Nachlaß Riemann

Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse ... Monatsberichte ... November 1859

... Untersuchung ... die ... Bemerkung, daß das Product

$$\prod \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum \frac{1}{n^s}$$

wenn für p alle Primzahlen, für n alle ganzen Zahlen gesetzt werden. ... $\zeta(s)$ ... convergiren nur so lange der reelle Theil von s größer als 1 ist ... für das ganze complexe Größengebiet ...

Durch Anwendung der Gleichung $\int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1}dx = \frac{\Pi(s-1)}{n^s}$ erhält man zunächst

$$\Pi(s-1)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}dx}{e^x-1}.$$

Betrachtet man nun das Integral $\int \frac{(-x)^{s-1}dx}{e^x-1}$ von $+\infty$ bis $+\infty$ positiv um ein Größengebiet erstreckt, welches den Werth 0 aber keinen andern Unstetigkeitswerth der Function unter dem Integralzeichen im Innern enthält, so ergiebt sich dieses leicht gleich

$$(e^{-\pi si} - e^{\pi si})\int_0^\infty \frac{x^{s-1}dx}{e^x-1},$$

vorausgesetzt, daß in der vieldeutigen Function $(-x)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-x)}$ der Logarithmus von $-x$ so bestimmt worden ist, daß er für ein negatives x reell wird. Man hat daher

$$2\sin \pi s\, \Pi(s-1)\zeta(s) = i\int_\infty^\infty \frac{(-x)^{s-1}dx}{e^x-1},$$

das Integral in der eben angegebenen Bedeutung verstanden ... für jede beliebige complexe s und zeigt, daß sie einwerthig ist ... und für alle endlichen Werthe von s, außer 1, endlich ist, ... verschwindet, wenn s gleich einer negativen geraden Zahl ist.

Wenn der reelle Theil von s negativ ist, kann das Integral, statt positiv um das angegebene Größengebiet, auch negativ um das Größengebiet, welches sämmtliche übrigen complexen Größen enthält, erstreckt werden, da das Integral durch Werthe mit unendlich großem Modul dann unendlich klein ist. Im Innern dieses Gebiets aber wird die Function unter dem Integralzeichen nur unstetig, wenn x gleich einem ganzen Vielfachen von $\pm 2\pi i$ ist, und das Integral ist um den Werth $n2\pi i$ ... $= (-n2\pi i)^{s-1}(-2\pi i)$; man erhält daher

$$2\sin\pi s\,\Pi(s-1)\zeta(s) = (2\pi)^s \sum n^{s-1}\left((-i)^{s-1}+i^{s-1}\right),$$

also eine Relation zwischen $\zeta(s)$ und $\zeta(1-s)$, welche sich mit Benutzung bekannter Eigenschaften der Function Π auch so ausdrücken läßt:

$$\Pi\left(\tfrac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$$

bleibt unverändert, wenn s in $1-s$ verwandelt wird.

... der Function veranlaßte mich, statt $\Pi(s-1)$ das Integral $\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)$ in dem allgemeinen Gliede der Reihe $\sum \frac{1}{n^s}$ einzuführen, wodurch man einen sehr bequemen Ausdruck der Function $\zeta(s)$ erhält. $\frac{1}{n^s}\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = \int_0^\infty e^{-nn\pi x} x^{\frac{s}{2}-1}dx$, ... also, wenn man

$$\psi(x) = \sum_1^\infty e^{-nn\pi x}, \qquad \Pi\left(\tfrac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \int_0^\infty \psi(x)\, x^{\frac{s}{2}-1}dx$$

oder da $2\psi(x)+1 = x^{-\frac{1}{2}}\left(2\psi\left(\frac{1}{x}\right)+1\right)$ (Jacobi, Fund. S. 184)

$$= \int_1^\infty \psi(x)\, x^{\frac{s}{2}-1}dx + \int_0^1 \psi\left(\tfrac{1}{x}\right) x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}dx + \tfrac{1}{2}\int_0^1 \left(x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} - x^{\frac{s}{2}-1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right)dx.$$

Ich setze nun $s = \frac{1}{2} + ti$ und $\Pi\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \xi(t)$, so ist

$$\xi(t) = \tfrac{1}{2} - \left(tt+\tfrac{1}{4}\right)\int_1^\infty \psi(x)\, x^{-\frac{3}{4}}\cos\left(\tfrac{t}{2}\log x\right)dx$$

oder auch

$$= 4\int_1^\infty \frac{d\left(x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)\right)}{dx}\, x^{-\frac{1}{4}}\cos\left(\tfrac{t}{2}\log x\right)dx.$$

Diese Function ist für alle endlichen Werthe von t endlich, und läßt sich nach Potenzen von tt in eine sehr schnell convergirende Reihe entwickeln. Da, für einen Werth von s, dessen reeller Bestandtheil größer als 1 ist, $\log\zeta(s) = -\sum\log\left(1-\frac{1}{p^s}\right)$ endlich bleibt, und von den Logarithmen der übrigen Factoren von $\xi(t)$ dasselbe gilt, so kann die Function $\xi(t)$ nur verschwinden, wenn der imaginäre Theil von t zwischen $\frac{1}{2}i$ und $-\frac{1}{2}i$ liegt. Die Anzahl der Wurzeln, deren reeller Theil zwischen 0 und T liegt, ist etwa $= \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}$; denn das Integral $\int d\log\xi(t)$ positiv um den Inbegriff der Werthe von t erstreckt, deren imaginärer Theil zwischen $\frac{1}{2}i$ und $-\frac{1}{2}i$ und deren reeller Theil zwischen 0 und T liegt, ist (bis auf einen Bruchtheil von der Ordnung der Größe $\frac{1}{T}$) $= \left(T\log\frac{T}{2\pi} - T\right)i$; dieses Integral aber ist gleich der Anzahl der in diesem Gebiet liegenden Wurzeln von $\xi(t)=0$, multiplicirt mit $2\pi i$. Man findet nun in der That etwa so viel reelle Wurzeln innerhalb dieser Grenzen, und es ist sehr wahrscheinlich, daß alle Wurzeln reell sind. Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen;

Function der complexen Veränderlichen s, welche durch diese beiden Ausdrücke, so lange sie convergiren, dargestellt wird.

ich habe indess die ~~strengen~~ Beweis davon, nach einigen flüchtigen ~~vergeblichen~~ ~~Versuchen~~ vorläufig bei Seite gelassen, da er für den ~~Zweck~~ nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien.

Bezeichnet man nun durch α jede Wurzel der Gleichung $\xi(\alpha)=0$, so kann man $\log \xi(t)$ durch

$$\Sigma \log\left(1-\frac{t^2}{\alpha^2}\right)+\log\xi(0)$$

ausdrücken, denn ~~dieser Ausdruck~~ da die Dichtigkeit der Wurzeln von der Grösse t mit t nur wie $\log\frac{t}{2\pi}$ wächst, so convergirt dieser Ausdruck und wird für ein unendliches t nur unendlich wie $t\log t$; er unterscheidet sich also von $\log\xi(t)$ um eine Function von t^2, die für ein endliches t stetig und endlich bleibt und, mit t^2 dividirt, für ein unendliches t unendlich klein wird. Dieser Unterschied ist folglich eine Constante, deren ~~Werth sich mit t = 0 bestimmt durch t = 0 bestimmt werden~~ Werth, wenn man $t=0$ setzt, bestimmt werden kann.

deren Werth durch Einsetzung von $t=0$ bestimmt werden kann.

~~$\log\zeta(s) = -\Sigma\log(1-p^{-s}) = \Sigma p^{-s} + \frac{1}{2}\Sigma p^{-2s} + \frac{1}{3}\Sigma p^{-3s}$~~

Mit Hülfe dieser Methoden lässt sich nun die Anzahl der Primzahlen, die kleiner als x sind, bestimmen.

Es sei $F(x)$ gleich dieser Anzahl, wenn x nicht gerade einer Primzahl gleich ist, gleich dieser Anzahl $+\frac{1}{2}$, wenn aber x eine Primzahl ist, so dass für ein x, bei welchem $F(x)$ sich sprungweise ändert, $F(x) = \dfrac{F(x+0)+F(x-0)}{2}$.

Ersetzt man nun in

$$\log\zeta(s) = -\Sigma\log(1-p^{-s}) = \Sigma p^{-s} + \frac{1}{2}\Sigma p^{-2s} + \frac{1}{3}\Sigma p^{-3s}$$

$$p^{-s} = s\int_p^\infty x^{-s-1}\,dx \qquad p^{-2s} = s\int_{p^2}^\infty x^{-s-1}\,dx$$

so erhält man

$$\frac{\log\zeta(s)}{s} = \int_1^\infty f(x)\,x^{-s-1}\,dx,$$

wenn man $F(x) + \frac{1}{2}F(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}F(x^{\frac{1}{3}}) + \dots$ durch $f(x)$ bezeichnet.

Diese Gleichung ist gültig für jeden complexen Werth $a+bi$ von s, wenn $a>1$. Wenn aber in diesem Umfange die Gleichung $g(s) = \int_0^\infty h(x)\,x^{-s}\,d\log x$ gilt, so kann man mit Hülfe des Fourier'schen Satzes die Function h durch die Function g ausdrücken. Die Gleichung zerfällt, wenn $h(x)$ reell ist und $g(a+bi) = g_1(b) + g_2(b)\,i$, in die beiden folgenden:

$$g_1(b) = \int_0^\infty h(x)\,x^{-a}\cos(b\log x)\,d\log x \qquad i\,g_2(b) = -i\int_0^\infty h(x)\,x^{-a}\sin(b\log x)\,d\log x$$

Multiplicirt man beide Gleichungen mit $(\cos(b\log y) + \sin(b\log y)\,i)\,db$ und integrirt von $-\infty$ bis ∞, so erhält man in beiden auf der rechten Seite nach dem Fourier'schen Satze $\pi\,h(y)\,y^{-a}$, also wenn man beide Gleichungen addirt und mit $i\,y^a$ multiplicirt

$$2\pi i\,h(y) = \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} g(s)\,y^s\,ds,$$

worin die Integration so auszuführen ist, dass der reelle Theil von s constant bleibt.

Das Integral stellt für einen Werth von y, bei welchem eine sprungweise Änderung der Function $h(y)$ stattfindet, den Mittelwerth aus den Werthen der Function h zu beiden Seiten des Sprunges dar. Bei der vorausgesetzten Bestimmungsweise der Function $f(x)$ besitzt diese dieselbe Eigenschaft und man hat daher völlig allgemein

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{\log\zeta(s)}{s}\,y^s\,ds$$

Für $\log\zeta(s)$ kann man nun den früher gefundenen Ausdruck

$$\frac{s}{2}\log\pi - \log(s-1) - \log\Pi\frac{s}{2} + \Sigma\log\left(1+\frac{(s-\frac{1}{2})^2}{\alpha^2}\right) + \log\xi(0)$$

substituiren, die Integrale der einzelnen Glieder dieses Ausdrucks würden aber dann ins Unendliche ausgedehnt nicht convergiren, weshalb es zweckmässig ist, die Gleichung vorher durch ~~partielle~~ Integration umzuformen ...

$$\frac{d\,\frac{\log\zeta(s)}{s}}{ds} = -\int_1^\infty f(x)\log x\,x^{-s}\,d\log x$$

und die einzelnen Glieder der linken Seite in die Form $\int h(x)\,x^{-s}\,d\log x$ zu setzen.

Man findet, wenn der reelle Theil von s positiv und der reelle Theil von β kleiner oder ebenfalls positiv ist

$$\int_1^\infty x^{-s}\int_0^x \frac{x^{\beta-1}\,dx}{\log x}\,d\log x =$$

Man hat, wenn der reelle Theil von s positiv ~~ist~~ und der reelle Theil von β ~~größer~~ kleiner oder ebenfalls positiv ist.

$$\frac{\partial \frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)}{\partial \beta} = \frac{1}{\beta - s}\,\frac{1}{\beta} = -\int_1^\infty x^{-s-1}\left(\int^x x^{\beta-1}\,dx\right)dx,$$

$$= -\int_1^\infty x^{-s-1}\,Li(x^\beta)\,dx$$

folglich

$$-\int_1^\infty x^{-s-1}\left(\int_0^x \frac{x^{\beta-1}}{\log x}\,dx\right)dx = \frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right) + \text{Const.}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ~~[illegible]~~ erhält um $\frac{2\pi i}{s}$ verschiedene Werthe, je nachdem die innere Integration von 0 bis x durch Werthe mit wenigstens positivem oder mit negativem Arcus ~~[illegible]~~ geschieht. Im ersteren Falle ~~wird~~ der Ausdruck links unendlich klein, wenn der Coefficient von β in den Werthen von β positiv unendlich wird, im zweiten Falle findet dasselbe Statt, wenn dieser negativ unendlich wird. Hiernach ist die Constante auf der rechten Seite zu bestimmen.

Ferner findet sich leicht und

$$\Psi(s) = \int_0^1 \frac{1}{\log\frac{1}{z}} - \frac{z^s}{1-z}\,dz$$

20

$$\frac{\partial \frac{\log \Pi\frac{s}{2}}{s}}{\partial s} = \int_1^\infty x^{-s-1}\log x\left(\int_x^\infty \frac{1}{x^2-1}\,\frac{dx}{x\log x}\right)dx$$

Durch Einsetzung dieser Ausdrücke in die Gleichung

$$\log y\; f(y) = -\frac{1}{2\pi i}\lim\int_{a-bi}^{a+bi} \frac{\partial \frac{\log\zeta(s)}{s}}{\partial s}\, y^s\,ds \quad \text{für } b=\infty$$

ergiebt sich

$$f(x) = Li(x) - \Sigma^\alpha\left(Li\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + Li\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right) + \int_x^\infty \frac{1}{x^2-1}\,\frac{dx}{x\log x} + \log\zeta(0),$$ die positiv sind (oder einen positiven reellen Theil haben)

wenn in Σ^α für α sämmtliche Wurzeln der Gleichung $\xi(\alpha)=0$, ~~[illegible]~~ ihrer Größe nach geordnet, gesetzt werden.

Es ist leicht zu zeigen, daß bei dieser Anordnung der Werth der Reihe $\Sigma^\alpha\left(Li\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + Li\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right)\log x$

mit dem ~~[illegible]~~ Grenzwerthe ~~[illegible]~~ $\frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi} \frac{\partial \frac{1}{s}\Sigma\log\left(1+\frac{(s-\frac{1}{2})^2}{\alpha\alpha}\right)}{\partial s}\,y^s\,ds$ ~~für ein unendliches~~ bei unaufhörlichem Wachsen der Größe b übereinstimmt, bei veränderter ~~anderer~~ Anordnung aber jeden beliebigen ~~Werth~~ reellen Werth ~~[illegible]~~ erhalten kann.

Aus $f(x)$ ~~findet sich~~ erhält man $F(x)$ mittelst der durch Umkehrung der Relation $fx = \Sigma\frac{1}{n}F(x^{\frac{1}{n}})$ sich ergebenden Gleichung

$$f(x) = F(x) + \frac{1}{2}F(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}F(x^{\frac{1}{3}})$$

~~[illegible] Man erhält dadurch~~ dieselbe ~~für $F(x)$~~ ~~[illegible]~~

$$F(x) = \Sigma(-1)^\mu\,\frac{1}{m}\,f\left(x^{\frac{1}{m}}\right), \quad \cancel{f(x) - \frac{1}{2}f(x^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3}f(x^{\frac{1}{3}})}$$

~~[illegible]~~ worin für m der Reihe nach ~~die~~ Zahlen, die durch kein Quadrat theilbar sind, zu setzen sind und μ die Anzahl der Primfactoren von m bezeichnet, ~~[illegible]~~

Es ist daher Die bekannte Näherungsformel ~~$F(x) = \ldots$~~ $= Li\,x$ ~~[illegible]~~ ist also nur bis auf Größen von der Ordnung der Größe $x^{\frac{1}{2}}$ richtig ~~[illegible]~~ und giebt einen etwas zu großen Werth; denn die nichtperiodischen Glieder in dem Ausdrucke von $F(x)$ sind, ~~[illegible]~~ Größen die mit x nicht in's Unendliche wachsen, abgesehen

$$Li(x) - \frac{1}{2}Li(x^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3}Li(x^{\frac{1}{3}}) - \frac{1}{5}Li(x^{\frac{1}{5}}) + \frac{1}{6}Li(x^{\frac{1}{6}}) - \frac{1}{7}Li(x^{\frac{1}{7}}) + \ldots$$

~~[illegible]~~ und bis zu $x = 2$ ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ herausgestellt.

~~[illegible]~~ In der That hat sich bei der von Gauß und Goldschmidt vorgenommenen ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~

3 Millionen fortgesetzten Vergleichung von $Li(x)$ mit der Anzahl der Primzahlen ~~kleiner~~ unter x ~~[illegible]~~ und zwar ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~, so größer

~~[illegible]~~ diese Anzahl ~~[illegible] 10000~~ schon vom ersten Hundert tausend an stets kleiner als $Li\,x$ ergeben, ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ von den periodischen Gliedern abhängig, ~~[illegible]~~ abhängige

$x^{\frac{1}{2}}$ ~~[illegible]~~ auch das ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ bei den Zählungen die Aufmerksamkeit erregt, ohne daß jedoch hierin eine stellenweise Verdichtung und Verdünnung der Primzahlen selbst ~~[illegible]~~

~~[illegible] die ersten Hundert zeigt sich selbst sehr deutlich als im Mittel mit $\log Li\,x + \log\zeta(0)$~~ ~~[illegible]~~ Sollte ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~

Gesetzmäßigkeit bemerkt worden wäre. ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ unsere ~~[illegible]~~ es interessant sein, den Einfluß der einzelnen ~~periodischen~~ Glieder ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~

Sollte jemand zu einer neuen ~~Zählung~~ der Primzahlen ~~[illegible]~~ geneigt sein, so würde es interessant sein, ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ ~~für die Dichtigkeit der Primzahlen~~ ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ $\xi(\alpha)=0$

~~[illegible]~~ $\cancel{\frac{2\cos(\alpha\log x)\,x^{-\frac{1}{2}}}{\log x}}$ ~~[illegible]~~ ~~in dem Ausdrucke für die Dichtigkeit der Primzahlen~~ regelmäßiger Gang als $F(x)$ würde $f(x)$ zeigen,

enthaltenen periodischen Glieder $\frac{2\cos(\alpha\log x)\,x^{-\frac{1}{2}}}{\log x}$ ~~[illegible]~~ ~~für~~ zu verfolgen. Ein viel ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ mit $Li(x) + \log\zeta(0)$ sehr deutlich ~~zu~~ erkennen ließe.

~~Die~~ welches ~~[illegible]~~ schon im ersten Hundert ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ Einfluß der einzelnen periodischen Glieder in dem Ausdrucke für die

Bei einer etwaigen neuen Zählung der Primzahlen würde es interessant sein, den Einfluß der einzelnen periodischen Glieder in dem Ausdrucke für die Dichtigkeit der Primzahlen zu verfolgen.

Meinen Dank für die Mittheilungen, welche

glaube ich der [illegible] verbinden dadurch zu erkennen zu geben, daß ich von der mir gütigst ertheilten Erlaubniß baldigst Gebrauch mache durch
Mittheilung einer Untersuchung über die Häufigkeit der [illegible]
den Gegenstand, welcher doch bei Ärzten, welche Geist und Einsicht demselben längere Zeit geschenkt haben, einer solchen
Mittheilung vielleicht nicht ganz unwerth erscheint