A'$ são paralelos, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes. Seja k a razão de semelhança. Sejam k_a, k_b e k_c as distâncias de L a BC, CA e AB, respectivamente. Das semelhanças entre $LAB; LA'B$, $LBC; LB'C'$ e $LCA; LC'A'$, todas de razão k,

$$\frac{k_a}{k_a + a} = \frac{k_b}{k_b + b} = \frac{k_c}{k_c + c} = k \Leftrightarrow \frac{k_a}{a} = \frac{k_b}{b} = \frac{k_c}{c} = \frac{k}{1-k}$$

Isto quer dizer que as distâncias de L a cada um dos lados é proporcional aos seus comprimentos. Além disso, considerando uma semelhança prova-se que um ponto X pertence a, digamos, AL se, e somente, as distâncias de X aos lados AB e AC são proporcionais a seus comprimentos. Basta provar que a simediana por A tem a mesma propriedade. Para isso, considere a construção anterior, sendo D o mesmo ponto definido anteriormente.

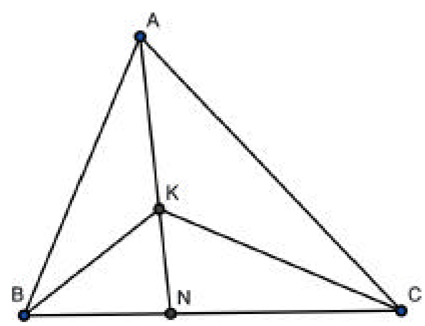


Sendo x e y as distâncias de D a AB e AC, respectivamente, considerando que o ângulo entre AB e BD é $\angle FBD = \angle ACB = \angle C$ e o ângulo entre AC e CD é $\angle DCE = \angle ABC = \angle B$ (não se preocupe com triângulos obtusângulos; nesse caso, troque o ângulo obtuso por seu suplementar), nos triângulos retângulos BDF e $CDE, x = BDsen\angle C$ e $y = DCsen\angle B$. Observando ainda que, sendo DB e DC tangentes, DB = DC, temos $\frac{x}{y} = \frac{sen\angle C}{sen\angle B} = \frac{AB}{AC}$. Logo D pertence a AL e, consequentemente, K também. Da mesma forma provamos que K pertence a BL e CL, de modo que $L = K$.

Assim como no teorema das bissetrizes, as simedianas dividem os lados opostos em razões interessantes.

Lema. Seja ABC um triângulo e NA uma simediana. Então $\frac{BN}{CN} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$.

Demonstração



Já provamos anteriormente que as distâncias do ponto simediano K aos lados são proporcionais a seus comprimentos. Então existe t real tal que $k_a = ta$, $k_b = tb$ e $k_c =$ tc. Assim, as áreas de KAB, KAC e KBC são $\frac{tc \cdot c}{2} = \frac{tc^2}{2}, \frac{tb \cdot b}{2} = \frac{tb^2}{2}$ e $\frac{ta \cdot a}{2} = \frac{ta^2}{2}$, respectivamente. Logo

$$\frac{BN}{CN} = \frac{\text{área } ABN}{\text{área } ACN} = \frac{\text{área } KBN}{\text{área } KCN} = \frac{\text{área } ABN - \text{área } KBN}{\text{área } ACN - \text{área } KCN} = \frac{\text{área } KAB}{\text{área } KAC} = \frac{c^2}{b^2} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$$

Lema. Sejam d_a, d_b e d_c as distâncias de um ponto P aos lados BC, CA, e AB do triângulo ABC. Se AP corta BC em N, então $\frac{BN}{CN} = \frac{c \cdot d_c}{b \cdot d_b}$.

Demonstração
Fica a cargo do leitor.

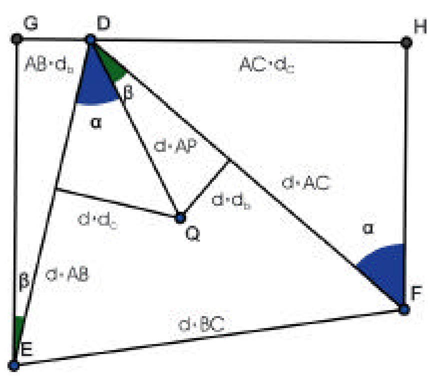
3.2 A desigualdade de Erdös-Mordell

Um dos principais teoremas sobre triângulos pedais é a desigualdade de Erdös-Mordell:

Desigualdade de Erdös-Mordell. Seja P um ponto no plano do triângulo ABC e d_a, d_b, d_c as distâncias de P às retas BC, CA, AB respectivamente. Então

$$PA + PB + PC \geq 2(d_a + d_b + d_c)$$

Demonstração
Seja $PA = d$. "Multiplique" a figura original por d e construa triângulos semelhantes aos triângulos obtidos por PA e as projeções de P sobre AB e AC:



Note que $\angle GDE = 90° - \beta$ e $\angle HDF = 90° - \alpha$, de modo que G, D e H são colineares. Além disso, $\angle EGD$ e $\angle FHD$ são ambos retos, de modo que as retas EG e FH são paralelas. A distância entre essas duas retas é $GH = AB \cdot d_b + AC \cdot d_c$, que é menor ou igual a $EF = d \cdot BC$. Lembrando que $d = PA$, temos $AB \cdot d_b + AC \cdot d_c \le PA \cdot BC \Leftrightarrow PA \ge \frac{AB}{BC} \cdot d_b + \frac{AC}{BC} \cdot d_c$. Analogamente,

$$PB \ge \frac{AB}{AC} \cdot d_a + \frac{BC}{AC} \cdot d_c$$

$$PC \ge \frac{AC}{AB} \cdot d_a + \frac{BC}{AB} \cdot d_b$$

Somando as três desigualdades e lembrando que $t + \frac{1}{t} \ge 2$ para todo t real positivo,

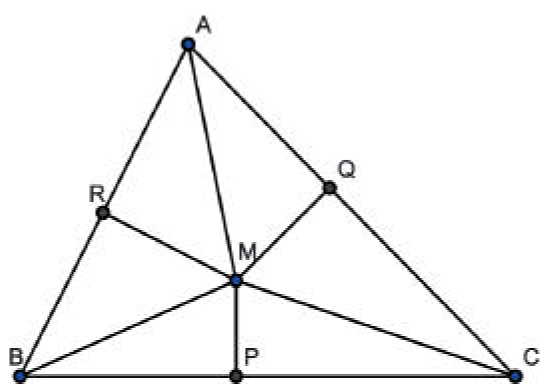
$$PA + PB + PC \ge \left(\frac{AB}{AC} + \frac{AC}{AB} \right) d_a + \left(\frac{AB}{BC} + \frac{BC}{AB} \right) d_b + \left(\frac{AC}{BC} + \frac{BC}{AC} \right) d_c \ge 2(d_a + d_b + d_c)$$

Exemplo 3.2.

(IMO 1991, Problema 4) Sejam ABC um triângulo e M um ponto interior. Mostre que pelo menos um dos ângulos $\angle MAB, \angle MBC$ e $\angle MCA$ é menor ou igual a $30°$.

Resolução:

Sejam P, Q e R as projeções de M sobre BC, CA, e AB, respectivamente.



Pela desigualdade de Erdös-Mordell, $MA + MB + MC \ge 2(MP + MQ + MR)$. Se todas as razões $\frac{MR}{MA}, \frac{MP}{MB}, \frac{MQ}{MC}$ são maiores do que $\frac{1}{2}$, então $MA < 2MR, MB < 2MP$ e $MC < 2MQ$, e $MA + MB + MC < 2(MP + MQ + MR)$, contradição. Então uma das razões, digamos, $\frac{MR}{MA}$, é menor ou igual a $\frac{1}{2}$. Todavia, $\frac{MR}{MA} = sen\angle MAB$, de modo que $\angle MAB \le 30°$.

Exercícios

09. Dado um triângulo com perímetro *L*, seja *P* o perímetro de um triângulo pedal. Prove que $L \ge 2P$.
Quando ocorre a igualdade?

10. Seja *P* um ponto interior ao triângulo *ABC* e *T* o seu triângulo pedal. Prove que a área de *T* é igual a $\frac{R^2 - OP^2}{4R^2}$ vezes a área de *ABC*.

11. Seja *G* o baricentro do triângulo *ABC* e *D*, *E*, *F* as projeções ortogonais de *G* sobre os lados *BC*, *CA* e *AB*, respectivamente. Prove que

$$\frac{4}{27} < \frac{área\ DEF}{área\ ABC} \le \frac{1}{4}$$

12. Seja *P* um ponto qualquer no plano do triângulo *ABC*. As projeções de *P* sobre *BC*, *CA*, *AB* são *D*, *E* e *F* respectivamente.
(a) Prove que as perpendiculares a *EF*, *FD*, *DE* por *A*, *B*, *C* respectivamente têm um ponto *P´* em comum.
(b) Sejam *Q* e *Q´* as segundas interseções de *AP* e *AP´* com o circuncírculo de *ABC*, respectivamente.
Prove que as retas *QQ´* e *BC* são paralelas.

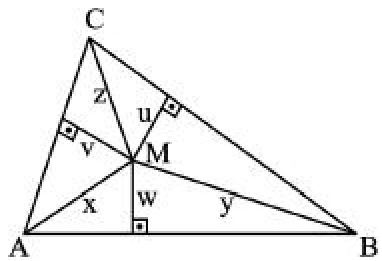
13. Os pontos *X*, *Y* e *Z* estão sobre *BC*, *CA*, e *AB*, respectivamente, e são tais que *XYZ* e *ABC* são semelhantes, nessa ordem. Prove que o circuncentro de *XYZ* é equidistante aos ortocentros de *ABC* e *XYZ.*

14. (Ibero 2008, Problema 5) Seja *ABC* um triângulo e *X*, *Y*, *Z* pontos interiores dos lados *BC*, *AC*, *AB*, respectivamente. Sejam *A´*, *B´*, *C´* os circuncentros dos triângulos *AZY, BXZ, CYX*, respectivamente.
Demonstre que

$$\left(A'B'C'\right) \geq \frac{\left(ABC\right)}{4}$$

e que a igualdade ocorre se, e somente se, as retas AA', BB', CC' têm um ponto em comum.
Observação: Para um triângulo qualquer *RST*, denotamos a sua área por (*RST*).

15. (OPM, 2001)



(a) Na figura acima, considere pontos B_1 e C_1 sobre as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, respectivamente.

(i) Mostre que a soma das áreas dos paralelogramos com lados AB_1 e AM e com lados AC_1 e *AM* é igual à área do paralelogramo tal que um de seus lados é B_1C_1 e o outro é paralelo e igual a *AM*.

(ii) Tomando $AB_1 = AC$ e $AC_1 = AB$, conclua que $AB \cdot v + AC \cdot w \leq BC \cdot x$
(b) Prove a Desigualdade de Erdös-Mordell: $2\left(u+v+w\right) \leq x+y+z$

Referências Bibliográficas

[1] Uma ótima fonte de problemas é o Mathlinks: http://www.mathlinks.ro/ (em inglês).
[2] Para quem gosta de Geometria, o Forum Geometricorum é um prato cheio! Tudo sobre quadriláteros completos foi retirado do artigo Steiner´s Theorems on the Complete Quadrilateral, de Jean – Pierre Ehrmann, Volume 4 (2004), pp 35-52.
[3] Para quem quer saber mais sobre o teorema de Erdös-Mordell, na Eureka! 18.
[4] O livro Modern Geometry of the Triangle, de William Gallatly, contém muita informação interessante, incluindo a maior parte dos fatos sobre simedianas e o ponto simediano.
[5] Mais conjugados isogonais? Isso e muito mais no livro Geometry of Conics (o "livro do bode" – Veja a Capa!), de A. V. Akoplyan e A. A. Zaslavsky.

SÉRIE HARMÔNICA DE NÚMEROS PRIMOS

Lenimar Nunes de Andrade
UFPB – João Pessoa, PB

1. Série harmônica

Há séculos que se sabe que a soma dos recíprocos dos números inteiros positivos

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$$

pode ultrapassar o valor de qualquer constante positiva pré-estabelecida, bastando, para isso, somar determinada quantidade de parcelas, considerando o valor de *n* suficientemente grande. Quando consideramos uma infinidade de parcelas desse tipo, temos uma série infinita conhecida pelo nome de série harmônica, e, como a soma H_n vai aumentando à medida que *n* aumenta e ultrapassa qualquer valor pré-estabelecido, temos que se trata de uma *série divergente*. Existem pelo menos 20 demonstrações diferentes desse fato (veja, por exemplo, a referência [3]) e algumas demonstrações simples podem ser encontradas em [1] ou [2].*

Sabe-se que o crescimento das somas parciais H_n da série harmônica é bastante lento. Se somarmos 1000 termos da série, obtemos 7, 4855 como resultado. Se somarmos 1000000 de termos, obtemos 14,3927. Para a soma ultrapassar 100, estima-se que seja necessário somar-se aproximadamente $1{,}5 \times 10^{43}$ parcelas – um número de parcelas tão grande que nem os computadores mais modernos de hoje em dia, trabalhando ininterruptamente ao longo de vários milênios, conseguiriam efetuar todos os cálculos.

Se for escolhido um determinado algarismo, e retirados da série harmônica todos os termos que contenham esse algarismo, então surpreendentemente, obtem-se uma série infinita na qual a soma dos *n* primeiros termos é sempre inferior a 80, não

---

* Nota do editor: Uma demonstração particularmente simples deste fato é a seguinte:

$$H_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right) \geq$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}$$

$= 1 + \frac{k}{2}$, que pode ultrapassar o valor de qualquer constante positiva pré-estabelecida.

importando qual seja o valor de n[**]. Obtemos, portanto, o que chamamos de *série convergente*.

2. Série dos recíprocos de números primos

A sequência de números primos 2, 3, 5, 7, 11, 13,... é infinita. Apesar de estarem bem próximos uns dos outros, para valores pequenos, à medida que aumentamos o valor de *n*, torna-se difícil encontrar números primos maiores do que *n*, e eles vão ficando cada vez mais distantes uns dos outros em média.
Se retirarmos da série hermônica todos os termos cujos denominadores não sejam primos, obtemos ainda assim uma série infinita:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+...$$

vamos denominar a série assim obtida de *série harmônica de números primos.*
O principal objetivo deste artigo é mostrar que essa série harmônica de números primos é divergente, ou seja, a soma dos seus *n* primeiros termos pode ultrapassar qualquer valor pré-estabelecido. Esse fato foi observado pela primeira vez por Leonhard Euler (1707–1783).
O crescimento do valor das somas dos *n* primeiros termos da série harmônica de números primos é exatamente lento. Muito mais lento do que o da série harmônica.
Com os recursos computacionais atuais, é impossível realizar a tarefa de somar uma certa quantidade de termos dessa série e obtermos o resultado igual ou superior a 5,0.

3. Demonstração da divergência

Inicialmente, vamos mostrar que dado um *n* inteiro positivo temos que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k < 1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}$$

para todo inteiro positivo *k* tal que $k \le n.$ Em particular, fazendo $k = n$, obtemos que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\frac{n}{n}+\frac{n^2}{n^2}=3. \qquad (1)$$

Para isso, vamos usar o método da indução matemática. Para $k = 1$, a desigualdade reduz-se a $1+\frac{1}{n} < 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$ o que é verdadeiro. Suponho a desigualdade válida para *k*, vamos verificar que vale para $k + 1$ também:

[**] Veja o problema proposto no. 141, na página 60.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k}\left(1+\frac{1}{n}\right)<\left(1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}+\frac{1}{n}$$

$$+\frac{k}{n^2}+\frac{k^2}{n^3}=1+\frac{k+1}{n}+\frac{(k+1)^2}{n^2}+\underbrace{\frac{k^2-n(k+1)}{n^3}}_{<0}<1+\frac{k+1}{n}+\frac{(k+1)^2}{n^2},$$

onde utilizamos que $k^2<n(k+1)$ porque $k\le n.$ Desse modo, a desigualdade fica demonstrada.

Escolhido *n*, um inteiro positivo qualquer, consideremos *r* o inteiro tal que $2^r\le n<2^{r+1}$, ou seja, *r* é o expoente da maior potência de 2 que não ultrapassa *n*. Sejam $p_1=2,p_2=3,p_3=5,\dots,p_s$ os primos positivos menores ou iguais a *n*. Se *m* for um inteiro tal que $1\le m\le n,$ então o Teorema Fundamental da Aritmética nos garante que *m* pode ser escrito de modo único como um produto de potências dos primos p_k com expoentes inteiros não negativos $t_1,t_2,\dots,t_s$:

$$m=p_1^{t_1}p_2^{t_2}p_3^{t_3}\dots p_s^{t_s}$$

Note que nenhum dos expoentes t_k pode ser maior do que r, pois, se assim fosse, teríamos $m\ge p_k^{t_k}\ge 2^{t_k}\ge 2^{r+1}>n,$ o que seria um absurdo. Assim, para todo *k*, temos $0\le t_k\le r$.

Temos, então, a seguinte desigualdade:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}<\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^r}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{3^r}\right)\times$$

$$\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\dots+\frac{1}{5^r}\right)\times\dots\times\left(1+\frac{1}{p_s}+\frac{1}{p_s^2}+\dots+\frac{1}{p_s^r}\right)\qquad(2)$$

Sua demonstração consiste na observação de que cada parcela $1/m$ que aparece do lado esquerdo da desigualdade pode ser escrita de modo único na forma

$$\frac{1}{m}=\frac{1}{p_1^{t_1}}\times\frac{1}{p_2^{t_2}}\times\dots\times\frac{1}{p_s^{t_s}}$$

e que cada fração da forma $\frac{1}{p_k^{t_k}}$ ocorre uma única vez como uma das parcelas do fator $\left(1+\frac{1}{p_k}+\frac{1}{p_k^2}+\dots+\frac{1}{p_k^r}\right)$ que aparece no segundo membro da desigualdade.

Supondo $q \geq 2,$ temos $2q - q \geq 2,$ ou seja, $2(q-1) \geq q$ que equivale a $\frac{1}{q-1} \leq \frac{2}{q}$ e calculando a seguinte soma de uma progressão geométrica de razão $1/q$, obtemos:

$$1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\ldots+\frac{1}{q^r}=\frac{1-\frac{1}{q^{r+1}}}{1-\frac{1}{q}}<\frac{1}{1-\frac{1}{q}}=\frac{q}{q-1}=\frac{(q-1)+1}{q-1}=1+\frac{1}{q-1}$$

Usando agora a desigualdade (1) obtida no início desta seção, obtemos $\left(1+\frac{1}{q-1}\right)^{q-1}<3$ que é equivalente a $1+\frac{1}{q-1}<3^{\frac{1}{q-1}}.$

Aplicando-se logaritmos, obtemos:

$$\log\left(1+\frac{1}{q-1}\right)<\log\left(3^{\frac{1}{q-1}}\right),$$

ou seja,

$$\log\left(1+\frac{1}{q-1}\right)<\frac{\log 3}{q-1}\leq\frac{2\log 3}{q}$$

de onde finalmente obtemos

$$\log\left(1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\ldots+\frac{1}{q^r}\right)<\log\left(1+\frac{1}{q-1}\right)<\frac{2\log 3}{q} \tag{3}$$

Aplicando-se logaritmos aos dois membros da desigualdade (2), e usando-se propriedade $\log(ab)=\log a+\log b,$ obtemos:

$$\log\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}\right)<\log\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^r}\right)+$$
$$\log\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^r}\right)+\ldots+\log\left(1+\frac{1}{p_s}+\frac{1}{p_s^2}+\ldots+\frac{1}{p_s^r}\right) \tag{4}$$

Usando-se várias vezes o resultado (3) na desigualdade (4), obtemos:

$$\log\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}\right)<\frac{2\log 3}{2}+\frac{2\log 3}{3}+\frac{2\log 3}{5}+\ldots+\frac{2\log 3}{p_s}$$
$$=2\log 3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{p_s}\right).$$

Se existisse uma constante L tal que $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{p_s}<L$ para todo inteiro positivo s, então teríamos $\log\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}\right)<2\log 3\times L=\log\left(3^{2L}\right)$ (5)

o que implicaria $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}<3^{2L}$, para todo n natural, (6)

o que seria um absurdo, pois a série harmônica não é limitada e, para algum n, a soma $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)$ ultrapassaria a constante 3^{2L}.

4. Algumas somas parciais

Sabe-se que quando maior o valor de n, mais próximo de $\ln(\ln(n))+B_1$ será a soma de todos os recíprocos de primo inferiores a n. A constante B_1 é conhecida como *constante de Mertens* e tem valor igual a 0,2614972128....

Com a ajuda de um computador, se somarmos os recíprocos dos números primos inferiores a 1000, obtemos 2,1990 como resultado. Observe que esse valor é próximo de $\ln(\ln(1000))+B_1\approx 2{,}1941$.

Somando-se todos os recíprocos de númreos primos inferiores a 10^7 (dez milhões), obtemos uma soma total igual a 3,041449. Calculando-se $\ln\left(\ln\left(10^7\right)\right)+B_1$, obtemos 3,041440 que é muito próximo da soma obtida.

A aproximação $\ln(\ln(n))+B_1\approx S$ para a soma dos recíprocos de primos inferiores a n pode ser escrita na forma

$$n\approx e^{e^{S-B_1}}.$$

Por exemplo, para chegar a 5,0, a soma necessitaria de $n=e^{e^{5-B_1}}=e^{e^{4,7385}}\approx 4{,}2\times 10^{49}$ parcelas, o que é um número realmente assustador: nem o computador mais rápido de hoje em dia, trabalhando incessantemente por milênios a fio, conseguiria somar tal quantidade de termos.

Referências Bibliográficas

[1] G. Ávila, “As séries infinitas”, RPM 30, 1996.
[2] G. Garbi, “A surprendente série harmônica”, RPM 42, 2000.
[3] S.J. Kifowit, T. A. Stamps, “The harmonic series diverges again and again”, The AMATYC Review, Vol. 27, No. 2, 2006.
[4] D. O. Shkiyarsky, N. N. Chentsov, I. M. Yaglom, “Selected problemas and theorems in elementary Mathematics – Arithmetic and Algebra”, Mir Publishers, Moscow, 1979.

COMO É QUE FAZ?

PROBLEMA PROPOSTO POR WILSON CARLOS DA SILVA RAMOS (BELÉM – PA)

1) Resolva o sistema $\begin{cases} 4xy+4\left(x^2+y^2\right)+\dfrac{3}{(x+y)^2}=\dfrac{85}{3} \\ 2x+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{13}{3} \end{cases}$

Solução: Da segunda equação, obtemos $y=\dfrac{1}{\frac{13}{3}-2x}-x.$ Substituindo esse valor de y na primeira equação, obtemos $\dfrac{4x}{\frac{13}{3}-2x}+4y^2+3\left(\dfrac{13}{3}-2x\right)^2=\dfrac{85}{3}.$ Fazendo $u=\dfrac{13}{3}-2x,$ temos $x=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{13}{3}-u\right),$ e $y=\dfrac{1}{u}-x=\dfrac{1}{u}+\dfrac{u}{2}-\dfrac{13}{6},$

donde $\dfrac{26}{3u}-2+\left(\dfrac{2}{u}+u-\dfrac{13}{3}\right)^2+3u^2=\dfrac{85}{3},$ ou seja, $4u^2-\dfrac{26}{3}u-\dfrac{68}{9}-\dfrac{26}{3u}+\dfrac{4}{u^2}=0.$

Fazendo $w=u+\dfrac{1}{u},$ temos $u^2+\dfrac{1}{u^2}=w^2-2,$ donde $4w^2-\dfrac{26}{3}w-\dfrac{140}{9}=0,$ e logo $w=\dfrac{10}{3}$ ou $w=-\dfrac{7}{6}.$ Assim, $u+\dfrac{1}{u}=\dfrac{10}{3}$ ou $u+\dfrac{1}{u}=\dfrac{-7}{6}.$ A primeira dessas equações tem soluções $u=3$ e $u=\dfrac{1}{3},$ que nos dão as duas soluções reais $\left(x=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{13}{3}-u\right)=\dfrac{2}{3}, y=\dfrac{1}{u}-x=-\dfrac{1}{3}\right)$ e $\left(x=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{13}{3}-u\right)=2, y=\dfrac{1}{u}-x=1\right).$ A segunda não tem soluções reais, mas tem as soluções complexas conjugadas $u=-\dfrac{7}{12}\pm\dfrac{i\sqrt{95}}{12},$ que nos dão as soluções complexas correspondentes

$$(x,y)=\left(\frac{59+i\sqrt{95}}{24},\frac{-73-i\sqrt{95}}{24}\right) \text{ e } (x,y)=\left(\frac{59-i\sqrt{95}}{24},\frac{-73+i\sqrt{95}}{24}\right).$$

PROBLEMA PROPOSTO POR MARCÍLIO MIRANDA DE CARVALHO (TERESINA – PI)
(teste de seleção da Romênia para IMO de 1978)

2) Para cada n natural, resolva a equação:
$\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} 2x \ldots \operatorname{sen} nx + \cos x \cdot \cos 2x \ldots \cos nx = 1$

SOLUÇÃO DE RENAN HENRIQUE FINDER (JOINVILLE – SC)

Se $n \geq 2$, usando a desigualdade triangular e o fato de que $\max\{|\operatorname{sen} a|, |\cos a|\} \leq 1$, temos

$$1 = |\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \ldots \operatorname{sen} nx + \cos x \cos 2x \ldots \cos nx| \leq |\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \ldots \operatorname{sen} nx| + |\cos x \cos 2x \ldots \cos nx|$$
$$\leq |\operatorname{sen} x| \cdot |\operatorname{sen} 2x| + |\cos x| \cdot |\cos 2x|$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, $1 \leq \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}\sqrt{\operatorname{sen}^2 2x + \cos^2 2x} = 1.$
Para que ocorra a igualdade, devemos ter $\operatorname{sen} x \cos 2x = \cos x \operatorname{sen} 2x$, logo
$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(2x - x) = 0,$ e portanto $x = mp, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow senx = 0.$
Então $\cos x \cos 2x \ldots \cos nx = 1.$ Se m é par, isso sempre ocorre. Se m é ímpar, $\cos x = -1, \cos 2x = 1, \cos 3x = -1, \ldots,$ logo $\cos x \ldots \cos nx = (-1)^{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}$. Portanto,

- Se $n \geq 2$ e $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ é par (ou seja, se n é da forma 4j – 1 ou 4j), as soluções são $x = mp, m \in \mathbb{Z}.$
- Se $n \geq 2$ e $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ é ímpar (ou seja, se n é da forma 4j + 1 ou 4j + 2), as soluções são $x = 2mp, m \in \mathbb{Z}.$

Se n = 1 o problema equivale a $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x \Leftrightarrow \operatorname{sen}\frac{p}{4} = \operatorname{sen}\left(x + \frac{p}{4}\right)$
$\Leftrightarrow x = 2mp$ ou $x = 2mp + \frac{p}{2}, m \in \mathbb{Z}.$

SOLUÇÕES DE PROBLEMAS PROPOSTOS

Publicamos aqui algumas das respostas enviadas por nossos leitores.

123. Determine todas as funções $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ tais que $2f(m^2+n^2)^3 = f(m)^2 f(n)+f(m) f(n)^2,$ para quaisquer $m,n\in\mathbb{N}^*$ distintos.
Obs: $\mathbb{N}^*=\{1,2,3,...\}$ é o conjunto dos inteiros positivos.

SOLUÇÃO DE ÍTALO DOWELL LIRA MELO (TERESINA – PI)

Primeiro note que se f é uma função constante então f é solução. Agora suponhamos que exista uma função não constante que seja solução. Assim existem naturais a e b com $f(a)< f(b)$.

Daí temos que $2f(a)^3 = f(a)^3 + f(a)^3 < f(a)^2 f(b)+ f(a) f(b)^2 < 2f(b)^3$.

Como $2f\left(a^2+b^2\right)^3 = f(a)^2 f(b)+f(a) f(b)^2$, segue que $2f(a)^3<2f\left(a^2+b^2\right)^3<2f(b)^3$.

Se dividirmos por 2 encontramos que $f(a)^3 < f\left(a^2+b^2\right)^3 < f(b)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(a)< f(a^2+b^2)< f(b)$.

Isto nos diz que entre quaisquer dois valores distintos de *f* podemos encontrar um outro valor de *f* mas isto não pode ocorer sempre uma vez que *f* assume valores em $\mathbb{N}^*$. Esta contradição mostra que tal função não existe. Assim as funções constantes são as únicas soluções.

124. Considere a seqüência $(a_n)_{n\ge1}$ definida por $a_1=a_2=a_3=a_4=1$ e $a_n=\dfrac{a_{n-1}a_{n-3}+a_{n-2}^2}{a_{n-4}}, \forall n\ge 5.$

Prove que a_n é um inteiro positivo, para todo inteiro positivo *n*.

SOLUÇÃO DE ZOROASTRO AZAMBUJA NETO (RIO DE JANEIRO – RJ)

Vamos provar por indução que, para todo $n\ge 5$, valem as seguintes afirmações:

- $a_{k-4}\,\big|\,a_{k-1}a_{k-3}+a_{k-2}^2, \forall k\in\mathbb{N}, 5\le k\le n$ (e logo $a_k\in\mathbb{N}, \forall k\le n$).
- $a_{k-3}\,\big|\,a_{k-2}^3+a_{k-1}^2a_{k-4}, \forall k\in\mathbb{N}, 5\le k\le n$.
- $a_{k-2}\,\big|\,a_{k-1}a_{k-4}^2+a_{k-3}^3, \forall k\in\mathbb{N}, 5\le k\le n$.
- $mdc\left(a_{k-1},a_k\right)=1, \forall k\in\mathbb{N}, 1\le k-1<k\le n.$
- $mdc\left(a_{k-2},a_k\right)=1, \forall k\in\mathbb{N}, 1\le k-2<k\le n.$

- $mdc\left(a_{k-3}, a_k\right) = 1, \forall k \in \mathbb{N}, 1 \le k-3 < k \le n.$

Note que, como $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1,$ temos $a_5 = 2$ e $a_6 = 3$, e portanto os itens acima se verificam para todo $n \le 6$.

Vamos agora verificá-los para $k = n+1$: queremos mostrar que

$$a_{n-3} \left| a_n a_{n-2} + a_{n-1}^2 = \left(\frac{a_{n-1}a_{n-3} + a_{n-2}^2}{a_{n-4}} \right) a_{n-2} + a_{n-1}^2 = \frac{\left(a_{n-1}a_{n-3} + a_{n-2}^2\right)a_{n-2} + a_{n-1}^2 a_{n-4}}{a_{n-4}} \right. .$$

Como o lado direito é inteiro e $mdc\left(a_{n-3}, a_{n-4}\right) = 1,$ isso equivale a mostrar que $a_{n-3} \left| \left(a_{n-1}a_{n-3} + a_{n-2}^2\right)a_{n-2} + a_{n-1}^2 a_{n-4} \right.$, o que segue de $a_{n-3} \left| a_{n-2}^3 + a_{n-1}^2 a_{n-4} \right.$.

Também queremos mostrar que

$$a_{n-2} \left| a_{n-1}^3 + a_n^2 a_{n-3} = a_{n-1}^3 + \left(\frac{a_{n-1}a_{n-3} + a_{n-2}^2}{a_{n-4}} \right)^2 a_{n-3} = \frac{a_{n-1}^3 a_{n-4}^2 + \left(a_{n-1}a_{n-3} + a_{n-2}^2\right)^2 a_{n-3}}{a_{n-4}^2} \right. .$$

Como o lado direito é inteiro e $mdc\left(a_{n-2}, a_{n-4}\right) = 1,$ isso equivale a mostrar que

$a_{n-2} \left| a_{n-1}^3 a_{n-4}^2 + \left(a_{n-1}a_{n-3} + a_{n-2}^2\right)^2 a_{n-3} \right.$, o que equivale a

$a_{n-2} \left| a_{n-1}^3 a_{n-4}^2 + a_{n-1}^2 a_{n-3}^3 = a_{n-1}^2 \left(a_{n-1}a_{n-4}^2 + a_{n-3}^3\right) \right.$, e isso segue de $a_{n-2} \left| a_{n-1}a_{n-4}^2 + a_{n-3}^3 \right.$.

E também queremos mostrar que

$$a_{n-1} \left| a_n a_{n-3}^2 + a_{n-2}^3 = \left(\frac{a_{n-1}a_{n-3} + a_{n-2}^2}{a_{n-4}} \right) a_{n-3}^2 + a_{n-2}^3 = \frac{\left(a_{n-1}a_{n-3} + a_{n-2}^2\right)a_{n-3}^2 + a_{n-2}^3 a_{n-4}}{a_{n-4}} \right. .$$

Como o lado direito é inteiro e $mdc\left(a_{n-1}, a_{n-4}\right) = 1,$ isso equivale a mostrar que

$a_{n-1} \left| \left(a_{n-1}a_{n-3} + a_{n-2}^2\right)a_{n-3}^2 + a_{n-2}^3 a_{n-4} \right.$, o que equivale a

$a_{n-1} \left| a_{n-2}^2 a_{n-3}^2 + a_{n-2}^3 a_{n-4} = a_{n-2}^2 \left(a_{n-3}^2 + a_{n-2}a_{n-4}\right) \right.$, que segue de $a_{n-1} \left| a_{n-3}^2 + a_{n-2}a_{n-4} \right.$, que por sua vez segue da igualdade $a_{n-1}a_{n-5} = a_{n-3}^2 + a_{n-2}a_{n-4}$, que vem da definição de a_{n-1}.

Finalmente, de $a_{n+1}a_{n-3} = a_n a_{n-2} + a_{n-1}^2,$ segue que $mdc\left(a_{n+1}, a_n\right) \left| mdc\left(a_n, a_{n-1}^2\right) = 1, \right.$ $mdc\left(a_{n+1}, a_{n-1}\right) \left| mdc\left(a_{n-1}, a_n a_{n-2}\right) = 1 \right.$ e $mdc\left(a_{n+1}, a_{n-2}\right) \left| mdc\left(a_{n-2}, a_{n-1}^2\right) = 1. \right.$

125. Considere dois naturais $m \ge 2$ e $n \ge 2$, e as seqüências $(a_0, a_1, a_2, ..., a_{mn}), a_i \in \{0,1\}$.

As seqüências de tipo *m* satisfazem as condições:

- $a_k a_{k+m} = 0$, para todo k;
- Se $a_k a_{k+1} = 1$ então m divide k

As seqüências de tipo n são definidas analogamente. Prove que existem tantas seqüências do tipo m quanto do tipo n.

SOLUÇÃO DE JOSÉ DE ALMEIDA PANTERA (RIO DE JANEIRO – RJ)

Considere a matriz $m\times n, B=\left(b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ dada por $b_{ij}=a_{m(i-1)+j}, 1\le i\le m, 1\le j\le n.$

Temos que $\left(a_0,...,a_{mn}\right)$ é uma sequência de tipo m se e somente se B é uma matriz $m\times n$ cujas entradas pertencem a {0, 1} sem dois termos vizinhos iguais a 1 numa mesma linha ou numa mesma coluna, e tal que $b_{1m}=1\Rightarrow a_0=0.$

Considere agora a função f que leva uma matriz B $m\times n$ na matriz $f\left(B\right)$ $n\times m$ dada por $\left(f\left(B\right)\right)_{i,j}=B_{(m+1-j),(n+1-i)}$. Temos que f é uma bijeção entre as matrizes $m\times n$ cujas entradas pertencem a {0, 1} sem dois termos vizinhos iguais a 1 numa mesma linha ou numa mesma coluna e as matrizes $n\times m$ cujas entradas pertencem a {0, 1} sem dois termos vizinhos iguais a 1 numa mesma linha ou numa mesma coluna, tal que $\left(f\left(B\right)\right)_{1,m}=B_{1,n}$. Isso mostra que o número de seqüências do tipo m é igual ao número de seqüências do tipo n.

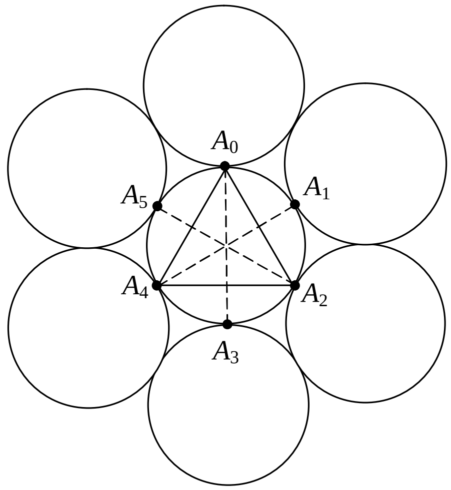
126. As circunferências $\Gamma_i, 0\le i\le 5,$ são tangentes a uma circunferência Γ nos pontos A_i. Além disso, Γ_i é tangente a Γ_{i+1} para $0\le i\le 5$ e Γ_5 é tangente a Γ_0. Prove que A_0A_3, A_1A_4, A_2A_5 são concorrentes.

SOLUÇÃO DE MATHEUS SECCO TORRES DA SILVA (RIO DE JANEIRO – RJ)

Sejam O_i os centros de Γ_i e r_i os raios de Γ_i. Além disso, seja r o raio de Γ, que tem centro O. Vamos supor inicialmente que as circunferências Γ_i são exteriores a Γ. Usando Ceva trigonométrico no $\Delta A_2A_4A_0$, devemos provar que

$$\frac{sen\left(<A_1A_4A_2\right)}{sen\left(<A_1A_4A_0\right)}\cdot\frac{sen\left(<A_3A_0A_4\right)}{sen\left(<A_3A_0A_2\right)}\cdot\frac{sen\left(<A_5A_2A_0\right)}{sen\left(<A_5A_2A_4\right)}=1\Leftrightarrow$$

$$\frac{sen\left(<\dfrac{A_1OA_2}{2}\right)}{sen\left(<\dfrac{A_2OA_3}{2}\right)}\cdot\frac{sen\left(<\dfrac{A_3OA_4}{2}\right)}{sen\left(<\dfrac{A_4OA_5}{2}\right)}\cdot\frac{sen\left(<\dfrac{A_5OA_0}{2}\right)}{sen\left(<\dfrac{A_0OA_1}{2}\right)}=1$$



Denotamos $< A_i O A_{i+1} = a_i, 0 \le i \le 5,$ índices módulo 6.

Mas no $\Delta O O_i O_{i+1},$ temos:

$$(r_i + r_{i+1})^2 = (r + r_i)^2 + (r + r_{i+1})^2 - 2(r + r_i)(r + r_{i+1}) \cdot \cos a_i \Rightarrow$$

$$\cos a_i = 1 - \frac{2 r_i r_{i+1}}{(r + r_i)(r + r_{i+1})} \Rightarrow$$

$$1 - 2 sen^2 \frac{a_i}{2} = 1 - \frac{2 r_i r_{i+1}}{(r + r_i)(r + r_{i+1})} \Rightarrow$$

$$sen^2 \frac{a_i}{2} = \frac{r_i r_{i+1}}{(r + r_i)(r + r_{i+1})}, \text{ donde}$$

$$\frac{sen^2\left(\frac{a_1}{2}\right)}{sen^2\left(\frac{a_2}{2}\right)} \cdot \frac{sen^2\left(\frac{a_3}{2}\right)}{sen^2\left(\frac{a_4}{2}\right)} \cdot \frac{sen^2\left(\frac{a_5}{2}\right)}{sen^2\left(\frac{a_6}{2}\right)} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{sen\left(\frac{a_1}{2}\right)}{sen\left(\frac{a_2}{2}\right)} \cdot \frac{sen\left(\frac{a_3}{2}\right)}{sen\left(\frac{a_4}{2}\right)} \cdot \frac{sen\left(\frac{a_5}{2}\right)}{sen\left(\frac{a_6}{2}\right)} = 1, \text{pois } sen\left(\frac{a_i}{2}\right) > 0, \forall i \le 5,$$

donde obtemos o desejado.

Isso conclui a prova!.

Obs.: Supusemos que as circunferências Γ_i estavam no exterior de Γ_1, mas se fossem interiores, obteríamos $sen^2 \frac{a_i}{2} = \frac{r_i r_{i+1}}{(r-r_i)(r-r_{i+1})}$, o que também nos daria o desejado, com um argumento análogo.

129. Um coelho está numa rua infinita dividida em quadrados numerados pelos inteiros, e começa no quadrado 0. Se num dado momento ele está no quadrado *k*, ele escolhe, com probabilidade $\frac{1}{2}$, pular para o quadrado *k* + 2 ou, também com probabilidade $\frac{1}{2}$, pular para o quadrado *k* – 1. Ele continua esse processo indefinidamante. Dado $m \in \mathbb{Z}$, determine a probabilidade de, em algum momento, o coelho pisar no quadrado *m*.

SOLUÇÃO DE ASDRUBAL PAFÚNCIO SANTOS (BOTUCATU – SP)

Denotemos por a_m a probabilidade de, em algum momento, o coelho pisar no quadrado *m*.
Seja $n \neq 0$ um inteiro. Após o primeiro passo do coelho, ele pode estar no quadrado –1, com probabilidade $\frac{1}{2}$, ou no quadrado 2, com probabilidade $\frac{1}{2}$, ficando a distâncias respectivamente *n* + 1 e *n* – 2 do quadrado *n*. Assim, para todo $n \neq 0, a_n = \frac{1}{2}a_{n-2} + \frac{1}{2}a_{n+1} (*)$.

Como $\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\lfloor 2n/5 \rfloor}\binom{n}{k}$ tende a 0 exponencialmente rápido, com probabilidade total temos que, para um certo $n_0 \in \mathbb{N}$, e para todo $n \geq n_0$, pelo menos 40% dos *n* primeiros passos do coelho são para frente, o que faz com que, após *n* passos, ele esteja num quadrado de número maior ou igual a $2 \cdot \frac{2n}{5} - \frac{3n}{5} = \frac{n}{5}$, para todo $n \geq n_0$. Em particular, a probabilidade de o coelho pisar no quadrado *m* tende a 0 quando *m* tende a $-\infty$.

De (*), temos $a_{m+3} = 2a_{m+2} - a_m, \forall m \geq 0$, donde existem constantes *A*, *B*, *C* com $a_m = A + B\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m + C\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m$, $\forall m \geq 0$, pois o polinômio característico da recorrência acima é $x^3-2x^2+1=(x-1)\left(x-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)\left(x-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)$.

Como (a_m) é limitada, devemos ter $B = 0$. Como $a_0=1$, devemos ter $A + C = 1$. De (*), também temos $a_{-m-3}=2a_{-m}-a_{-m+1}, \forall m\ge 1$, ou seja, fazendo $b_k=a_{-k}$, temos $b_{k+3}=2b_{k+1}-b_k, \forall k\ge 0$, donde, como

$x^3-2x+1=(x-1)\left(x-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)\left(x-\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)$, existem $\widetilde{A},\widetilde{B},\widetilde{C}$ com

$b_k=\widetilde{A}+\widetilde{B}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^k+\widetilde{C}\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$, $\forall k\ge 0$. Como b_k não só é limitado como tende a 0 quando k tende a $+\infty$, devemos ter $\widetilde{A}=\widetilde{C}=0$, e como $b_0=a_0=1$, devemos ter $\widetilde{B}=1$.

Assim, $a_m=1-C+C\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m, \forall m\ge 0$ e $a_m=b_{-m}=\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-m}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m, \forall m\le 0.$

Fazendo $n = 1$ em (*), obtemos $a_1=\frac{1}{2}a_{-1}+\frac{1}{2}a_2$, donde

$1-C+C\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(1-C+C\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right)$, e portanto

$C=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$.

Assim, temos $a_m=\begin{cases}\frac{3\sqrt{5}-5}{2}+\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m, \forall m\ge 0\\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m, \forall m\le 0\end{cases}$.

130. Suponha que $a,b,c\in\mathbb{R}$ e a equação $x^2-(a+b+c)x+(ab+ac+bc)=0$ não tem raízes reais. Prove que *a*, *b* e *c* têm todos o mesmo sinal e existe um triângulo de lados $\sqrt{|a|}$, $\sqrt{|b|}$ e $\sqrt{|c|}$.

SOLUÇÃO DE DANIEL EITI NISHIDA KAWAI (TAUBATÉ – SP)

Se a equação $x^2-(a+b+c)\cdot x+(ab+ac+bc)=0$ não tem raízes reais, temos

$\Delta<0 \Leftrightarrow (a+b+c)^2-4\cdot 1\cdot(ab+ac+bc)<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc-4ab-4ac-4bc<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc-4ab<0 \Leftrightarrow (a+b-c)^2-4ab<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a+b-c)^2<4ab \Leftrightarrow 0\le(a+b-c)^2<4ab \Rightarrow 4ab>0 \Rightarrow ab>0 \Rightarrow a$ e b têm o mesmo sinal. De maneira análoga, b e c têm o mesmo sinal. Assim, a, b e c têm todos o mesmo sinal, e logo $|ab|=|a||b|, |ac|=|a||c|$ e $|bc|=|b||c|$.

Assim, $a^2+b^2+c^2-2|ab|-2|ac|-2|bc|<0,$ donde

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2|ab|-2|ac|-2|bc|<4|ab| \Rightarrow$

$\Rightarrow |a|^2+|b|^2+|c|^2+2|a||b|-2|a||c|-2|b||c|<4|a||b| \Rightarrow$

$\Rightarrow (|a|+|b|-|c|)^2<\left(2\sqrt{|a|}\cdot\sqrt{|b|}\right)^2 \Rightarrow -2\sqrt{|a|}\cdot\sqrt{|b|}<|a|+|b|-|c| \Rightarrow$

$\Rightarrow |c|<|a|+2\sqrt{|a|}\cdot\sqrt{|b|}+|b| \Rightarrow \left(\sqrt{|c|}\right)^2<\left(\sqrt{|a|}\right)^2+2\sqrt{|a|}\cdot\sqrt{|b|}+\left(\sqrt{|b|}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\sqrt{|c|}\right)^2<\left(\sqrt{|a|}+\sqrt{|b|}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{|c|}<\sqrt{|a|}+\sqrt{|b|}.$

De maneira análoga,

$\sqrt{|b|}<\sqrt{|a|}+\sqrt{|c|}$ e $\sqrt{|a|}<\sqrt{|b|}+\sqrt{|c|}$. Assim, existe um triângulo de lados $\sqrt{|a|}, \sqrt{|b|}$ e $\sqrt{|c|}$.

Agradecemos o envio de soluções e a colaboração de:

Carlos Alberto da Silva Victor (Nilópolis – RJ)	**Prob. 123, 130**
Rodrigo dos Anjos Azevedo (Três Rios – RJ)	**Prob. 130**
Vinicius dos Nascimento S. Mano (Petrópolis – RJ)	**Prob. 130**
Marcelo Robeiro de Souza (Rio de Janeiro – RJ)	**Prob. 130**
Jheimyson Rego Barnabé (Imperatriz – MA)	**Prob. 130**
Flávio Antonio Alves (Amparo – SP)	**Prob. 130**
Ítalo Dowell Lira Melo (Teresina – PI)	**Prob. 130**
Curro Fernández López (Lugo, Espanha)	**Prob. 42**
Miguel Amengual Covas (Mallorca, Espanha)	**Prob. 110**
Bruno Salgueiro Fanego (Galicia, Espanha)	**Prob. 116, 117, 118**

Continuamos aguardando soluções para os problemas 131 e 132.

PROBLEMAS PROPOSTOS

✉ *Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e sugestões de novos problemas para próximos números.*

133) Considere um n–ágono regular inscrito em um círculo unitário, fixe um vértice i e denote por d_j a distância entre este vértice i e o vértice j. Prove que

$$\prod_{\substack{j\neq i\\ j=0}}^{n-1}\left(5-d_j^2\right)=F_n^2 \text{ onde } F_1=0, F_1=1 \text{ e } F_n=F_{n-1}, F_{n-2} \text{ se } n\geq 2.$$

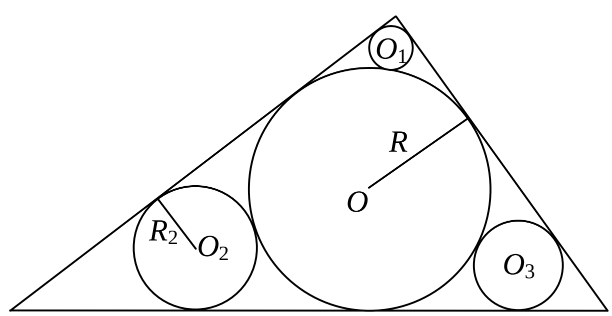
134) Considere a operação $\cdot$ entre dois vetores do $\mathbb{R}^3$ definida por: $(x,y,z)\cdot(u,v,w)=(xu+yw+zv, xw+zu+yv, xv+yu+zw)$

Prove que, para todo $k\geq 1$, se $(x,y,z)^k=(0,0,0)$ então $x=y=z=0$.

Obs.: Para qualquer $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, (x,y,z)^1=(x,y,z)$ e, para todo $k>1$, $(x,y,z)^k=(x,y,z)\cdot(x,y,z)^{k-1}$.

135) Considere um hemisfério cuja base é um círculo (C_1). Um círculo (C_2) do hemisfério é paralelo a (C_1), de forma que existem n círculos do hemisfério, congruentes, tangentes entre si, a (C_1) e a (C_2). Mostre que a razão $K(n)$ entre os raios de (C_2) e (C_1) é igual a: $K(n)=\dfrac{\cos^2 p/n}{1+sen^2 p/n}$.

136) Sejam R, r_1, r_2 e r_3 os raios dos círculos de centro O, O_1, O_2 e O_3, respectivamente, conforme a figura abaixo. Prove que: $R=\sqrt{r_1r_2}+\sqrt{r_1r_3}+\sqrt{r_2r_3}$.



137) Sendo A um conjunto de quinze pontos de $\mathbb{R}^2$ tal que a distância de cada ponto à origem é positiva e menor do que 1 e que quaisquer dois deles nunca sejam colineares com a origem. Mostre que existe um triângulo com dois vértices em A e um na origem cuja área é menor que $\frac{1}{4}$.

138) Calcule o máximo divisor comum entre todos os números da forma $x \cdot y \cdot z$, onde (x, y, z) percorre todas as soluções inteiras da equação $x^2 + y^2 = z^2$ com $x \cdot y \cdot z \neq 0$.

139) Determine todos os inteiros positivos x, y, z satisfazendo $x^3 - y^3 = z^2$, onde y é primo, z não é divisível por 3 e z não é divisível por y.

140) Mostre que $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ é divisível por 1897, para todo $n \in \mathbb{N}$.

141) Dado $a \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, seja $X \neq \varnothing$ um conjunto finito de inteiros positivos, tal que nenhum dos seus elementos possui o algarismo a em sua representação decimal. Prove que $\sum_{n \in X} \frac{1}{n} < 80$.

Problema 133 e 134 proposto por Evandro Makiyama de Melo (São Paulo – SP) (foram propostos originalmente na IX e na II Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária, respectivamente); 135 e 136 propostos por Ramilson Medeiros Pitombeira (Rio de Janeiro – RJ); 137 proposto por Ítalo Dowell Lira Melo (Teresina – PI); 138 proposto por Luiz Felipe Silva; 139 proposto por Adriano Carneiro (Caucaia – CE); 140 proposto por Wilson Carlos da Silva Ramos (Belém – PA).

AGENDA OLÍMPICA

XXXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

NÍVEIS 1, 2 e 3
Primeira Fase – Sábado, 12 de junho de 2010
Segunda Fase – Sábado, 18 de setembro de 2010
Terceira Fase – Sábado, 16 de outubro de 2010 (níveis 1, 2 e 3)
Domingo, 17 de outubro de 2010 (níveis 2 e 3 - segundo dia de prova).

NÍVEL UNIVERSITÁRIO
Primeira Fase – Sábado, 18 de setembro de 2010
Segunda Fase – Sábado, 16 e Domingo, 17 de outubro de 2010

ASIAN PACIFIC MATH OLYMPIAD (APMO)
06 de março de 2010

XVI OLIMPÍADA DE MAIO
08 de maio de 2010

XXI OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL
13 a 19 de junho de 2010
Águas de São Pedro, SP – Brasil

LI OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA
02 a 14 de julho de 2010
Astana, Cazaquistão

XVII OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
24 a 30 de julho de 2010
Blagoevgrad, Bulgária

XXIV OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA
17 a 27 de setembro de 2010
Paraguai

II COMPETIÇÃO IBEROAMERICANA INTERUNIVERSITÁRIA DE MATEMÁTICA
3 a 9 de outubro de 2010
Rio de Janeiro, Brasil

XIII OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA

COORDENADORES REGIONAIS

Alberto Hassen Raad	(UFJF)	Juiz de Fora – MG
Américo López Gálvez	(USP)	Ribeirão Preto – SP
Andreia Goldani	FACOS	Osório – RS
Antonio Carlos Nogueira	(UFU)	Uberlândia – MG
Benedito Tadeu Vasconcelos Freire	(UFRN)	Natal – RN
Carmen Vieira Mathias	(UNIFRA)	Santa María – RS
Claus Haetinger	(UNIVATES)	Lajeado – RS
Cláudio de Lima Vidal	(UNESP)	S.J. do Rio Preto – SP
Denice Fontana Nisxota Menegais	(UNIPAMPA)	Bagé – RS
Disney Douglas Lima de Oliveira	(UFAM)	Manaus – AM
Edson Roberto Abe	(Colégio Objetivo de Campinas)	Campinas – SP
Edney Aparecido Santulo Jr.	(UEM)	Maringá – PR
Élio Mega	(Grupo Educacional Etapa)	São Paulo – SP
Eudes Antonio da Costa	(Univ. Federal do Tocantins)	Arraias – TO
Fábio Brochero Martínez	(UFMG)	Belo Horizonte – MG
Florêncio Ferreira Guimarães Filho	(UFES)	Vitória – ES
Francinildo Nobre Ferreira	(UFSJ)	São João del Rei – MG
Genildo Alves Marinho	(Centro Educacional Leonardo Da Vinci)	Taguatingua – DF
Graziela de Souza Sombrio	(UNOCHAPECÓ)	Chapecó – SC
Gilson Tumelero	(UTFPR)	Pato Branco – PR
Ivanilde Fernandes Saad	(UC. Dom Bosco)	Campo Grande – MS
João Benício de Melo Neto	(UFPI)	Teresina – PI
João Francisco Melo Libonati	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Jose de Arimatéia Fernandes	(UFPB)	Campina Grande – PB
José Luiz Rosas Pinho	(UFSC)	Florianópolis – SC
José Vieira Alves	(UFPB)	Campina Grande – PB
José William Costa	(Instituto Pueri Domus)	Santo André – SP
Krerley Oliveira	(UFAL)	Maceió – AL
Licio Hernandes Bezerra	(UFSC)	Florianópolis – SC
Luciano G. Monteiro de Castro	(Sistema Elite de Ensino)	Rio de Janeiro – RJ
Luzinalva Miranda de Amorim	(UFBA)	Salvador – BA
Marcelo Rufino de Oliveira	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Marcelo Mendes	(Colégio Farias Brito, Pré-vestibular)	Fortaleza – CE
Newman Simões	(Cursinho CLQ Objetivo)	Piracicaba – SP
Nivaldo Costa Muniz	(UFMA)	São Luis – MA
Nivaldo de Góes Grulha Jr.	(USP – São Carlos)	São Carlos – SP
Osnel Broche Cristo	(UFLA)	Lavras – MG
Uberlândio Batista Severo	(UFPB))	João Pessoa – PB
Raul Cintra de Negreiros Ribeiro	(Colégio Anglo)	Atibaia – SP
Ronaldo Alves Garcia	(UFGO)	Goiânia – GO
Rogério da Silva Ignácio	(Col. Aplic. da UFPE)	Recife – PE
Reginaldo de Lima Pereira	(Escola Técnica Federal de Roraima)	Boa Vista – RR
Reinaldo Gen Ichiro Arakaki	(UNIFESP)	SJ dos Campos – SP
Ricardo Amorim	(Centro Educacional Logos)	Nova Iguaçu – RJ
Sérgio Cláudio Ramos	(IM-UFRGS)	Porto Alegre – RS
Seme Gebara Neto	(UFMG)	Belo Horizonte – MG
Tadeu Ferreira Gomes	(UEBA)	Juazeiro – BA
Tomás Menéndez Rodrigues	(U. Federal de Rondônia)	Porto Velho – RO
Valdenberg Araújo da Silva	(U. Federal de Sergipe)	São Cristovão – SE
Vânia Cristina Silva Rodrigues	(U. Metodista de SP)	S.B. do Campo – SP
Wagner Pereira Lopes	(CEFET – GO)	Jataí – GO