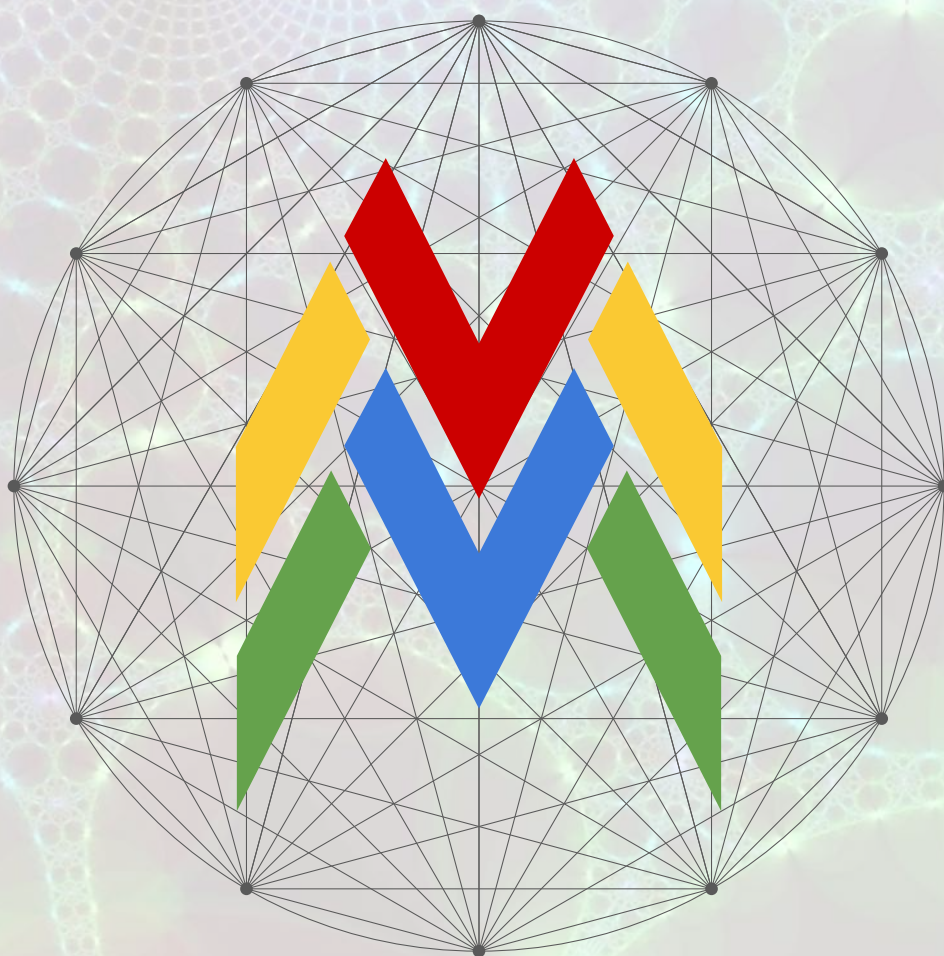


# **Jogos de Tabuleiro**

## **Uma Proposta para Sala de Aula**



**Museu da Matemática UFMG**

**Carmen Rosa Giraldo Vergara**  
**Fabio Enrique Brochero Martínez**

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>Museu da Matemática UFMG</b>	<b>2</b>
1.1 Museu da Matemática UFMG: criando laços com o Ensino Básico . . . . .	2
1.2 Matemática Recreativa: Base de Atuação do Museu . . . . .	3
1.3 Uma Proposta para Sala de Aula . . . . .	4
<b>Jogos de Tabuleiro</b>	<b>6</b>
2.1 Abalone . . . . .	8
2.1.1 Tabuleiro e peças . . . . .	8
2.1.2 Regras . . . . .	8
2.1.3 Estratégia . . . . .	9
2.1.4 Em Sala de Aula . . . . .	11
2.2 Alquerque . . . . .	12
2.2.1 Tabuleiro e Peças . . . . .	12
2.2.2 Regras do Alquerque de Doze . . . . .	12
2.2.3 Estratégias . . . . .	13
2.2.4 Em Sala de Aula . . . . .	13
2.3 Amazonas . . . . .	16
2.3.1 Tabuleiro e Peças . . . . .	16
2.3.2 Regras . . . . .	16
2.3.3 Estratégias . . . . .	17
2.3.4 Em Sala de Aula . . . . .	19
2.4 Hnefatafl . . . . .	19
2.4.1 Tabuleiro e Peças . . . . .	19
2.4.2 Regras: . . . . .	19
2.4.3 Estratégias . . . . .	21
2.4.4 Em Sala de Aula . . . . .	22
2.5 Jogo da Onça ou Adugo . . . . .	23
2.5.1 Tabuleiro e Peças . . . . .	23
2.5.2 Regras . . . . .	23
2.5.3 Estratégia . . . . .	24
2.5.4 Em Sala de Aula . . . . .	25
2.6 Reversi ou Othello . . . . .	26
2.6.1 Tabuleiro e Peças . . . . .	26
2.6.2 Regras . . . . .	26
2.6.3 Estratégias . . . . .	28
2.6.4 Em Sala de Aula . . . . .	29
2.7 Surakarta . . . . .	32

---

2.7.1	Tabuleiro e Peças . . . . .	32
2.7.2	Regras . . . . .	33
2.7.3	Estratégias . . . . .	34
2.7.4	Em Sala de Aula . . . . .	35
2.8	Trilha ou Moinho . . . . .	37
2.8.1	Tabuleiro e Peças . . . . .	37
2.8.2	Regras . . . . .	37
2.8.3	Estratégia . . . . .	39
2.8.4	Em Sala de Aula . . . . .	39
2.9	Mais Jogos de Tabuleiro do Acervo . . . . .	40
2.9.1	O Jogo Real de Ur . . . . .	41
2.9.2	Oware . . . . .	42
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>43</b>
	<b>Anexos</b>	

# Introdução

A aprendizagem das Ciências, e da Matemática em particular, não é exclusividade do ensino formal. As “atividades informais” desenvolvidas em e por museus universitários, têm possibilitado aproximar a ciência de diversos públicos e contribuído para estimular a sua aprendizagem, assim como promover o interesse pela área científica.

Nesse sentido, o Museu da Matemática UFMG atua como centro de apoio aos professores, aos quais é oferecida uma gama de atividades e treinamentos relacionados à Matemática Recreativa. Nosso objetivo é estreitar a relação entre alunos e professores de matemática da Escola Básica com professores e alunos do curso de Matemática da UFMG para consolidar, desta maneira, o museu como um espaço de diálogo, divulgação e construção de conhecimento. Com isso, espera-se que os docentes, no exercício do magistério, reverberem as propostas que desconstruam a representação social de que o ensino/aprendizagem da Matemática está limitado a vias mecânicas, abstratas e formais.

Um recurso lúdico-didático que contribui para o processo de ensino-aprendizagem da matemática são os jogos de estratégia. Nesta cartilha são apresentados alguns jogos de tabuleiro de estratégia, isto é, jogos sem informação escondida nem a presença do fator sorte. Além disso, exploramos outras atividades relacionadas a esses jogos e disponibilizamos os seus moldes com orientações sobre como confeccioná-los e utilizá-los. Esses materiais podem ser usados pelos professores em suas aulas, para o desenvolvimento de diversos conceitos matemáticos nos diferentes níveis escolares.

Agradecemos a Bryant Rosado pelo texto do jogo Surakarta produzido na Disciplina *Matemática Recreativa: uma proposta para Sala de Aula* ofertada pelo Museu da Matemática UFMG em 2020/1; a Daniela Brochero e David Brochero pela cuidadosa leitura e sugestões de redação. Agradecemos também à Pró-Reitoria de Extensão da UFMG pelo apoio financeiro para a reprodução desta cartilha mediante o *Edital PROEX nº 05/2021* de fomento a produtos extensionistas destinados à Educação Básica e Profissional pública.

Por fim, incentivamos nossos leitores a enviar sugestões, relatos sobre a aplicação dessas atividades em sala de aula – o que foi positivo e o que não foi - ou qualquer outro comentário que contribua para o enriquecimento deste material para as próximas edições.

Nossos contatos são:

[museudamatematicaufmg@gmail.com](mailto:museudamatematicaufmg@gmail.com)

<http://www.mat.ufmg.br/museu>

<http://www.fb.com/museudamatematicaufmg>

<http://www.instagram.com/mumatufmg>

<http://www.youtube.com/museudamatematicaufmg>

# Museu da Matemática UFMG

*O jogo e a beleza estão na origem de uma grande parte da Matemática. Se os matemáticos de todos os tempos passaram tão bem jogando e contemplando seu jogo e a sua ciência, porque não tratar de aprender e comunicar através do jogo e da beleza?*

– Miguel de Guzmán, *Contos com Contas*. Gradiva

## 1.1 Museu da Matemática UFMG: criando laços com o Ensino Básico

O Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG tem atuado em diversos projetos de extensão com o objetivo de contribuir para a divulgação e popularização da Matemática. Nesse sentido, foi criado, em 2018, o Museu da Matemática UFMG que, em marco de 2020, passou a fazer parte da Rede de Museus e Espaços de Ciência e Cultura da UFMG.



Figura 1.1: Vista parcial do Museu da Matemática UFMG

Localizado na sala 4010 do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, o Museu tem como missão fomentar a produção e a divulgação do conhecimento matemático. Especificamente, busca difundir e explorar elementos da Matemática Recreativa enquanto prática pedagógica e, nesse contexto, despertar o interesse dos seus visitantes, estimulando uma percepção positiva da Matemática. Além disso, o Museu busca promover um espaço propício para estreitar a relação dos professores e alunos do curso de Matemática da UFMG com alunos e professores de Matemática da Escola Básica, bem como com o público em geral.

Para isso, desde sua criação, o Museu oferece uma gama de experiências lúdicas e interativas por meio de atividades e oficinas para o público em geral e, especialmente, para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano Ensino Médio, em sua grande maioria da rede pública de ensino.

Já para os professores, bem como alunos do ensino superior, o Museu procura se colocar como um centro de apoio por meio da realização de minicursos, oficinas e atividades de treinamento relacionadas ao seu acervo e às propostas pedagógicas.

Porém, devido ao isolamento social imposto pela pandemia da Covid-19 nos dois últimos anos, a atuação do Museu, no que se refere à produção de eventos, conteúdos, pesquisas e oferta de atividades, tem se dado por meio de suas redes sociais. Ademais, há um intenso trabalho de produção de materiais concretos para o seu acervo, como também de cartilhas contendo instruções sobre jogos e/ou atividades pedagógicas, com seus respectivos moldes e orientações para aplicação em sala de aula.

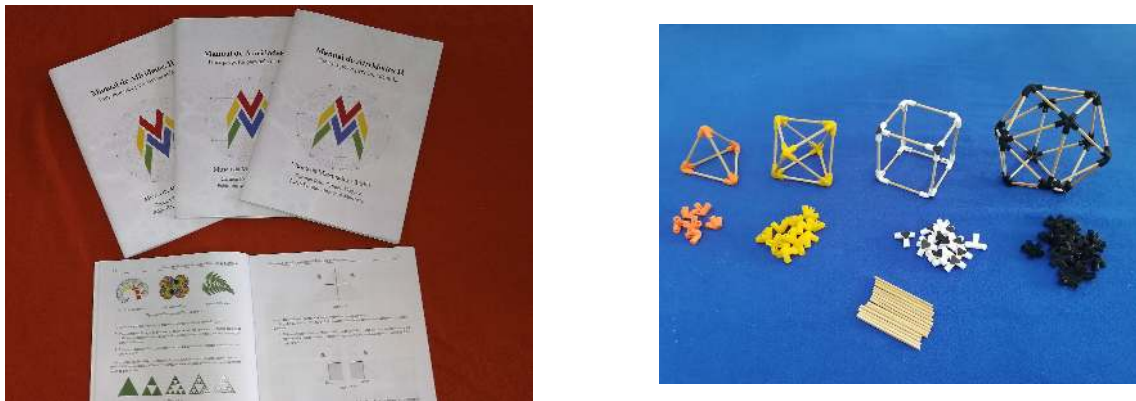


Figura 1.2: Cartilhas e material concreto produzidos pelo Museu da Matemática UFMG

Por fim, as pesquisas e os projetos desenvolvidos pelo Museu da Matemática UFMG contribuem, além de tudo, para que a universidade pública exerça o compromisso de não só produzir conhecimento qualificado, mas também difundi-lo, tendo em vista os interesses e as demandas da sociedade e de áreas relevantes, como, por exemplo, a educacional.



Figura 1.3: Atividades do *Ciclo de Eventos Online de Museu da Matemática UFMG*

## 1.2 Matemática Recreativa: Base de Atuação do Museu

A Matemática Recreativa é uma rica fonte de modelos matemáticos. Ela é um espaço de prática de pensamentos e raciocínios próprios da Aritmética, da Topologia, da Geometria, da Análise Combinatória e da Matemática em geral. Um exemplo disso são os jogos de azar praticados durante a Idade Média, que levaram aos matemáticos Blaise Pascal e Pierre de Fermat a desenvolver a

Teoria das Probabilidades, base para a criação de companhias de seguros na segunda metade do século XVIII. Cabe destacar também que a Teoria de Grafos, muito aplicada atualmente no mundo tecnológico, nasceu com o Problema das Sete Pontes de Königsberg, que consiste em determinar se uma pessoa pode fazer um passeio atravessando sete pontes determinadas sem passar duas vezes por qualquer uma delas. Este problema foi resolvido pelo matemático Leonhard Euler em 1763.

Nas últimas décadas, a Matemática Recreativa tem assumido um papel importante como instrumento para a divulgação e popularização da Matemática através da comunicação de aspectos históricos e culturais, da exploração de sua aplicação prática, da sua relação com outras áreas do conhecimento como a Música e a Arte e de uma ampla variedade de problemas e atividades lúdicas que podem ser adaptadas em sala de aula, tornando-se assim uma ferramenta didática importante para mostrar aos alunos que a Matemática pode ser uma experiência divertida e prazerosa.

O grande interesse pela Matemática Recreativa foi inspirado principalmente no trabalho do divulgador Martin Gardner, embora muitos dos avanços, especialmente no campo dos quebra-cabeças, derivam de trabalhos do início do século XX, como os apresentados por Lewis Carroll, Sam Lloyd e Henry Dudeney.

### 1.3 Uma Proposta para Sala de Aula

O caráter lúdico dos jogos de tabuleiro e o desafio intelectual que eles proporcionam ajudam o desenvolvimento intelectual e social do indivíduo e, nesse sentido, podem ser usados como um recurso didático. Embora em certos casos não esteja explícita a Matemática que pode ser trabalhada nos jogos, ela se encontra presente através do raciocínio lógico, pois nosso cérebro sempre está estabelecendo conexões lógico-matemáticas. Assim, os jogos abstratos, também chamados de *jogos matemáticos*, se colocam como meios para o exercício da resolução de problemas no processo de ensino e aprendizagem de matemática

Os jogos de tabuleiro que fazem parte do acervo do Museu da Matemática podem ser explorados tanto através das relações aritméticas e geométricas do tabuleiro em si, quanto pelo conceito de estratégia vencedora. Além disso, é possível explorá-los também por meio de estratégias similares àquelas utilizadas na resolução de problemas matemáticos. Com a construção e/ou análise do tabuleiro pode-se, por exemplo:

- Reconhecer figuras geométricas como triângulos, quadrados, retângulos, hexágonos, círculos e identificar seus elementos.
- Estudar conceitos como ponto, reta, segmento de reta, plano, raio, diâmetro e ângulos.
- Determinar ponto médio, mediatriz e bissetriz.

Os jogos podem ser usado para ampliar e enriquecer muitos assuntos no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Além da potencialidade dos jogos de tabuleiro para o ensino aprendizagem, eles representam para os alunos um meio de interagir e desenvolver técnicas de comunicação com os outros. Os jogos ajudam no desenvolvimento social e intelectual, uma vez que tem que lidar com aspectos sociais, morais e emocionais. Assim, os jogos de tabuleiro são valiosos na promoção de habilidades sociais, estimular a discussão matemática, aprender conceitos, reforçar habilidades, compreender simbologia, desenvolver compreensão e adquirir estratégias e solução de problema. A utilização de jogos aumenta a capacidade de resolução de problemas, a motivação e o interesse pelas aulas. Além de ter grande impacto na aprendizagem afetiva, promove a socialização dos alunos.

Os jogos de tabuleiro de estratégia favorecem o aprimoramento do raciocínio lógico matemáticos. Usados como recursos didáticos para o ensino de matemática, possibilitam uma enriquecedora

experiência em sala de aula tanto pelos conceitos matemáticos que com eles podem ser estudados quanto pelos elementos da história e da cultura das diversas sociedades que os criaram.



# Jogos de Tabuleiro

*Com suas regras simples e inequívocas, eles são como ilhas de ordem no impreciso e desordenado caos do sensível. Quando jogamos, ou mesmo quando vemos jogar a outros, abandonamos o incompreensível universo da realidade e passamos para um reduzido mundo da bonança humana, onde tudo é claro, objetivo e fácil de entender.*

– Aldous Huxley

Desde a Antiguidade, grande parte das culturas do mundo criaram e praticaram jogos de tabuleiro. Muitos deles, tradicionais e modernos, contêm noções de Lógica e Matemática Recreativa, convertendo-se em uma excelente ferramenta de ensino para diversos conteúdos matemáticos. Estes jogos, além de serem usados como atividades de lazer, também serviam como treinamento de estratégias de guerra, exercício da mente, desenvolvimento de destrezas ou como atividades de cunho religioso.



Figura 2.4: Módulo *Jogos de Tabuleiro* do Museu da Matemática UFMG

Estima-se que o primeiro jogo de tabuleiro conhecido se originou no Egito Antigo, entre 3.000 e 2.600 a.C. As civilizações de Egito e Babilônia foram as primeiras a registrar a existência de jogos de tabuleiro, delas se conhecem ilustrações de jogos como o *Senet* e o *Mehen*.

O *Senet*, junto com o *Oware* e o *Jogo Real de Ur*, são considerados os jogos de tabuleiro mais antigos do mundo, sendo o *Senet* o jogo do qual se tem mais dados preservados. De fato, *Senet* era o jogo mais popular do Egito Antigo não só na nobreza, como também por membros da classe baixa. Existem várias pinturas que representam nobres e escravos jogando *Senet*.

O jogo *Senet* etimologicamente significa *jogo da passagem* e segundo a mitologia egípcia, este jogo permitia que os mortos entrassem no mundo de Osíris, deus da morte e da agricultura, que presidia a corte dos mortos que viajavam pelo Nilo para a eternidade. Nos túmulos de Tutankhamon e de outros faraós e nobres egípcios de 3.500 anos atrás foram encontradas pranchas e pinturas de pessoas jogando.

O *Senet* é um jogo de corrida entre dois adversários e o vencedor é o jogador que retirar primeiro todas as suas peças do tabuleiro. Ele é disputado num tabuleiro retangular de três filas com dez casas cada uma, no qual os jogadores posicionavam-se frente a frente, perto dos lados

maiores do tabuleiro. Na versão mais antiga, cada jogador tinha sete peças, mas as regras foram evoluindo para cinco peças para cada jogador. O Senet é uma versão do Jogo Real de Ur com regras semelhantes.

O Jogo Real de Ur é o jogo de tabuleiro mais antigo do qual se conhecem as regras. Ele faz parte do acervo do Museu da Matemática UFMG e sempre faz sucesso entre jovens e adultos. Este jogo nasceu na Mesopotâmia e foi descoberto na década de 1920 pelo arqueólogo Sir Leonard Wooley em escavações realizadas na antiga cidade de Ur. O tabuleiro encontrado está exposto atualmente no Museu Britânico em Londres.

Com base em estudos arqueológicos, foram feitas várias reconstituições das regras deste jogo. Uma das mais proeminentes usa 14 peças, sendo sete para cada jogador. As peças se movimentam pelo tabuleiro utilizando dados em forma de tetraedro que determinam o número de casas que as peças devem percorrer a cada jogada. O primeiro jogador a terminar o percurso com todas as suas peças será o vencedor.

Mais informações sobre este jogo e seu tabuleiro original podem ser encontradas no link <http://www.youtube.com/watch?v=WZskjLq040I> que mostra um vídeo, com legendas disponíveis em português, produzido pelo Museu Britânico.



(a) Foto do Jogo Senet, tirada de <https://www.brooklynmuseum.org>



(b) Jogo Henfatfl do Acervo do Museu da Matemática UFMG

Figura 2.5: Jogos de Tabuleiro

Na África há numerosos jogos de tabuleiro tradicionais de diversas categorias; os mais populares pertencem à família dos mancalas, chamados também de “jogos de sementeira”. O termo mancala é usado para um grupo de jogos que têm semelhanças entre si e que são praticados geralmente sobre tabuleiros de madeira de duas ou mais fileiras de concavidades alinhadas (casas). O número de fileiras e casas depende do tipo de mancala e as peças são geralmente sementes secas. A origem dos jogos de sementeira não está definida, embora existam indícios de jogos de Mancala no século 7 d.C.

A seguir, apresentamos um conjunto de jogos de tabuleiro do acervo do Museu e que podem ser explorado em sala de aula. Cada um desses jogos possui suas características e trabalha com habilidades específicas, o que permite ao professor selecioná-los e explorá-los segundo a demanda envolvida no processo de ensino-aprendizagem.

## 2.1 Abalone

Abalone é um jogo de estratégia para dois jogadores, desenhado por Michel Lalet e Laurent Levi em 1987, no qual cada jogador controla bolinhas de cores opostas em um tabuleiro hexagonal. O jogo de Abalone faz parte da Olimpíada de esportes mentais desde 1997 e foram comercializadas mais de 4 milhões e meio de cópias do tabuleiro até o momento.

### 2.1.1 Tabuleiro e peças

- O tabuleiro tem formato hexagonal com 61 furos circulares.
- 28 bolinhas de tamanho apropriado para encaixar nos furos, sendo 14 de cor preta e 14 brancas (ou outras duas cores diferentes).

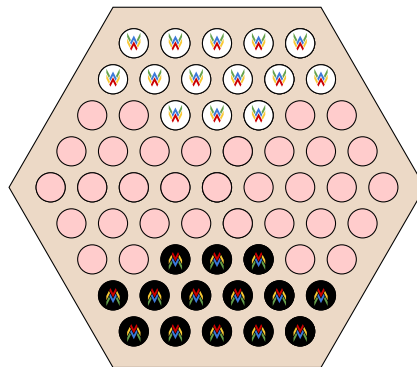


Figura 2.6: Posição inicial do Abalone

### 2.1.2 Regras

- O jogo inicia com as peças distribuídas conforme mostrado na Figura 2.6.
- O objetivo do jogo é tirar seis bolinhas do adversário para fora do tabuleiro.

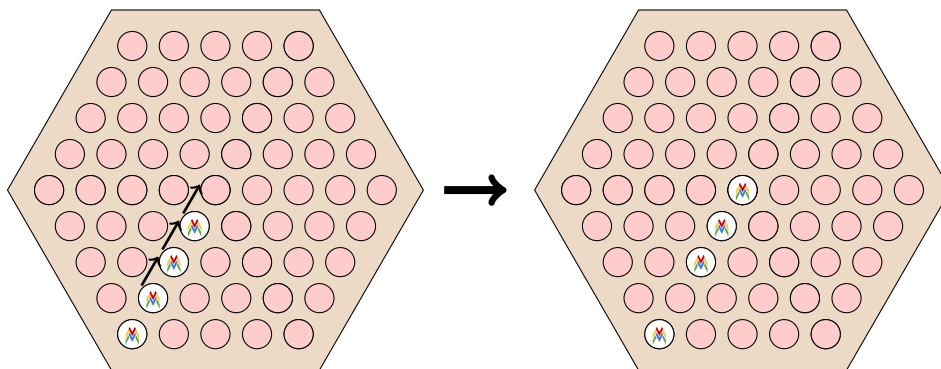


Figura 2.7: Movimento em linha de 3 bolinhas

- O jogo ocorre em turnos alternados entre os jogadores, com as pretas iniciando o jogo. Cada jogador pode fazer um movimento por jogada, que pode ser um *movimento em linha* como mostrado na Figura 2.7 ou um *movimento perpendicular* como mostrado na Figura 2.8, ambos podendo movimentar no máximo 3 bolinhas adjacentes em linha.

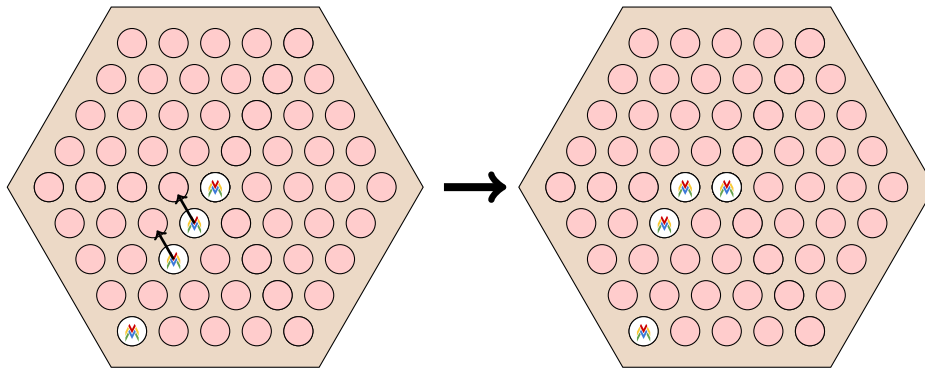


Figura 2.8: Movimento perpendicular de 2 bolinhas

- Um jogador pode empurrar as bolinhas do oponente que sejam adjacentes às suas utilizando um movimento em linha. As bolinhas do oponente só podem ser empurradas se o número de bolinhas que se movem na linha for maior do que o número de bolinhas empurradas. Desta forma elas nunca podem mover mais do que 2 bolinhas do oponente, uma vez que o número máximo de bolinhas que podem ser movidas em uma jogada é 3.

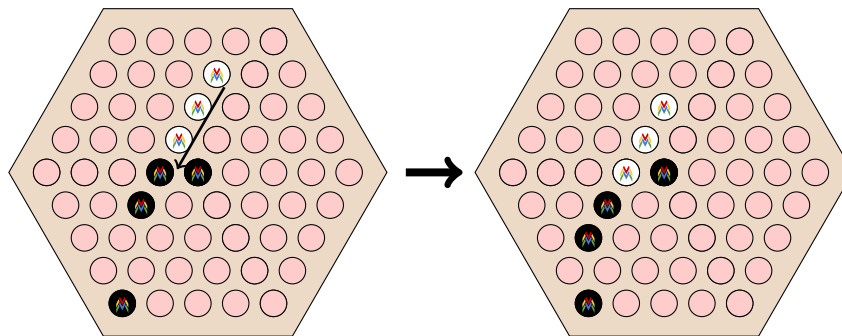


Figura 2.9: Jogada válida das bolas brancas empurrando duas pretas

- As bolinhas deslocadas devem ocupar buracos vazios ou ejetar uma bolinha para fora do tabuleiro para que a jogada seja válida. Na Figura 2.9, o jogador das bolinhas brancas pode jogar movimentando as peças pretas, mas o jogador das pretas não consegue fazer uma jogada para movimentar as peças brancas.
- O jogo termina quando um jogador tira do tabuleiro 6 bolinhas do adversário.

### 2.1.3 Estratégia

- Cada jogador deverá manter suas peças perto do centro do tabuleiro para forçar o adversário a se movimentar pelas bordas do tabuleiro.
- Cada jogador deverá manter suas peças juntas para ter mais capacidade de defesa e ataque, especialmente se elas formarem um hexágono para poder defender e atacar em qualquer direção. Nessa formação, perde-se um pouco a capacidade de movimento, mas isso é compensado pela dificuldade que o adversário terá para movimentar suas bolinhas para fora do tabuleiro.
- Cada jogador deverá tentar separar as peças do adversário em grupos menores para que fique mais fácil de empurrá-las e tirá-las do tabuleiro.

- Evitar empurrar para fora de tabuleiro uma das bolinhas do adversário se essa jogada dificulta a formação de blocos de suas bolinhas, quebrando o seu posicionamento estratégico.

A seguir apresentamos 3 partidas já quase em seu fim e o desafio é encontrar a estratégia vencedora em cada caso.

1. Na Figura 2.10, o jogador das peças brancas tem a possibilidade de empurrar três bolas

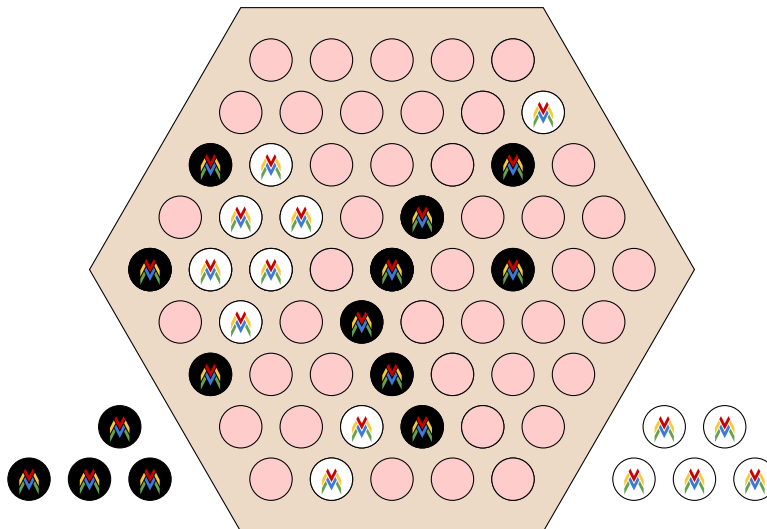


Figura 2.10: O jogador das peças pretas ganha em dois movimentos

pretas. O jogador das peças pretas tem a vez de jogar, assim o desafio é mostrar que o jogador das peças pretas pode ganhar a partida nas seguintes duas jogadas.

2. Na Figura 2.11, o jogador das peças brancas tem a vez de jogar. O desafio é mostrar como

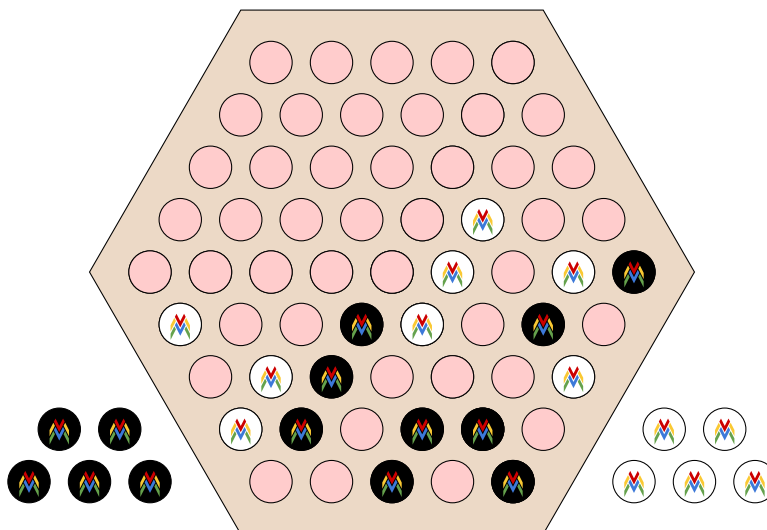


Figura 2.11: O jogador das peças brancas ganham em dois movimentos

ele pode ganhar a partida em duas jogadas.

3. Na Figura 2.12, o jogador da vez tem estratégia vencedora. O desafio é mostrar que, se é a vez do jogador das peças brancas, ele pode vencer em 2 movimentos, enquanto se é a vez do jogador das peças pretas, ele pode vencer em 3 movimentos.

Mais desafios deste tipo podem ser encontrado no link <https://abalonline.wordpress.com/tag/monthly-problems/>

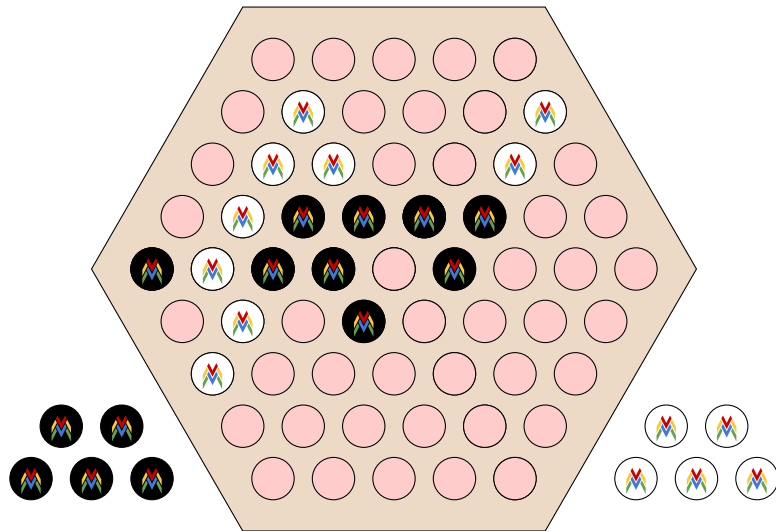


Figura 2.12: O jogador da vez tem estratégia vencedora

### 2.1.4 Em Sala de Aula

O tabuleiro do Abalone é um hexágono de lado 5 com 61 furos. Observemos que, se o lado do hexágono for 2, o tabuleiro teria 7 furos, e se o hexágono for de lado 3, o tabuleiro teria 19 furos.

1. Encontre a sequência de furos para todos os tabuleiros de lados de comprimento de 2 até 10.
2. Com os valores encontrados no item anterior verifique que o número de furos para o tabuleiro de lado  $n$  é  $3n^2 - 3n + 1$ . Explique por que essa fórmula funciona?
3. Qual seria o comprimento do lado do tabuleiro do Abalone se ele tem 919 furos.

**Dica:** a soma dos primeiros  $n$  inteiros positivos é  $\frac{n(n+1)}{2}$ , que podemos comprovar através da prova sem palavras mostrada na Figura 2.13 na qual são arranjadas  $n(n+1)$  bolas em  $n$  linhas e

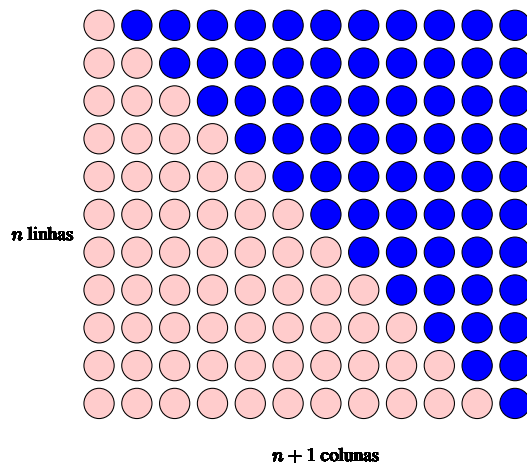


Figura 2.13: Prova sem palavras da relação  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$n + 1$  colunas. O número de bolas rosas e azuis é igual, e as rosas estão arranjadas de tal forma que tem  $i$  bolas na linha  $i$ -ésima. Segue que o número de bolas no arranjo também pode ser contado como

$$n(n+1) = 2(1 + 2 + \dots + n).$$

## 2.2 Alquerque

O Alquerque é um dos jogos mais antigos conhecidos. Praticava-se no Egito e tornou-se popular no Norte da África. São conhecidas três versões do jogo do Alquerque: Alquerque de três, Alquerque de nove e Alquerque de doze.

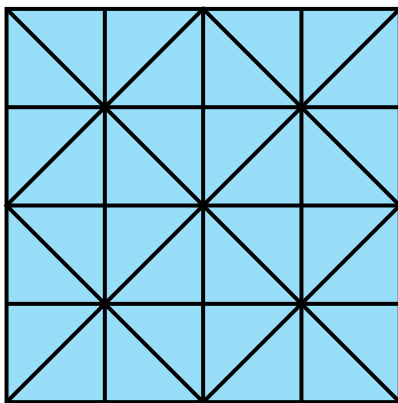
O nome do Alquerque vem do árabe *al qirkat*, mas acredita-se que as variedades de três e nove tenham nascido no antigo Egito, preservadas em painéis gravados em pedras de vários templos mediterrâneos.

A primeira menção do jogo de Alquerque de três e nove na literatura é do final do século X, quando Abu'l-Faraj al-Isfahani fala em sua obra *Kitab al-Aghani* (O Livro dos Cânticos). As regras mais antigas conhecidas do jogo de Alquerque de doze são as que aparecem no século XIII no *Libro de ajedrez, dados y tablas de Alfonso X el Sabio*.

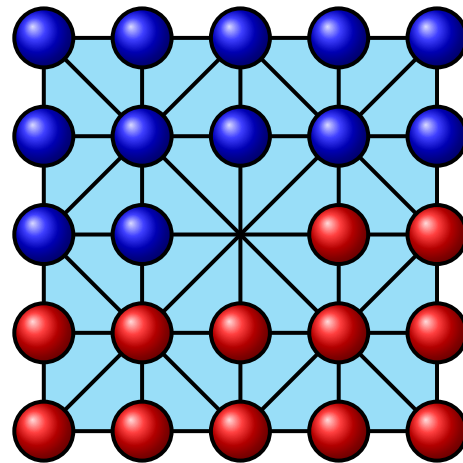
Acredita-se que o jogo de Damas surgiu da utilização de um tabuleiro de xadrez com as regras do Alquerque de doze.

### 2.2.1 Tabuleiro e Peças

- O tabuleiro é composto por quatro quadrados, todos com as diagonais e as metades horizontais e verticais marcadas, formando um quadrado maior, como mostrado na Figura 2.14a.



(a) Tabuleiro



(b) Posição inicial das peças

Figura 2.14: Tabuleiro e posição inicial do Alquerque

- 24 peças, sendo 12 vermelhas e 12 azuis (ou outras duas cores diferentes).

### 2.2.2 Regras do Alquerque de Doze

As peças são inicialmente posicionadas nos cantos dos quadrados menores, como mostrado na Figura 2.14b.

Alternadamente, os jogadores fazem uma das seguintes possíveis jogadas:

1. Mover uma de suas peças para uma posição vazia adjacente que esteja unida por um segmento.
2. Capturar e remover do tabuleiro uma peça do adversário que esteja numa posição adjacente, saltando sobre ela, desde que a posição seguinte esteja vazia.

É permitido fazer várias capturas em uma mesma jogada. Em algumas versões, é obrigatório fazer as capturas, mas não é exigido ter capturas múltiplas num único lance. Se, numa dada posição, houver várias oportunidades de captura, o jogador pode escolher a captura que quiser.

Se um jogador não realiza uma captura quando possível, o adversário, ao perceber o que ocorreu, poderá “cantar” a peça que deveria ter sido capturada e poderá retirar do tabuleiro a peça que deveria ter feito a captura.

3. Vence quem capturar todas as peças do adversário ou quando o adversário fique sem uma jogada factível.

### 2.2.3 Estratégias

O jogo de Alquerque possui poucas variações para seu início, visto que o primeiro jogador possui 4 movimentos iniciais, todos forçando capturas obrigatórias. Na Figura 2.15 é mostrada

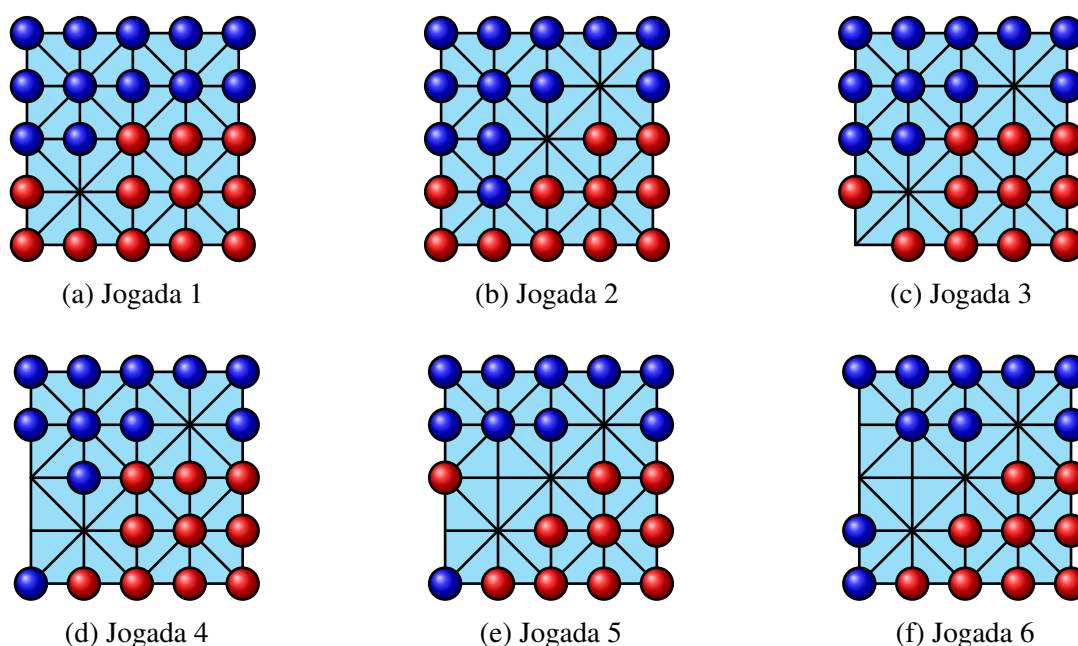


Figura 2.15: Uma sequência obrigatória de jogadas

uma das sequências iniciais de jogadas obrigatórias. Destacamos que, para a jogada inicial das vermelhas (jogada 1), na jogada 6 o jogador das peças azuis terá duas peças no canto inferior esquerdo do tabuleiro. Agora, como peças nos cantos são posições impossíveis de atacar, a menos que se faça um sacrifício de peças que obriguem capturas, concluímos que esta jogada inicial das peças vermelhas a deixa em uma posição mais fraca. Assim, se o jogador das peças azuis souber manter esta vantagem, provavelmente será o ganhador.

Os outros três inícios de partida são mostrados na Figura 2.16. Estas três aberturas são mais equilibradas para os dois jogadores, com uma pequena vantagem para o jogador das peças azuis na abertura da Figura 2.16a, que pode, na seguinte rodada, controlar a posição livre na borda do tabuleiro.

### 2.2.4 Em Sala de Aula

Esta atividade pode ser desenvolvida em sala de aula, iniciando-a com a construção e/ou análise do tabuleiro para explorar e introduzir conceitos de Geometria Plana. Além disso, durante o jogo



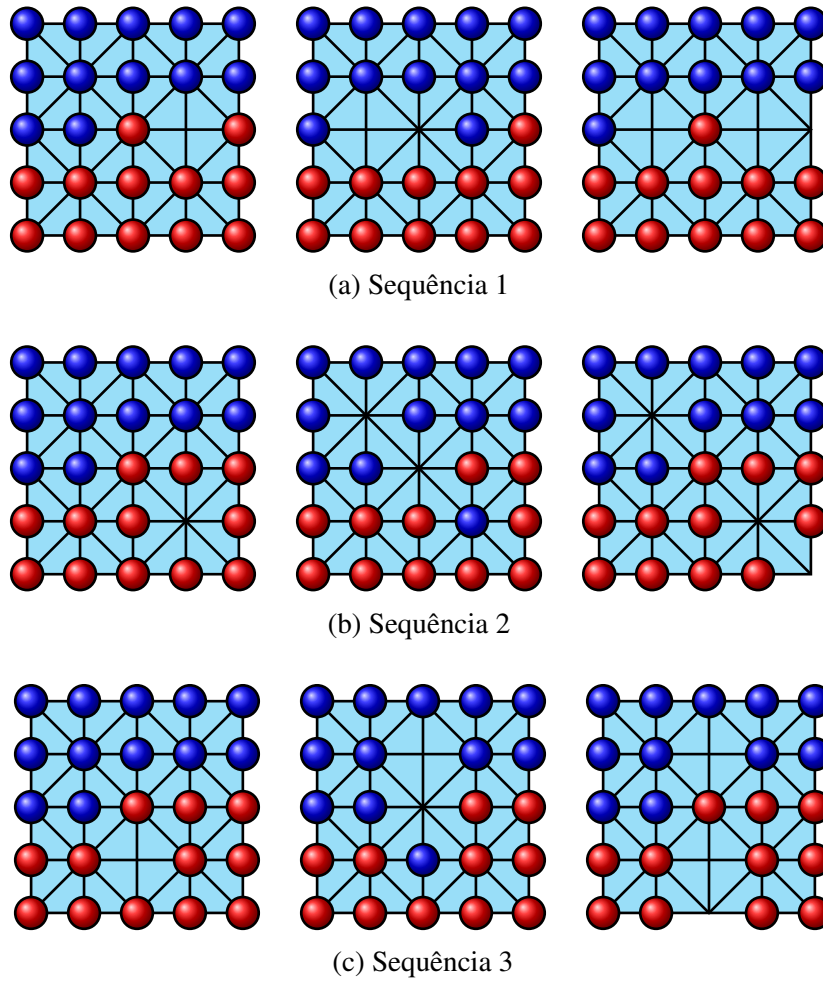


Figura 2.16: Sequência de jogadas obrigatórias

é possível explorá-lo na análise de estratégias.

A forma mais fácil de construir o tabuleiro de Alquerque é usando dobradura de papel, popularmente conhecido como *origami*. Para isso podemos seguir os seguintes passos:

- a) A partir de uma folha A4 construir um quadrado realizando uma dobradura e um corte como mostrado na Figura 2.17.

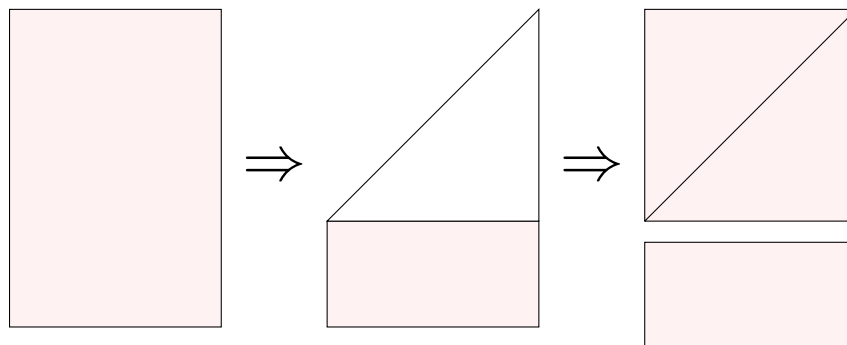


Figura 2.17: Construindo um quadrado a partir de uma folha A4

- b) No quadrado construído em a), realizar dobras na outra diagonal e nas mediatrizes dos lados, como mostrado na Figura 2.18.

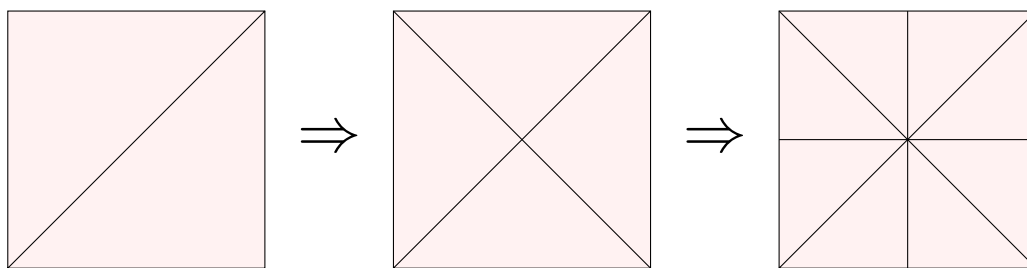


Figura 2.18: Marcando as diagonais e as mediatrizes dos lados de um quadrado

- c) Fazer dobraduras nas outras diagonais dos quadrados menores, trazendo todos os cantos do quadrado até o centro dele, como mostrado na Figura 2.19.

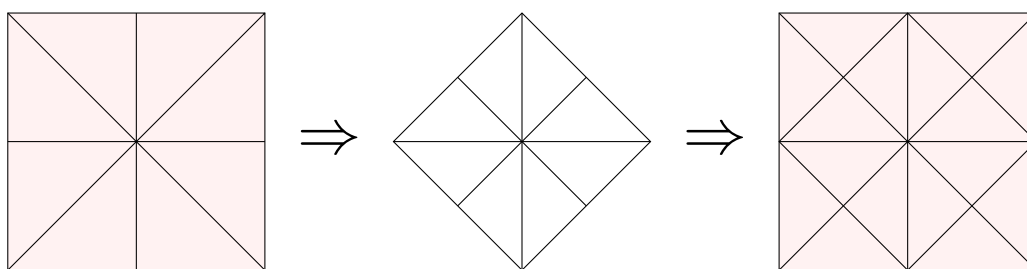


Figura 2.19: Marcando as outras diagonais dos quadrados menores

- d) Finalmente, dobrar a folha levando cada um dos lados à linha paralela a esse lado e que passa pelo centro do quadrado, como mostrado na Figura 2.20.

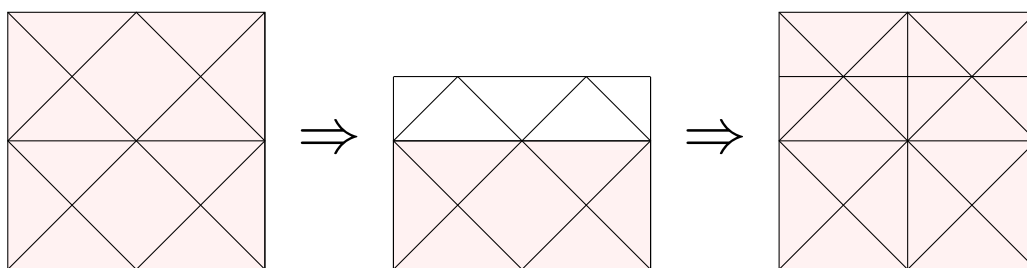


Figura 2.20: Fazendo uma das quatro dobras finais

Após a construção do tabuleiro, podem ser lançadas algumas perguntas para explorar conceitos de área, simetrias e rotações, entre outros. A seguir fazemos algumas sugestões de perguntas:

1. Quantos quadrados de área 1 tem o tabuleiro de Alquerque? Quantos de área 2?
2. Quantos triângulos de área  $\frac{1}{2}$  têm o tabuleiro? Quantos de área 1 e quantos de área 2?
3. Notemos que quando rotacionamos o tabuleiro de Alquerque  $90^\circ$  com respeito ao centro ou quando fazemos um reflexão dele sobre a linha horizontal que passa pelo centro do tabuleiro, obtemos o mesmo tabuleiro. Quais outras operações podemos fazer de tal forma que obtenhamos o mesmo tabuleiro?
4. Suponhamos que temos o tabuleiro da Figura 2.21. Desenhe o tabuleiro obtido quando rotacionado  $90^\circ$  em relação ao centro e depois refleti-lo com respeito à linha horizontal que passa pelo centro. Agora desenhe o tabuleiro obtido quando refletido com relação à linha horizontal que passa pelo centro e depois rotacionado  $270^\circ$ . Compare os dois desenhos obtidos.

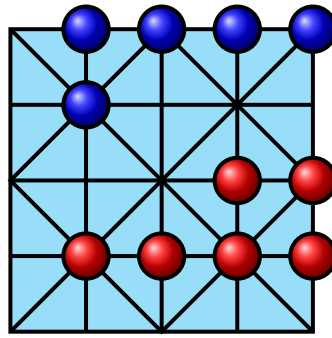


Figura 2.21

## 2.3 Amazonas

“*El Juego de las Amazonas*” foi inventado em 1988 pelo argentino Walter Zamkaskas e publicado pela primeira vez em 1992, na revista *El Acertijo*. O jogo foi introduzido informalmente em 1993 no clube de jogo postal *The Knights of Square Table* de Michael Keller, onde ganhou popularidade imediata. Uma tradução autorizada feita por Keller foi publicada em 1994 na revista *World Game Review*. A primeira partida internacional deste jogo foi em 1994-1995, um amistoso disputado via fax entre Argentina e Estados Unidos.

“*El Juego de las Amazonas*” (O Jogo das Amazonas) é uma marca registrada da empresa *Ediciones de Mente*.

### 2.3.1 Tabuleiro e Peças

- Um tabuleiro de  $10 \times 10$  casas. Cada casa é identificada pela letra da linha (de A até J) e o número da coluna (de 1 a 10).
- 8 amazonas, 4 verdes e 4 azuis (ou outras duas cores diferentes).
- 92 pedras, de uma terceira cor, com tamanho apropriado para as casas do tabuleiro.

### 2.3.2 Regras

1. O jogo começa com as amazonas posicionadas no tabuleiro como indicado na Figura 2.22: as amazonas verdes começam posicionadas nas casas 4A / 1D / 1G / 4J e as amazonas azuis em 7A / 10D / 10G / 7J.
2. Os jogadores fazem movimentos alternados. O jogador das amazonas verdes inicia o jogo.
3. Um movimento consiste em duas etapas:
  - Mover uma de suas amazonas da mesma maneira que se movimentava a rainha do xadrez - quantas casas quiser na vertical, na horizontal ou na diagonal desde que não existam peças em seu percurso.
  - A amazona que se movimentou lança uma flecha, desde onde chegou, a uma casa vazia na direção horizontal, vertical ou diagonal. Na casa onde caiu a flecha é colocada uma pedra.
4. As amazonas não podem se movimentar nem lançar flechas para casas ocupadas. Não é permitido também se movimentar ou lançar flechas sobrepassando essas casas ocupadas. O local de pouso das flechas se torna um bloqueio permanente para todas as flechas e amazonas.

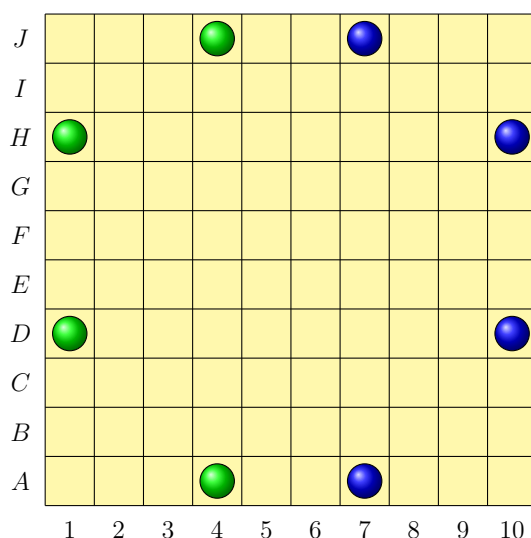


Figura 2.22: Tabuleiro com a posição inicial das amazonas

O jogo termina quando um dos jogadores não puder se movimentar, isto é, quando todas suas amazonas estão imobilizadas por outras amazonas ou por pedras. Neste caso, esse jogador perde a partida.

### 2.3.3 Estratégias

Uma estratégia vencedora é criar barreiras que dividam o tabuleiro em territórios de tal forma que o jogador seja o único que consiga atirar flechas dentro desses territórios e além disso que a área dominada seja máxima. Cabe destacar que não é necessário criar barreiras completas, mas sim que sejam o suficientemente *densas* para evitar que seu adversário consiga entrar no território com poucos movimentos.

Para ilustrar essa estratégia consideremos o tabuleiro reduzido da Figura 2.23, no qual o jogador com as peças verdes tem a vez. Neste caso, o jogador das peças verdes tem estratégia vencedora,



Figura 2.23: Jogo com estratégia para o jogador das amazonas verdes

pois com a jogada mostrada a direita na Figura 2.23, ele pode dividir essa parte do tabuleiro em dois territórios, um dos quais, destacado em verde, ficará bloqueado para que unicamente o jogador com as amazonas verdes possa ocupar com pedras, deixando o jogador das amazonas azuis com menos possibilidades de jogadas para realizar. De fato, independentemente da próxima jogada realizada pela amazona azul, a amazona verde pode-se mover para direita e lançar uma flecha para a casa que estava ocupando antes de fazer esse último movimento, desta forma o território de alcance da amazona verde terá 5 casas vazias, enquanto o território de alcance da amazona azul terá unicamente 4 casas vazias, tendo assim uma jogada a menos o que o fará perder o jogo.

Por outro lado, no exemplo da Figura 2.24a, o jogador com as amazonas verdes tem a vez de jogar, mas independente de qual seja sua jogada, o jogador da amazona azul tem estratégia vencedora.

De fato, independente dos seguintes dois movimentos do jogador da amazona verde, o da

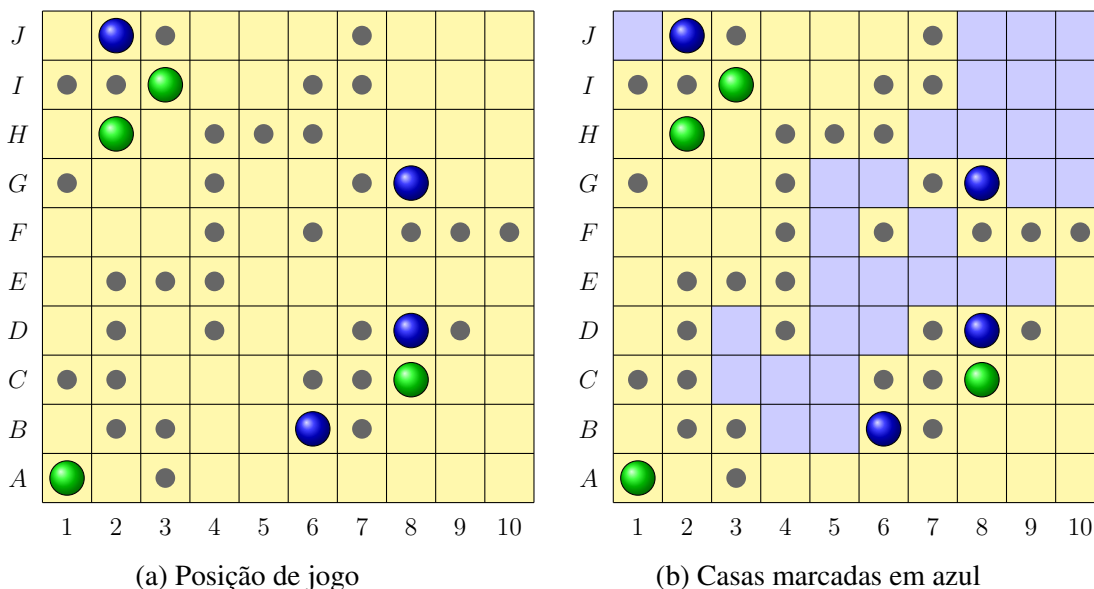


Figura 2.24: Jogo com estratégia para o jogador azul

amazona azul consegue, no mínimo, se movimentar e atirar flechas para a área marcada em azul, como mostrado na Figura 2.24b.

Pareceria então que o jogo está equilibrado, com 30 casas vazias para cada jogador, mas, dependendo dos movimentos do jogador das amazonas verdes, o jogador das amazonas azuis ainda pode garantir algumas posições adicionais na linha A do tabuleiro, o que vai garantir a sua vitória.

Deixamos como desafio para o leitor analisar qual dos dois jogadores tem estratégia vencedora no tabuleiro da Figura 2.25.

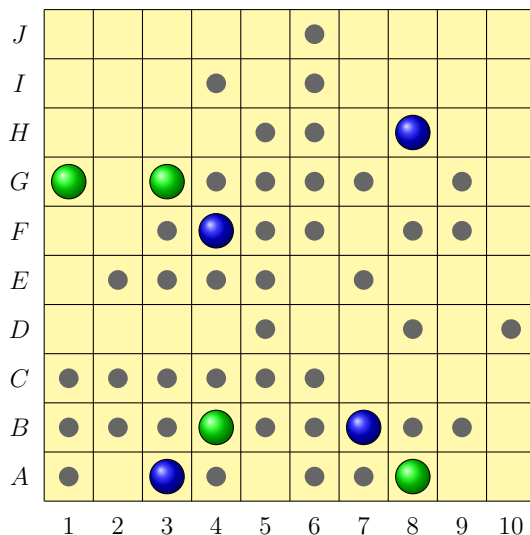


Figura 2.25: Desafio

Para realizar essa análise aconselhamos colorir de verde ou azul as casas do tabuleiro que com certeza, ou com jogadas expertas dos dois jogadores, serão ocupadas por flechas do respectivo jogador. O jogador que tiver mais casas de sua cor, terá condições ideais de estratégias e portanto mais chances de ganhar o jogo.

### 2.3.4 Em Sala de Aula

O tabuleiro do jogo das Amazonas pode ser usado para iniciar o estudo de coordenadas no plano cartesiano. Assim propomos algumas perguntas sobre esse tema:

1. Posicione as amazonas verdes no tabuleiro nas casas  $3B$ ,  $5D$ ,  $8C$  e  $7I$  e as amazonas azuis nas posições  $6C$ ,  $1C$ ,  $1J$  e  $2G$ .
2. Quais pares de amazonas estão na mesma linha, coluna ou diagonal do tabuleiro?
3. Trocando as letras A até J por números de 1 até 10, por exemplo trocamos a letra A pelo número 1 e a letra D pelo número 4, podemos identificar cada posição do tabuleiro por dois números. Assim, a casa 5B pode ser identificada pelo par ordenado  $(5, 2)$ . Identifique cada uma das casas em que se encontram as amazonas por um par ordenado de números.
4. Observe que duas amazonas estão na mesma coluna se têm a mesma primeira entrada no par ordenado e estão na mesma linha se têm a mesma segunda entrada no par ordenado. Verifique que duas amazonas estão na mesma diagonal se acontece um dos seguintes fatos:
  - (a) A soma das duas coordenadas das posições das amazonas é a mesma. Por exemplo, as amazonas nas casas  $(5, 4)$  e  $(2, 7)$  estão sobre a mesma diagonal pois  $5 + 4 = 2 + 7$ .
  - (b) A diferença das duas coordenadas das posições das amazonas é a mesma. Por exemplo, as amazonas nas casas  $(1, 3)$  e  $(7, 9)$  estão na mesma diagonal pois  $1 - 3 = 7 - 9$ .
5. Posicione as 8 amazonas de tal forma que não tenha duas quaisquer na mesma linha, coluna ou diagonal.

## 2.4 Hnefatafl

Hnefatafl ou Tafl é um antigo jogo de tabuleiro Viking de estratégia de guerra, com registros do ano 400 d.C, e que se tornou muito popular na Escandinávia medieval. O nome significa *Mesa do Rei* e embora não se tenham registros originais das regras do Hnefatafl, sabemos que o jogo se assemelhava, até certo ponto, ao xadrez.

### 2.4.1 Tabuleiro e Peças

- Um tabuleiro de  $11 \times 11$  casas, com algumas posições marcadas como mostrado na Figura 2.26a.
- 37 peças de duas cores diferentes, sendo elas um rei, 12 soldados e 24 mercenários.

### 2.4.2 Regras:

1. As casas marcadas no tabuleiro somente podem ser ocupadas pelo Rei.
2. O jogo começa com as peças posicionadas no tabuleiro como mostrado na Figura 2.26b:



o rei fica no *trono*, localizado na casa central do tabuleiro;



os soldados ficam ao redor dele;



os mercenários ficam posicionados nas casas marcadas nas bordas do tabuleiro.

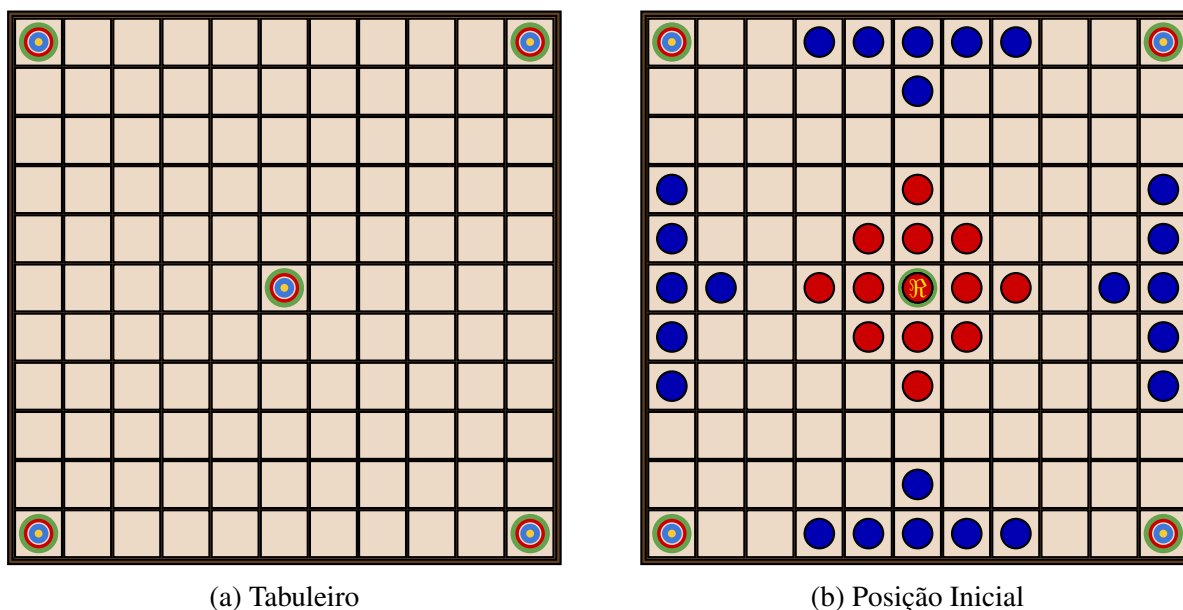


Figura 2.26: Jogo do Hnefatafl

3. O defensor do rei inicia o jogo e, alternadamente, cada jogador movimenta uma de suas peças.
4. Todas as peças, incluindo o rei, se movimentam da mesma forma: elas podem percorrer qualquer número de casas vazias na horizontal ou na vertical, da mesma forma que a torre no jogo de xadrez.
5. Nenhuma das peças além do rei pode ocupar o trono e os refúgios, mas qualquer uma pode passar por cima da casa central durante seu percurso.
6. Uma peça comum é capturada e removida do tabuleiro quando é cercada por duas peças do adversário em casas adjacentes na mesma linha ou coluna. Também ocorre a captura quando a peça fica encurralada entre uma peça do adversário e a casa central ou entre a peça adversária e um dos refúgios. Entretanto, uma peça pode se movimentar com segurança para uma casa entre duas peças adversárias, uma vez que a captura só acontece se o movimento for do jogador que está capturando.
7. O rei pode participar numa captura, mas ele só pode ser capturado se for cercado pelos quatro lados por mercenários ou se for cercado por três lados e o quarto lado é o trono ou uma das bordas do tabuleiro.

O objetivo do rei é escapar para um canto do tabuleiro (refúgio), enquanto o objetivo dos mercenários é capturá-lo. No início, os mercenários têm uma força de ataque maior, provavelmente indicando um aspecto cultural importante por imitar o sucesso dos ataques Viking.

Cada um dos dois jogadores tem diferentes objetivos: o jogador que protege o rei tem como objetivo levá-lo com segurança até um dos *refúgios*, localizados nos quatro cantos do tabuleiro. O jogador que controla os mercenários deve capturar o rei, impedindo-o de se movimentar.

No Hneftatl existem avisos equivalentes ao xeque e ao xeque-mate do xadrez. Se o defensor do rei tem um caminho livre que permita que ele alcance um dos cantos do tabuleiro em sua próxima jogada, ele deve avisar a seu oponente dizendo “Raichi!”. Mas se existirem dois caminhos livres, o jogador deve dizer “Tuichi!” e o jogo acaba, pois é impossível para o oponente bloquear os dois caminhos com somente uma jogada.

### 2.4.3 Estratégias

A estratégia dos mercenários é formar um anel ao redor do rei e seus soldados. Se esse anel permanecer fechado, será impossível que os soldados do rei escapem do cerco, pois não conseguem capturar algum mercenário e quebrar o anel. Assim basta diminuir o tamanho do anel até capturar o rei. Observemos que os lados do tabuleiro podem ser usados para fechar o anel, desde que não inclua os cantos. Durante o processo de diminuir o anel, devem-se ir eliminando os soldados até deixar o rei sozinho.

Os mercenários também podem cobrir os quatro cantos para impedir que o Rei escape como mostrado na Figura 2.27, onde cada canto é coberto por 3 mercenários.

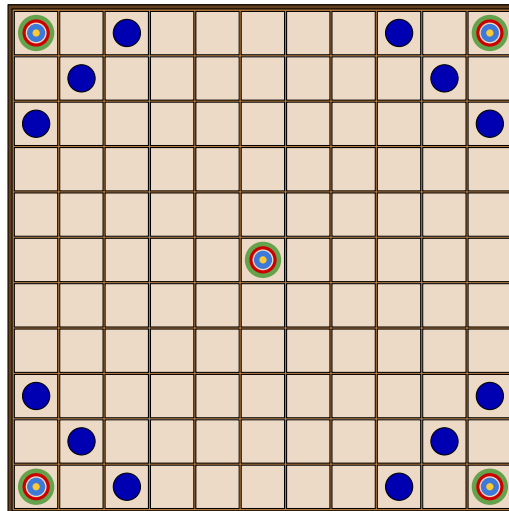


Figura 2.27: Mercenários cobrindo os cantos

Por outro lado, a estratégia para o exército do rei é de posicionar rapidamente os soldados nas bordas do tabuleiro para evitar a formação de anéis, além de formar um caminho que permita a passagem do rei até um canto. Ter soldados dentro e fora do anel de mercenários permite a captura de mercenários usando os soldados de ambos os lados. Com esse tipo de capturas podem-se abrir caminhos para o rei se movimentar até um refugio.

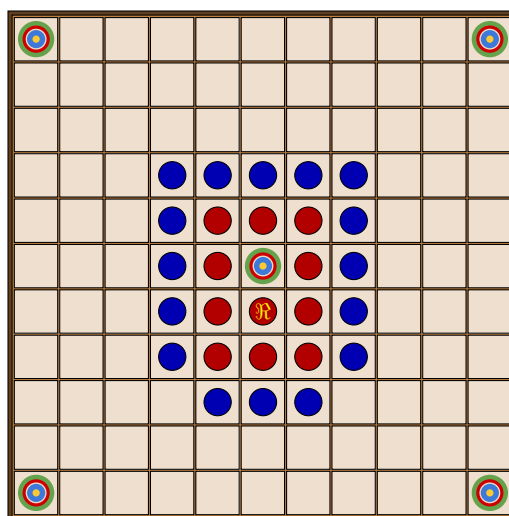


Figura 2.28: Posição de empate



Um empate pode ser alcançado caso os soldados do rei criem um anel com espaço para o rei se movimentar indefinidamente. Na Figura 2.28 apresentamos um exemplo de jogo que termina em empate.

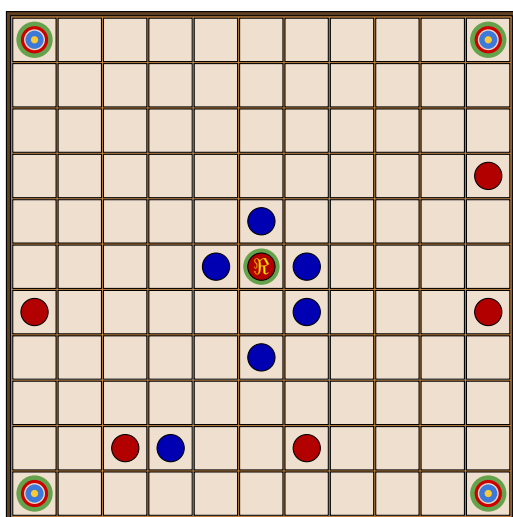
Assim, no Hneftafl, é mais importante um bom posicionamento tático das peças em comparação à captura, a menos que tais capturas levem a uma posição melhor das peças no tabuleiro.

Um guia de estratégias para o jogo do Hneftafl pode ser encontrado no link <http://tafl.cynningstan.com>

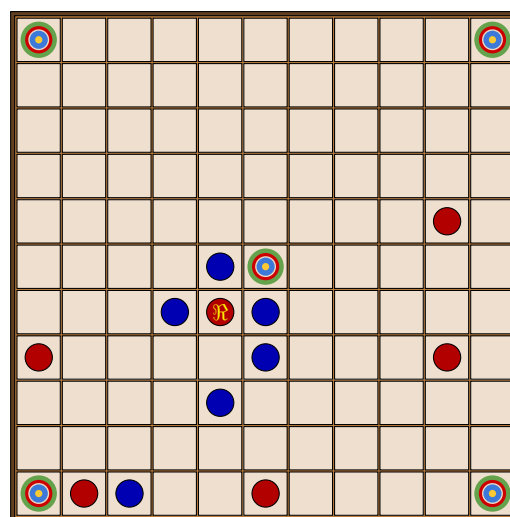
#### 2.4.4 Em Sala de Aula

1. Suponhamos que nos dois jogos apresentados na Figura 2.29 é a vez do jogador das peças vermelhas.

- Por que no jogo da Figura 2.29a o jogador das peças vermelhas tem uma única jogada possível para não ser derrotado na seguinte jogada?
- Por que no jogo da Figura 2.29b o jogador das peças vermelhas tem mais de uma alternativa para se movimentar e não ser derrotado na seguinte jogada?



(a) Jogada única



(b) Duas possíveis jogadas

Figura 2.29: Desvantagem para o jogador das peças vermelhas

2. No tabuleiro da Figura 2.30 é a vez do jogador das peças vermelhas. A partida está perdida a menos que o jogador das vermelhas movimente a peça adequada. Qual é essa peça e qual é movimento que deve ser realizado para não perder o jogo?

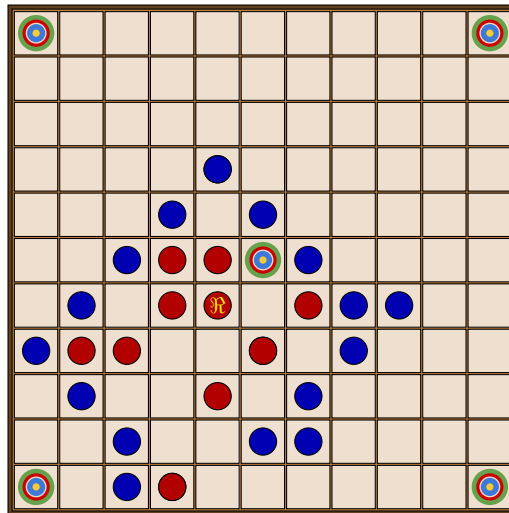


Figura 2.30: Anel parcial feito pelas peças azuis

## 2.5 Jogo da Onça ou Adugo

O jogo da Onça, praticado pelos povos indígenas Bororos, Guaranis e Manchener era jogado nas aldeias em um tabuleiro traçado na terra e usando pedras ou sementes como peças que representavam uma onça e 14 cachorros. Existe a hipótese de que este jogo seja uma variação de algum jogo trazido por missionários europeus uma vez que seu tabuleiro segue padrões de jogos de tabuleiro europeus.

É um jogos abstrato, da família dos jogos de captura, repleto de uma riqueza cultural em cada um dos componentes e das regras do jogo. Neste jogo participam dois jogadores e cada um deles com um objetivo diferente.

### 2.5.1 Tabuleiro e Peças

- O tabuleiro é formado por um tabuleiro de Alquerque ligado a uma seção triangular em um de seus lados, como mostrado na Figura 2.31a.
- 15 peças, sendo elas uma onça e 14 cachorros. Neste texto, a Onça é representada por uma peça preta e os cachorros por 14 peças marrons.

### 2.5.2 Regras

O jogo inicia com a onça no centro da parte superior do tabuleiro e os cachorros posicionados na metade superior, como mostrado na Figura 2.31b.

1. Os jogadores sorteiam com qual animal vão jogar. O jogador que ficou com a onça inicia a partida. As jogadas continuam alternadas, movimentando somente uma peça em cada turno.
2. A onça e os cachorros podem se movimentar para uma casa adjacente vazia, em qualquer direção ao longo das linhas do tabuleiro, somente uma casa por vez.
3. A onça pode capturar o cachorro saltando sobre ele para uma casa vazia, como no jogo das Damas, nesse caso o cachorro é retirado do tabuleiro. A captura pode ser realizada em qualquer sentido e pode ter mais de um cachorro capturado por turno. A captura dos

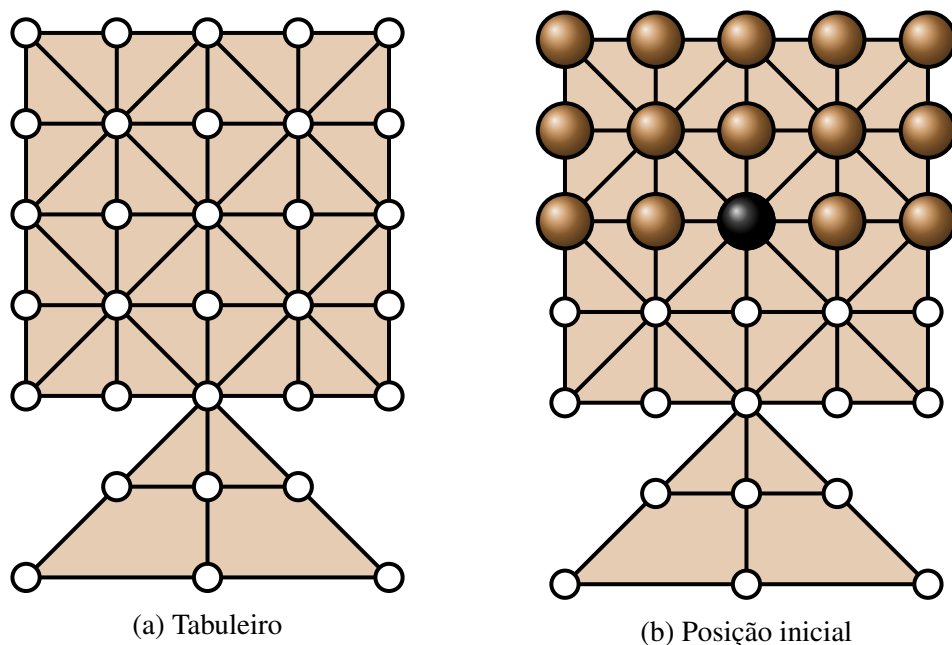


Figura 2.31: Tabuleiro e posição inicial do Adugo

cachorros não é obrigatória. Na Figura 2.32 se ilustra uma possível jogada da onça para a captura de um dos cachorros.

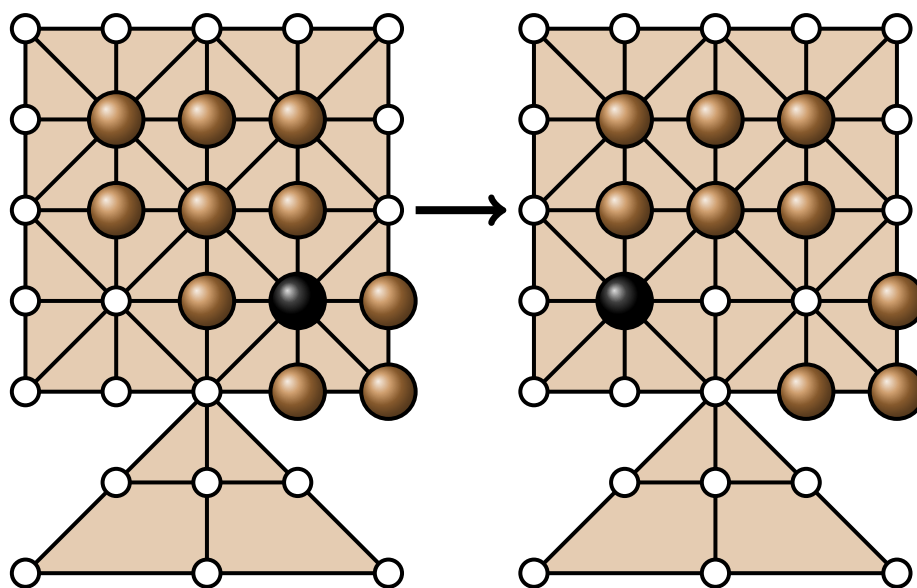


Figura 2.32: Jogada da onça capturando um cachorro

4. O jogador com os cachorros não pode capturar a onça, somente imobilizá-la. Na Figura 2.33 se ilustra uma posição em que a onça é imobilizada.

O objetivo do jogador da onça é capturar 5 cachorros. O jogador dos cachorros tem como objetivo cercar a onça e bloquear seus movimentos.

### 2.5.3 Estratégia

Observemos que nem todas as casas do tabuleiro têm a mesma quantidade de conexões com outras casas, por exemplo, as casas que estão nos cantos da parte quadrada do tabuleiro têm unica-

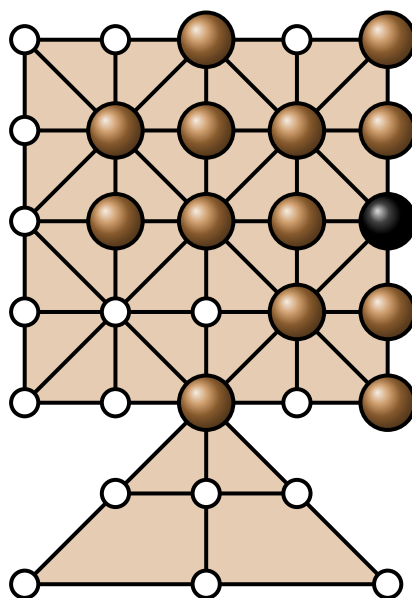


Figura 2.33: Posição vencedora dos cachorros

mente três conexões, as dos cantos inferiores da parte triangular têm dois, enquanto que na parte central do tabuleiro as casas têm 8 conexões. Desta forma é mais fácil encurralar a onça se ela é obrigada se movimentar a um dos cantos, pois ali ela terá menos opções para se movimentar.

A estratégia para o jogador que movimenta a onça é tentar manter ela no centro do tabuleiro, que corresponde ao ponto onde ela inicia, e separar os cachorros da matilha, pois isto facilitaria a sua captura. De fato é impossível capturar a onça na posição central, pois seria necessário ter pelo menos 16 cachorros.

Por outro lado, a estratégia do jogador dos cachorros é tentar manter eles juntos para evitar ser surpreendido pela onça. Além disso, tentar encurralar a onça em uma das casas com menos conexões. Dado que é tão difícil prender a onça, é importante tentar usar toda a matilha, sem deixar nenhum cachorro isolado. Finalmente, como queremos encurralar a onça em uma das casas com número mínimo de conexões, evite colocar os cachorros nessas posições. É importante que os cachorros fiquem ocupando a casa central do tabuleiro, já que é impossível capturar a onça nessa posição.

### 2.5.4 Em Sala de Aula

Na análise das estratégias surgem algumas perguntas naturais que podem ser discutidas com os alunos:

1. Quantos cachorros no mínimo são necessários se a onça está em alguma posição adjacente ao centro do tabuleiro a esquerda, direita ou acima?
2. Porque é impossível capturar a onça no ponto de união do quadrado e do triângulo do tabuleiro?
3. Existe alguma outra posição onde é impossível a captura da onça?
4. Em quais posições é impossível capturar a onça se há somente 10 cachorros no tabuleiro?

## 2.6 Reversi ou Othello

Suas origens estão na Inglaterra do século 19, onde os londrinos Lewis Waterman e John W. Mollett comercializavam, em 1880, jogos com regras semelhantes.

Em 1971, o japonês Goro Hasegawa mudou duas regras do jogo e registrou com o nome de Othello®, inspirado na peça shakespeariana de mesmo nome.

Atualmente, só são utilizadas as regras de Othello e, embora essas regras continuem sendo referidas com o nome de Reversi, as regras originais deste não são mais usadas.

Othello desperta interesse entre os programadores pela simplicidade de suas regras: apenas um tipo de movimento, apenas um tipo de tokens, etc. O primeiro torneio entre programas foi realizado em 1979. Dois anos depois foi realizado um torneio com jogadores humanos e programas, que foi vencido pelo então campeão mundial Hiroshi Inouie, embora ele tenha perdido em um jogo contra o programa “The Moor” neste torneio, sendo esta a primeira vez que um programa ganhou de um campeão mundial em Reversi. Atualmente, os programas se tornaram praticamente imbatíveis. Por exemplo, o programa Logistello derrotou claramente o campeão mundial Murakami por 6 vitórias a 0 em 1997.

### 2.6.1 Tabuleiro e Peças

- Um tabuleiro de  $8 \times 8$  casas. Cada casa é identificada pelo número de coluna (de 1 até 8) e pela letra de sua linha (de A até H), assim, por exemplo, a casa do canto superior esquerdo é identificada por 1A.
- 64 peças idênticas, com duas caras de cores distintas. Em geral, se usam fichas redondas com uma face branca e a outra preta.

### 2.6.2 Regras

Cada um dos jogadores seleciona uma cor, branca ou preta, que corresponderá a sua cor.

No Othello, o jogo inicia com quatro peças colocadas no tabuleiro como mostrado na Figura 2.34, onde duas peças brancas estão nas posições D4 e E5 e duas peças pretas em E4 e D5.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A								
B								
C								
D				●	●			
E				●	●			
F								
G								
H								

Figura 2.34: Posição inicial no jogo de Othello

Já no Reversi, esses quatro quadrados centrais começam vazios e são preenchidos alternadamente, começando com o jogador com as fichas pretas. Esta é a primeira diferença entre as regras



Figura 2.35: Posições iniciais no jogo de Reversi

do Reversi e de Othello, pois no Reversi existem duas possíveis aberturas, com as quatro peças nas casas centrais nas posições mostradas na Figura 2.35.

Outra diferença entre o Reversi e o Othello está no número de fichas que cada jogador possui. No Othello, as sessenta e quatro peças são compartilhadas, enquanto que no Reversi, cada jogador tem apenas trinta e duas peças. Desta forma, os jogos Reversi e Othello serão iguais a menos que um dos jogadores precise passar a vez com mais frequência que o outro, já que no Reversi o jogador que passou menos vezes terminará suas 32 peças antes que seu adversário e não terá peças para fazer as suas últimas jogadas, enquanto que no Othello poderá continuar usando peças compartilhadas.

Salvo essas duas diferenças entre Reversi e Othello, as seguintes regras são comuns aos dois jogos:

- O jogador que ficou com a cor preta coloca suas peças com o lado preto para cima. Análogamente, o jogador que ficou com a cor branca sempre coloca suas peças com o lado branco para cima.
- O jogador da cor preta inicia o jogo e depois os jogadores alternam nas jogadas.
- Um lance é definido como segue: uma nova peça é colocada em uma casa vazia adjacente a uma ou mais casas ocupadas por uma peça, de forma que, para alguma linha, coluna ou diagonal, existe um conjunto de peças com as duas pontas da mesma cor e peças do adversário completando o meio.
- Os discos entre essas duas pontas são virados para se tornarem da mesma cor do disco recém-colocado. Isso pode ser feito em várias direções ao mesmo tempo, fazendo que esses discos sejam virados.

No exemplo da Figura 2.36, o jogador com fichas pretas é o próximo a jogar. Ele coloca sua peça na posição marcada com X e todas as direções nas quais ele virará as peças de seu adversário estão indicadas com setas.

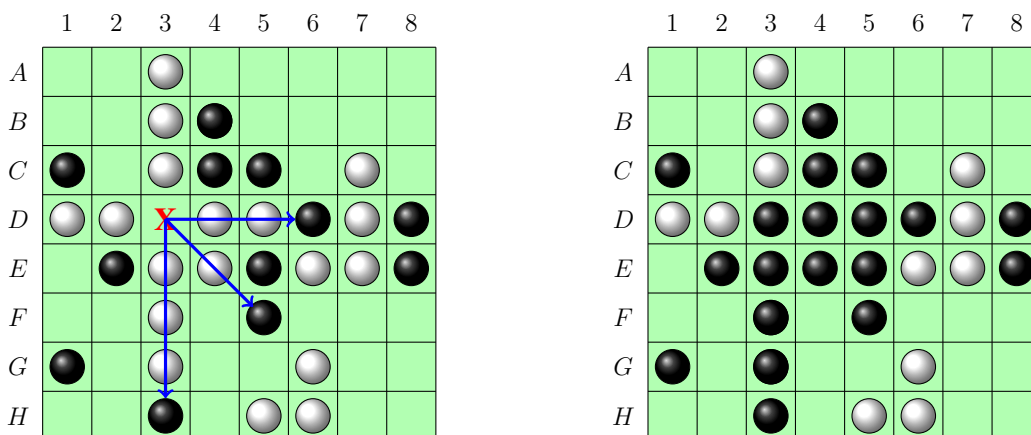


Figura 2.36: Jogada válida nos jogos de Othello e Reversi

- Se um jogador não tem como fazer movimentos, ele deverá “passar” o turno. Para cada jogada que um jogador passe, seu oponente continua a se revezar. Assim, no jogo do Reversi um dos jogadores pode ficar sem fichas antes que o outro jogador.
- Um jogador não pode passar a vez se ele tiver uma jogada disponível.

O jogo termina quando todas as peças estejam colocadas no tabuleiro ou quando nenhum dos jogadores tiver mais jogadas. Ganha o jogo quem, quando terminado o jogo, tiver a maior quantidade de peças de sua cor no tabuleiro.

### 2.6.3 Estratégias

Em um primeiro momento, pode-se pensar que a melhor estratégia para este jogo é em cada jogada virar a maior quantidade de peças do adversário. Entretanto, próximo do final do jogo, quanto menor quantidade de peças do adversário, menor será a quantidade de jogadas possíveis e maior é a probabilidade de ter que passar a vez. Além disso, quanto maior a quantidade de peças da própria cor, maior será a chance de ter peças alinhadas que podem ser viradas simultaneamente pelo adversário. Um exemplo disso é o tabuleiro do jogo de Reversi da Figura 2.37 onde o jogador das fichas pretas tem a vez.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A		●	●	●	●	●	●	
B	●	●	●	●	●	●	●	●
C	●	●	●	●	●	●	●	●
D	●	●	●	●	●	●	●	●
E	●	●	●	●	●	●	●	●
F	●	●	●	●	●	●	●	●
G	●	●	●	●	●	●	●	●
H		●	●	●	●	●	●	

Figura 2.37: Posição ganhadora para as pretas

Neste caso, o jogador das peças brancas precisa passar a vez em todas as quatro jogadas, pois não tem jogada válida. Depois das 4 jogadas feitas pelas peças pretas, o jogo termina a seu favor por 40 a 24. Desta forma, este jogo é muito mais complexo do que parece. Concluímos que a estratégia do jogo deve ir mudando dependendo de quão cheio se encontra o tabuleiro.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A		●	●	●	●	●	●	
B	●	●	●	●	●	●	●	●
C	●	●	●	●	●	●	●	●
D	●	●	●	●	●	●	●	●
E	●	●	●	●	●	●	●	●
F	●	●	●	●	●	●	●	●
G	●	●	●	●	●	●	●	●
H	●	●	●	●	●	●	●	

	1	2	3	4	5	6	7	8
A		●	●	●	●	●	●	
B	●	●	●	●	●	●	●	●
C	●	●	●	●	●	●	●	●
D	●	●	●	●	●	●	●	●
E	●	●	●	●	●	●	●	●
F	●	●	●	●	●	●	●	●
G	●	●	●	●	●	●	●	●
H	●	●	●	●	●	●	●	

	1	2	3	4	5	6	7	8
A		●	●	●	●	●	●	●
B	●	●	●	●	●	●	●	●
C	●	●	●	●	●	●	●	●
D	●	●	●	●	●	●	●	●
E	●	●	●	●	●	●	●	●
F	●	●	●	●	●	●	●	●
G	●	●	●	●	●	●	●	●
H	●	●	●	●	●	●	●	

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	●	●	●	●	●	●	●	●
B	●	●	●	●	●	●	●	●
C	●	●	●	●	●	●	●	●
D	●	●	●	●	●	●	●	●
E	●	●	●	●	●	●	●	●
F	●	●	●	●	●	●	●	●
G	●	●	●	●	●	●	●	●
H	●	●	●	●	●	●	●	●

Figura 2.38: Estratégia para as pretas

Pelas regras do jogo, os cantos não podem ser virados, e logo, são casas seguras, possuindo maior valor estratégico. Se chamamos de casas *estáveis* toda casa que é impossível virar, como acontece com os cantos, a estratégia natural deste jogo é posicionar as peças de tal forma a obter a maior quantidade de peças estáveis. Um exemplo de peças estáveis seria um segmento de borda começando de uma esquina com todas as peças da mesma cor.

Dado o valor estratégico dos cantos, deve-se evitar colocar alguma peça próxima a um canto, em particular nas casas B2, B7, G2 e G7, e seguindo este raciocínio deve-se evitar que o adversário posicione suas peças nas casas A3, A6, C1, C8, F1, F8, H3 e H6. Uma última dica básica para iniciar o jogo é colocar as peças nas 12 casas centrais, iniciando pelas casas C3, C6, F3 e F6.

Agora vejamos o exemplo da Figura 2.39, em que as brancas fizeram um anel ao redor das peças pretas. Observa-se que neste tipo de posição, apesar das brancas serem a maioria das peças, elas não têm jogada, enquanto as pretas têm várias alternativas de jogada.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A								
B								
C		●	●	●	●	●		
D		●	●	●	●			
E		●	●	●	●	●		
F		●	●	●	●	●		
G		●	●	●	●	●		
H								

Figura 2.39: Posição com as brancas sem jogada fatível

Desafiamos o leitor a encontrar uma estratégia vencedora para as peças pretas. A dica é primeiro posicionar suas peças na casas F1 e H3. Em resumo, geralmente a estratégia correta envolve possuir no meio da partida um número mínimo de discos e evitar os quadrados das bordas que não sejam os cantos, pelo menos até que o jogo se encontre quase no final. Essas ideias, que parecem contra-intuitivas, são a chave para uma estratégia vencedora deste jogo.

Um guia mais completo sobre estratégias avançadas dos jogos de Reversi e Othello podem ser encontradas no site de Ted Landau. <http://www.tedlandau.com/history/othello.html>

#### 2.6.4 Em Sala de Aula

Tabuleiros com grades e fichas de duas faces de cores distintas são muito úteis para estudar Teoria de Invariantes. Como exemplo, propomos o seguinte problema: considere parte do tabuleiro do Reversi preenchido como mostrado na Figura 2.40. Para fazer um movimento, devemos virar duas fichas adjacentes de qualquer cores. Nas figuras 2.40 e 2.41 são mostrados dois exemplos de movimentos consecutivos que podem ser realizados com esta regra.

●	●	●	●	●	●	●	●
●	●	●	●	●	●	●	●
●	●	●	●	●	●	●	●

Figura 2.40: Tabuleiro  $3 \times 8$  com 4 fichas pretas e 20 brancas



É possível deixar todo o tabuleiro com todas as fichas com a face preta viradas para cima?

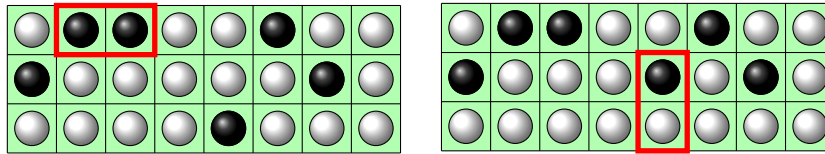


Figura 2.41: Dois movimentos no tabuleiro  $3 \times 8$

Deixamos para o leitor o desafio de mostrar uma sequência de movimentos que solucione este problema.

Suponhamos agora que nesse mesmo tabuleiro temos  $p$  fichas com a face preta para cima e  $q$  fichas com a face branca para cima. Cada vez que fazemos um movimento, duas fichas trocam de cor, isto é duas fichas brancas viram pretas ou duas pretas viram brancas ou uma branca e uma preta trocam de cor. Assim, o número de fichas com a face preta para cima aumenta em duas, diminui em duas ou fica igual. Isso quer dizer que, na posição final, independente de quantas jogadas tenhamos feito, o número de fichas com face preta para cima, da mesma maneira com as fichas com a face branca para cima não mudou de paridade, o seja, temos um *invariante*. Isso mostra que no tabuleiro da Figura 2.42 é impossível virar pares de fichas consecutivas e obter um

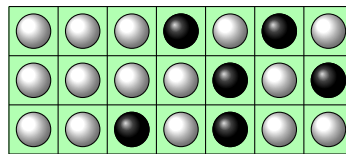


Figura 2.42: Tabuleiro  $3 \times 7$  com 6 fichas pretas e 15 brancas

tabuleiro com todas as fichas pretas, pois precisaríamos que 15 fichas brancas mudassem de cor. Neste caso particular, é possível encontrar jogadas de tal forma a ter todo o tabuleiro com todas as fichas brancas. Um método algorítmico que pode ser utilizado é primeiro fazer que a primeira coluna fique toda branca, depois a segunda sem mudar a primeira, e repetir sucessivamente até chegar na última coluna, onde somente podem sobrar zero ou duas fichas brancas, que com um ou dois movimentos poderemos transformar em pretas.

O método algorítmico descrito anteriormente pode ser aplicado para tabuleiros de qualquer tamanho e, desta forma, se inicialmente temos  $p$  fichas pretas e  $b$  brancas no tabuleiro, somente será possível fazer com que todas as fichas fiquem com a face preta para cima se  $b$  é par, e similarmente, podemos fazer com que o tabuleiro fique com todas as fichas com a face branca para cima se  $p$  é par.

É possível criar variações do problema mudando o tamanho inicial do tabuleiro e a regra para virar as peças. Nesse sentido, vários jogos comerciais foram lançados no final do século 20, tais como *XL-25* da Vulcan Electronics e *Light Out* e suas variações da Tiger Electronics. Estes jogos em particular podem ser descritos da seguinte forma: em um tabuleiro  $5 \times 5$  são colocadas fichas com uma cara preta e outra branca, de forma aleatória ou determinada. O objetivo é virar todas as fichas até que todas fiquem com a cara preta virada para cima. Uma jogada válida consiste em virar uma ficha e todas as fichas que ficam em uma casa que tem um lado comum com a casa da peça virada. Isso significa que se viramos uma ficha em um canto do tabuleiro, temos que virar as duas fichas adjacentes, se viramos uma ficha na borda, temos que virar as três fichas adjacentes, e se viramos uma ficha em uma casa interior do tabuleiro temos que virar outras quatro.

Na Figura 2.43a é mostrada uma configuração inicial, onde são marcadas em três possíveis jogadas do jogo do *Light Out*. Na Figura 2.43b é mostrado o estado das fichas no tabuleiro depois de realizar essas três jogadas. Ressaltamos que não importa qual seja a ordem das jogadas, o

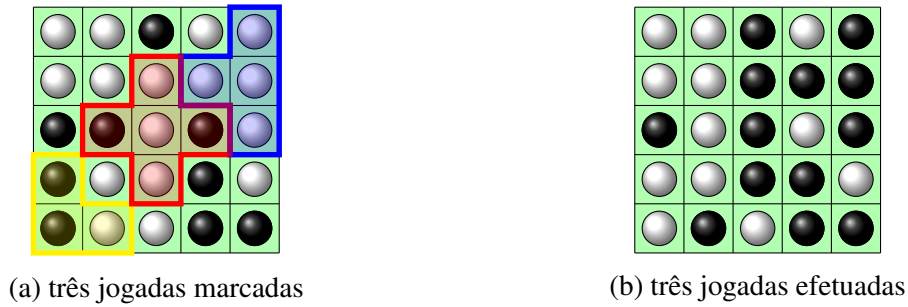


Figura 2.43: Posição aleatória inicial do jogo Light Out

resultado será o mesmo, assim como não é interessante fazer a mesma jogada duas vezes, pois isso equivale a não ter feito nenhuma jogada.

Para encontrar um invariante que determine quando uma posição inicial do tabuleiro pode ser transformada em um tabuleiro com todas as casas com fichas pretas, é preciso usar técnicas de Álgebra Linear, curso que é visto no primeiro ano do curso de matemática na faculdade, e que essencialmente determina condições necessárias e suficientes para que um sistema de equações lineares tenha solução. De fato, em 1998, Marlow Anderson e Todd Feil usaram esta técnica, resolvendo um sistema de 25 equações com 25 incógnitas, para mostrar que uma posição inicial do jogo do Light Out tem solução se e somente se o número de fichas brancas nas casas marcadas em branco nos tabuleiros da Figura 2.44 é par.

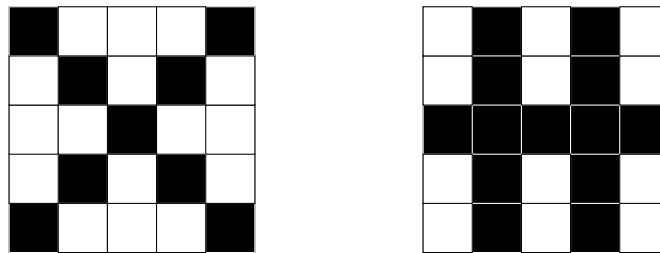


Figura 2.44: Modelos para verificar se o jogo do Light Out é factível de solução

Por exemplo, se pegamos o tabuleiro da Figura 2.43a e o cobrimos com os modelos da Figura 2.44, obtemos a Figura 2.45. As fichas brancas descobertas são 10 e 8 respectivamente, logo esta

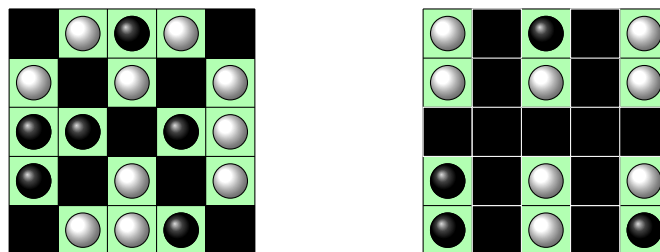


Figura 2.45: Tabuleiro coberto pelos dois modelos

posição inicial pode ser transformada a partir de jogadas em um tabuleiro totalmente preto. O algoritmo empregado anteriormente também funciona, primeiro fazendo jogadas para transformar toda a primeira linha em uma com peças pretas, depois a segunda linha com peças pretas sem modificar a primeira, e assim sucessivamente.

## 2.7 Surakarta

Surakarta é um jogo de tabuleiro que leva o nome de uma cidade localizada na província de Java Central, Indonésia, e que criado, possivelmente, no século 16. É um jogo para dois jogadores, com dinâmica similar ao Alquerque, mas com um método de captura único, que pode proporcionar uma sequência de ataques tão intensa que em um piscar de olhos, o tabuleiro pode ficar praticamente vazio.

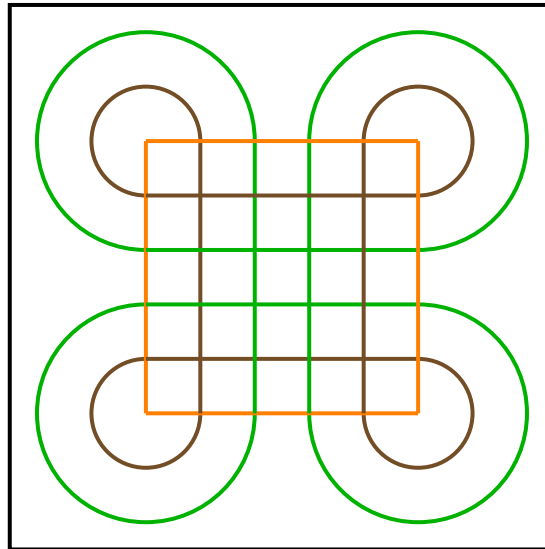


Figura 2.46: Tabuleiro de Surakarta

### 2.7.1 Tabuleiro e Peças

- O Surakarta é jogado num tabuleiro como mostrado na Figura 2.46.
- 24 peças: 12 pretas e 12 brancas (ou outras duas cores diferentes).

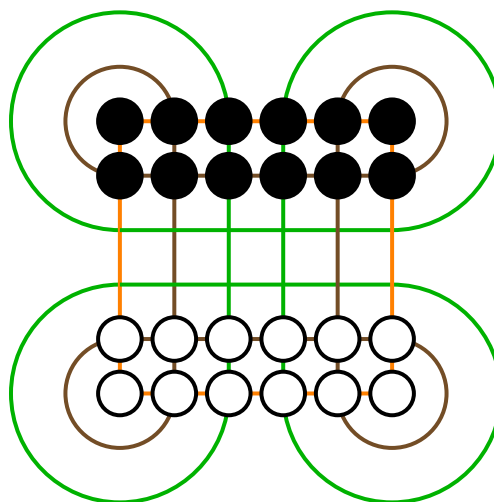


Figura 2.47: Montagem inicial do Surakarta

## 2.7.2 Regras

De forma geral, o jogo possui regras muito simples. O jogo é disputado por dois jogadores que têm como objetivo capturar as peças do adversário.

- Para iniciar, cada jogador coloca suas peças nas duas primeiras linhas da área do jogo como mostrado na Figura 2.47.
- Cada jogador, alternadamente, faz apenas um movimento por jogada.
- As peças podem se movimentar para qualquer casa adjacente vazia, na horizontal, na vertical ou na diagonal como mostrado na Figura 2.48.

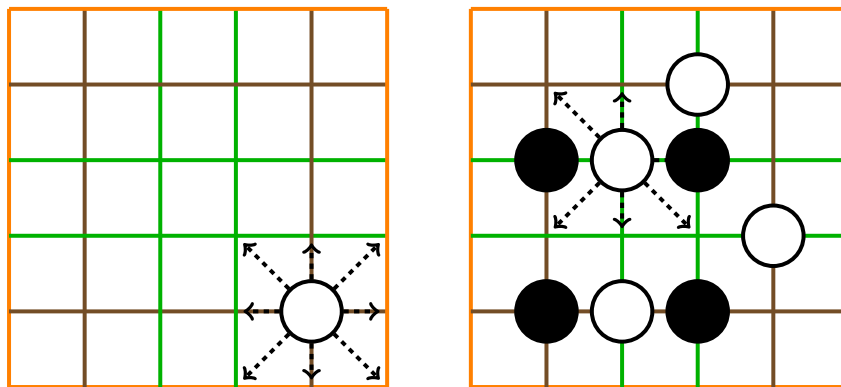


Figura 2.48: Movimentação no tabuleiro sem captura

Existem dois tipos de movimentação no tabuleiro, a que não ocorre captura, que chamaremos de passeio, e a que ocorre captura, que chamaremos de investida. O passeio é realizado sobre as linhas da grade  $5 \times 5$  contida no tabuleiro, seja verticalmente, horizontalmente ou diagonalmente, sempre indo para uma casa adjacente sem pular nenhuma peça nem sobrepor. Vale mencionar que em algumas versões não se realizam movimentos diagonais.

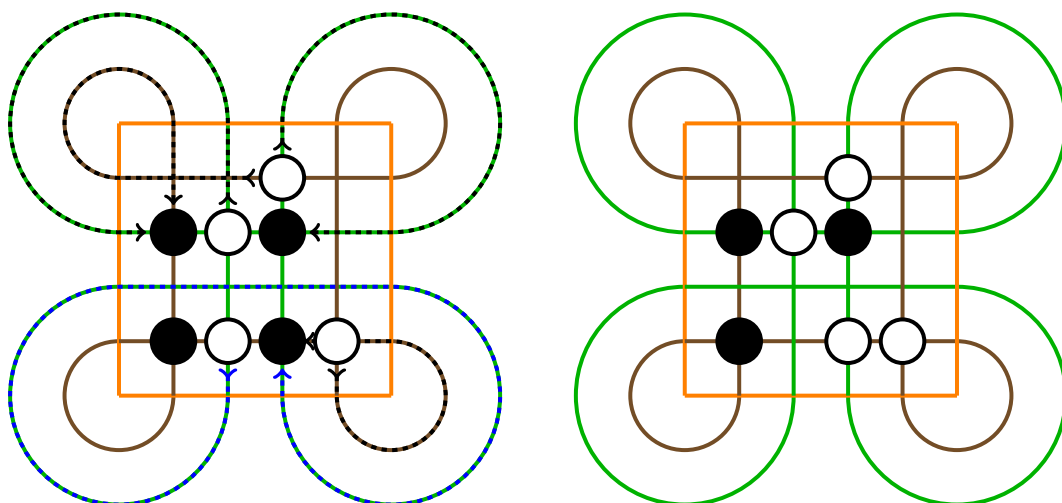


Figura 2.49: Movimentação pelas alças.

As “alças” do tabuleiro, que chamaremos de circuitos de ataque exterior e interior, possibilitam realizarmos a investida e capturar a peça de um oponente. Esse é o único momento em que as peças se movimentam mais de uma casa. Seguindo sempre uma linha de mesma cor, a peça

deve percorrer um caminho sem interrupções de outras peças, passando antes por pelo menos um circuito e parando na casa da peça oponente, removendo-a do jogo. Na Figura 2.49 se mostra um exemplo de movimentação pelas alças onde estão todas as investidas possíveis das peças brancas e resultado da investida em azul.

### 2.7.3 Estratégias

Encontros de linhas de mesma cor são posições fortes, já que permitem mais tipos de capturas e impedem que o inimigo passe pela alça do respectivo encontro, como mostrado na Figura 2.50, na qual as peças pretas A e B impedem que as duas peças brancas 1 e 2 façam a investida passando pelo circuito exterior superior direito e também pelo circuito interior inferior esquerdo.

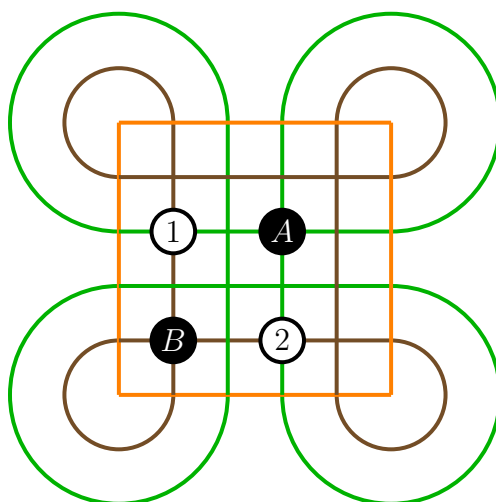


Figura 2.50: Posições fortes

As pontas são as posições mais desfavoráveis do tabuleiro, já que se houver uma peça numa interseção de linhas de mesma cor como acima, qualquer movimentação a deixa suscetível a uma investida. Observemos, que por exemplo, na Figura 2.51, a peça preta na interseção de linhas marrons domina todas as linhas marrons, ou seja, se uma peça branca entrar em qualquer linha marrom, ela pode ser capturada.

Quando só existe uma peça em uma linha verde ou marrom, ela domina a linha.

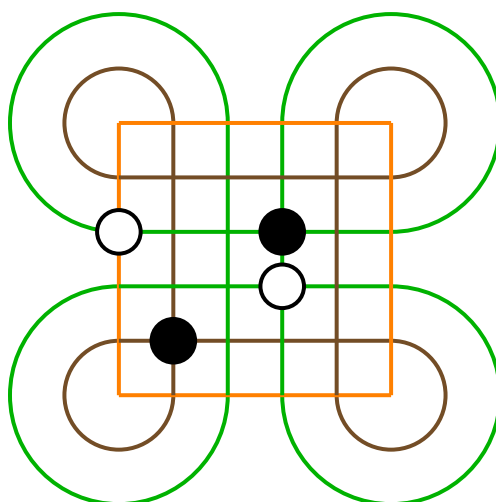


Figura 2.51: Jogo com posição desfavorável para a peça branca à esquerda

Quando o tabuleiro estiver com poucas peças, os jogadores podem acertar um empate, já que muitas vezes cada cor domina a linha de um dos circuitos, interior ou exterior, e a outra cor, a outra linha, como mostrado na Figura 2.52, que mostra uma situação em que o melhor a se fazer é firmar o empate, já que a peça branca pode sempre ficar fora das linhas verdes e a preta fora das linhas marrons. Se qualquer uma das duas forem para uma linha de outra cor, perde. Por fim,

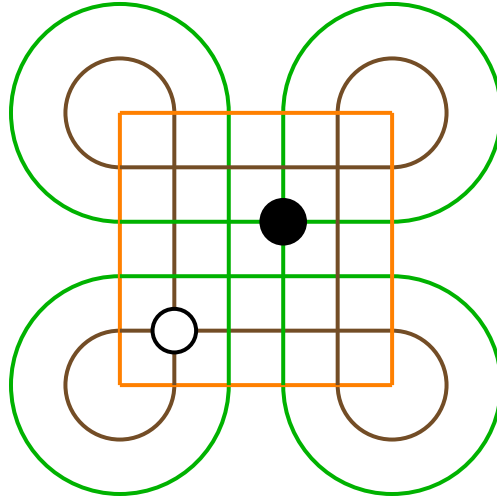


Figura 2.52: Firmar empate

observamos que em determinados momentos, o sacrifício de uma peça pode ser vantajoso, quando quem sacrifica tem vantagem no número de peças, podendo forçar uma vitória.

#### 2.7.4 Em Sala de Aula

Com o tabuleiro do Surakarta pode ser estudado um pouco de geometria. Primeiro, começamos mostrando aos alunos que podemos colocar o tabuleiro dentro de uma região quadriculada em que cada lado diremos ter uma unidade de comprimento.

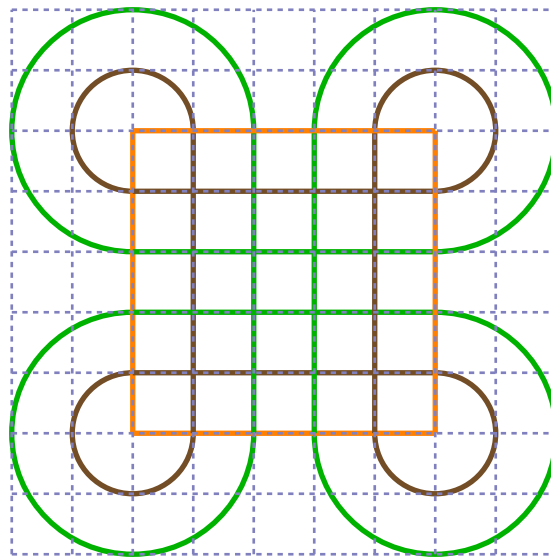


Figura 2.53: Tabuleiro contido em um quadrado e suas subdivisões em unidades de medida

Agora, pedimos para que tentem calcular o seguinte:

1. Qual o comprimento total das linhas laranjas?

2. Qual o comprimento total das linhas marrons?
3. Qual o comprimento total das linhas verdes?
4. Qual a menor distância que uma peça pode percorrer? E se ela passar por um circuito?
5. Qual a maior distância que uma peça pode percorrer?

Aqui é importante que os alunos reconheçam, por exemplo, que em cada circuito temos três partes de uma circunferência. Seria bom deixar eles pensarem um pouco antes de dar tal dica. É sempre bom pedir que eles apresentem o raciocínio utilizado na hora de encontrar as respostas, isso pode levar os alunos e alunas a expandirem suas visões e suas habilidades geométricas, principalmente nos próximos pedidos:

1. Qual a área delimitada pelo quadrado laranja?
2. Qual a área delimitada pelas linhas marrons?
3. Qual a área delimitada pelas linhas verdes?
4. Qual a área do tabuleiro?

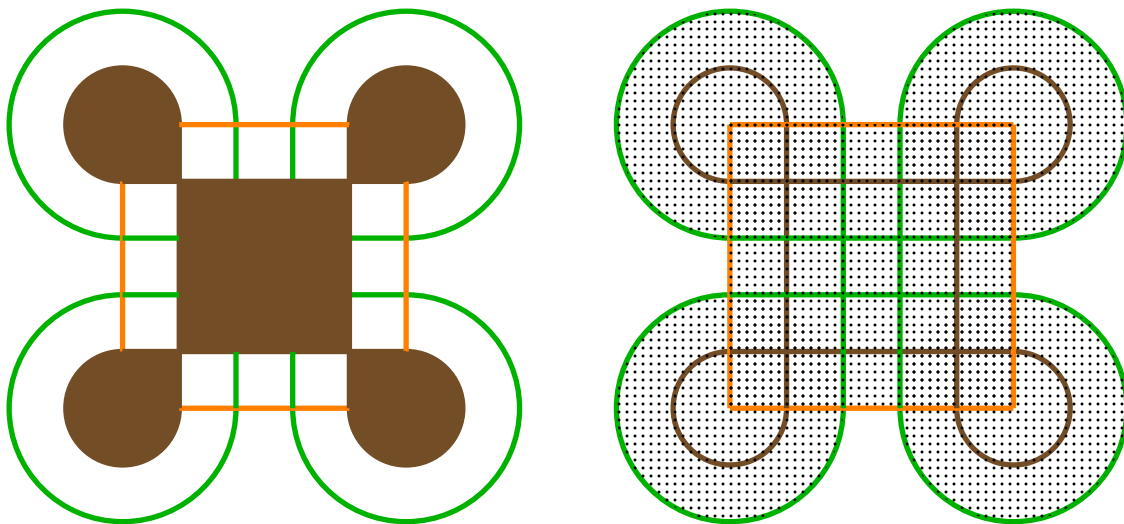


Figura 2.54: Área delimitada pelas linhas marrons e área do tabuleiro, respectivamente

## 2.8 Trilha ou Moinho

O jogo do Moinho ou Trilha é um jogo de tabuleiro abstrato para dois jogadores amplamente difundido em todo o mundo. O primeiro diagrama conhecido deste jogo foi encontrado em um templo egípcio em Kurna, datado de cerca de 1440 a.C. Possivelmente, foram os romanos que difundiram amplamente este jogo por meio das rotas comerciais. Outros tabuleiros foram encontrados em Ceylon - Sri Lanka, datado do ano 10 d.C., e em um navio Viking de Gokstad do ano 900 d.C.

Uma das primeiras menções ao jogo pode se encontrada no livro III de *Ars Amatoria* de Ovídio. O jogo também é chamado de *Alquerque dos Nove* e *Os nove homens de Morris*, entre outros nomes.

### 2.8.1 Tabuleiro e Peças

- O tabuleiro é formado por três quadrados concêntricos unidos por linhas nos pontos médios dos lados dos quadrados e por 24 círculos dispostos como mostrado na Figura 2.55. Os círculos são as casas do tabuleiro.
- 18 peças, sendo 9 azuis e 9 vermelhas (ou outras duas cores diferentes).

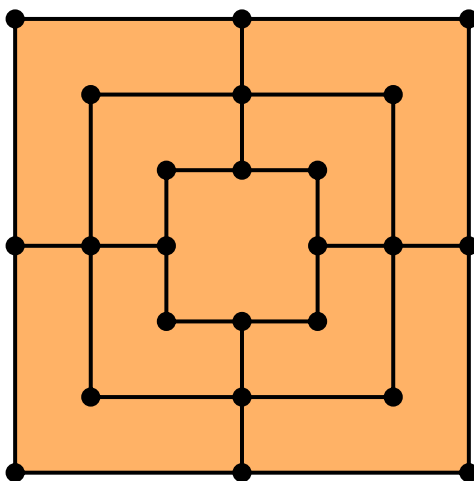


Figura 2.55: Tabuleiro do Jogo Trilha ou Moinho

### 2.8.2 Regras

O objetivo do jogo é eliminar as peças do oponente até que restem apenas duas ou até bloquear todas as peças dele de forma que não possa mais se movimentar.

O jogo é dividido em três etapas:.

1. Abertura: na qual cada jogador, alternadamente, coloca suas peças sobre casas vazias do tabuleiro. Uma casa só pode ser ocupada por uma peça de cada vez. Sempre que um jogador consegue três peças na mesma linha, ele forma um *moinho* e pode remover do tabuleiro uma das peças do adversário. O moinho conta apenas para o turno em que foi formado. Na Figura 2.56 é mostrado uma possível abertura do jogo.
2. Fase intermédia: após todas as peças ter sido colocadas no tabuleiro na abertura, cada jogador, na sua vez, movimenta qualquer uma de suas peças, por uma linha, até uma casa vizinha



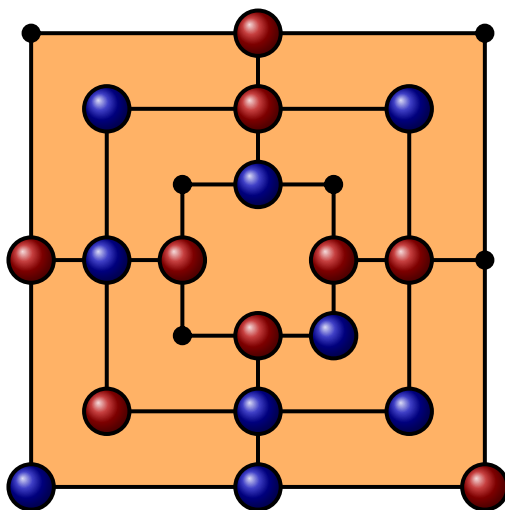


Figura 2.56: Início do jogo com as 18 peças no tabuleiro

que esteja vazia e, se em algum destes movimentos é formado um “moinho”, se retira uma peça do adversário, e ela não voltará mais ao jogo. As peças que formam um moinho não poderão ser retiradas a menos que não exista outra peça que possa ser removida.

O jogador é obrigado a movimentar uma e apenas uma peça na sua vez. Cada peça só se desloca por apenas uma casa por jogada. Se nenhuma peça puder ser movimentada, então ele estará bloqueado e perderá o jogo. Um exemplo disto é mostrado na Figura 2.56 na qual o jogador das peças azuis consegue movimentar somente uma peça, por outro lado, as peças vermelhas conseguem movimentar a peça que se encontra na parte superior do tabuleiro até formar um moinho à direita do tabuleiro e, desta forma, pode tirar a única peça azul que pode ser movimentada, com o qual, o jogador das peças azuis ficará sem jogada possível e perderá a partida, como mostrado na Figura 2.57

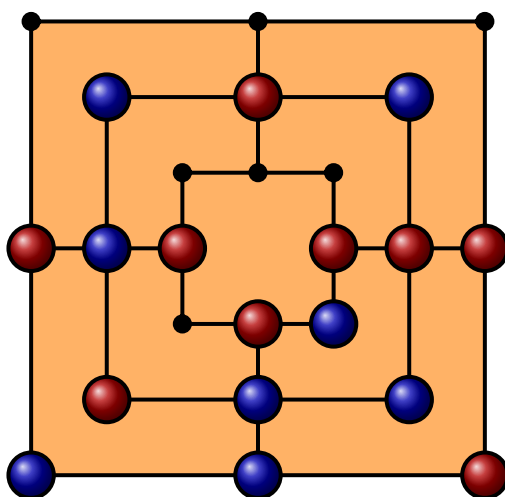


Figura 2.57: Final de jogo com as azuis sem jogada possível

3. Fase final: os jogadores continuam movimentando as peças até que um dos jogadores fique com apenas três peças e isso inicia a fase final do jogo. O jogador com três peças pode mover uma de suas peças para qualquer casa vazia no tabuleiro. O jogo termina quando um jogador fica reduzido a menos de três peças ou não consegue fazer uma jogada legal.

### 2.8.3 Estratégia

- Na fase de abertura, cada jogador deve tentar colocar suas peças em locais estratégicos que têm mais conexões, pois aí ele terá mais opções de movimento. Observamos que nesta fase não é importante formar um moinho e sim posicionar a suas peças da melhor forma possível. Em particular as peças que são colocadas em pontos médios dos lados tem mais possibilidade de movimento que as peças que são colocadas nos cantos.
- Tentar colocar suas peças em vários anéis. Isso evita que o oponente seja capaz de prender suas peças quando a segunda fase for alcançada e desta forma forçando uma vitória.
- É importante evitar dispor as peças concentradas em um único lugar, pois isso daria a oportunidade ao oponente de bloquear suas futuras jogadas e desta forma ganhando a partida.
- Dado que um jogador pode fazer o mesmo moinho repetidamente desalinhando uma peça do moinho e depois alinhando de novo, é importante bloquear que o adversário faça isso. No caso que não seja possível o bloqueio, tente seguir a mesma estratégia de seu oponente formado um moinho.
- Uma ótima maneira de garantir a vitória é alinhar dois moinhos paralelos, paralelos um ao outro, e fazer uma peça balançar para frente e para trás para formar um moinho a cada movimento o que fara com que sejam eliminada uma peça do adversário a cada jogada. Um exemplo disso acontece na partida da Figura 2.58, onde as peças vermelhas conseguem fazer um moinho a cada jogada.

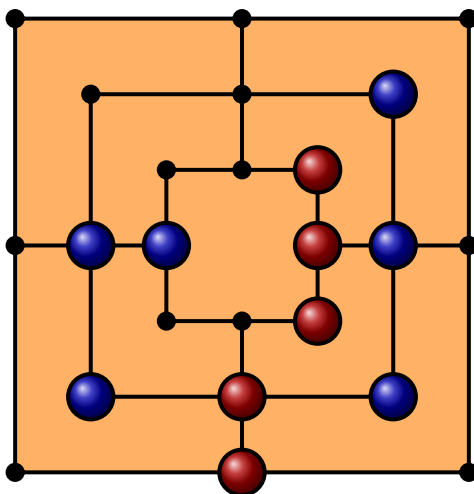


Figura 2.58: Peças Vermelhas com dois moinhos paralelos

### 2.8.4 Em Sala de Aula

O tabuleiro da Trilha é um exemplo muito interessante de uma estrutura matemática chamada de *grafo*. Um grafo é um objeto formado por vértices e linhas que unem os vértices, chamadas de *arestas*. Numeramos os vértices de nosso grafo como mostrado na Figura 2.59. A *distância* entre dois vértices é o número mínimo de arestas que temos que passar para ir de um vértice ao outro. Por exemplo, a distância entre os vértices  $v_2$  e  $v_{11}$  é 3. Por outra lado, o *grau* de um vértice é o número de arestas que chegam nele. Por exemplo, o grau do vértice  $v_2$  é 3 e o grau do vértice  $v_{11}$  é 4.

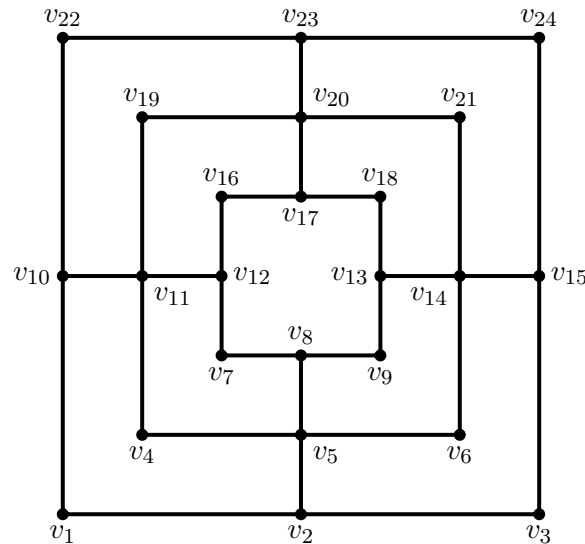


Figura 2.59: Grafo associado ao tabuleiro do moinho

1. Qual é a distância entre os vértices  $v_3$  e  $v_{12}$ ?
2. Qual é a distância máxima que temos entre os vértices do grafo?
3. De quantas formas diferentes podemos ir do vértice  $v_2$  ao vértice  $v_{17}$  com um número mínimo de movimentos?
4. Qual ou quais são os vértices mais distantes a  $v_1$ ?
5. Quantos vértices têm grau ímpar?
6. Queremos construir um caminho que passe no máximo uma vez por cada aresta. Qual é o maior número de arestas que esse caminho pode conter? Como dica para este problema, observemos que cada vez que entramos e saímos de um vértice usamos duas arestas, isto é, um número par. Logo, o número de arestas que fazem parte do caminho em cada vértice é par, exceto para o primeiro e último vértice se eles forem distintos.
7. Agora queremos construir um caminho que passe, no máximo, uma vez por cada vértice. Encontre um caminho com esta propriedade que passe por todos os vértice exceto o vértice  $v_4$ . É possível construir um destes caminhos que passem por todos os vértices?

## 2.9 Mais Jogos de Tabuleiro do Acervo

O Museu conta com um acervo bem diversificado de jogos de tabuleiro, sendo eles de diversas regiões e culturas. Hex, Y, Shisima, Jarmo, Patoli, Puluc, Senet, Real de Ur, Oware, Hnefatafl, Moinho, Adugo, Xo Dou Qi, e Bhaga Chal são exemplos de jogos de nosso acervo. Se quiser obter informações sobre este acervo, pode solicitá-las através do email do Museu.

A seguir, apresentamos as regras de dois desses jogos. Trata-se de jogos de tabuleiro com os quais é possível trabalhar diversos conceitos matemáticos. Cabe destacar que estes jogos proporcionam o aprimoramento de técnicas de resolução de problemas, induzem à busca de estratégias, o que leva ao desenvolvimento do raciocínio lógico, próprio da atividade matemática.

### 2.9.1 O Jogo Real de Ur

O Jogo Real de Ur é uma corrida entre dois adversários, o qual ganha aquele que primeiro completar o percurso com todas suas peças. A utilização do jogo como um recurso didático para o ensino de matemática coloca-se como uma estratégia na proposição de problemas, no estudo de conceitos geométricos envolvidos no tabuleiro e peças e no conceito de probabilidade.

#### Tabuleiro e Peças

O jogo consta de um tabuleiro, 4 dados tetraédricos e 10 peças, sendo 5 de uma mesma cor para cada jogador, como mostrado na Figura 2.60.

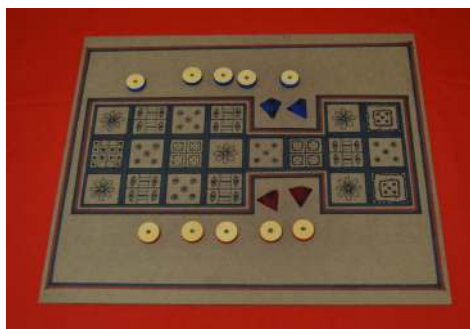


Figura 2.60: Jogo Real de Ur

#### Regras

- Lançam-se os dados. Quem tirar o maior número inicia a partida.
- O jogador, na sua vez, lança os 4 dados contando os pontos obtidos e avança esse número de casas com uma única peça, no sentido indicado na Figura 2.61.

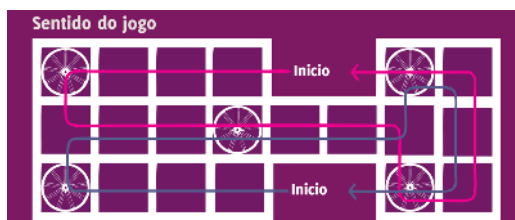


Figura 2.61: Sentido do jogo

- Se uma peça cai na roseta (flor), o jogador deve lançar os dados outra vez, movendo qualquer uma de suas peças.
- Se a peça cai sobre uma peça adversária, esta peça é capturada e retirada do tabuleiro, recomeçando seu trajeto. As peças na casa da roseta estão protegidas, não podendo ser capturadas. Nesse caso, a peça que atinge por último essa casa deverá recomeçar o trajeto.
- Não se pode compartilhar casas, mas se pode passar por cima de qualquer peça.
- Cada jogador, na sua vez jogador é obrigado a mover alguma de suas peças e caso esse jogador não possa movimentar peças, ele deverá ceder o turno.
- No final do percurso, as peças de um jogador só podem sair do tabuleiro se ele tirar o número exato necessário com os dados, sem ultrapassá-lo.
- Ganha o primeiro que consegue completar o caminho com todas suas peças.

## 2.9.2 Oware

O Oware é um jogo da família dos mancalas ou *jogos de semeadura*, que representa o trabalho de semeadura e colheita dos povos africanos. Com o Oware, só se tem que regar, esperar e ser paciente. Existem muitas variantes dos jogos de semear e contar, mas os mais conhecidos no mundo ocidental são o Oware, Kalah, Sukah, Onweso e Bao.

### Tabuleiro e Peças

O jogo consta de um tabuleiro e 48 peças (sementes) como mostrado na Figura 2.62.



Figura 2.62: Oware

### Regras

- O território de cada jogador é formado pelas 6 cavas (casas) da fileira à sua frente, acrescido do oásis (cavidade maior).
- Distribuem-se 4 sementes em cada uma das 12 casas, exceto nos dois oásis/reservatórios.
- O território de cada jogador é formado pelas 6 casas da fileira à sua frente, acrescido do oásis.
- Na sua vez, o jogador recolhe todas as sementes de uma de suas casas e as distribui, uma a uma, em sentido anti-horário, nas casas subsequentes e prossegue semeando ao redor do tabuleiro, inclusive colocando uma semente em cada casa no lado do adversário quando estas são alcançadas (isto é, enquanto tiver sementes na mão) .
- Quando um jogador coloca a sua última semente numa casa do território adversário e esta casa fica com duas ou três sementes, o jogador pode “colher” as sementes dessa casa, colocando-as em seu oásis. Se a casa anterior também possuir duas ou três sementes, estas também devem ser colhidas, repetindo o procedimento para a casa anterior a esta, até que encontre uma casa sem condições de colheitas (ou seja que não tenha duas ou três sementes).
- Nunca se recolhem sementes de suas próprias casas, apenas no lado do adversário.
- Ao terminar a distribuição das sementes (*semeadura*), e realizar a colheita se for o caso, o jogador passa a vez.
- Se o jogador colhe de uma casa 12 sementes ou mais, quando estiver no processo de semeadura e chegar na casa de partida, ela não deve ser semeada.
- Se um jogador fica sem sementes em seu território e seu oponente tem opção de fazer uma semeadura nas casas desse jogador, tal semeadura se torna obrigatória.
- Ganha quem coletar mais da metade das sementes, isto é, 25 sementes ou mais.

# Referências Bibliográficas

- [1] BELL, R. C. *Board and Table Games from Many Civilizations*. Dover Publications, 1979
- [2] BROCHERO, F.; GIRALDO, C. *Manual de Atividades I - Museu da Matemática UFMG*. <http://www.mat.ufmg.br/museu/wp-content/uploads/2019/08/ManualeBook.pdf>, 2019.
- [3] BROCHERO, F.; GIRALDO, C. *Manual de Atividades II - Museu da Matemática UFMG*. <https://www.mat.ufmg.br/museu/wp-content/uploads/2020/05/Cartilha2pagina.pdf>
- [4] BROWNE, C. *Connection Games: Variations on a Theme*. CRC Press, 2018.
- [5] *HNEFATAFL: the Game of the Vikings*. <http://tafl.cynningstan.com/>
- [6] LANDAU, T. *Othello: Brief & Basic*. <http://www.tedlandau.com/files/Othello-B&B.pdf> 1990
- [7] MARLOW A.; TODD F.. *Turning Lights Out with Linear Algebra*. Mathematics Magazine. 71 (1998) 300–303.
- [8] NASH, J. Rand Corp. technical report D-1164: Some Games and Machines for Playing Them. <https://www.rand.org/content/dam/rand/pubs/documents/2015/D1164.pdf>
- [9] NETO, J. P.; NUNO SILVA, J. *Jogos Matemáticos, Jogos abstractos*. RBA 2008.
- [10] Secretaria Municipal de Educação de São Paulo, *JOGO DA ONÇA*. <https://educacao.sme.prefeitura.sp.gov.br/wp-content/uploads/2020/12/Miolo-e-Capa-Jogo-da-OnC3A7a-WEB-1.pdf>



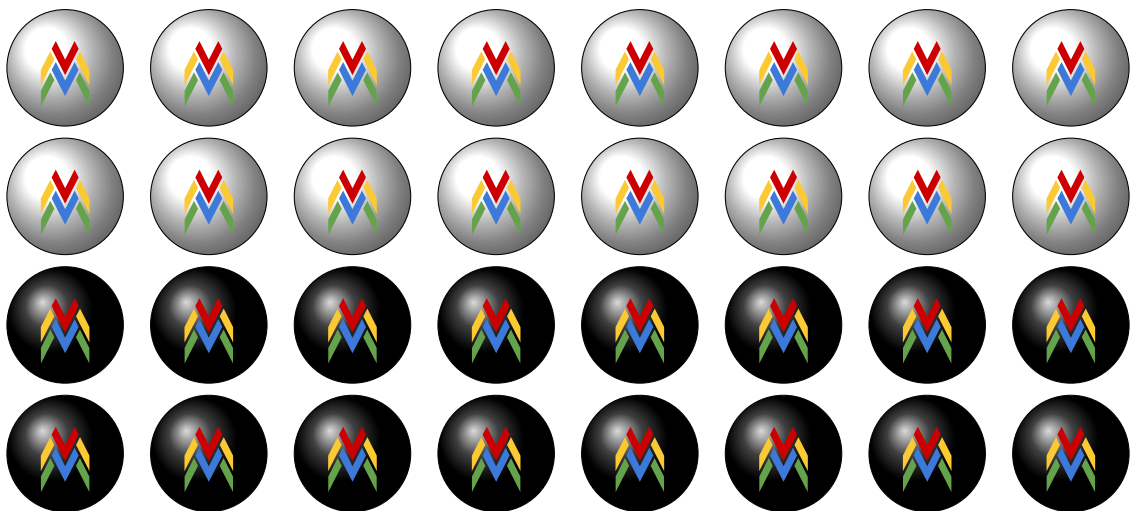
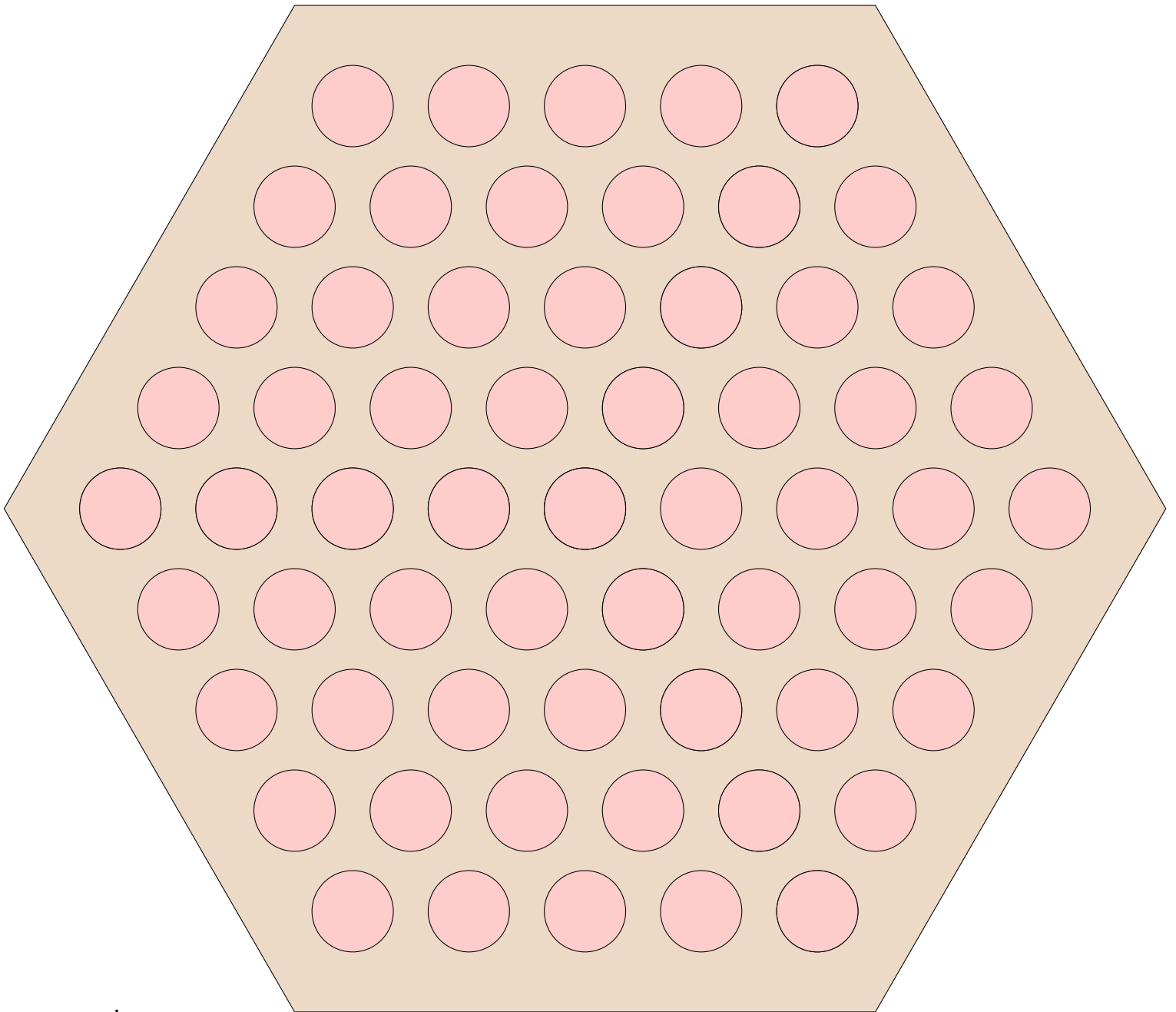


Figura 3.63: Tabuleiro e Peças do Abalone



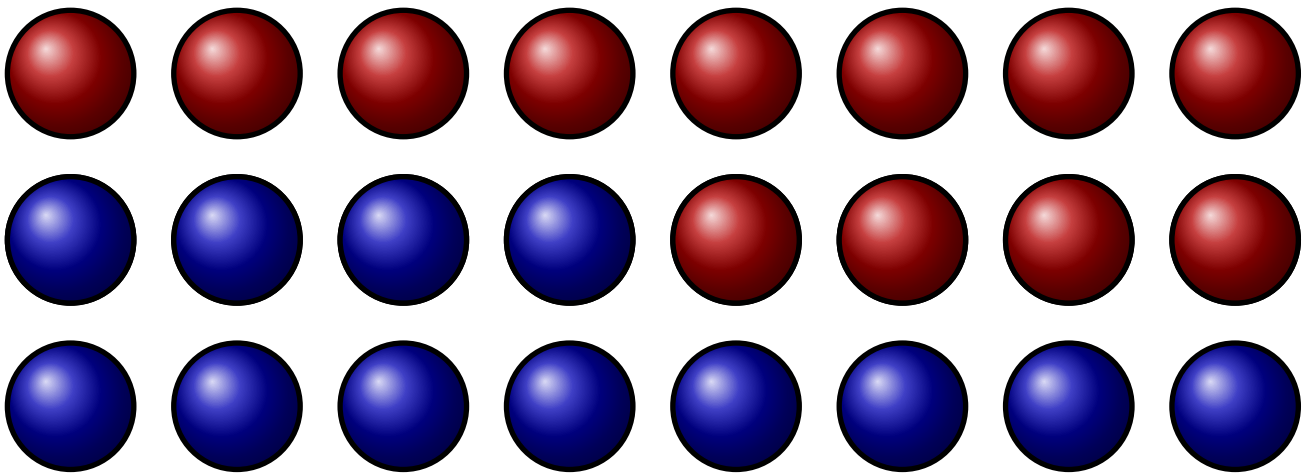
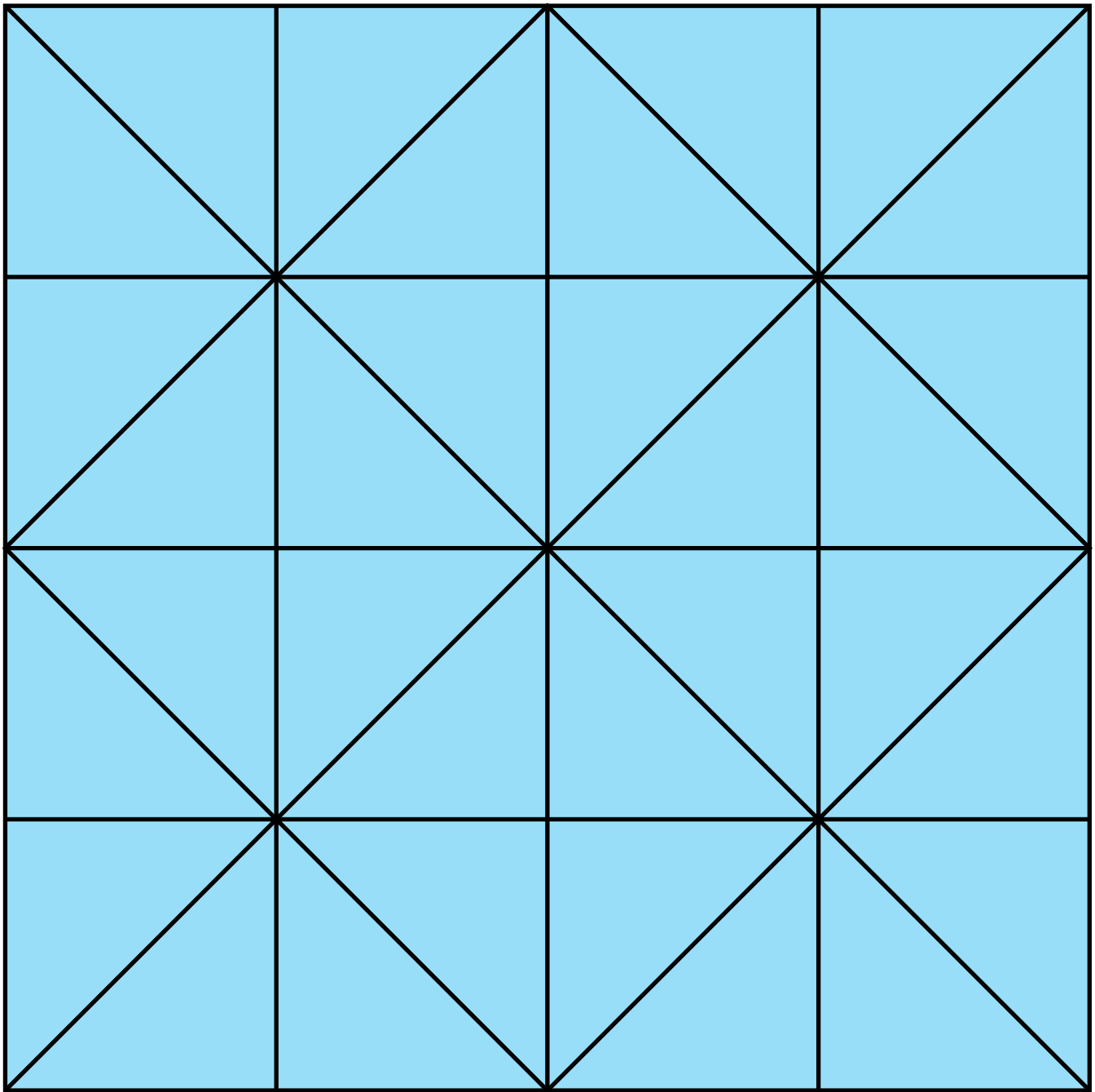


Figura 3.64: Tabuleiro e Peças do Alquerque

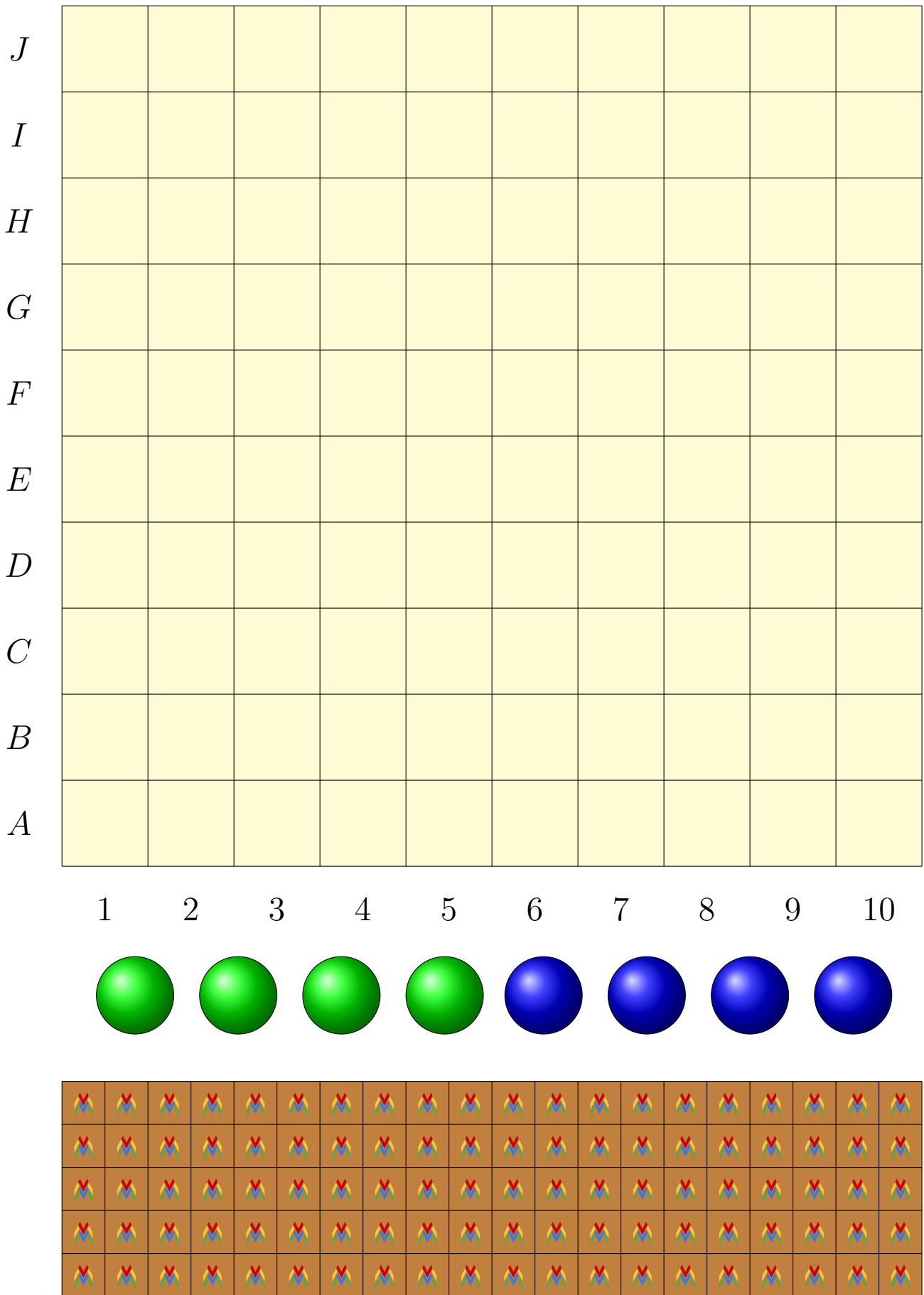


Figura 3.65: Tabuleiro e Peças do Jogo das Amazonas

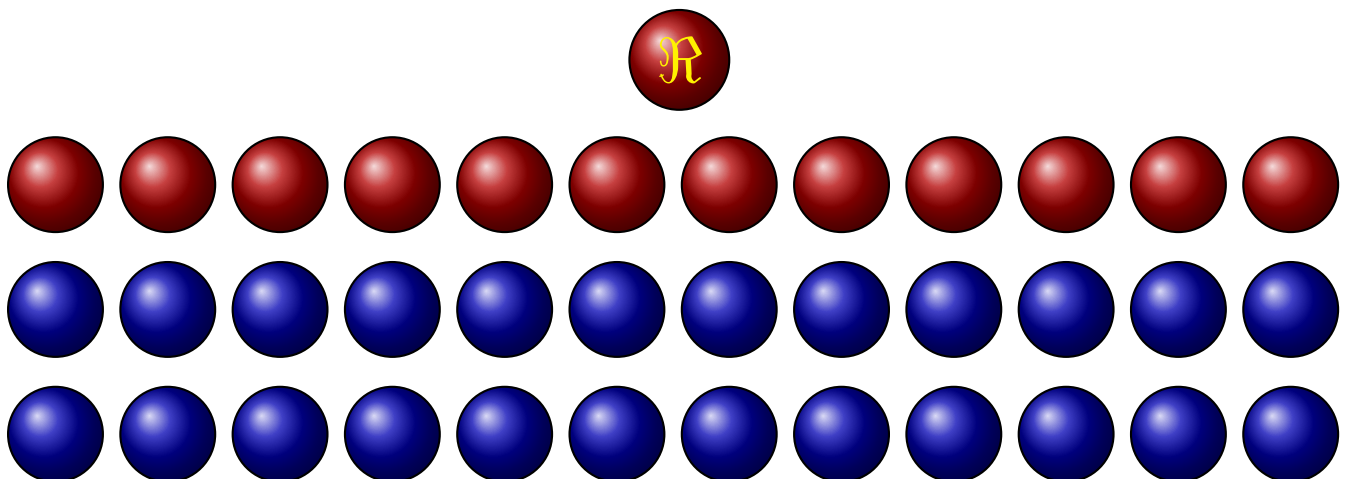
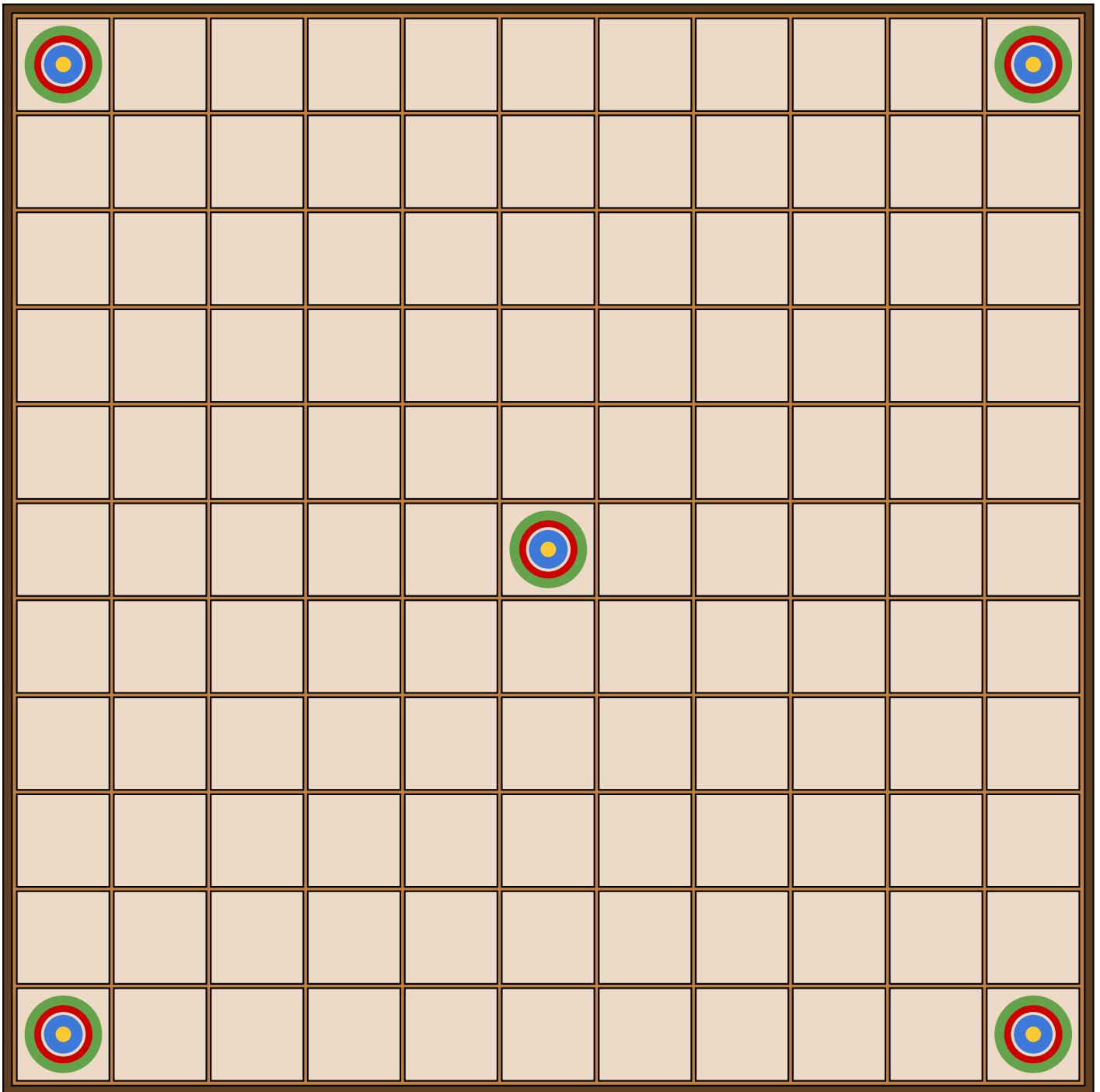


Figura 3.66: Tabuleiro e Peças do Hnefatafl

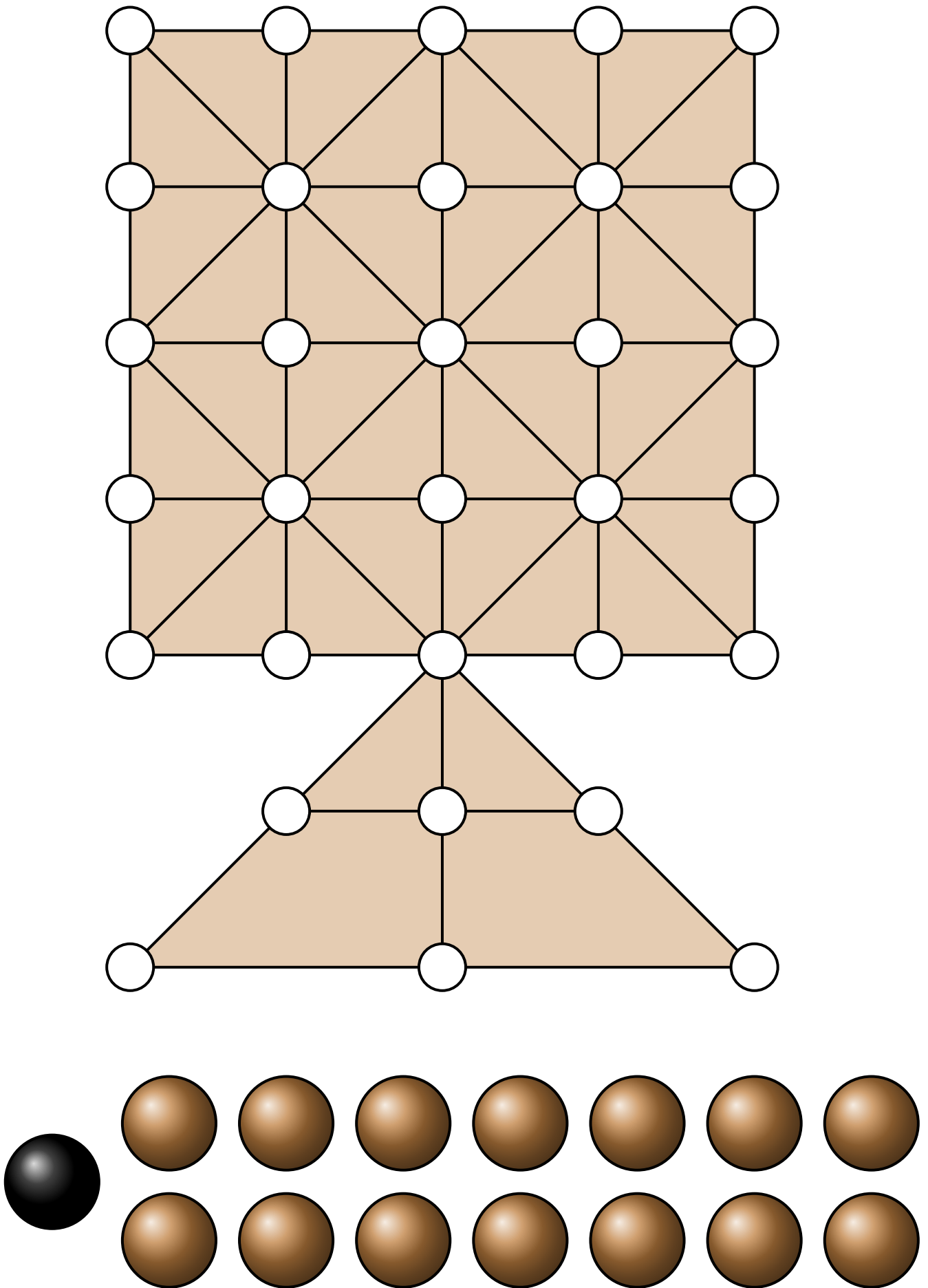


Figura 3.67: Tabuleiro e Peças do Adugo ou Jogo da Onça

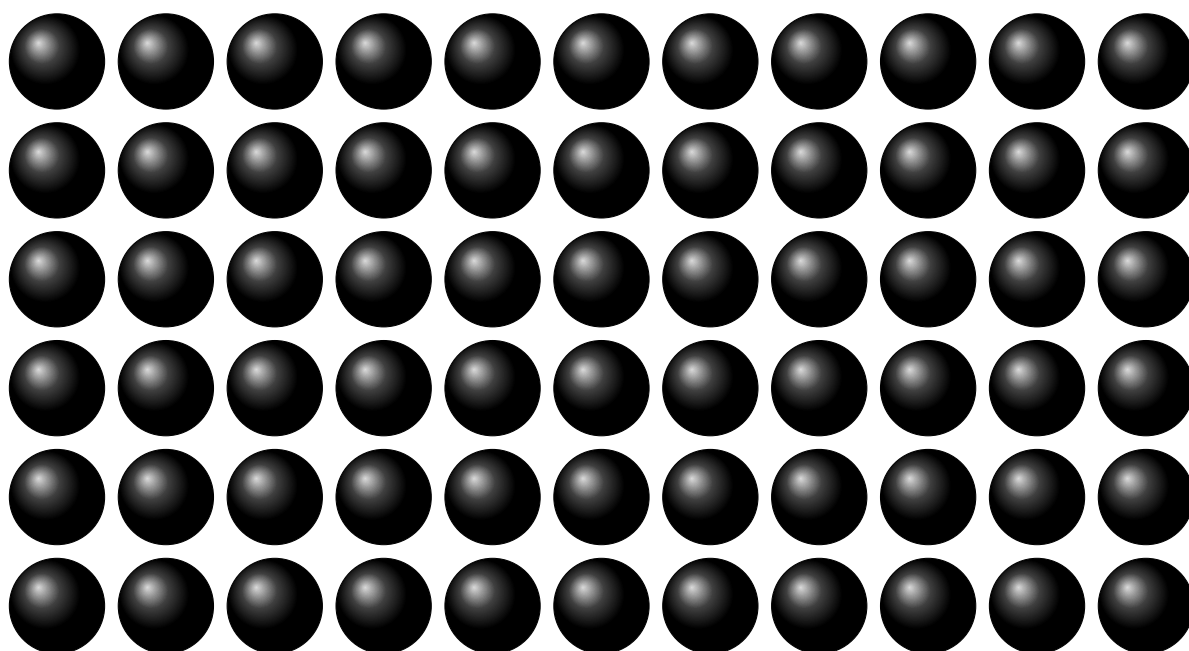
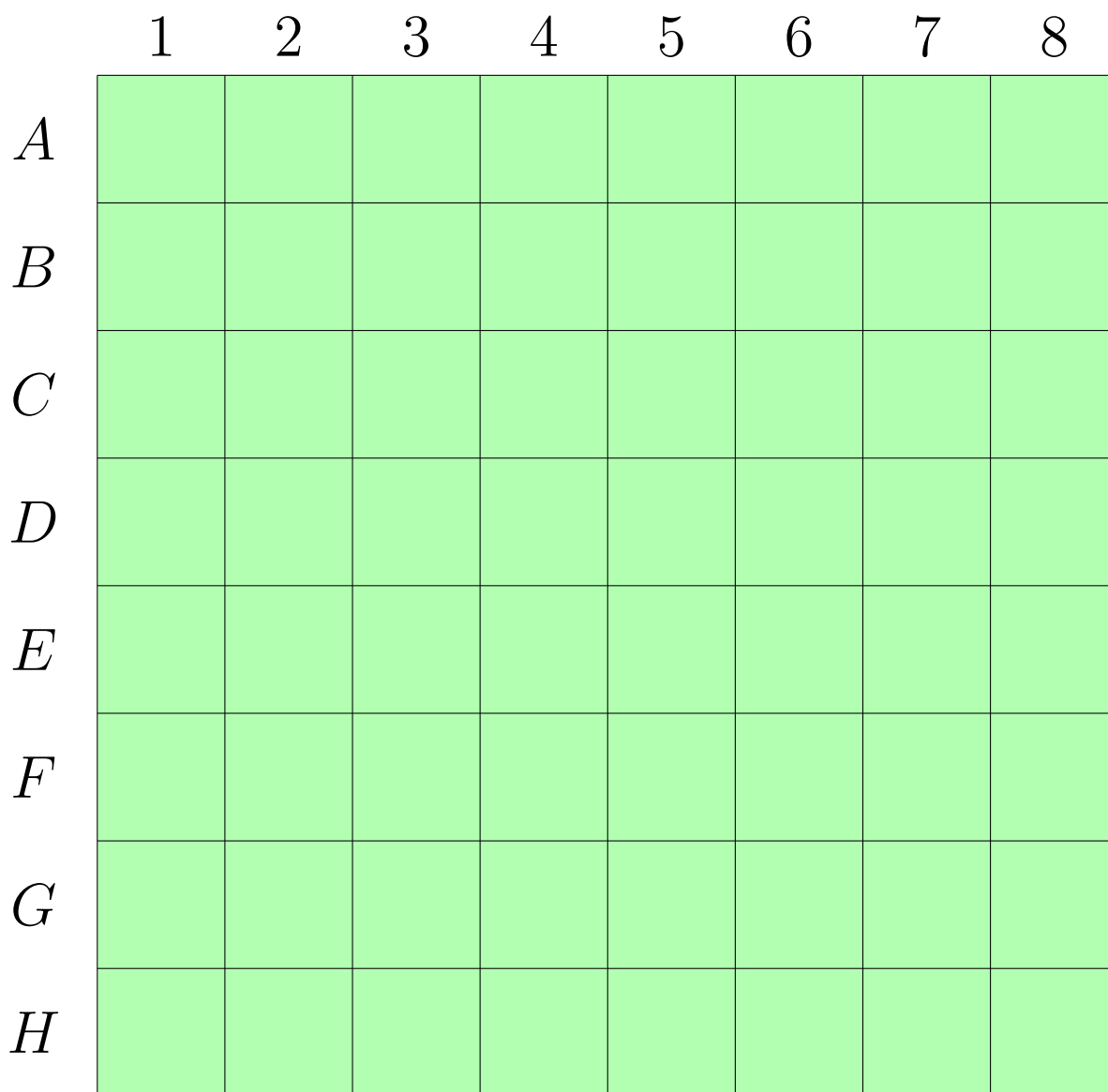


Figura 3.68: Tabuleiro e Peças do Othello

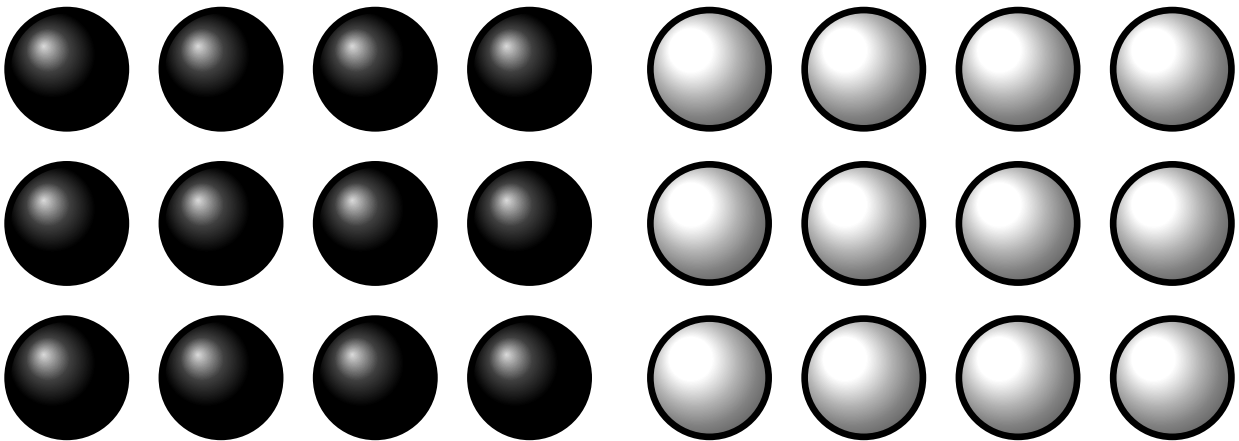
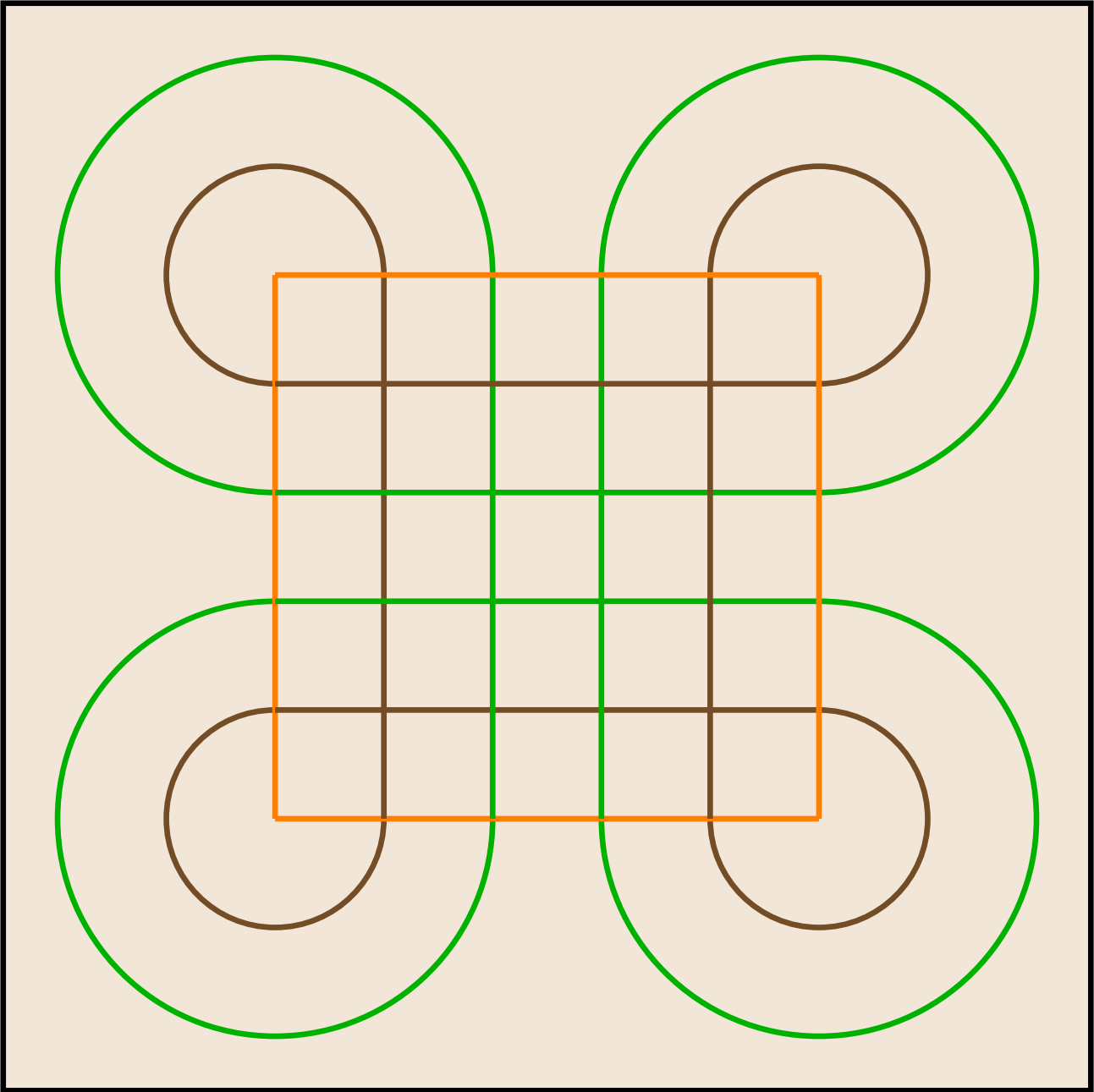


Figura 3.69: Tabuleiro e Peças do Surakarta

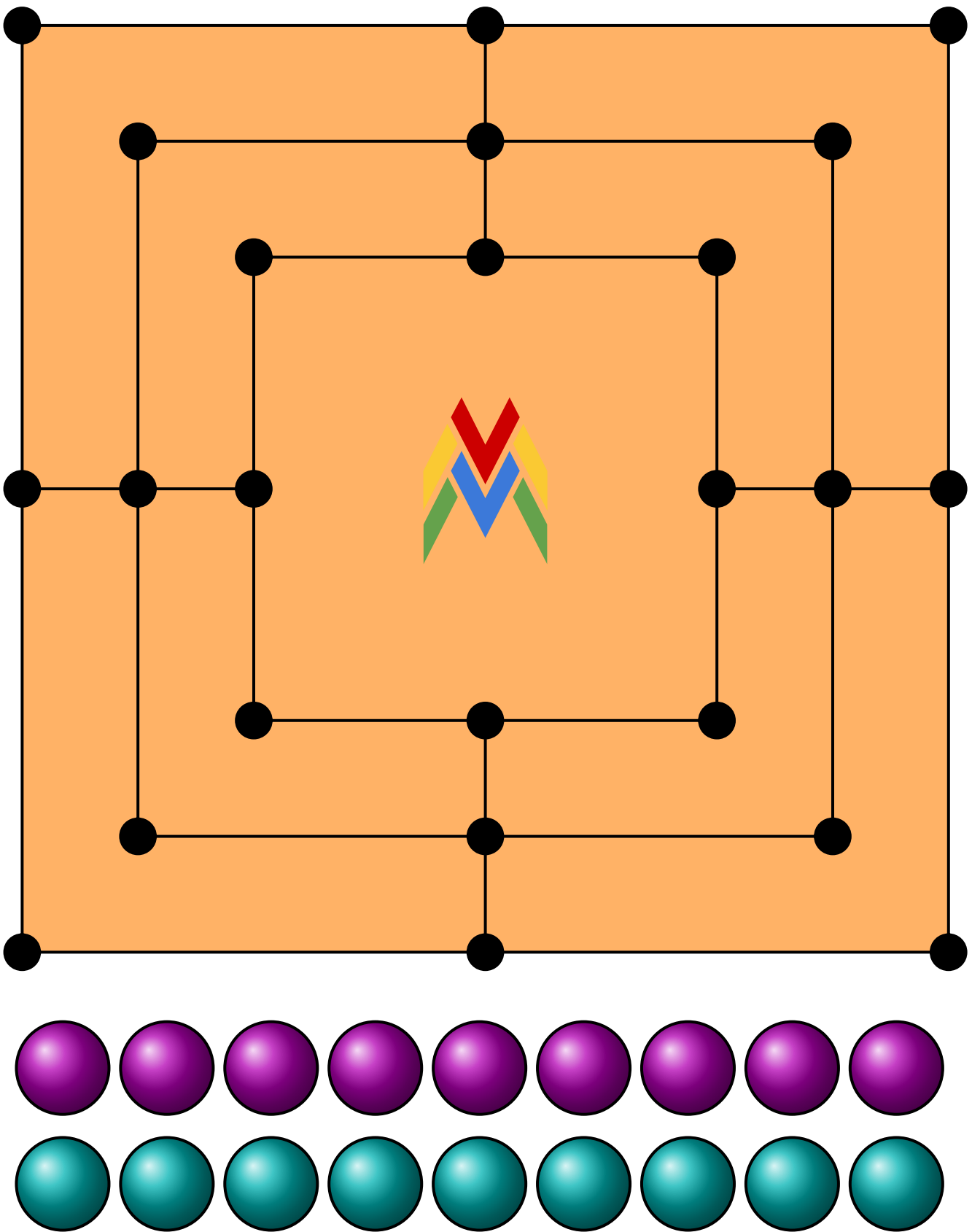
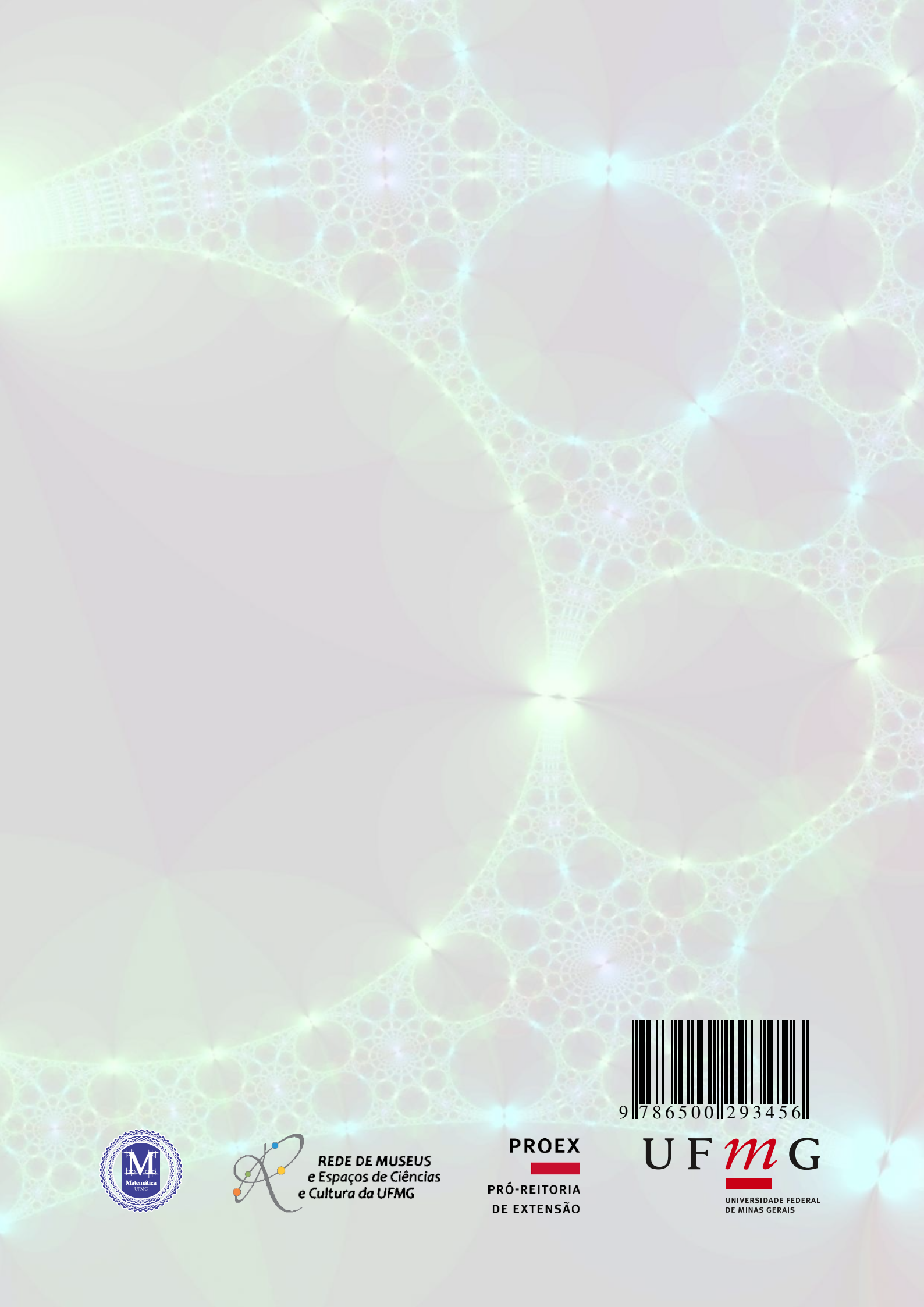


Figura 3.70: Tabuleiro e Peças da Trilha ou moinho



REDE DE MUSEUS  
e Espaços de Ciências  
e Cultura da UFMG

PROEX  
  
PRÓ-REITORIA  
DE EXTENSÃO



U F *m* G  
  
UNIVERSIDADE FEDERAL  
DE MINAS GERAIS