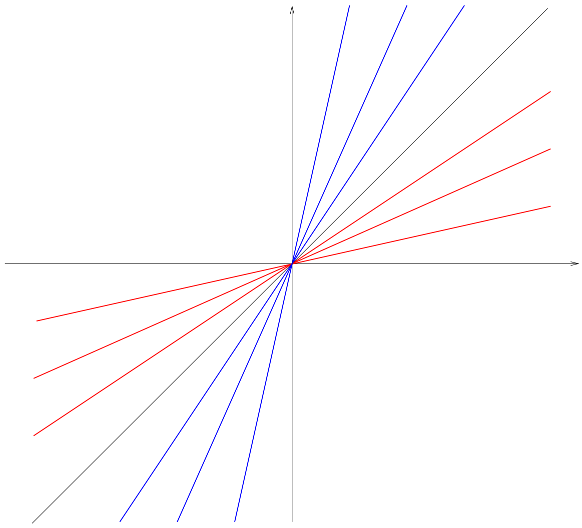
DENOMBRABILITE

P. Pansu

14 mai 2005

1 Motivation

Il y a t'il plus de réels dans $]1, +\infty[$ ou dans l'intervalle $]0, 1[$? Oui, bien sûr. Des droites passant par l'origine dans le plan, il y en a-t-il autant en dessus ou en dessous de la bissectrice $\{x = y\}$ (voir figure) ? Par symétrie, il y en a clairement autant.



Or toute droite passant par l'origine (à l'exception de l'axe Oy) est représentée par une équation de la forme $y = ax$, où a est la *pente*. Les droites situées au dessus de la bissectrice correspondent aux pentes $a > 1$, celle situées au dessous aux pentes $0 < a < 1$. Il y aurait donc autant de réels $]1, +\infty[$ ou dans l'intervalle $]0, 1[$?

Et des rationnels, il y en a t'il plus dans $\mathbf{R}$? dans $]0, 1[$? dans $[0, 1]$? Il y a t'il plus de réels que de rationnels ? On va voir que tous les ensembles infinis ne sont pas équivalents, certains sont plus grands que d'autres. On commence par étudier les plus petits d'entre eux, ce sont les ensembles dénombrables.

2 Ensembles dénombrables

2.1 Définition

Rappel. Une application $f : A \to B$ entre deux ensembles est une *bijection* si, pour tout $y \in B$, l'équation $f(x) = y$ possède une et une seule solution $x \in A$. Dans ce cas, on note la solution $x = f^{-1}(y)$, et l'application $f^{-1} : B \to A$ s'appelle *l'application réciproque* de f. Elle satisfait $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$.

Pour vérifier qu'une application $f : A \to B$ est une bijection, il suffit souvent de deviner son application réciproque. En effet, s'il existe $g : A \to B$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_B$ et $g \circ f = \mathrm{id}_A$, alors f est une bijection et $g = f^{-1}$.

Définition 1 *Un ensemble E est dit* dénombrable *s'il existe une bijection de E sur un sous-ensemble de l'ensemble* $\mathbf{N}$ *des entiers naturels.*

Exemple 2 *Tout ensemble fini est dénombrable. L'ensemble des entiers naturels pairs est dénombrable.*

Remarque 3 *Une bijection sur un sous-ensemble de* $\mathbf{N}$*, c'est la même chose qu'une application injective $E \to \mathbf{N}$. Plus généralement, s'il existe une application injective de E dans un ensemble dénombrable, alors E est dénombrable.*

Proposition 4 *Soit E un ensemble dénombrable infini. Alors il existe une bijection de* $\mathbf{N}$ *sur E. Autrement dit, on peut numéroter les éléments de E, i.e. écrire $E = \{e_0, e_1, \ldots, e_n, \ldots\}$.*

Preuve. Soit A un sous-ensemble infini de $\mathbf{N}$. Notons a_0 son plus petit élément, puis a_1 le plus petit élément de $A \setminus \{a_0\}$, puis a_2 le plus petit élément de $A \setminus \{a_0, a_1\}$, etc... Par récurrence sur n, on construit un élément a_n de A, le n-ème par ordre croissant, tel que les éléments de A qui sont inférieurs à a_n sont exactement $a_0 < \ldots < a_{n-1}$. Comme A est infini, le procédé ne s'arrête jamais.

Montrons qu'il épuise tous les éléments de A. Si $x \in A$, l'ensemble des éléments de A qui sont inférieurs ou égaux à x est fini. Soit n le nombre de ses éléments. Alors $x = a_n$. L'application $\mathbf{N} \to A$, $n \mapsto a_n$ est donc une bijection.

Soit maintenant E un ensemble dénombrable infini. Par définition, il existe un sous-ensemble A de $\mathbf{N}$ et une bijection $f : A \to E$. A est infini, donc il existe une bijection $g : \mathbf{N} \to A$. Alors $f \circ g$ est une bijection de $\mathbf{N}$ sur E.■

Exemple 5 *L'application $f_{pair} : n \mapsto 2n$ est une bijection de* $\mathbf{N}$ *sur l'ensemble des entiers naturels pairs.*

2.2 Exemples

Exercice 6 *Montrer que* $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ *est dénombrable. En déduire que le produit d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.*

Fin du cours n^{0}8

Solution de l'exercice 6. $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ *est dénombrable.*

On se promène dans un quadrant diagonale par diagonale. On pose $g(0) = (0,0)$, $g(1) = (1,0)$, $g(2) = (0,1)$, $g(3) = (2,0)$, $g(4) = (1,1)$, $g(5) = (0,2)$, $g(6) = (3,0)$,... Pour $n \in \mathbf{N}$ et $0 \leq k \leq n$, on pose $g(\frac{n(n+1)}{2} + k) = (n,k)$. On numérote ainsi tous les couples d'entiers naturels.

On définit $h : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ par la formule $h(n,m) = (n, g(m))$. On obtient ainsi une bijection de $\mathbf{N}^2 = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ sur $\mathbf{N}^3$. Par récurrence sur k, on montre ainsi que $\mathbf{N}^k$ est dénombrable. Soient $E_1, \ldots, E_k$ des ensembles dénombrables. Soit $f_i = E_i \to \mathbf{N}$ une bijection sur un sous-ensemble de $\mathbf{N}$. Alors $E_1 \times \cdots \times E_k \to \mathbf{N}^k$, $(x_1, \ldots, x_k) \mapsto (f_1(x_1), \ldots, f_k(x_k))$ est injective, donc c'est une bijection sur son image, un sous-ensemble de $\mathbf{N}^k$, qui est dénombrable, donc $E_1 \times \cdots \times E_k$ est dénombrable.

Exercice 7 *Montrer que* $\mathbf{Q}$ *est dénombrable.*

Solution de l'exercice 7. $\mathbf{Q}$ *est dénombrable.*

Tout rationnel s'écrit de façon unique comme fraction réduite $x = p/q$ où $q \geq 1$ et $p \wedge q = 1$. L'application $f : \mathbf{Q} \mapsto \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$, $f(x) = (p,q)$ est injective, c'est une bijection sur son image, un sous-ensemble de $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$. Comme $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ est dénombrable (exercice 6), $\mathbf{Q}$ est dénombrable.

Exercice 8 *Soit* $(E_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une famille dénombrable de sous-ensembles dénombrables d'un ensemble* E*. Montrer que la réunion* $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n$ *est dénombrable.*

Solution de l'exercice 8. *Unions dénombrables de dénombrables.*

Notons $F_n = E_n \setminus (E_1 \cup \cdots \cup E_{n-1})$. Alors $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} F_n$, et les F_n sont deux à deux disjoints. Soit $f_n : E_n \to \mathbf{N}$ une injection. Pour $x \in F_n$, posons $f(x) = (n, f_n(x))$. En juxtaposant les f_n, on obtient une injection de $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} F_n$ dans $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$. Par conséquent, $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n$ est dénombrable.

Exercice 9 *Montrer que l'ensemble des polynômes à coefficients entiers est dénombrable. Montrer que l'ensemble des sous-ensembles finis de* $\mathbf{N}$ *est dénombrable.*

Solution de l'exercice 9. *Polynômes à coefficients entiers.*

A chaque polynôme de degré $\leq d$, associons la suite $(a_0, \ldots, a_d)$ de ses coefficients. On obtient ainsi une injection de l'ensemble $\mathcal{P}_d$ des polynômes de degré $\leq d$, à coefficients entiers, dans $\mathbf{Z}^{d+1}$, qui est dénombrable. Comme l'ensemble des polynômes à coefficients entiers est la réunion $\bigcup_{d\in\mathbf{N}} \mathcal{P}_d$, il est dénombrable, d'après l'exercice 8.

Soit F_n l'ensemble des sous-ensembles à n éléments de $\mathbf{N}$. A un tel sous-ensemble, on associe la suite de ses éléments, rangés par ordre croissant. On obtient ainsi une injection de F_n dans $\mathbf{N}^n$. D'après l'exercice 6, F_n est dénombrable. L'ensemble des sous-ensembles finis de $\mathbf{N}$ est la réunion $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} F_n$, donc il est dénombrable, d'après l'exercice 8. On peut aussi plonger cet ensemble dans l'ensemble des polynômes à coefficients entiers, en associant à chaque sous-ensemble fini A de $\mathbf{N}$ le polynôme $\sum_{i\in A} t^i$.

Exercice 10 *Soit* $A = \mathbf{Q} \cap [0,1]$ *et* $B = \mathbf{Q} \cap]0,1[$*. Existe-t'il une bijection de* A *sur* B *?*

Solution de l'exercice 10. $\mathbf{Q} \cap [0,1]$ *n'est pas plus grand que* $\mathbf{Q} \cap]0,1[$.

A et B sont des sous-ensembles de $\mathbf{Q}$, donc ils sont dénombrables. Ils sont tous les deux infinis. D'après la proposition 4, il existe une bijection $f : \mathbf{N} \to A$ et une bijection $g : \mathbf{N} \to B$. Alors $g \circ f^{-1}$ est une bijection de A sur B.

Voici un procédé pour construire explicitement une bijection de A sur B. Soit $C \subset B$ l'ensemble des nombres de la forme 2^{-n}, $n \geq 1$, et $D = C \cup \{0, 1\}$. Pour construire une bijection de D sur C, il suffit de poser $f(0) = 1/2$, $f(1) = 1/4$ et, pour $n \geq 1$, $f(2^{-n}) = 2^{-n-2}$. On prolonge f par l'identité sur $A \setminus D = B \setminus C$.

3 Ensembles non dénombrables

3.1 La droite réelle

Théorème 1 (Cantor). $\mathbf{R}$ *n'est pas dénombrable.*

Preuve. Il suffit de trouver un sous-ensemble A de $\mathbf{R}$ qui n'est pas dénombrable. Soit A l'ensemble des réels compris entre 0 et 1 et dont le développement décimal ne comporte, après la virgule, que des 1 et des 8, comme 0.88118188881111818881181888881....

On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe une bijection $f : \mathbf{N} \to A$. Pour chaque $n \in \mathbf{N}$, notons

$$f(n) = 0.a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}\ldots a_{n,k}\ldots$$

où $a_{n,k}$ vaut 1 ou 8. Soit x le réel dont le développement décimal est

$$x = 0.a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}\ldots a_{k,k}\ldots$$

et $y = 1 - x$. Alors $y \in A$, car le développement décimal de y présente un 1 (resp. un 8) là où celui de x présente un 8 (resp. un 1). Il existe donc $n \in \mathbf{N}$ tel que $f(n) = y$. Or le n-ème chiffre de y vaut $9 - a_{n,n}$, alors que celui de $f(n)$ vaut $a_{n,n}$, contradiction. On conclut que A n'est pas dénombrable, donc que $\mathbf{R}$ n'est pas dénombrable.$\blacksquare$

Fin du cours n^{0}9

Corollaire 11 *L'ensemble des nombres irrationnels n'est pas dénombrable.*

Preuve. Par l'absurde. Comme $\mathbf{Q}$ est dénombrable, si $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ était dénombrable, la réunion $\mathbf{R}$ serait dénombrable, contradiction.$\blacksquare$

Définition 12 *Un nombre réel ou complexe x est* algébrique *s'il existe un polynôme P non nul, à coefficients entiers, tel que $P(x) = 0$. Un nombre qui n'est pas algébrique est dit* transcendant.

Exemple 13 *$\sqrt{2}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sont algébriques.*

En effet, $\sqrt{2}$ est racine de $P(x) = x^2 - 2$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est racine de $Q(x) = x^4 - 10x^2 + 1$. Il est moins facile de donner un exemple de nombre transcendant.

Proposition 14 *Il existe des nombres réels transcendants.*

Preuve. Montrons que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable. D'après l'exercice 9, l'ensemble des polynômes non nuls, à coefficients entiers, est dénombrable. On peut donc numéroter ses éléments $P_0, P_1, \ldots, P_k, \ldots$. Pour chaque entier k, notons Z_k l'ensemble fini des racines de P_k. Alors l'ensemble des nombres algébriques est $\bigcup_{k \in \mathbf{N}} Z_k$. D'après l'exercice 8, il est dénombrable.

A fortiori, l'ensemble des nombres réels algébriques est dénombrable. Comme $\mathbf{R}$ n'est pas dénombrable (théorème 1), il existe des nombres réels non algébriques, i.e. transcendants.$\blacksquare$

3.2 Equipotence

Les exemples qui précèdent donnent envie de poser des questions plus générales.

Définition 15 *Soient E et F deux ensembles. On dit que E et F sont* équipotents *s'il existe une bijection de E sur F.*

Exemple 16 *Deux ensembles finis sont équipotents si et seulement si ils ont le même nombre d'éléments.*

Deux ensembles dénombrables infinis sont toujours équipotents (proposition 4).

$\mathbf{R}$ n'est pas équipotent à $\mathbf{Q}$ (théorème 1).

Deux intervalles de $\mathbf{R}$, non réduits à un point, sont équipotents (voir exercice 17 et la feuille d'exercices).

Exercice 17 *Soit $[a, b[$ un intervalle semi-ouvert. Montrer que $[a, b[$ est équipotent à $\mathbf{R}$.*

Solution de l'exercice 17. *Les intervalles sont équipotents.*

Soit $C \subset]a, b[$ l'ensemble des nombres de la forme $a + 2^{-n}(b - a)$, $n \geq 1$, et $D = C \cup \{a\}$. Pour construire une bijection de D sur C, il suffit de poser $f(a) = (a + b)/2$ et, pour $n \geq 1$, $f(a + 2^{-n}(b - a)) = a + 2^{-n-1}(b - a)$. On prolonge f par l'identité sur $[a, b[\setminus D =]a, b[\setminus C$. On obtient une bijection de $[a, b[$ sur $]a, b[$, lequel est équipotent à $\mathbf{R}$.

Voici un théorème qui va aider à prouver que deux ensembles sont équipotents.

Théorème 2 Cantor-Bernstein). *Si E est équipotent à un sous-ensemble de F et F est équipotent à un sous-ensemble de E, alors E et F sont équipotents.*

Preuve. On traite d'abord le cas particulier où F est un sous-ensemble de E contenant un sous-ensemble A équipotent à E. On a déjà fait ce travail à plusieurs reprises, dans le cas où F est le complémentaire d'un ou deux points dans E (exercices 10 et 17).

Soit $g : E \to A$ une bijection. Soit $C_0 = E \setminus F$. Alors $C_1 = g(C_0)$ est disjoint de C_0 puisqu'il est contenu dans F. De même, $C_2 = f(C_1)$ est disjoint de C_0 et de C_1. En effet, il est contenu dans $g(g(E)) \subset g(A) \subset g(F) \subset F$ alors que C_0 est disjoint de F et C_1 disjoint de $g(F)$. Posant $C_{i+1} = g(C_i)$, on construit ainsi une suite d'ensembles deux à deux disjoints. On pose $C = \bigcup_{i\in\mathbf{N}} C_i$ et $D = \bigcup_{i\geq 1} C_i$. Alors g induit une bijection de C sur D. On complète avec l'identité de $E \setminus C = F \setminus D$.

Le cas général se ramène au cas particulier.■

3.3 Davantage d'ensembles équipotents à R

Exercice 18 *Montrer que l'ensemble $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ des suites d'entiers est équipotent à* $\mathbf{R}$.

Solution de l'exercice 18. $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ *est équipotent à* $\mathbf{R}$.

On code un réel par son signe (0 ou 1), le nombre de chiffres avant la virgule, puis la suite des chiffres du développement décimal (lorsqu'il y en a deux, on choisit celui qui ne se termine pas par une suite de 9). Cela donne une bijection de $\mathbf{R}$ sur un ensemble de suites d'entiers.

Inversement, étant donnée une suite d'entiers (u_n), on convertit chaque u_n en en une suite, celle qui vaut 1 u_n fois, puis toujours 0 ensuite. Autrement dit, on pose $v_{n,i} = 1$ pour $i \leq u_n$ et $v_{n,i} = 0$ sinon. On code donc les suites d'entiers par des suites doubles de 0 et de 1, i.e. des suites indexées par $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ et à valeurs dans $\{0,1\}$. En utilisant une bijection $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ (exercice 6), une suite double devient une suite simple $(v_{f(n)})_{n\in\mathbf{N}}$. On code enfin cette suite en un réel, celui dont le développement décimal est $0.v_{f(0)}v_{f(1)}\dots v_{f(n)}\dots$. Comme les réels construits n'ont pas de 9 dans leur développement décimal, il n'ont qu'un seul développement décimal, donc deux suites distinctes donnent deux réels distincts. On obtient ainsi une bijection entre l'ensemble $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ des suites d'entiers et un sous-ensemble de $\mathbf{R}$.

En appliquant le théorème 2, on conclut que $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ et $\mathbf{R}$ sont équipotents.

3.4 Des ensembles très grands

Théorème 3 (Cantor). *Soit E un ensemble. Alors E n'est pas équipotent à l'ensemble $\mathbf{P}(E)$ des sous-ensembles de E.*

Preuve. Par l'absurde. Supposons qu'il existe une bijection $f : E \to \mathbf{P}(E)$. Soit $F = \{x \in E \,|\, x \notin f(x)\}$. Alors F est un sous-ensemble de E, donc il existe $e \in E$ tel que $F = f(e)$. Supposons que $e \in F$. Alors $e \in f(e)$, donc, par définition de F, $e \notin F$, contradiction. Par conséquent, $e \notin F$. Mais alors $e \notin f(e)$, donc, par définition de F, $e \in F$, contradiction à nouveau. On conclut que E et $\mathbf{P}(E)$ ne sont pas équipotents.■

Corollaire 19 *L'ensemble des parties de $\mathbf{R}$ n'est ni dénombrable, ni équipotent à* $\mathbf{R}$.

Exercice 20 *Montrer que l'ensemble $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ n'est ni dénombrable, ni équipotent à* $\mathbf{R}$.

Solution de l'exercice 20. $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ *est plus grand que* $\mathbf{R}$.

On code chaque sous-ensemble A de $\mathbf{R}$ par sa fonction caractéristique, définie par

$$\chi_A(x) = 1 \text{ si } x \in A, \quad \chi_A(x) = 0 \text{ sinon.}$$

On obtient une bijection de l'ensemble des parties de $\mathbf{R}$ sur un sous-ensemble de l'ensemble des fonctions $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$. Si $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ était équipotent à un sous-ensemble de $\mathbf{R}$, il en serait de même de l'ensemble des parties de $\mathbf{R}$, d'après le théorème 2, or ce n'est pas vrai, théorème 3. On conclut que $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ n'est pas équipotent à $\mathbf{R}$ ou à un sous-ensemble de $\mathbf{R}$.

3.5 L'hypothèse du continu

Un sous-ensemble de $\mathbf{N}$ qui n'est pas fini est équipotent à $\mathbf{N}$ (proposition 4).

Un sous-ensemble de $\mathbf{R}$ qui n'est pas dénombrable est-il équipotent à $\mathbf{R}$? Ce n'est pas certain. On appelle cet énoncé *hypothèse du continu*. La question de savoir si l'hypothèse du continu est vraie ou non dépend des axiomes sur lesquels on s'accorde pour fonder la théorie des ensembles. Cohen a démontré en 1963 qu'il est impossible de démontrer l'hypothèse du continu, et qu'il est impossible de démontrer son contraire, à partir de l'axiomatique dite `ZFC` (pour Zermelo-Frenkel + axiome du choix), qui est le cadre admis par la plupart des mathématiciens. Il n'en est sans doute pas de même si on admet les axiomes supplémentaires sur lesquels s'accordent les spécialistes de théorie des ensembles.

Fin du cours n^{0}10

4 Familles sommables

On a appris à sommer des séries, i.e. à additionner tous les termes d'une suite infinie de réels. On va voir que *pour les séries à termes positifs*, l'ordre dans lequel on somme n'a pas d'importance. En fait, on peut considérer des familles de nombres numérotés par un ensemble dénombrable quelconque.

Définition 21 *Soit E un ensemble dénombrable. Soit $(u_e)_{e\in E}$ une famille de réels* positifs ou nuls *indexée par E, i.e. une application $e \mapsto u_e$ de E dans $\mathbf{R}_+$. On dit que la famille $(u_e)_{e\in E}$ est* sommable *si l'ensemble des sommes finies de la forme $\sum_{e\in F}$ où F est un sous-ensemble fini de E, est majoré. Si c'est le cas, on pose*

$$\sum_{e\in E} u_e = \sup\{\sum_{e\in F} u_e \,|\, F \subset E,\, F \textit{ fini}\}.$$

Exemple 22 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels positifs ou nuls. Alors (u_n) est une famille sommable si et seulement si la série de terme général (u_n) est convergente, et les deux définitions de la somme coïncident.*

Ce que la définition 21 fait apparaître, c'est que l'ordre dans lequel on prend les termes ne joue aucun rôle.

Exemple 23 *Soit $(u_{m,n})_{((m,n)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}}$ la suite double de réels positifs ou nuls définie par $u_{m,n} = 2^{-m-n}$. Alors $(u_{m,n})$ est sommable et sa somme vaut 4.*

En effet, si $F \subset \mathbf{N}\times\mathbf{N}$ est fini, il est contenu dans un carré $\{m \leq N,\, n \leq N\}$, donc

$$\begin{aligned}
\sum_{(m,n)\in F} u_{m,n} &\leq \sum_{m,\,n\leq N} u_{m,n} \\
&= \sum_{m=0}^{N}(\sum_{n=0}^{N} 2^{-m-n}) \\
&= \sum_{m=0}^{N} 2^{-m}(\sum_{n=0}^{N} 2^{-n}) \\
&= (\sum_{n=0}^{N} 2^{-n})^2 = 4(1-2^{-N-1})^2 \leq 4.
\end{aligned}$$

Les sommes partielles sont bornées, donc la famille $(u_{m,n})$ est sommable. Elles sont inférieures à 4, donc la somme est ≤ 4. Il y a des sommes partielles, celles correspondant aux carrés $\{m \leq N,\, n \leq N\}$, pour lesquelles la somme est arbitrairement proche de 4, donc la somme vaut 4.

On termine par une proposition qui autorise à sommer par paquets.

Proposition 24 *Soit E un ensemble dénombrable, et $E = \bigcup_{a\in A} E_a$ une partition de E en sous-ensembles deux à deux disjoints. Soit $(u_e)_{e\in E}$ une famille sommable indexée par E. Alors les sous-familles $(u_e)_{e\in E_a}$ sont sommables, la famille $(s_a)_{a\in A}$ définie par $s_a = \sum_{e\in E_a} u_e$ est sommable, et $\sum_{e\in E} u_e = \sum_{a\in A} s_a$.*

Preuve. Soit $a \in A$. Si F est un sous-ensemble fini de E_a, alors $\sum_{e\in F} u_e \leq \sum_{e\in E} u_e$. Les sommes partielles de la famille $(u_e)_{e\in E_a}$ sont bornées, donc cette famille est sommable, de somme s_a.

Soient a, $a' \in A$. Si F est un sous-ensemble fini de $E_a \cup E_{a'}$, alors

$$\begin{aligned}\sum_{e\in F} u_e &= \sum_{e\in F\cap E_a} u_e + \sum_{e\in F\cap E_{a'}} u_e \\ &\leq s_a + s_{a'},\end{aligned}$$

donc la famille $(u_e)_{e\in E_a\cup E_{a'}}$ est sommable, et $\sum_{e\in E_a\cup E_{a'}} u_e \leq s_a + s_{a'}$. Inversement, si $F \subset E_a$ et $F' \subset E_{a'}$ sont des ensembles finis,

$$\begin{aligned}\sum_{e\in F} u_e + \sum_{e\in F'} u_e &= \sum_{e\in F\cup F'} u_e \\ &\leq \sum_{e\in E_a\cup E_{a'}} u_e,\end{aligned}$$

donc, en prenant la borne supérieure sur tous les F puis sur tous les F',

$$s_a + s_{a'} = \sum_{e\in E_a\cup E_{a'}} u_e \leq \sum_{e\in E} u_e.$$

Cette propriété s'étend par récurrence à tout sous-ensemble fini $B = \{a_1, \ldots, a_n\}$ de A,

$$\sum_{a\in B} s_a \leq \sum_{e\in E} u_e.$$

Cela prouve que la famille $(s_a)_{a\in A}$ est sommable, avec $\sum_{a\in A} s_a \leq \sum_{e\in E} u_e$.

Soit F un sous-ensemble fini de E. Alors F n'intersecte qu'un nombre fini des E_a, les E_a tels que $a \in B$. Alors

$$\sum_{e\in F} u_e = \sum_{a\in B} \sum_{e\in F\cap E_a} u_e \leq \sum_{a\in B} s_a \leq \sum_{a\in A} s_a.$$

Par conséquent,

$$\sum_{e\in E} u_e = \sup_{F\subset E,\, F \text{fini}} \sum_{e\in F} u_e \leq \sum_{a\in A} s_a.$$

On conclut que $\sum_{e\in E} u_e = \sum_{a\in A} s_a$. ∎