Universiteit Utrecht

De veelhoeken van Ludolph van Ceulen

Bespreking van hoofdstuk 2-8 uit Vanden Circkel

Barbara HARZEVOORT

onder begeleiding van Dr. S.A. WEPSTER

29 juli 2008

Voorwoord

Deze scriptie is geschreven als 'Kleine Scriptie' ter afronding van mijn bachelorstudie wiskunde aan de Universiteit Utrecht. Ik wil graag twee mensen bedanken voor hun hulp bij het maken van mijn scriptie.

Ten eerste wil ik graag Dr S.A. Wepster bedanken voor de fijne begeleiding en dat ik mocht meewerken aan de heruitgave van Vanden Circkel. Dankzij zijn hulp en aanwijzingen heb ik mijn scriptie tot een goed einde gebracht. Verder wil ik Jeroen Goudsmit bedanken voor het nalezen en zijn hulp met LaTeX. Zonder jullie hulp was mijn scriptie niet geworden wat het nu is.

Barbara Harzevoort

Utrecht, juli 2008

Inleiding

Ludolph van Ceulen publiceerde Vanden Circkel[1] in 1596. In dit boek is Ludolph zoals hij het zelf zegt *voort ghevaren (door groote lust ende genegentheyt) om te soecken naer een van de principaelste stucken als daer is de proportie / ofte reden des Diameters te vinden tegen syn Circonferentie ofte Omloop eenes Circkels.* (Vanden Circkel pagina 1). Tegenwoordig zouden we zeggen dat Van Ceulen π wil benaderen. Ludolph doet dit met behulp van in- en omgeschreven regelmatige veelhoeken. In deze scriptie worden de hoofdstukken 2 tot en met 8 van Vanden Circkel besproken. In deze hoofdstukken is Ludolph nog niet expliciet bezig met het benaderen van π, maar hij legt wel de basis voor deze benadering.

In hoofdstuk 2 formuleert en bewijst Ludolph een propositie, waarnaar hij later vaak verwijst als zijnde zijn Fondament. De propositie stelt hem in staat om in hoodstuk 3, 4 en 5 de zijdes van vele regelmatige veelhoeken ingeschreven in de eenheidscirkel te berekenen. In hoofdstuk 6 vindt Van Ceulen vervolgens de lengte van vele koorden. De getallen die Ludolph zo vindt bevatten veel wortels, hoofdstuk 7 besteedt Ludolph aan het numeriek benaderen van een aantal van deze wortels. Ook geeft Van Ceulen in dit hoofdstuk een sinustabel met de numerieke benadering van veel sinuswaarden. Tenslotte, in hoofdstuk 8 berekent Ludolph van een aantal ingeschreven veelhoeken de oppervlakte. Van Ceulen is hier voornamelijk geïnteresseerd in de numerieke benadering van deze oppervlaktes. We zien hier voor het eerst in Vanden Circkel de eerste decimalen van π verschijnen, maar Ludolph zelf zegt hier in dit hoofdstuk nog niets over.

Deze scriptie is bedoeld om de stof van hoofdstuk 2-8 uit te leggen. Daar waar Ludolph uitleg achterwege laat, wordt in deze scriptie meer toelichting gegeven. Echter, Vanden Circkel stamt uit 1596, we zijn inmiddels meer dan 400 jaar verder. In deze jaren zijn er veel nieuwe inzichten opgedaan, waardoor we bepaalde dingen misschien op een andere manier zouden doen dan Ludolph. Op sommige plaatsen in deze scriptie wordt daarom Vanden Circkel losgelaten en kijken we naar een andere, meer moderne, aanpak of kijken we naar de ontwikkelingen die na Ludolph hebben plaatsgevonden. Dit gebeurt in II.1.2, III.3.2, IV en VII.4.

De originele tekst van hoofdstuk 2-8 uit Vanden Circkel is bijgeloten in bijlage A. Deze tekst is in een modern lettertype en is voorzien van voetnoten waarin drukfouten zijn aangegeven.

In deze scriptie wordt gebruik gemaakt van moderne wiskundige notatie. Tenzij anders aangegeven nemen we de notatie van Ludolph van Ceulen dus niet over.

[1] van Ceulen [1596]

Inhoudsopgave

Hoofdstuk I

Het leven en werk van Ludolph van Ceulen

In Hildesheim, Duitsland wordt Ludolph van Ceulen geboren op 18 januari 1540. Van zijn eerste levensjaren in Duitsland is niet veel bekend. Ludolph vertrekt uiteindelijk naar de Nederlanden. Rond 1594 sticht hij een eigen schermschool in Leiden en hij geeft daarnaast wiskunde-onderwijs. Hoewel schermen en wiskunde weinig met elkaar te maken lijken te hebben, is het in die tijd toch een erg handige combinatie. De jongemannen die behoren tot de bovenklasse leren wiskunde voor het familiebedrijf en schermen voor de goede manieren.[1]

Leiden is van 1600 tot 1660 een belangrijk wiskundig centrum.[2] Tot 1575 was deze rol weggelegd voor Antwerpen. Toen de stad door de Spanjaarden werd aangevallen, trokken veel geleerden en rekenmeesters echter naar het noorden en vestigden zich in Leiden. In de zeventiende eeuw groeit de Republiek der Verenigde Nederlanden uit tot een wereldmacht in politiek en wetenschappelijk opzicht.

In 1600 opent Prins Maurits in Leiden een ingenieursopleiding verbonden aan de Leidse Universiteit. Aan deze universiteit, opgericht in 1575, wordt tot dan toe alleen les gegeven in de Latijnse taal. Op de ingenieursopleiding wordt echter in het Nederlands onderwezen, zodat ook degenen die het Latijn niet machtig zijn onderwijs kunnen volgen. Ludolph, die zelf ook geen Latijn kan, wordt aangesteld als hoogleraar. Van Ceulen werkt hier tot aan zijn dood op 31 december 1610. Ludolph is twee keer getrouwd geweest. In 1590 huwde Ludolph zijn tweede vrouw Adriana Simons, zij gaf na de dood van haar man zijn werk uit. Ludolph ligt begraven in de Pieterskerk in Leiden. Op zijn grafsteen staan de eerste 35 decimalen van π, Ludolph was erg trots op het berekenen van deze decimalen. De grafsteen is inmiddels verloren gegaan, maar op 5 juli 2000 is een replica onthuld.

I.1 Ludolphs boeken

De eerste drie boeken die Ludolph schrijft komen voort uit onenigheid met andere wiskundigen. In 1580 komt *Solutie ende Werckinghe Op twee Geometrische vraghen by Willem Goudaen* uit.[3] De twist tussen Ludolph en Willem ontstaat, als Ludolph twee problemen van Willem oplost. Willem wil namelijk niet aannemen dat de oplossingen correct zijn , reden genoeg voor Ludolph om zijn vindingen zelf te publiceren. Hierna volgt *Kort Claar bewijs*[4], waarin Ludolph een bewering weerlegt van Simon van der Eycke. Simon had in 1584 een boek geschreven waarin hij beweerde een oplossing te hebben voor de cirkelkwadratuur.[5] Ludolph ziet echter de onjuistheid van deze oplossing in en publiceert zijn tegenbe-

[1] Bos [2000]
[2] Hogendijk [2006]
[3] van Ceulen [1584]
[4] van Ceulen [1585]
[5] De cirkelkwadratuur is het probleem of we met passer en liniaal een vierkant kunnen construeren met precies dezelfde oppervlakte als een gegeven cirkel. Imiddels weten we dat dit niet mogelijk is, aangezien π een transcedent getal is. Zie Cornelissen [2007] voor meer informatie.

wijs in Kort Claar bewijs. Als antwoord hierop kwam Simon met *Claerder bewijs* in 1586.[6] Ludolph liet zich echter niet uit het veld slaan en schreef nog in hetzelfde jaar *Proefsteen ende Claerder wederlegginghl*.[7] Hierna houdt Ludolph zich bezig met het schrijven van twee grotere werken, namelijk *Vanden Circkel* en de *Fondamenten*.

I.1.1 Vanden Circkel

Ludolphs eerste grote werk is *Vanden Circkel*[8], uitgegeven in 1596 te Delft. Hierin onderzoekt hij de verhouding tussen de omtrek en de middellijn van een cirkel. Met andere woorden, hij wil de waarde van π benaderen. Dit doet hij door middel van in- en omgeschreven regelmatige veelhoeken. Met behulp van de 32212254720-hoek kan hij de eerste twintig decimalen van π bepalen. Daarnaast behandel Ludolph in Vanden Circkel enkele vraagstukken met betrekking tot het rekenen met rente. In 1615 geeft Adriana een tweede uitgave van Vanden Circkel uit. In die tijd had ze wel aantekeningen van Ludolph waarin meer dan twintig decimalen van π werden berekend. Toch heeft ze dit niet opgenomen in de tweede uitgave.

I.1.2 Arithmetische en Geometrische Fondamenten

Naast een tweede uitgave van Vanden Circkel geeft Adriana in 1615 ook het boek *Arithmetische en Geometrische Fondamenten* uit.[9] Het boek behandelt bijvoorbeeld rekenkunde, met name worteltrekking, en meetkunde, gebaseerd op de Elementen van Euclides. Ook in dit boek staat een benadering van π en wel op 32 decimalen. Ludolph vertelt niet hoe hij aan deze decimalen is gekomen, maar waarschijnlijk gebruikt hij dezelfde methode als in Vanden Circkel.[10] De 35 decimalen die in zijn grafsteen gebeiteld zijn, zijn overigens nooit gepubliceerd in een boek.

I.1.3 Latijnse vertalingen

Adriana had de Leidse hoogleraar Willebrord Snellius de aantekeningen van Ludolph gegeven. Dit resulteerde in twee Latijnse vertalingen van Ludolphs werken. Eerst werd in 1615 *Fundamenta Arithmetica et Geometrica*[11] uitgegeven, een Latijnse vertaling van de Fondamenten. In 1619 volgde een vertaling van Vanden Circkel, *de Circulo et adscriptis* genaamd.[12] In dit boek is echter het gedeelte over renterekening volledig weggelaten. Het zijn vrije vertalingen, waarbij niet altijd evenveel aandacht wordt geschonken aan nauwkeurigheid. Hoewel dit zeker voor een wiskundige tekst met veel getallen een groot nadeel is, moeten we niet vergeten dat door de Latijnse vertalingen ook buitenlanders toegang kregen tot de ideeën van Ludolph. Met zijn Nederlandstalige werk zou dit nooit gebeurd zijn. In het buitenland gebeurde het echter dat de methodes beschreven in de Latijnse vertalingen werden toegekend aan Snellius. Snellius werd gezien als de analyticus en Van Ceulen slechts als een onvermoeibare rekenaar. Dit oordeel, hoewel onterecht, werd ook overgenomen door de Nederlanders en ook vandaag nog staat Ludolph voornamelijk bekend als berekenaar van π-decimalen.

I.2 De wiskunde van Ludolph

Ludolph zou je een rekenmeester kunnen noemen. Deze wiskundigen houden zich bezig met het doen van groot, complex rekenwerk, dit wordt bijvoorbeeld gebruikt in de astronomie. Tegenwoordig wordt daarbij gebruik gemaakt van computers, in Ludolphs tijd had men nog niet zulke hulpmiddelen en werden alle berekeningen met de hand gedaan. We zouden Ludolph echter te kort doen door hem

[6] van der Eycke [1586]
[7] van Ceulen [1586]
[8] van Ceulen [1596]
[9] van Ceulen [1615]
[10] Bierens De Haan [1893]
[11] Snellius [1615]
[12] Snellius [1619]

alleen een rekenmeester te noemen, zijn werk ging namelijk verder dan dat. In de tijd van Ludolph stond het berekenen van sinustabellen centraal bij de rekenmeesters. Het was de tijd van ontdekkings- en handelsreizen en om de koers te bepalen hadden zeevaarders meetinstrumenten waarmee ze hun plaats op zee konden berekenen. Met deze instrumenten werden hoeken opgemeten en de formules om deze hoeken om te rekenen in plaatsen en koersen bevatten veel sinussen. De rekenmeesters voorzagen in de behoefte aan sinustabellen om deze berekeningen mogelijk te maken. Ludolph van Ceulen werkte ook aan sinustabellen, getuige zijn tabel in Vanden Circkel (fol 6v en 7r). In deze tabel staan de sinuswaarden van 62 verschillende hoeken op 10 decimalen nauwkeurig. In Vanden Circkel heeft naast de sinus ook de verhouding tussen de omtrek en de middellijn van een cirkel een belangrijke rol. Het berekenen van deze verhouding stond minder centraal bij andere rekenmeesters, Simon van der Eycke was een rekenmeester die zich wel hiermee bezighield getuige zijn boeken over de cirkelkwadratuur. Het berekenen van deze verhouding verschafte Ludolph een zekere status: Van Ceulen liet hiermee zijn professionaliteit zien, wat hem waardering opleverde.[13]

[13]Bos [2000]

Hoofdstuk II

Een belangrijke propositie

Het tweede hoofdstuk van Vanden Circkel wijdt Ludolph aan de formulering en het bewijs van een propositie. Deze propositie ligt aan de basis van de berekeningen die Ludolph van Ceulen in de daaropvolgende hoofdstukken maakt. Van Ceulen formuleert de propositie als volgt (Vanden Circkel, fol. 1r):

Als een rechte Linie in een Circkel beschreven / alsoo dat beyde de eynden de Circonferentie raecken / dan is de middel proportionael Linie / tusschen den halven Diameter / ende de rest / om soo veel den Diameter langer als de eerste genoemde Linie Complement / ghelijck eener Linie die vanden om-loop snijdet eenen Boghe half soo groot als de eerste Linie.

Hier moeten we op een paar dingen letten. Tegenwoordig zullen we zeggen dat we een koorde in een cirkel nemen, oftewel een recht lijnstuk dat twee punten op de cirkel met elkaar verbindt. Het werkwoord 'raken' heeft immers in deze tijd niet meer de wiskundige betekenis van 'snijden'. Verder gebruiken we het woord 'middel proportionael' nu niet meer. Tegenwoordig noemen we dit de middelevenredige. De middelevenredige van twee getallen a en b is het getal x zodanig dat

$$a : x = x : b.$$

De middelevenredige van twee lijnstukken met lengte a en b is dan een lijnstuk met lengte x zodat aan dezelfde vergelijking voldaan is. Tenslotte wordt tegenwoordig de term 'complement van een lijnstuk' niet meer gebruikt. Stel dat we in een cirkel een koorde AB hebben, dus met punten A en B op de cirkel. Het complement van AB is dan de koorde AC zodanig dat CB de diameter van de cirkel is, zie ook de figuur op de volgende pagina. Uit de omgekeerde stelling van Thales volgt dan dat $\angle CAB = 90°$. In het vervolg zullen we de term complement blijven gebruiken. We kunnen hiermee de propositie formuleren als:

Propositie 1. *Neem AB een koorde in een cirkel en AC het complement van AB. Verder nemen we het punt E op de cirkel halverwege de boog AB. Dan is AE de middelevenredige van de straal van de cirkel en het verschil tussen de diameter en AC.*

Deze formulering is al een stuk moderner, maar we kunnen nog verder gaan. Laten we aannemen dat de cirkel straal r heeft en dat AB lengte a heeft. Omdat $\angle CAB = 90°$, kunnen we in $\triangle ABC$ de stelling van Pythagoras gebruiken om de lengte van AC uit te drukken in a. We vinden $AC^2 = 4r^2 - AB^2$, oftewel AC heeft lengte $\sqrt{4r^2 - a^2}$. De middelevenredige van de straal en het verschil tussen de diameter en AC heeft dan lengte x zodanig dat

$$\frac{r}{x} = \frac{x}{2r - \sqrt{4r^2 - a^2}}$$

Zo vinden we $x = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}$. De propositie van Ludolph kunnen we dus ook formuleren als:

Neem een koorde AB met lengte a in een cirkel met straal r en neem het punt E op de cirkel halverwege de boog AB. Dan heeft AE lengte $\sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}$.

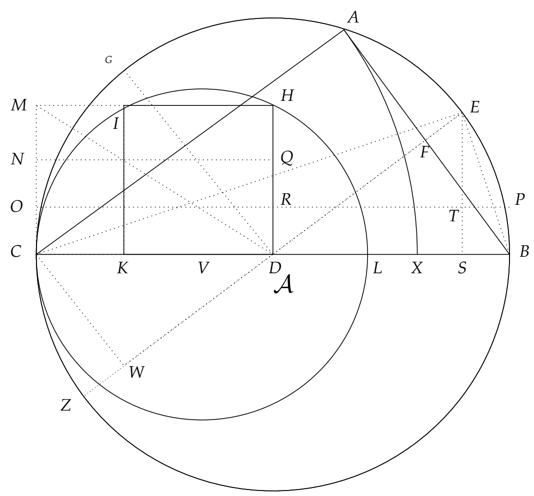
II.1 Verschillende bewijzen van de propositie

Laten we nu kijken naar Ludolphs bewijs van de propositie. Het bewijs is niet het makkelijkste dat men voor deze propositie zou kunnen bedenken. Er zijn verschillende overzichtelijkere bewijzen van de propositie, hiervan zullen we in II.1.2 drie bewijzen bespreken. Ludolph bewijst zijn stelling aan de hand van een bijgevoegde afbeelding. Eerst vertelt hij hoe je de benodigde lijnstukken in de cirkel kunt construeren. Daarna beredeneert hij waarom de twee lijnstukken gelijke lengte moeten hebben. De denkstappen die Ludolph maakt worden nauwelijks beargumenteerd. Aan het eind van het bewijs wordt de reden hiervan duidelijk: Ludolph eindigt met een lijstje van gebruikte proposities uit de Elementen van Euclides. Tegenwoordig is men niet erg vertrouwd met de Elementen van Euclides, Ludolph baseert echter zijn hele bewijs op enkele proposities uit deze boeken.[1] Waar hij welke gebruikt vertelt hij niet, het is aan de lezer dit uit te zoeken. Hierna geeft Ludolph nog een getallenvoorbeeld, want volgens Van Ceulen kan *door ghetallen tzelve lichter bewesen werden*. Het lijkt erop dat Ludolph dit ook als bewijs van de propositie ziet. Tegenwoordig voldoet een dergelijk getallenvoorbeeld echter niet als een volledig bewijs.

II.1.1 Het bewijs van Ludolph van Ceulen

Bewijs van Propositie 1.

Als een voorbeeld bekijken we de bijgevoegde cirkel met daarin de koorde AB en diens complement AC. Het verschil tussen AC en de middellijn CB is gelijk aan het lijnstuk XB, waarbij voor het punt X geldt dat $AC = CX$. Vanaf het middelpunt D van de cirkel passen we een lijnstuk DL af, zodanig dat XB en DL gelijke lengte hebben. Vervolgens delen we het lijnstuk CL in het punt V in twee gelijke delen.[2] Hiermee kunnen we de cirkel vormen met diameter CL en V het middelpunt. Tenslotte nemen we in D de loodlijn op CB. Deze loodlijn snijdt de gevonden cirkel in het punt H. DH is dan de middelevenredige van CD en DL.[3] Verder delen we de boog AB in het punt E in twee gelijke delen.[4] We beweren nu dus dat het lijnstuk DH gelijk is aan het lijnstuk BE.



Laten we dit nu bewijzen. Hiertoe geven we eerst een aantal lijnen en punten in de cirkel aan. Op CB construeren we de loodlijn die het punt E snijdt. Het snijpunt van CB en deze loodlijn noemen we S. Vanuit E trekken we de middellijn door het middelpunt D. Deze middellijn snijdt de cirkelrand in de punten Z en E. Op deze middellijn maken we de loodlijn die het punt C snijdt. Het snijpunt tussen de middellijn en de loodlijn door C noemen we W. Tenslotte nemen we F als het snijpunt van AB en de middellijn EZ. Nu geldt dat AF, ES en CW gelijke lengte hebben. Dit kunnen we op de volgende manier inzien.

Allereerst, laat E' het spiegelbeeld zijn van E gespiegeld in BC. Dan, aangezien de boog EB de helft van boog AB is, volgt dat de boog van EE' gelijk is aan de boog AB. Dus ES is de helft van AB en dat is precies AF. Nu, omdat E de boog AB in twee gelijke delen deelt, volgt dat $\angle AFD = \angle BFD = 90°$. We weten al dat $\angle CWF = 90°$ en $\angle CAF = 90°$.[5] Hieruit kunnen we concluderen dat de vierhoek $CWFA$

[1] Voor een Engelse vertaling van de Elementen van Euclides verwijzen we naar Heath [1975a,b,c].

[2] In het origineel heeft V de naam 2, maar tegenwoordig is het niet meer gebruikelijk punten met cijfers een naam te geven.

[3] Dit volgt uit propositie 13 van het zesde boek van Euclides.

[4] Deze constructie wordt uitgevoerd met behulp van propositie 30 in het derde boek van Euclides.

[5] Ludolph gebruikt hier propositie 31 uit het derde boek van Euclides, tegenwoordig bekend als de omgekeerde stelling van Thales, om te bewijzen dat $\angle CAF = 90°$

in feite een rechthoek is. We zien meteen dat CW en AF gelijke lengte hebben. Dus $AF = ES = CW$. Ludolph van Ceulen geeft deze redenatie overigens niet. Hij stelt alleen dat de gelijkheid volgt uit het feit dat de boog AB in twee gelijke delen is gedeeld in het punt E.

Ludolph gaat verder en stelt dat CA en WF gelijk aan elkaar zijn. Dit volgt meteen uit het feit dat $CWFA$ een rechthoek is.

Hieruit kunnen we gemakkelijk bewijzen dat ook FE, ZW en SB gelijk zijn. Bekend is dat AB gelijk is aan EE'. FE is het stuk van de middelloodlijn op AB tussen de cirkelrand en AB in en SB is gelijk aan het stuk van de middelloodlijn op EE' tussen de cirkelrand en EE'. Hieruit volgt dat $FE = SB$. Omdat we ook weten dat $CW = AF$, kunnen we door spiegeling van C in het lijnstuk ZE op precies dezelfde manier zien dat $ZW = FE$. Dus ZW, FE en SB hebben gelijke lengte.

Ook geldt dat XS gelijk is aan SB. We weten dat ZE een middellijn van de cirkel is en bovendien hebben CA en WF gelijke lengte. Hiermee is in te zien dat $ZW + FE = CB - CA = XB$. Nu weten we ook dat $FE = ZW = SB$ gelijk zijn, we zien zo gelijk in dat ook SB en XS gelijke lengte moeten hebben. Oftewel: SB is de helft van XB.

Met propositie 47 uit het eerste boek van Euclides (beter bekend als de stelling van Pythagoras) zien we dat $EB^2 = ES^2 + SB^2$. Nu, ES is de middelevenredige van CS en SB.[6] Dit wil zeggen dat $CS : ES = ES : SB$. Hiermee vinden we $ES^2 = CS \cdot SB$, oftewel het kwadraat van ES is gelijk aan de oppervlakte van de rechthoek met zijden CS en SB.[7] Deze rechthoek is in de afbeelding weergegeven als $OCST$, waarbij OC en TS gelijk zijn aan SB. We voegen hierbij het kwadraat van SB, in de afbeelding weergegeven als $TSBP$. De oppervlakte van de rechthoek $OCBP$ is nu gelijk aan $ES^2 + SB^2 = EB^2$.

De rechthoek $OCBP$ kunnen we opdelen in twee gelijke rechthoeken $OCDR$ en $RDBP$. Als we deze twee rechthoeken op elkaar plaatsen vinden we de rechthoek $NCDQ$. Merk op dat dit een rechthoek is met zijden CD en $2SB$, dus een rechthoek met zijden CD en XB. We weten dat DH de middelevenredige is van CD en XB, dus $DH^2 = CD \cdot XB$ en dit is precies de oppervlakte van $NCDQ$.[8] We weten ook dat de oppervlakte van $NCDQ$ gelijk is aan het kwadraat van EB, dus nu hebben we bewezen dan DH en EB aan elkaar gelijk zijn.

□

Er vallen enkele dingen op aan het bewijs van Van Ceulen. Zo zijn er punten in de afbeelding die niet in het bewijs terugkomen. De punten M, I, K en R worden helemaal niet genoemd en het punt G wordt wel genoemd, maar speelt in het bewijs totaal geen rol. Verder verwijst Van Ceulen naar enkele proposities uit de Elementen, waarvan niet meteen duidelijk is hoe ze in het bewijs gebruikt moeten worden. Dit zou erop kunnen wijzen dat Ludolph eerst een ander bewijs had waarvoor deze punten en proposities wel nodig waren, maar dat hij later zijn bewijs heeft aangepast, omdat zijn nieuwe manier sneller was.

Ludolph verwijst bijvoorbeeld naar propositie 43 uit het eerste boek. Hierin wordt bewezen dat in elk parallellogram de complementen van de parallellogrammen om de diagonaal aan elkaar gelijk zijn. In zijn bewijs komt deze propositie niet duidelijk naar voren, maar de afbeelding van Ludolph geeft wel aan hoe het gebruikt zou kunnen worden. Daarom zou het goed kunnen dat Ludolph eerst wel de propositie in zijn bewijs wilde opnemen. Bekijk hiervoor het parallellogram $MCDH$ met diagonaal MD en het vierkant $IKDH$. Van Ceulen heeft alledrie in zijn tekening weergegeven. De propositie zegt dat de rechthoek met zijden NC en CK dezelfde oppervlakte heeft als de rechthoek met zijden IH en HQ. Hierbij zijn de punten I en K zo gekozen dat $IH = KD = DH$. Dus nu geldt dat de oppervlakte van $NCDQ$ gelijk is aan de oppervlakte van $IKDH$ en dit is precies DH^2. We zien zo op een andere manier dat de oppervlakte van $NCDQ$ gelijk is aan DH^2, maar deze manier is wel iets omslachtiger dan de manier die Ludolph in zijn bewijs beschrijft.

Ook geeft Van Ceulen aan gebruik te maken van propositie 4 uit boek 1. Deze propositie zegt dat twee driehoeken congruent zijn, als ze twee zijdes gelijk hebben en de hoek tussen die twee zijdes. Tegenwoordig zeggen we dat de twee driehoeken congruent zijn door het kenmerk ZHZ. Met deze

[6] Hier wordt weer propositie 13 uit boek 6 gebruikt.

[7] Ludolph van Ceulen gebruikt propositie 17 uit het zesde boek van Euclides om tot dit resultaat te komen. Dit omdat het in de tijd van Ludolph nog niet gebruikelijk was meetkundige stellingen te bewijzen met behulp van algebraïsche manipulaties.

[8] Ludolph van Ceulen gebruikt weer propositie 17 uit boek 6.

propositie is te bewijzen dat ZW en FE gelijk zijn, want de driehoeken WDC en FDB zijn congruent door op te merken dat

- $CD = BD$, want het zijn beide de straal van de cirkel.
- $CW = BF$, we weten immers dat $CW = AF$ en $AF = BF$.
- $\angle WCD = 180° - \angle CWD - \angle WDC = 90° - \angle WDC = 90° - \angle FDB = 180° - \angle BFD - \angle FDB = \angle FBD$.

De gewenste congruentie volgt nu uit propositie 4 van het eerste boek van Euclides. We zien dat WD en FD gelijke lengte hebben en daarmee zijn ook ZW en FE gelijk.

Verder zegt Ludolph propositie 35 uit boek 1 en propositie 8 uit boek 6 te gebruiken in het bewijs, voor deze proposities is het niet duidelijk waar in het bewijs ze toegepast worden.

II.1.2 Drie andere bewijzen

Het bewijs van Ludolph van Ceulen is lang en omslachtig. Er zijn manieren om dezelfde stelling veel sneller te bewijzen. Hiervoor kunnen we het best de laatste formulering van de propositie nemen.

Propositie 2. *Neem een koorde AB met lengte a in een cirkel met straal r. Dan heeft de koorde die van de cirkelrand een boog snijdt die half zo groot is als de boog die AB van de cirkelrand snijdt lengte*

$$\sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}. \tag{II.1}$$

We geven nu drie alternatieve bewijzen voor de propositie. Het eerste bewijs maakt enkel gebruik van de stelling van Pythagoras. Hierna geven we een bewijs dat gebruik maakt van de stelling van Ptolemaeus en in het derde bewijs wordt gebruik gemaakt van één van de goniometrische verdubbelingsformules, zoals beschreven door Wepster [2008].

Bewijs 1. We gebruiken dezelfde afbeelding als bij het bewijs van Van Ceulen. Om de lengte van EB te berekenen in $\triangle EFB$ met behulp van de stelling van Pythagoras hebben we de lengte van EF en FB nodig. FB is de helft van AB dus FB heeft lengte $\frac{a}{2}$. Verder heeft DB lengte r en omdat $\angle DFB = 90°$ kunnen we de stelling van Pythagoras toepassen in $\triangle DFB$. Zo vinden we $DF^2 = DB^2 - FB^2 = r^2 - \frac{a^2}{4}$. Dus DF heeft lengte $\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$ en EF lengte $r - \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$. Nu krijgen we $EB^2 = EF^2 + FB^2 = (r - \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}})^2 + \frac{a^2}{4} = r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} + r^2 - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}$. Dus EB heeft een lengte van $\sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}$ en dit is precies wat we wilden aantonen.

□

Bewijs 2. Bekijk de koordenvierhoek $CZEA$ in Ludolphs afbeelding. We willen de lengte van AE uitdrukken in a. Met de stelling van Ptolemaeus vinden we $AE \cdot CZ + CA \cdot ZE = CE \cdot ZA$. We kunnen nu op dezelfde manier als in het bewijs van Ludolph aantonen dat $CWFA$ een rechthoek is waaruit we concluderen dat $CW = AF$ en $ZW = FE$. Hiermee vinden we $CZ = AE$ en $CE = ZA$. Omdat we ook weten dat $ZE = 2r$, reduceert de gevonden gelijkheid tot $AE^2 = CE^2 - 2r \cdot CA$. Nu, uit de stelling van Pythagoras volgt $CA = \sqrt{4r^2 - AB^2} = \sqrt{4r^2 - a^2}$ en $CE^2 = 4r^2 - EB^2 = 4r^2 - AE^2$. Dus we krijgen $AE^2 = 4r^2 - AE^2 - 2r\sqrt{4r^2 - a^2}$, oftewel $AE = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}$. Dit is precies de gelijkheid die we wilden aantonen.

□

Bewijs 3. We maken weer gebruik van dezelfde afbeelding. Schrijf nu $\angle EDB = 2\theta$, dan zien we dat $EB = 2r\sin(\theta)$ en $a = 2r\sin(2\theta)$. Merk hierbij op dat het alleen interessant is te kijken naar koorden AB die niet meer dan de helft van de omtrek van de cirkel afsnijden. Met andere woorden: $0 \leq \angle EDB =$

$2\theta \leq 90^\circ$. Hieruit leiden we af dat $\cos(2\theta) \geq 0$. Nu gebruiken we één van de verdubbelingsformules: $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$. Onder de aanname dat $\cos(2\alpha) \geq 0$ kunnen we dit omschrijven:

$$\begin{aligned} \cos(2\alpha) &= 1 - 2\sin^2(\alpha) \\ 2\sin^2(\alpha) &= 1 - \cos(2\alpha) \\ (2\sin(\alpha))^2 &= 2 - 2\sqrt{1 - \sin^2(2\alpha)} \end{aligned}$$

Zo vinden we $EB^2 = 2r^2 - 2r^2\sqrt{1 - \frac{a^2}{4r^2}} = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}$, dus voor EB vinden we opnieuw $\sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}$.

□

Je zou je kunnen afvragen waarom Van Ceulen niet één van deze veel kortere bewijzen kiest. Dit kan verklaard woorden door het feit dat men in de tijd van Ludolph minder vertrouwd was met algebraïsche manipulaties. Het eerste bewijs maakt echter alleen gebruik van de stelling van Pythagoras en zou, zij het in een meer meetkundige vorm, wel door Van Ceulen bedacht kunnen zijn. Hetzelfde geldt voor het bewijs met de stelling van Ptolemaeus. Het goniometrische bewijs is waarschijnlijk te modern. In Ludolphs tijd werden de sinus en cosinus namelijk nog niet als functies gezien. Het bewijs dat Ludolph van Ceulen geeft voor de propositie is volledig meetkundig. Eerst worden de twee lijnstukken geconstrueerd en vervolgens wordt met behulp van meetkunde bewezen dat beide dezelfde lengte hebben. Het bewijs van Ludolph is moeilijker dan de bewijzen hierboven, maar er zijn dus wel wezelijke verschillen tussen de bewijzen.

II.2 Het belang van de eerste propositie

De propositie staat helemaal aan het begin van Vanden Circkel en blijkt dan ook van fundamenteel belang te zijn voor de rest van zijn berekeningen. In de hoofdstukken 3, 4 en 5 gebruikt Van Ceulen de propositie om, gegeven de lengte van een zijde van de regelmatige ingeschreven n-hoek, de zijde van de regelmatig ingeschreven $2n$-hoek te berekenen en dit principe wordt verschillende malen herhaald. In hoofdstuk 6 gebruikt Ludolph de propositie op dezelfde manier om, gegeven de lengte van een koorde, de lengte van de koorde van de halve hoek te berekenen. Dit alles staat in het teken van het benaderen van π.

De propositie geeft een rechtstreekse formule om deze tweedeling van de hoek uit te voeren. In het algemeen kunnen we ons afvragen of er een manier bestaat om gegeven de lengte van een koorde de lengte van de koorde die hoort bij $\frac{1}{k}$ maal de hoek te berekenen. Ludolph laat in zijn boek zien dat, als een koorde lengte a heeft, dat dan de lengte van de koorde die hoort bij $\frac{1}{3}$ maal de hoek de kleinste oplossing van $3x - x^3 = a$ is. En voor de vijfdeling vindt Van Ceulen de vergelijking $5x - 5x^3 + x^5 = a$. In het algemeen hoort bij de deling van een boog in k gelijke stukken een vergelijking van graad k. Het grote voordeel dat de tweedeling heeft boven andere delingen is dat de tweedegraadsvergelijking makkelijk is op te lossen. Hierdoor vinden we een rechtstreekse formule in plaats van een vergelijking waarvan moeilijk de oplossingen te vinden zijn. Hierin schuilt de kracht van de propositie.

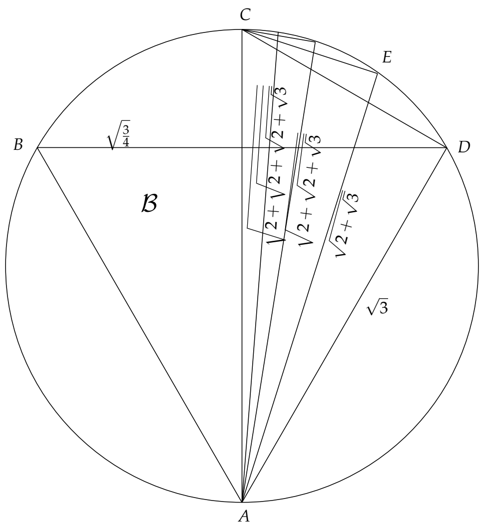
Hoofdstuk III

Veelhoeken en hun zijdes

In de hoofdstukken 3, 4 en 5 gebruikt Ludolph zijn propositie om de zijdes van veelhoeken ingeschreven in de eenheidscirkel te bepalen. Zodra we de zijde van de ingeschreven n-hoek weten, is het vinden van de zijde van de $2n$-hoek, $4n$-hoek, enzovoort geen enkel probleem meer. In het derde hoofdstuk behandelt Van Ceulen de driehoek, in het vierde hoofdstuk het vierkant en in het vijfde hoofdstuk staan de vijfhoek en de vijftienhoek centraal. Voor de zijdes van deze veelhoeken kan Ludolph zijn propositie niet gebruiken. Hij vindt de lengtes van deze zijdes vaak door het handig toepassen van proposities uit de elementen, vooral de stelling van Pythagoras is een erg belangrijk hulpmiddel. Voor de driehoek en het vierkant zijn de zijdes snel gevonden, voor de vijfhoek en de vijftienhoek is dit al een stuk lastiger.

III.1 Het derde capittel: de driehoek

We willen de lengte van een zijde van de gelijkzijdige driehoek ingeschreven in de eenheidscirkel bepalen. Ludolph begint eigenlijk met de zijde van de zeshoek, in de afbeelding lijnstuk CD. Uit propositie 15 uit het vierde boek van Euclides volgt namelijk meteen dat de zijde van de ingeschreven zeshoek gelijk is aan de straal van de cirkel, in ons geval heeft CD dus lengte 1. Ludolph noemt alleen de propositie en geeft geen verdere motivatie. Vervolgens merkt hij op dat de zijde van de driehoek het complement van de zijde van de zeshoek is. Immers, $\frac{1}{3}$ cirkelboog en $\frac{1}{6}$ cirkelboog vormen samen een halve cirkel, dus de twee zijdes samen maken een gestrekte hoek. Voor de zijde van de ingeschreven driehoek, AD in de afbeelding, gebruiken we de stelling van Pythagoras in driehoek ACD en vinden als lengte $\sqrt{4 - CD^2} = \sqrt{3}$.



Van Ceulen gebruikt dus het feit dat de zijde van de zeshoek lengte 1 heeft om de zijde van de driehoek te berekenen. Er is echter ook een methode om de lengtes van de twee zijdes vinden allebei te vinden, Ludolph beschrijft dit niet in zijn werk. Merk hiervoor op dat CD het complement is van AD, oftewel $CD = \sqrt{4 - AD^2}$. Maar CD kunnen we ook krijgen via de in het vorige hoofdstuk gevonden formule: $CD = \sqrt{2 - \sqrt{4 - AD^2}}$. We vinden dus, als we enkel positieve oplossingen bekijken:

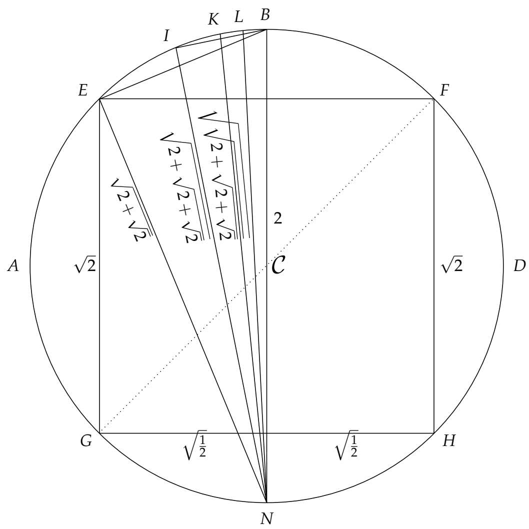
$$\begin{aligned} CD &= \sqrt{2 - CD} \\ CD^2 &= 2 - CD \\ CD &= 1. \end{aligned}$$

Hiermee hebben we de zijde van de zeshoek gevonden en de zijde van de driehoek is de positieve oplossing van $\sqrt{4 - AD^2} = CD = 1$, oftewel $AD = \sqrt{3}$.

Als we tegenwoordig de zijde van een gelijkzijdige ingeschreven n-hoek willen weten, geven we waarschijnlijk het antwoord als $2\sin(\frac{180}{n}^\circ)$. Voor de drie- en zeshoek vinden we hier de bekende gelijkheden $2\sin(60^\circ) = \sqrt{3}$ en $2\sin(30^\circ) = 1$.

Nu kunnen we met Ludolph's propositie gemakkelijk zijdes van andere ingeschreven veelhoeken berekenen. Ludolph geeft de zijdes van de twaalf-, 24-, 48-, 96- en 192-hoek. De rekenstappen laat hij vrij uitgebreid zien, waarschijnlijk om de lezer vertrouwd te maken met het gebruik van de propositie. Van de 192-hoek heeft een zijde lengte $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}$, dit is eenvoudig na te gaan met behulp van (II.1).

III.2 Het vierde capittel: het vierkant



In het vierde hoofdstuk van Vanden Circkel vindt Ludolph van Ceulen de zijdes van de vier-, acht-, zestien-, 32- en 64-hoek. Van Ceulen schrijft de berekeningen erg beknopt of helemaal niet op, hij neemt aan dat de methode inmiddels bekend is. Ook geeft Ludolph amper aan waarom de zijde van het vierkant $\sqrt{2}$ lang is. Hij zegt slechts dat het volgt uit het feit dat de diameter van de cirkel lengte 2 heeft. Met de stelling van Pythagoras is inderdaad gemakkelijk in te zien dat het vierkant een zijde van lengte $\sqrt{2}$ heeft. Een andere motivatie ligt in het feit dat de zijde van het vierkant zijn eigen complement is, Ludolph gebruikt dit argument niet. Als we de lengte van de zijde a noemen, vinden we dus $x = \sqrt{4 - x^2}$ met als enige positieve oplossing $x = \sqrt{2}$. Ook hier vinden we een bekende gelijkheid, namelijk $2\sin(45^\circ) = \sqrt{2}$. De zijdes van de acht-, zestien-, 32- en 64-hoek geven nu geen problemen meer. Ludolph geeft ze allemaal in een figuur weer, behalve de zijde van de 64-hoek. Deze heeft lengte $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$.

III.3 Het vijfde capittel: de vijfhoek en vijftienhoek

Het vijfde hoodstuk is een stuk langer dan de hoofdstukken 3 en 4. Ludolph moet nu meer moeite doen zijn beginwaarde, in dit geval de zijde van de vijfhoek, te vinden. Zijn uitkomst berust op twee proposities uit de Elementen. We zullen nu eerst deze aanpak bestuderen en vervolgens bekijken hoe we zonder de Elementen de zijde van de vijfhoek kunnen vinden.

Ludolph begint het hoofdstuk met het noemen van proposities 11, 12, 13 en 14 uit het vierde boek van Euclides. Hierin wordt beschreven hoe je respectievelijk een gelijkzijdige vijfhoek in en om een cirkel kan schrijven en hoe je een cirkel in en om een gelijkzijdige vijfhoek kan schrijven. Voor Ludolph is alleen het inschrijven van een vijfhoek in een cirkel, propositie 11, van belang. De andere proposities noemt hij wellicht voor de volledigheid, of misschien is hij in het begin van het hoofdstuk nog zoekende naar een goede aanpak en haalt daarom alles aan wat nut zou kunnen hebben.

Van Ceulen vervolgt zijn verhaal met het noemen van de vierde propositie van Xilander van Augsburgh[1] welke volgens Ludolph dezelfde is als de derde propositie uit het veertiende boek van de Elementen.[2] Dit boek is niet geschreven door Euclides zelf, maar door zijn leerling Hypsicles. De inhoud van de propositie is de volgende:

> We nemen een zijde van de regelmatige vijfhoek ingeschreven in een gegeven cirkel en tekenen de middelloodlijn op deze zijde door het middelpunt van de cirkel. Dan is het deel van deze middelloodlijn tussen het middelpunt en het snijpunt met de zijde gelijk aan de helft van de som van de zijde van een gelijkzijdige zeshoek en een gelijkzijdige tienhoek, beiden ingeschreven in dezelfde cirkel.

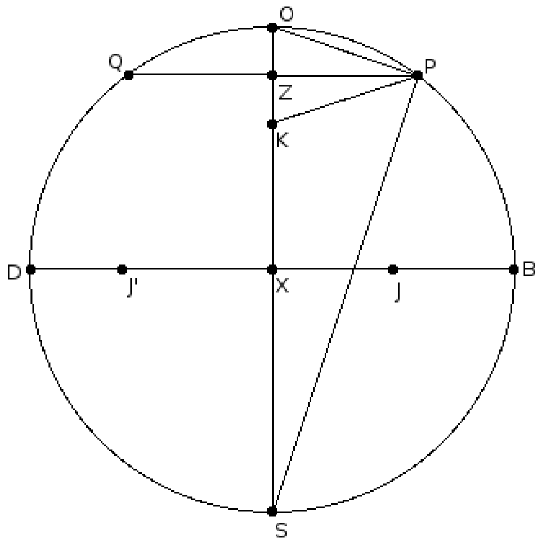
Van Ceulen zegt dat we met deze propositie gecombineerd met propositie 11 uit boek 2 de lengte van de zijde van de tienhoek kunnen vinden. In propositie 11 van het tweede boek staat beschreven hoe een gegeven lijnstuk AB opgedeeld kan worden in twee lijnstukken AC en CB met $AC < BC$, zo dat de rechthoek met zijdes AB en AC dezelfde oppervlakte heeft als het vierkant met als zijde BC.

Ludolph beweert: als de straal van de cirkel gedeeld wordt op de manier beschreven in het bewijs van deze propositie, dan is het grootste deel de zijde van de tienhoek. Vervolgens geeft Van Ceulen een beschrijving van de deling. Hij volgt hierbij het bewijs van de propositie om de gewenste deling te maken, maar geeft vervolgens geen bewijs dat we inderdaad de zijde van de tienhoek op deze manier kunnen vinden. Dit is echter niet een triviaal resultaat en het is zeker de moeite waard het bewijs te formuleren. We maken er daarom een propositie van.

Propositie 3. *Als de straal van een cirkel gedeeld wordt op de manier zoals staat beschreven in propositie 11 uit boek 2, dan is het grootste deel de zijde van de regelmatige tienhoek ingeschreven in dezelfde cirkel.*

Bewijs.

Bekijk de cirkel met straal r, middelpunt X en middellijnen BD en OS loodrecht op elkaar. We volgen de constructie beschreven in het bewijs van propositie 11 uit boek 2 om de halve middellijn XD op de beschreven manier te delen. Allereerst delen we XB in twee gelijke delen in het punt J. We nemen dit punt als middelpunt van een cirkel met straal JS. Deze cirkel snijdt XD in het punt J' en volgens het bewijs van de propositie is het lijnstuk XD in J' op de gewenste manier in twee stukken gedeeld. Dit wil zeggen dat de rechthoek met zijdes XD en $J'D$ dezelfde oppervlakte heeft als het vierkant met zijde XJ', oftewel $XJ'^2 = XD \cdot J'D = r \cdot J'D$, merk hierbij op dat J' het enige punt is op XD waarvoor zo'n relatie geldt (afgezien van het punt dat verkregen wordt door J' te spiegelen in de middelloodlijn van XD). De bewering van Ludolph is nu dus dat XJ' een zijde van de gelijkzijdige tienhoek is. We zulle dit aantonen met behulp van propositie 1 uit boek 14.



[1]Xilander van Augsburgh(1532-1576) staat ook bekend als Guilielmus Xylander of Wilhelm Holtzman. Hij was een Duitse geleerde die bekende Latijnse en Griekse teksten naar het Duits vertaalde. Zo heeft hij de eerste zes boeken van Euclides vertaald en voorzien van commentaar. Een verzameling van zijn wiskundig werk is postuum verschenen onder de naam *Opuscula Mathematica*. In Schöll [1898] staat een uitgebreide beschrijving van zijn carrière. Ludolph verwijst naar de vierde propositie van Xilander, maar noemt niet in welk boek deze staat.

[2]Ludolph bedoelt hier de eerste propositie uit het veertiende boek.

In de cirkel is QP één van de zijdes van de vijfhoek zodanig dat de middelloodlijn van QP gelijk is aan OS en we nemen Z als het snijpunt van de middelloodlijn met QP.[3] Merk op dat OP een zijde is van de gelijkzijdige tienhoek en XP is de straal van de cirkel en dus gelijk aan een zijde van de zeshoek. We volgen nu het bewijs van propositie 1 uit boek 14. Hierin is een punt K op de middelloodlijn OS gezet zodanig dat $KZ = ZO$. Uit het bewijs van deze propositie volgt dat $OP = KP = XK$. Bovendien zijn de driehoeken SPO en SZP gelijkvormig, omdat ze drie gelijke hoeken hebben. Immers, $\angle SPO = \angle SZP = 90°$,$\angle OSP = \angle ZSP$ en hieruit volgt $\angle POS = \angle ZPS$. We zien zo $SZ : SP = SP : SO$. Oftewel, gegeven dat de cirkel straal r heeft, $SP^2 = SZ \cdot SO = 2r \cdot SZ$. Met de stelling van Pythagoras vinden we $SP^2 = 4r^2 - OP^2 = 4r^2 - XK^2$. We concluderen nu $4r^2 - XK^2 = 2r \cdot SZ$, oftewel $XK^2 = 2r(2r - SZ) = 2r \cdot ZO = r \cdot KO$. Dit geeft dat het punt K de halve diameter XO in twee stukken deelt waarbij de verhoudingen hetzelfde zijn als die tussen XJ' en $J'D$. Hieruit concluderen we dat $OP = XK = XJ'$, dus XJ' is inderdaad een zijde van de gelijkzijdige tienhoek.

□

We zien dat het bewijs vrij direct volgt uit de bewijzen van de twee proposities. Wellicht vindt Ludolph het daarom niet nodig om dit bewijs uit te schrijven, in zijn tijd was men immers veel meer vertrouwd met de proposities uit de Elementen dan dat wij nu zijn. Ludolph geeft de punten J en J' niet in zijn afbeelding weer, maar hij beschrijft wel hoe je, met behulp van het bewijs van propositie 11 uit boek 2, de straal van de cirkel moet delen om de zijde van de tienhoek te krijgen. Dit doet hij waarschijnlijk, omdat hij dit gebruikt voor de berekening van de lengte van de zijde. We zullen nu bekijken hoe hij deze berekening maakt.

We nemen weer $r = 2$. De lengte van XJ' vindt Ludolph nu als volgt. Met de stelling van Pythagoras zien we dat JS een lengte van $\sqrt{1\frac{1}{4}}$ heeft en JX heeft lengte $\frac{1}{2}$, want het is de halve straal. Nu, $XJ' = J'J - JX = JS - JX$ en we concluderen dat de zijde van de tienhoek lengte $\sqrt{1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$ heeft. Hieruit kunnen we nu de zijde van de vijfhoek berekenen. Ludolph stelt dat $PQ = QO \cdot QS$, maar geeft hier verder geen verklaring voor. Nu, $QO \cdot QS$ is de oppervlakte van de rechthoek met zijden QO en QS, dit is gelijk aan twee maal de oppervlakte van de driehoek SQO. We vinden zo $QO \cdot QS = SO \cdot QZ = 2 \cdot QZ = QP$. We zien hierin een algemene methode om de zijde van een gelijkzijdige n-hoek te berekenen gegeven de zijde van de $2n$-hoek. De zijde van de n-hoek is dan gelijk aan de zijde van de $2n$-hoek vermenigvuldigd met het complement van de zijde van de $2n$-hoek. Overigens kan hetzelfde ook bewezen worden door de stelling van Ptolemaeus toe te passen op de koordenvierhoek $OQSP$. We vinden met behulp van deze stelling $OQ \cdot PS + OP \cdot QS = OS \cdot PQ$. Door op te merken dat $OQ = OP$, $QS = PS$ en $OS = 2$ is de gelijkheid $PQ = QO \cdot QS$ meteen gevonden.

Als we de stelling van Pythagoras toepassen in de driehoek OQS vinden we voor QS een lengte van $\sqrt{4 - OQ^2} = \sqrt{4 - (\sqrt{1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2})^2} = \sqrt{2\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}}}$. Dus de zijde van de gelijkzijdige vijfhoek is $(\sqrt{1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}) \cdot \sqrt{2\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}}} = \sqrt{2\frac{1}{2} - \sqrt{1\frac{1}{4}}}$. Nu we de zijde van de vijfhoek en tienhoek weten is het wederom een gemakkelijke opgave om de zijdes van de twintighoek, veertighoek enzovoort te berekenen.

III.3.1 Het vermenigvuldigen van irrationale getallen

Om de zijde van de vijfhoek te vinden moet Ludolph de berekening $(\sqrt{1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}) \cdot \sqrt{2\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}}} = \sqrt{2\frac{1}{2} - \sqrt{1\frac{1}{4}}}$ maken. Van Ceulen geeft een uitgebreide uitleg van deze gelijkheid, in zijn tijd is men namelijk nog niet zo vertrouwd met de irrationale getallen. Ludolph zegt hierover (Vanden Circkel, fol. 2v)

My is wel bekent / dat in desen (als mede in voorleden) tijden veel gevonden werden / die grouwen / ende eenen schrick voor de Irrationale getallen hebben: Is nochtans een van de hoogh-noodighste stucken in den conste van Mathematica. Dat de alder geleersten groflick gemist hebben: is de oorsake datse onhervaren zijn geweest in getallen / daerom is mijnen raedt datmen de Fondamenten der voornoemde ghetallen wel leert / de welcke van veele seer vlijtigh beschreven zijn: Ick sal naer desen (zoo't Godt belieft) mede mijn beste doen: de sake en is

[3] In propositie 11 uit het vierde boek wordt verteld hoe we een gelijkzijdige vijfhoek in een cirkel kunnen inschrijven.

in hem selven niet swaer/ ende lustigher inde voornoemde ghetallen te wercken als in ghemeene/ soo verre met practijcque het werck volbracht werdt.

Ludolph ziet dus het belang van de irrationale getallen in en wil zijn best doen de angst die velen voor deze getallen hebben weg te nemen.

Zijn berekening van $(\sqrt{1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}) \cdot \sqrt{2\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}}}$ begint met het kwadrateren van beide uitdrukkingen. Hij verwijst hierbij naar artikel 19 uit het eerste capittel. In het eerste capittel heeft Ludolph een lijst samengesteld met 35 artikelen. De eerste drie artikelen geven conventies aan die Ludolph in Vanden Circkel gebruikt, de andere artikelen zijn eenvoudige stellingen. Van Ceulen geeft deze zonder bewijs, omdat ze *tot dezen tijdt (den meesten deel) voor waer / ende onwedersprekelijck ghehouden zijn* (Vanden Circkel, pagina 8). In artikel 19 staat met woorden beschreven dat voor twee getallen a en b geldt $\sqrt{a^2 \cdot b^2} = a \cdot b$. Dit is inderdaad waar als $a, b \geq 0$ of $a, b \leq 0$. Ludolph denkt hier waarschijnlijk alleen het geval dat beide getallen positief zijn, omdat hij bezig is met lengtes van lijnstukken. We moeten dus $\sqrt{1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$ kwadrateren en dit vermenigvuldigen met $2\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}}$ om het kwadraat van QP te vinden. In onze tijd is het uitvoeren van dergelijke vermenigvuldigingen geen enkel probleem meer, Ludulph geeft echter een uitvoerige berekening, die er als volgt uitziet.

$$
\begin{array}{lll}
\sqrt{1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} & 2\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}}. & +1\frac{1}{2} \\
\sqrt{1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} - \sqrt{1\frac{1}{4}}. & -2\frac{1}{2} \\
\hline
+1\frac{1}{4} & +3\frac{3}{4} - \sqrt{1\frac{1}{4}} & -1 \\
+\frac{1}{4} & -1\frac{1}{4} & \\
\hline
1\frac{1}{2} - \sqrt{1\frac{1}{4}} & \sqrt{2\frac{1}{2} - \sqrt{1\frac{1}{4}}} & \text{Voor P/Q.}
\end{array}
$$

In de eerste kolom staat de berekening van $(\sqrt{1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2})^2 = 1\frac{1}{2} - \sqrt{1\frac{1}{4}}$ en in de tweede kolom de berekening van $(1\frac{1}{2} - \sqrt{1\frac{1}{4}}) \cdot (2\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}}) = 2\frac{1}{2} - \sqrt{1\frac{1}{4}}$. Als eerste schrijft Ludolph de twee getallen onder elkaar op. Zo staan in de eerste kolom eerst 2 maal $\sqrt{1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$ onder elkaar. De $+1\frac{1}{4}$ staat voor het kwadraat van $\sqrt{1\frac{1}{4}}$ en $+\frac{1}{4}$ staat voor het kwadraat van $-\frac{1}{2}$. Het resultaat van de vermenigvuldiging staat weer hieronder. De twee vermenigvuldigingen van $-\frac{1}{2}$ met $\sqrt{1\frac{1}{4}}$ worden dus niet expliciet vermeld. Bij de berekening van $(1\frac{1}{2} - \sqrt{1\frac{1}{4}}) \cdot (2\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}})$ komen de overeenkomstige vermenigvuldigen wel terug. $+3\frac{3}{4} - \sqrt{1\frac{1}{4}}$ staat namelijk voor $2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1\frac{1}{4}} + 2\frac{1}{2} \cdot -\sqrt{1\frac{1}{4}}$ en $-1\frac{1}{4}$ voor $-\sqrt{1\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{1\frac{1}{4}}$ en helemaal onderaan staat de wortel van het resultaat. Hiermee is de lengte van QP gevonden. In de derde kolom worden $1\frac{1}{2}$ en $-2\frac{1}{2}$ bij elkaar opgeteld. Misschien is dit om $1\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1\frac{1}{4}} + 2\frac{1}{2} \cdot -\sqrt{1\frac{1}{4}} = -1 \cdot \sqrt{1\frac{1}{4}}$ te verduidelijken.

III.3.2 Een andere aanpak

We hebben gezien hoe Ludolph de zijde van de ingeschreven vijfhoek bepaalt. Zijn berekeningen steunen zwaar op enkele proposities uit de Elementen die nu minder bekend zijn. Laten we dus nu kijken naar een berekening die de Elementen niet nodig heeft. We weten dat de zijde van de vijfhoek lengte $2\sin(36^\circ)$ heeft. In het vorige hoofdstuk zijn we de verdubbelingsformule $\cos(2\alpha) = 1 - \sin^2(\alpha)$ tegengekomen. Als we $\cos(72^\circ)$ weten, kunnen we dus daaruit de waarde van $\sin(36^\circ)$ bepalen. We maken nu gebruik van complexe analyse om $\cos(72^\circ) = \cos(\frac{2\pi}{5})$ te berekenen.

Het getal $\zeta := e^{\frac{2\pi i}{5}}$ is één van de vijf eenheidswortels die voldoen aan de vergelijking $z^5 = 1$. Omdat $\zeta \neq 1$, is ζ ook een oplossing van

$$\frac{z^5 - 1}{z - 1} = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \tag{III.1}$$

en de andere oplossingen zijn ζ^2, ζ^3 en ζ^4. Dit is in te zien door ze in te vullen in de formule $z^5 - 1$ en op te merken dat $\zeta^5 = 1$. Er geldt dat $\zeta = \cos(\frac{2\pi}{5}) + i\sin(\frac{2\pi}{5})$ en $\zeta^4 = \cos(\frac{8\pi}{5}) + i\sin(\frac{8\pi}{5}) = \cos(\frac{2\pi}{5}) - i\sin(\frac{2\pi}{5})$. We zien dus dat $\eta := \zeta + \zeta^4 = 2\cos(\frac{2\pi}{5})$.

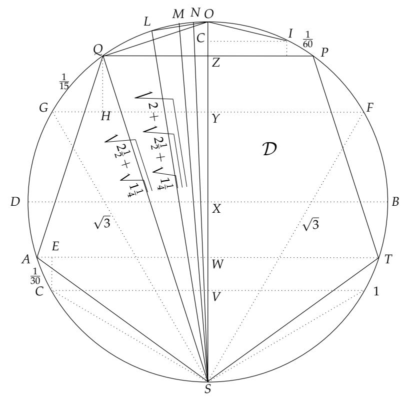
Nu, $\eta^2 = \zeta^2 + \zeta^8 + 2 = \zeta^2 + \zeta^3 + 2$, wat ons geeft $\eta^2 + \eta - 1 = \zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1 = 0$. ζ is immers een oplossing van (III.1). We vinden dus dat η voldoet aan een kwadratische vergelijking en dit kunnen we gemakkelijk oplossen. Zo verkrijgen we $2\cos(\frac{2\pi}{5}) = \eta = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ en omdat $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \cos(72^\circ) > 0$ geeft dit $\cos(72^\circ) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Dus de zijde van de vijfhoek heeft lengte $2\sin(36^\circ) = 2\sqrt{\frac{1-\cos(72^\circ)}{2}} = 2\sqrt{\frac{1\frac{1}{4}-\sqrt{\frac{5}{16}}}{2}} = \sqrt{2\frac{1}{2} - \sqrt{1\frac{1}{4}}}$. We vinden zo dus precies dezelfde waarde voor de zijde als Ludolph van Ceulen vindt.

Helaas is bovenstaande methode niet te generaliseren om de zijde te vinden van een regelmatige n-hoek voor willekeurige n. In het geval $n = 5$ vinden we de makkelijk op te lossen vergelijking $\eta^2 + \eta - 1 = 0$. Ook voor de drie-, vier- en zeshoek is de methode bruikbaar. Zo vinden we bijvoorbeeld voor de driehoek dat $2\cos(120^\circ)$ een nulpunt is van $x + 1$, waarmee we verkrijgen $\cos(120^\circ) = -\frac{1}{2}$ en $2\sin(60^\circ) = \sqrt{3}$. Voor het vierkant en de zeshoek vinden we een kwadratische vergelijking en kunnen we dus ook de oplossing gemakkelijk bepalen. We hebben echter voor deze gevallen ook andere methodes gezien die goed werken, voor de vijfhoek is het al veel moeilijker een altenatieve methode te verzinnen. Voor $n = 5$ is het dus erg handig op deze manier te werk te gaan. Met behulp van Galoistheorie kunnen we de methode toch tot op zekere hoogte generaliseren: als een n-hoek construeerbaar is, kunnen we de lengte van een zijde vinden door het polynoom $z^n + ... + z + 1$ te ontbinden in een aantal kwadratische polynomen, zie IV.2.1. Voor $n > 6$ is dit echter geen eenvoudige opgave.

III.3.3 De vijftienhoek

Het vijfde hoofdstuk eindigt met het berekenen van de zijdes van de vijftien-, dertig- en zestighoek. Ludolph berekent alle drie de zijdes onafhankelijk van elkaar en maakt voor het vinden van de zijdes van de dertig- en zestighoek dus geen gebruik van zijn propositie. Wel doet hij dit drie keer met dezelfde methode waarbij de stelling van Pythagoras een belangrijke rol inneemt. Deze manier om lengtes van koorden te berekenen is erg handig en misschien wil Van Ceulen de lezer vertrouwd maken met de methode en geeft hij daarom een aantal voorbeelden. Ter illustratie volgt hier Ludolphs berekening van de zijde van de vijftienhoek.

We bekijken de afbeelding van Ludolph. Hierin is QO een zijde van de tienhoek en GO een zijde van de zeshoek. De boog die QO afsnijdt is dus $\frac{1}{10}$ van de gehele omtrek en de boog die GO afsnijdt $\frac{1}{6}$. Daarmee is de boog die QG afsnijdt gelijk aan $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ van de hele omtrek. Dus QG is een zijde van de gelijkzijdige ingeschreven 15-hoek. We vormen nu de rechthoekige driehoek GHQ. De lengte van QG vindt Ludolph door eerst de lengtes van GH en QH te berekenen en dan de stelling van Pythagoras toe te passen. Deze berekeningen gaan als volgt.



- QZ is de helft van de zijde van de vijfhoek en heeft daarom lengte $\sqrt{\frac{5}{8} - \sqrt{\frac{5}{64}}}$. We nemen Y als snijpunt van de zijde van de driehoek GF met OS, nu is GY de helft van GF en heeft lengte $\sqrt{\frac{3}{4}}$.

Teken de loodlijn op GF door het punt Q en neem H als het snijpunt met GF. Dan heeft GH een lengte van $\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{5}{8} - \sqrt{\frac{5}{64}}}$. Het kwadraat hiervan is $1\frac{3}{8} - \sqrt{\frac{5}{64}} - \sqrt{1\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}$.[4]

- Nu willen we OZ van OY aftrekken. Allereerst: we vinden $OY = \frac{1}{2}$ door de stelling van Pythagoras toe te passen in de driehoek OGY met $GY = \sqrt{\frac{3}{4}}$ en $GO = 1$. OZ kunnen we berekenen door gebruik te maken van het punt K geïntroduceerd in het bewijs van propositie 3. Dit punt is zo gekozen op OS dat $OZ = \frac{1}{2}OK$. We hebben gezien dat XK dan gelijk is aan de zijde van de tienhoek en daarom lengte $\sqrt{1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$ heeft. Dus nu geldt $OZ = \frac{1}{2}OK = \frac{1}{2}(OX - XK) = \frac{1}{2}(1\frac{1}{2} - \sqrt{1\frac{1}{4}}) = \frac{3}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}}$. We krijgen zo $QH = ZY = \sqrt{\frac{5}{16}} - \frac{1}{4}$, en het kwadraat hiervan is $\frac{3}{8} - \sqrt{\frac{5}{64}}$.

- We vinden nu voor het kwadraat van GQ: $1\frac{3}{8} - \sqrt{\frac{5}{64}} - \sqrt{1\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}} + \frac{3}{8} - \sqrt{\frac{5}{64}} = 1\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{1\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}$ en de wortel hiervan geeft ons GQ en dus de lengte van de zijde van de 15-hoek.[5]

Me behulp van Ludolphs propositie kunnen we nu vinden dat de zijde van de dertighoek lengte $\sqrt{2 - \sqrt{2\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{5}{16}} + \sqrt{1\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}}$ heeft, maar Van Ceulen berekent de zijdes van de dertig- en zestighoek rechtstreeks. Voor de dertighoek tekenen we uit het punt S een zijde CS van de gelijkzijdige zeshoek. Dit kan gemakkelijk door een cirkel met straal 1 en middelpunt S te tekenen. De boog die CS afsnijdt is dus $\frac{1}{6}$ van de gehele omtrek. SA snijdt een boog af die $\frac{1}{5}$ van de omtrek is en dus houden we voor AC een boog over die $\frac{1}{30}$ van de omtrek is. Dus AC is een zijde van de gelijkzijdige 30-hoek. De berekening van de lengte gaat als volgt. Ludolph maakt nu weer een rechthoekige driehoek ACE en rekent AE en EC uit om zo te vinden voor de zijde van de dertighoek $\sqrt{2\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{1\frac{7}{8} + \sqrt{\frac{45}{64}}}}$, het antwoord staat dus niet in dezelfde vorm als dat wat we via de propositie gevonden hebben. We vinden zo de indrukwekkende gelijkheid $\sqrt{2 - \sqrt{2\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{5}{16}} + \sqrt{1\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}} = \sqrt{2\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{1\frac{7}{8} + \sqrt{\frac{45}{64}}}}$.

Tenslotte berekent Ludolph ook een zijde van de gelijkzijdige 60-hoek. We nemen hiervoor het punt I op de cirkel zo tussen O en P dat de boog die OI afsnijdt $\frac{1}{12}$ van de hele omtrek is. Dan is de boog die IP afsnijdt $\frac{1}{10} - \frac{1}{12} = \frac{1}{60}$ en IP is een zijde van de 60-hoek. We volgen weer dezelfde procedure om de lengte van deze zijde te vinden. Van Ceulen spreekt in zijn tekst over een punt K dat het snijpunt is van PQ en de loodlijn van PQ door het punt I. Ludolph heeft K echter niet in zijn tekening aangegeven. We berekenen de lengtes van IK en KP en vinden zo voor de zijde van de zestighoek $\sqrt{2 - \sqrt{\frac{15}{16}} - \sqrt{\frac{3}{16}} - \sqrt{\frac{5}{8} - \sqrt{\frac{5}{64}}}}$. Hierna geeft Ludolph nog de zijdes van de 120-, 240- en 480-hoek. Hij maakt daarbij wel weer gebruik van de eerste propositie en de zijde van de dertighoek.

De methode die Ludolph gebruikt kan ook nu nog goed gebruikt worden om lengtes van koorden te berekenen. Wel zien we dat we om bijvoorbeeld de zijde van de vijftienhoek te berekenen de zijdes van de vijfhoek en tienhoek nodig hebben. De methode steunt dus indirect toch op de berekeningen die al gedaan zijn. Dit is waarschijnlijk de reden dat Ludolph de vijfhoek en de vijftienhoek in één hoofdstuk

[4] In het origineel staat hier een fout. Volgens Ludolph is GH gelijk aan $\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{5}{8} - \sqrt{\frac{5}{16}}}$ en het kwadraat gelijk aan $1\frac{3}{8} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{1\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}$.

[5] Ludolph geeft als lengte van de zijde wel $\sqrt{1\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{1\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}$. Hij heeft dus de fout in de berekening van GH^2 niet laten doorwerken in zijn eindantwoord, waarschijnlijk zijn de fouten dus slechts zetfouten.

behandelt, zo kan hij goed laten zien hoe je de resultaten van de één kunt gebruiken bij het berekenen van de ander.

Hoofdstuk IV

Construeerbaarheid

We hebben gezien dat Ludolph de lengtes van zijdes van vele ingeschreven veelhoeken heeft berekend. Ook gaf hij van de meeste van deze veelhoeken één van de zijdes weer in een afbeelding. De Grieken waren al bekend met manieren om deze zijdes te construeren met slechts passer en liniaal. Euclides geeft deze constructies aan in de Elementen. Het is dus niet verwonderlijk dat Ludolph ook hiervan op de hoogte was, hij gebruikt de Elementen immers veelvuldig in Vanden Circkel. De Grieken konden echter voor veel regelmatige veelhoeken, bijvoorbeeld de zeven- en negenhoek, geen constructies vinden. Ook in de eeuwen daarna werden er geen nieuwe resultaten behaald in dit gebied. De Duitse wiskundige Carl Friedrich Gauß (1777-1855) was de eerste die nieuwe ontdekkingen deed. Met behulp van zijn theorie hebben we tegenwoordig een methode om voor elke regelmatige veelhoek te bepalen of hij wel of niet constueerbaar is. In onze tijd wordt het resultaat van Gauß vaak gezien als een toepassing van de Galoistheorie. In dit hoofdstuk zullen we behandelen wat er precies bedoeld wordt met 'construeerbaarheid' en hoe we kunnen zien of een regelmatige veelhoek wel of niet construeerbaar is.

IV.1 Construeren met Euclides

We zullen nu eerst kijken naar Euclides' ideeën over construeren, omdat Ludolph bekend was met de Elementen van Euclides. De proposties uit de Elementen zijn vaak constructieproblemen: gegeven zekere data kunnen we een bepaald figuur construeren. Dit in tegenstelling tot stellingen die we tegenwoordig vaak zien: onder een aantal aannames is een bepaald resultaat waar. We zouden deze constructieproblemen kunnen zien als een speciaal soort bewijzen van existentie: de bewijzen zijn constructief, ze laten zien dat een figuur getekend kan worden met behulp van speciaal gereedschap dat we tegenwoordig een liniaal en een passer zouden noemen. Deze constructieve aanpak met passer en liniaal zien we al terug in de eerste drie postulaten van boek 1 van de Elementen. In postulaat 1 neemt Euclides aan dat tussen twee gegeven punten een recht lijnstuk getrokken kan worden en in postulaat 2 staat dat dit lijnstuk kan worden doorgetrokken tot een rechte lijn. Postulaat 3 tenslotte zegt dat er voor elk middelpunt en elke straal een cirkel bestaat.

Euclides spreekt in zijn boeken alleen over figuren die construeerbaar zijn. Hij beschrijft bijvoorbeeld de regelmatige drie-, vier-, vijf-, zes- en vijftienhoek, maar zegt niets over de regelmatige zevenhoek. Bij Euclides lijkt het erop dat hij alleen een figuur wil behandelen, als hij een constructie heeft om dat figuur te tekenen.[1] Laten we daarom eens kijken hoe de constructies met passer en liniaal in zijn werk gaan. Voor Euclides is de liniaal slechts een instrument om rechte lijnen mee te trekken. De liniaal wordt dus niet gebruikt om lengtes af te passen. De passer gebruikt Euclides alleen om cirkels te tekenen, en dus niet om lengtes over te brengen naar een andere plek. Dat wil zeggen: zodra een cirkel getekend is, vallen de benen van de passer weer tegen elkaar aan. Overigens is dit passergebruik equivalent met een passergebruik waarin we wel lengtes mogen overbrengen: als een figuur construeerbaar is op de ene manier is het ook construeerbaar op de andere manier.[2] De constructie zelf bestaat uit een eindig

[1] Hartshorne [2000]
[2] Hartshorne [2000]

aantal rechte lijnen en cirkels getekend met liniaal en passer, gegeven zekere begindata. Deze begindata bestaan uit punten, lijnen of cirkels. Hieruit kunnen we nieuwe punten, lijnen en cirkels vinden, waarbij we ons wel moeten houden aan een aantal regels.

1. De liniaal mag gebruikt worden om een gegeven of eerder geconstrueerd lijnstuk door te trekken tot een lijn en om door twee gegeven of eerder geconstrueerde punten een nieuwe lijn te trekken. De lijnen die we zo verkrijgen noemen we geconstrueerd of construeerbaar.

2. De passer mag gebruikt worden om een cirkel te tekenen met als middenpunt een gegeven of eerder geconstrueerd punt en met straal gelijk aan de afstand tussen twee gegeven of eerder geconstrueerde punten. De cirkels die zo verkregen worden noemen we geconstrueerd of construeerbaar.

3. Alle snijpunten tussen twee geconstrueerde lijnen, tussen twee geconstrueerde cirkels of tussen een geconstrueerde cirkel en een geconstrueerde lijn noemen we geconstrueerde of construeerbare punten.

Dit zijn de regels die Euclides gebruikt om figuren te construeren. Merk hierbij op dat niet alle punten van een construeerbare cirkel of rechte construeerbaar hoeven te zijn. De regels zijn zo gemaakt dat ze niets aan het toeval overlaten. We mogen bijvoorbeeld niet willekeurige punten gebruiken, elk punt dat we gebruiken moet construeerbaar zijn. Daarentegen moeten we wel minimaal twee punten gegeven hebben, anders kunnen we de de liniaal en de passer niet gebruiken. Er moeten dus altijd twee punten in de begindata zitten. Het is zelfs zo dat we als begindata slechts deze twee punten kunnen nemen. De overige elementen van de begindata moeten namelijk punten, lijnen of cirkels zijn die geconstrueerd kunnen worden met de twee punten. Immers, als we punten, lijnen of cirkels in de startdata nemen die niet construeerbaar zijn uit twee punten, kunnen we deze punten, lijnen en cirkels niet als construeerbaar beschouwen en het is niet zinnig om constructies te maken die uitgaan van niet-construeerbare begindata. Zoals we net al zeiden: een figuur bestaat voor Euclides pas, als hij construeerbaar is. Voor meer informatie over Euclides en construeerbaarheid met passer en liniaal verwijzen we naar Hartshorne [2000] en Martin [1998].

In Vanden Circkel wordt veel gebruik gemaakt van de Elementen. Ludolph was dus waarschijnlijk goed op de hoogte van Euclides' boeken en zal ongetwijfeld Euclides' ideeën over construeren en zijn constructies van de regelmatige drie-, vier-, vijf-, zes- en vijftienhoek gezien hebben. Het zou dus goed kunnen dat Ludolph de afbeeldingen in de eerste hoofdstukken van Vanden Circkel gemaakt heeft met behulp van deze constructies. Zoals we gezien hebben was Ludolph geïnteresseerd in de lengtes van de zijdes van veelhoeken. Op aandringen van Adriaan van Roomen, een wiskundige en tijdgenoot van Ludolph, ging Van Ceulen aan de slag met het berekenen van de zijdes van de regelmatige drie- tot en met tachtighoek op 14 decimalen nauwkeurig.[3] Het eindresultaat staat in Vanden Circkel in hoofdstuk 24 op folium 19v. In hoofdstuk 3, 4 en 5 van Vanden Circkel begint Ludolph aan dit karwei. Hij berekent vaak de zijdes met behulp van een afbeelding waarin de gezochte zijdes geconstrueerd zijn. In de tijd van Ludolph was het echter nog voor veel van deze regelmatige veelhoeken de vraag of ze wel geconstrueerd konden worden. Inmiddels is deze vraag beantwoord en de rest van dit hoofdstuk zullen we besteden aan dit antwoord.

IV.2 Construeerbaarheid van regelmatige veelhoeken

Om te kijken of een regelmatige n-hoek construeerbaar is, is het handig het begrip construeerbaar getal in te voeren. Hiervoor hebben we eerst een drietal constructies nodig, die we basisconstructies noemen. We laten nu de historische context los en volgen de lijn van Cornelissen [2007].

1. Het is mogelijk om een loodlijn te construeren door een construeerbaar punt op een construeerbare rechte lijn.

[3] Bos [2000]

2. We kunnen, gegeven een construeerbare rechte en punt, de evenwijdige lijn aan de rechte door het punt construeren.

3. Stel dat we een lijnstuk hebben tussen twee construeerbare punten, neem nu een willekeurige construeerbare rechte met een construeerbaar punt p op die rechte. We kunnen nu op deze rechte een lijnstuk afpassen met beginpunt p en lengte gelijk aan de lengte van het eerste lijnstuk. Dit wil zeggen dat we met de passer lengtes mogen overbrengen.

Met deze drie basisconstructies kunnen we in het vlak een assenstelsel nemen zodanig dat de twee punten uit de begindata (0,0) en (1,0) zijn. Het is nu een natuurlijke keuze om de afstand tussen de twee basispunten 1 te nemen. Hiermee kunnen we de Euclidische afstand tussen elke twee construeerbare punten geven. We noemen nu een reëel getal construeerbaar als de absolute waarde van dit getal voorkomt als de afstand tussen twee construeerbare punten. Tussen construeerbare punten en construeerbare getallen is een duidelijke relatie te ontdekken.

Propositie 4. *Een punt $p = (x, y)$ is een construeerbaar punt dan en slechts dan als x en y construeerbare getallen zijn.*

Bewijs. Stel p is construeerbaar, we kunnen nu vanuit p de loodlijnen construeren op beide assen. Noem de snijpunt van de horizontale en verticale as met zijn loodlijn respectievelijk x' en y'. Nu geldt dat de afstand tussen $(0, 0)$ en x' gelijk is aan x en de afstand tussen $(0, 0)$ en y' is y. Hiermee is bewezen dat x en y construeerbare getallen zijn.

Neem nu aan dat x en y construeerbaar zijn. Er zijn dus construeerbare punten waartussen de afstand gelijk is aan $|x|$ en hetzelfde geldt voor $|y|$. Met de laatste basisconstructie kunnen we de lengtes $|x|$ en $|y|$ in de goede richting overdragen op de assen. Vanuit de twee verkregen punten construeren we nu de loodlijnen door de assen waarop de punten zelf liggen. Het snijpunt van deze twee loodlijnen is precies het punt p en is wegens de derde regel construeerbaar. $\square$

Stel nu dat we een regelmatige n-hoek willen construeren in de eenheidscirkel. Deze is construeerbaar dan en slechts dan als zijn hoekpunten construeerbaar zijn. De hoekpunten zijn precies de n eenheidswortels van $z^n - 1 = 0$, namelijk $\zeta := e^{\frac{2\pi i}{n}}, \zeta^2, ..., \zeta^{n-1}$. We weten dat $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, uit de bovenstaande propositie volgt nu dus dat de eenheidswortels construeerbaar zijn precies als de bijbehorende sinus- en cosinuswaarden construeerbare getallen zijn. Overigens geldt dat $\cos(\theta)$ construeerbaar is dan en slechts dan als $\sin(\theta)$ dat is. We kunnen namelijk bewijzen dat de verzameling van construeerbare getallen een deellichaam van $\mathbb{R}$ is dat $\mathbb{Q}$ bevat. Verder: als $x \in \mathbb{R}$ construeerbaar is, dan is $\sqrt{x}$ dat ook. Het gewenste volgt nu uit de formule $\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$.

IV.2.1 De theorie van Gauß

Om de theorie van Gauß te bespreken hebben we Fermat priemgetallen nodig. Dit zijn priemgetallen van de vorm $2^m + 1$ met $m \in \mathbb{N}$. We bewijzen eerst de volgende propositie.

Propositie 5. *Een Fermat priemgetal is van de vorm $2^{2^k} + 1$ voor $k \in \mathbb{N}$.*

Bewijs. We nemen een Fermat priemgetal $2^m + 1$. Stel nu dat m geen macht van 2 is. Nu kunnen we schrijven $m = ab$, waarbij $a > 1$ een oneven getal is. Schrijf $c = 2^b$, dan geldt

$$2^m + 1 = c^a + 1 = (c+1)\sum_{n=0}^{a-1}(-1)^n c^n = (c+1)(c^{a-1} - c^{a-2} + ... + 1).$$

We kunnen $2^m + 1$ dus schrijven als het product van twee getallen die beide ongelijk 1 zijn. Hierdoor kan $2^m + 1$ geen priemgetal zijn als m geen macht van 2 is. $\square$

We schrijven nu $F_k := 2^{2^k} + 1$. Fermat zelf had het vermoeden dat alle Fermatgetallen F_k priem zijn, maar dit is niet waar. We vinden

$$F_0 = 3,\ F_1 = 5,\ F_2 = 17,\ F_3 = 257,\ F_4 = 65537.$$

Van al deze getallen is na te gaan dat ze priem zijn. Euler heeft echter bewezen dat F_5 geen priemgetal is en sindsdien zijn er veel Fermatgetallen gevonden die niet priem zijn en er zijn zelfs voor $k > 4$ geen Fermat priemgetallen bekend. De Fermat getallen die wel priem zijn hebben echter een toepassing gevonden in het bewijzen of een regelmatige veelhoek construeerbaar is. Voor meer informatie over Fermatgetallen verwijzen we naar Coppel [2006].

Gauß was 18 jaar oud, toen hij bewees dat een regelmatige n-hoek geconstrueerd kan worden als n van de vorm $2^k p_0 \cdots p_s$ is waarbij $k \in \mathbb{N}$ en $p_0, ..., p_s$ verschillende Fermat priemgetallen zijn. Het is hierbij mogelijk dat er nul Fermat priemgetallen in het product voorkomen, dus $n = 2^k$ waarbij nu $k > 1$. Hiermee kunnen we bewijzen dat vele veelhoeken construeerbaar zijn. In het bijzonder volgt uit de construeerbaarheid van een regelmatige n-hoek die van de regelmatige $2n$-hoek. In 1837 bewees Pierre Wantzel ook het omgekeerde van de stelling van Gauß: een regelmatige n-hoek kan niet worden geconstrueerd, als n niet van de vorm $2^k p_1 \cdots p_s$ is. Hiermee kunnen we voor een willekeurige regelmatige veelhoek bewijzen of hij wel of niet construeerbaar is.

Gauß staat nu bekend als een groot wiskundige, maar hij was nog onbekend toen hij zijn theorie over veelhoeken ontwikkelde. Zijn ontdekking publiceerde hij in *Disquisitiones Arithmeticae* (1801).[4] Uit de theorie van Gauß volgt dat de regelmatige zeventienhoek construeerbaar is, immers $F_2 = 17$. Gauß gaf in Disquisitiones Arithmeticae ook aan hoe een regelmatige zeventienhoek geconstrueerd kan worden. In 1880 werd in zijn geboorteplaats Brunswick een gedenksteen in de vorm van een regelmatige zeventienhoek voor Gauß opgericht. Tegenwoordig wordt de theorie van Gauß als één van de toepassingen van Galoistheorie gezien, hoewel deze theorie in de tijd dat Gauß Disquisitiones Arithmeticae schreef nog niet ontwikkeld was. Met de hoofdstelling van de Galoistheorie is het ook mogelijk om voor een construeerbare veelhoek een constructie te vinden.

Het gaat te ver om hier de stelling van Gauß te bewijzen. Wel kunnen we de formule $2^k p_0 \cdots p_s$ aannemelijk maken. We willen bekijken welke n-hoeken construeerbaar zijn. Het is niet moeilijk in te zien dat een regelmatige $2n$-hoek construeerbaar is, als de regelmatige n-hoek geconstrueerd kan worden. Immers, stel dat de n-hoek is ingeschreven in een cirkel met middelpunt M, we kunnen nu op de n zijdes van de figuur loodlijnen construeren door M. Deze loodlijnen zijn precies de middelloodlijnen van de n zijdes en de snijpunten van de loodlijnen met de cirkel, samen met de n hoekpunten van de n-hoek, zijn nu de $2n$ hoekpunten van de gewenste veelhoek. Dit verklaart de factor 2^k in de formule voor construeerbare veelhoeken.

Nu, elk natuurlijk getal n heeft een unieke priemontbinding. Stel dat de priemontbinding van n gelijk is aan $2^k \cdot q_1 \cdots q_s$, waarbij $q_i \neq q_j$ voor $i \neq j$. Er geldt dat de n-hoek construeerbaar is, als alle q_i-hoeken construeerbaar zijn voor $i = 1, ..., s$. Bekijken we bijvoorbeeld de vijftienhoek. Zowel de driehoek als de vijfhoek zijn construeerbaar. Stel dat ze zo zijn geconstrueerd in een cirkel dat twee van hun hoekpunten samenvallen. We vinden nu een koorde die $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$ van de cirkelomtrek afsnijdt. Met dezelfde redenatie als hierboven kunnen we dus ook een koorde vinden die $\frac{1}{15}$ afsnijdt, oftewel een zijde van de vijftienhoek. We kunnen ons dus beperken tot construeerbare n-hoeken met n een priemgetal.

Laten we daarom eens kijken waarom regelmatige n-hoeken, waarbij n een Fermat priemgetal is, construeerbaar zijn. In het algemeen corresponderen de n hoekpunten van de regelmatige n-veelhoek precies met de n oplossingen van $z^n = 1$, dit kunnen we inzien door de oplossingen te bekijken als punten in het complexe vlak dat we kunnen zien als $\mathbb{R}^2$ via $x + iy \cong (x, y)$. De oplossingen van $z^n = 1$ zijn $1 \cong (1, 0)$, $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}} \cong (\cos(\frac{2\pi}{n}), \sin(\frac{2\pi}{n}))$, $\zeta^2, ..., \zeta^{n-1}$. We weten al dat $(1, 0)$ construeerbaar is, als we kunnen aantonen dat $(\cos(\frac{2\pi}{n}), \sin(\frac{2\pi}{n}))$ ook construeerbaar is, kunnen we concluderen dat alle andere hoekpunten ook construeerbaar zijn. Deze zijn dan immers gemakkelijk te vinden met de passer. Stel nu dat $n = 2^{2^k} + 1$, net zoals we gezien hebben in III.3.2 voor het geval $n = 5$ is $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ nu een nulpunt van een polynoom van graad $n - 1 = 2^{2^k}$. Met behulp van de hoofdstelling van de Galoistheorie kunnen we dit polynoom ontbinden in 2^k kwadratische polynomen. Deze zijn makkelijk op te

[4] Gauß [1801]

lossen en uiteindelijk vinden we hiermee de waarde van $\cos(\frac{2\pi}{n})$ als een keten van wortels. We weten: als $x \in \mathbb{R}$ construeerbaar is, dan is $\sqrt{x}$ ook construeerbaar. Hiermee is $\cos(\frac{2\pi}{n})$ construeerbaar en dus is $(\cos(\frac{2\pi}{n}), \sin(\frac{2\pi}{n}))$ ook construeerbaar wegens propositie 4, aangezien uit de construeerbaarheid van $\cos(\frac{2\pi}{n})$ volgt dat $\sin(\frac{2\pi}{n})$ ook construeerbaar is. We concluderen dat een n-hoek construeerbaar is, als n een Fermat priemgetal is.

De constructie voor de 17-hoek was al door Gauß gevonden, deze is vrij ingewikkeld. Voor de 257-hoek is er zelfs een boek van 194 pagina's nodig om de constructie uit te leggen. Een wiskundige, Oswald Hermes, heeft eens een 65537-hoek geconstrueerd. Hij heeft hier tien jaar aan gewerkt en een boekenkast volgeschreven. Deze boeken zijn geschonken aan het Mathematisch Instituut van de Universiteit van Göttingen.[5]

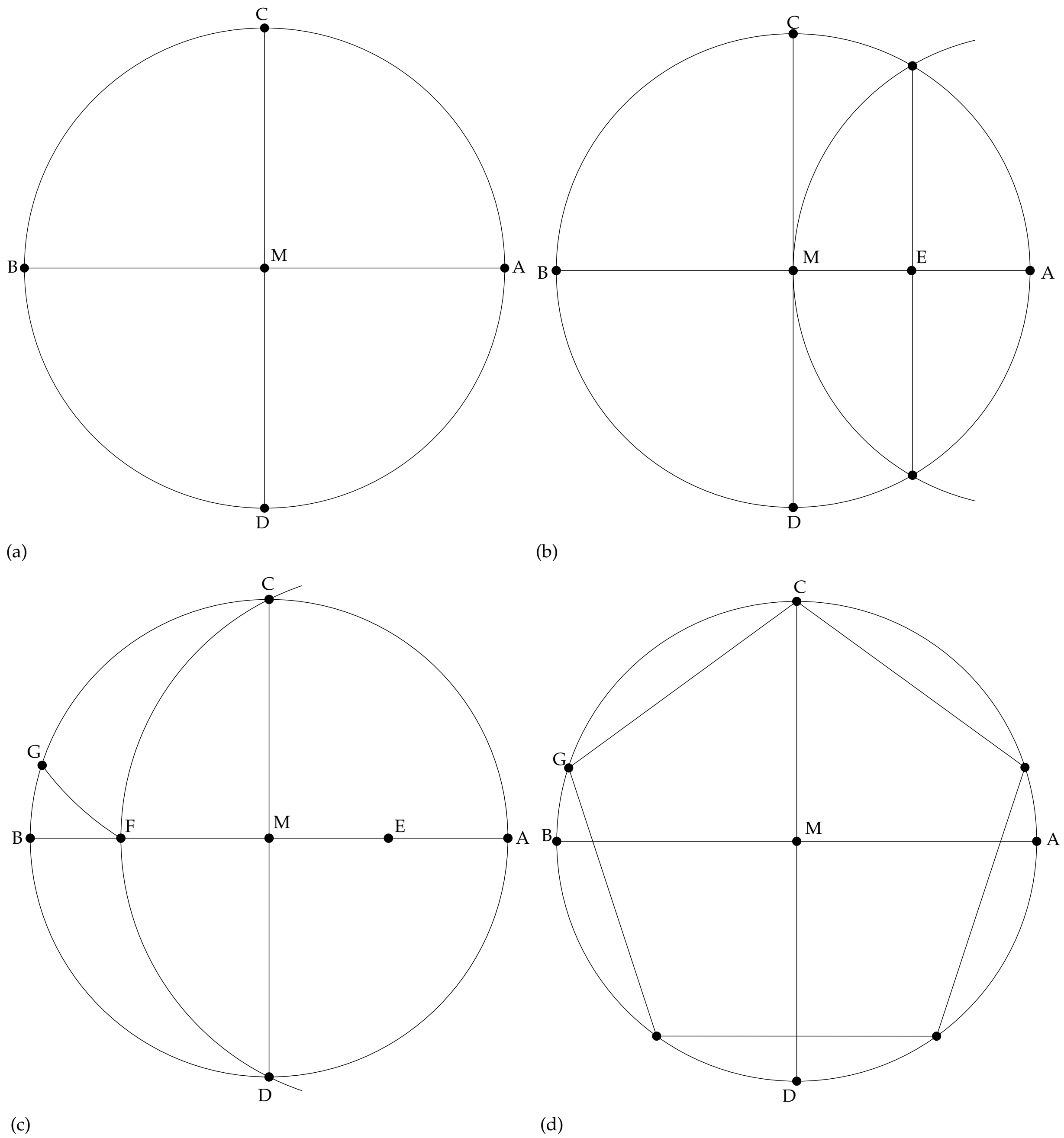
IV.3 De constructie van de regelmatige vijfhoek

Ter illustratie zullen we nu laten zien hoe de regematige vijfhoek geconstrueerd kan worden. We beginnen met twee construeerbare punten A en M en verbinden deze met een rechte lijn. We tekenen een cirkel door A met als middelpunt M, het andere snijpunt van deze cirkel met de lijn door A en M noemen we B. Met behulp van één van de basisconstructies kunnen we de loodlijn op AB door het punt M trekken, deze loodlijn snijdt de cirkel in de punten C en D. We vinden zo figuur IV.1(a).

We willen nu het lijnstuk MA in twee gelijke stukken delen. Dit kan door een cirkel met middelpunt A door M te tekenen. Deze cirkel heeft twee snijpunten met de cirkel met middelpunt M en straal MA. Deze twee snijpunten verbinden we met een lijnstuk en het snijpunt van dit lijnstuk met MA noemen we E. MA is nu in E in twee gelijke delen opgedeeld, zie figuur IV.1(b).

Nu tekenen we een cirkel door C met midelpunt E. Het snijpunt van deze cirkel met BM noemen we F. CF is een zijde van de regelmatige vijfhoek. Immers, $CF^2 = CM^2 + FM^2 = 1 + (DE - ME)^2 = 1 + (\sqrt{1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2})^2 = 2\frac{1}{2} - \sqrt{1\frac{1}{4}}$. We vinden zo dezelfde waarde voor CF als Ludolph in hoofdstuk 5 van Vanden Circkel voor de zijde van de vijfhoek heeft gevonden. Door een cirkel te tekenen door F met middelpunt C kunnen we de zijde van de vijfhoek CG afpassen op onze cirkel. Dit geeft ons figuur IV.1(c). De andere hoekpunten van de vijfhoek kunnen we nu snel vinden, zie figuur IV.1(d).

[5] Tietze [1965]



Figuur IV.1: De constructie van de regelmatige vijfhoek

Hoofdstuk V

Lengtes van vele koorden

In het zesde capittel worden niet zijdes van regelmatige veelhoeken berekend, maar lengtes van verschillende koorden in de cirkel met straal 1. Ludolph geeft lange lijsten met koorden en bijbehorende lengtes. Van Ceulen begint met een korte inleiding waarin uitgelegd wordt wat het idee is van hoofdstuk 6. Ludolph neemt telkens een beginkoorde, als voorbeeld neemt hij de koorde die $\frac{3}{20}$ deel van de omtrek afsnijdt en van deze koorde bepaalt hij de lengte. Daarna berekent hij telkens eerst het complement, dus de koorde die $\frac{7}{20}$ afsnijdt, en gebruikt dan de eerste propositie uit capittel 2 om de lengte te berekenen van de koorde die hoort bij $\frac{3}{40}$ deel van de omtrek. Zo gaat hij verder en berekent lengtes van de koorden die $\frac{17}{40}$, $\frac{3}{80}$, enzovoort van de omtrek afsnijden. Het is handig om in deze volgorde de berekeningen te maken. Als we immers een koorde met lengte a hebben, dan heeft het complement lengte $\sqrt{4-a^2}$ en voor de koorde die hoort bij de halve hoek vinden we een lengte van $\sqrt{2-\sqrt{4-a^2}}$. Als we het complement weten, hebben we de lengte van de koorde met de halve hoek dus snel gevonden.

V.1 Een aantal voorbeelden

Ludolph geeft hierna zes lijstjes waarin hij dit principe uitwerkt. De beginwaarden van deze lijsten zijn koorden die respectievelijk $\frac{17}{80}$, $\frac{17}{120}$, $\frac{7}{30}$, $\frac{11}{30}$, $\frac{3}{20}$ en $\frac{7}{40}$ van de omloop afsnijden.[1] Voor deze koorden moeten we dus de lengte op een alternatieve manier vinden. Ludolph geeft voor de koorden van $\frac{3}{20}$ en $\frac{11}{30}$ een toelichting. Opvallend is dat Van Ceulen in zijn inleiding al de lengte van de koorde die hoort bij $\frac{3}{20}$ noemt, maar dat hij pas veel later laat zien hoe hij nu aan deze lengte gekomen is. Ludolph berekent de lengte van de koorde met $\frac{3}{20}$ uit de zijde van de ingeschreven vijfhoek. Het complement van deze zijde snijdt namelijk $\frac{3}{10}$ van de omloop af. Met de eerste propositie is nu gemakkelijk in te zien dat de gezochte koorde lengte $\sqrt{2-\sqrt{2\frac{1}{2}-\sqrt{1\frac{1}{4}}}}$ heeft.

Nu, we kunnen de lengtes van de koorden van $\frac{17}{80}$ en $\frac{7}{40}$ berekenen uit de lengte van de koorde van $\frac{3}{20}$. Het complement van de laatste snijdt namelijk $\frac{7}{20}$ van de omtrek af en daaruit kunnen we met de eerste propositie de lengte van de koorde die $\frac{7}{40}$ afsnijdt bepalen. De koorde die hoort bij $\frac{17}{80}$ vinden we nu door in te zien dat de koorde van $\frac{17}{40}$ het complement is van de koorde met $\frac{3}{40}$. Ludolph geeft deze beredeneringen echter niet.

Ook legt Ludolph uit hoe we in het geval van $\frac{11}{30}$ te werk moeten gaan. Hij berekent eerst de lengte van het complement, de koorde die $\frac{2}{15}$ van de omtrek afsnijdt. Hierbij maakt hij gebruik van de figuur uit zijn hoofdstuk 5. Hierin is de boog AOT $\frac{3}{5}$ van de omtrek en de boog GOF is $\frac{1}{3}$. Voor de boog AG houden we nu $\frac{1}{2}(\frac{3}{5}-\frac{1}{3})=\frac{2}{15}$ deel van de omtrek over. Dus van de koorde AG willen we de lengte

[1] Kortheidshalve zullen we in het vervolg van dit hoofdstuk vaak weglaten dat we het over delen van de cirkelomtrek hebben: we schrijven niet 'de koorde die $\frac{a}{b}$ van de omtrek afsnijdt', maar simpelweg 'de koorde van $\frac{a}{b}$'.

berekenen. Ludolph gebruikt hier dezelfde methode waarmee hij ook de zijde van de vijftien-, dertig- en zestighoek gevonden heeft. Hij berekent namelijk eerst de lengte van AE en GE en vindt hieruit de lengte van AG. Het punt E hadden we al gedefinieerd bij het berekenen van AC, de zijde van de dertighoek.

Nu rest nog de vraag hoe we de koorden die horen bij $\frac{17}{120}$ en $\frac{7}{30}$ kunnen vinden. Ludolph geeft hierover geen enkele uitleg, de lezer zal deze zelf moeten narekenen. De koorde die $\frac{17}{120}$ van de omtrek afsnijdt kan gevonden worden op een manier waarmee we ook de koorde van $\frac{3}{20}$ berekend hebben. We gaan nu uit van de zijde van de vijftienhoek. Zijn complement heeft een boog die $\frac{1}{2} - \frac{1}{15} = \frac{13}{30}$ deel van de omtrek is. Hieruit kunnen we de koorde vinden die hoort bij $\frac{13}{60}$ deel van de omtrek. Voor het complement vinden we nu $\frac{17}{60}$ en als we nogmaals de eerste propositie toepassen hebben we de lengte van de koorde die $\frac{17}{120}$ deel van de omtrek afsnijdt gevonden. We weten dat de zijde van de vijftienhoek $\sqrt{1\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{1\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}$ lang is. Hieruit vinden we voor de koorde die hoort bij $\frac{17}{120}$ een lengte van $\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{1\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{1\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}}}$ en dit is precies het getal dat Ludolph ook gevonden heeft.

Voor de koorde van $\frac{7}{30}$ zouden we de volgende redenatie kunnen maken. Het is eenvoudig na te gaan dat het complement van de koorde van $\frac{7}{15}$ een zijde van de regelmatige dertighoek is. Aangezien we de lengte van deze zijde al weten, is de lengte van de koorde van $\frac{7}{15}$ makkelijk te vinden. Hiermee kunnen we met behulp van Ludolphs propositie de lengte van de koorde van $\frac{7}{30}$ vinden. De lengte die we op deze manier vinden staat echter in een heel andere vorm dan Ludolph in Vanden Circkel geeft, dit maakt het niet aannemelijk dat Van Ceulen zijn antwoord op deze manier heeft gevonden. Het lijkt het er op dat Ludolph bij het berekenen van de lengte een resultaat heeft gebruikt dat hij pas introduceert in zijn hoofdstuk 14 bij het berekenen van de zijde van de ingeschreven zevenhoek, maar hij zegt hier niets over. In hoofdstuk 14 geeft hij alleen aan hoe de propositie toegepast kan worden op de situatie die in dat hoofdstuk van belang is. Ludolph vertelt dus niet hoe het algemene geval werkt en laat ook een bewijs achterwege. In moderne taal komt het op het volgende neer.

Propositie 6. *Neem een cirkel met straal r en middellijn AB en neem een koorde DC met lengte x zodanig dat AB en DC evenwijdig aan elkaar zijn. Voor de koordenvierhoek $ABCD$ geldt nu dat de diagonalen AC en BD lengte $\sqrt{2r^2 + rx}$ hebben en dat AD en BC lengte $\sqrt{2r^2 - rx}$ hebben.*

Bewijs.

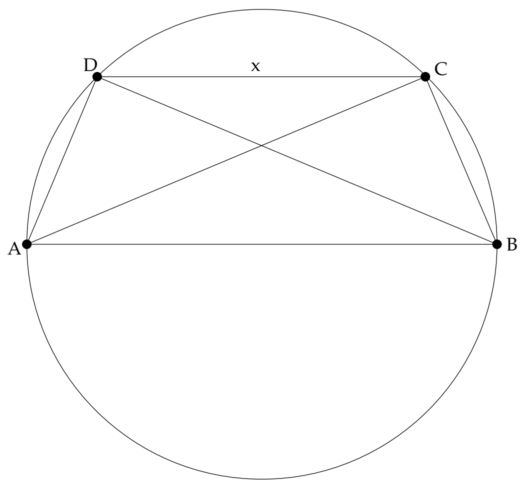
Volgens de stelling van Ptolemaeus geldt dat $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$. Omdat AB en CD evenwijdig zijn volgt dat $AD = BC$ en $BD = AC$. We vinden hiermee

$$AC^2 - AD^2 = 2rx. \tag{V.1}$$

Omdat AB de middellijn van de cirkel is, kunnen we de stelling van Pythagoras toepassen in de driehoek ABD. Dit geeft

$$AD^2 + DB^2 = AD^2 + AC^2 = 4r^2. \tag{V.2}$$

Door (V.1) en (V.2) bij elkaar op te tellen krijgen we $AC^2 = 2r^2 + rx$, dus $AC = BD = \sqrt{2r^2 + rx}$. En (V.1) aftrekken van (V.2) geeft $AD^2 = 2r^2 - rx$, oftewel $AD = BC = \sqrt{2r^2 - rx}$. Hiermee is het gewenste bewezen.



□

Laten we nu de propositie toepassen met als x de koorde die $\frac{7}{30}$ van de omtrek afsnijdt. In dit geval snijden AD en BC beide $\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{7}{30}) = \frac{2}{15}$ van de hele omtrek af en wegens de propositie hebben ze lengte $\sqrt{2-x}$. Nu weten we de lengte van deze koorde, de berekening heeft Ludolph uitgeschreven om aan de lengte van de koorde die $\frac{11}{30}$ afsnijdt te komen. We vinden zo

$$\sqrt{2-x} = \sqrt{1\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{1\frac{7}{8} + \sqrt{\frac{45}{64}}}}$$

waaruit we snel vinden $x = \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} + \sqrt{1\frac{7}{8} + \sqrt{\frac{45}{64}}}$. Nu, aangezien Van Ceulen al zijn uitkomsten als wortels noteert, is het plausibel aan te nemen dat hij ook dit getal als een wortel wil schrijven. Dat kan met de regel $x = \sqrt{x^2}$ die geldt voor niet-negatieve x. Allereerst merken we op dat

$$\sqrt{\frac{15}{8} + \sqrt{\frac{45}{64}}} = \sqrt{\frac{3}{8}(5 + \sqrt{5})}$$

en

$$(\sqrt{5} - 1)\sqrt{5 + \sqrt{5}} = \sqrt{(6 - 2\sqrt{5})(5 + \sqrt{5})} = \sqrt{20 - 4\sqrt{5}} = 2\sqrt{5 - \sqrt{5}}.$$

Nu kunnen we de volgende afleiding maken

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt{x^2} \\
&= \sqrt{\tfrac{1}{16} + \tfrac{5}{16} + \tfrac{15}{8} + \sqrt{\tfrac{45}{64}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{5}{16}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{15}{8} + \sqrt{\tfrac{45}{64}}} - 2\sqrt{\tfrac{5}{16}}\sqrt{\tfrac{15}{8} + \sqrt{\tfrac{45}{64}}}} \\
&= \sqrt{2\tfrac{1}{4} + \sqrt{\tfrac{5}{16}} - \tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{\tfrac{15}{8} + \sqrt{\tfrac{45}{64}}}} \\
&= \sqrt{2\tfrac{1}{4} + \sqrt{\tfrac{5}{16}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3}{8}}(\sqrt{5} - 1)\sqrt{5 + \sqrt{5}}} \\
&= \sqrt{2\tfrac{1}{4} + \sqrt{\tfrac{5}{16}} - \sqrt{\tfrac{3}{8}(\sqrt{5 - \sqrt{5}})}} \\
&= \sqrt{2\tfrac{1}{4} + \sqrt{\tfrac{5}{16}} - \sqrt{1\tfrac{7}{8} - \sqrt{\tfrac{45}{64}}}}.
\end{aligned}$$

We krijgen hier precies hetzelfde antwoord als Ludolph van Ceulen, dit maakt het aannemelijk dat Ludolph zijn antwoord op een dergelijke manier gevonden heeft. Hier staat tegenover dat hij dan een resultaat gebruikt dat hij pas hoofdstukken later intruduceert. Verder hebben we hier de lengte nodig van de koorde die $\frac{2}{15}$ van de omtrek afsnijdt. Deze lengte staat echter in de tabel die na de tabel van $\frac{7}{30}$ komt. Dit lijkt een onlogische volgorde als de één gebruikt wordt voor de ander. Het blijft dus gissen of Ludolph werkelijk deze methode gebruikt heeft. Het is vreemd dat hij hier niets over zegt. Bij de berekening van de zijdes van de vijftien-, dertig- en zestighoek geeft Ludolph immers drie bijna identieke berekeningen na elkaar, hier had hij gemakkelijk wat bondiger kunnen zijn. Het lijkt er in het vijfde capittel dus op dat Ludolph niet schroomt informatie aan zijn lezer te verschaffen. In het zesde capittel zien we juist het tegenovergestelde. Daar waar je uitleg verwacht, blijft dit achterwege. Misschien wil Ludolph zijn lezer op deze manier prikkelen om zelf over dit soort dingen na te denken.

V.2 Voorbereidend werk

Ludolph geeft aan het eind van hoofdstuk 6 nog vier lijstjes. De beginwaarden voor deze lijstjes komen rechtstreeks uit de lijsten die we al hebben gevonden. Ludolph gaat hier echter nog verder en berekent lengtes van erg kleine koorden. Ook geeft hij nu aan welke hoek bij de koorden hoort. Dit geeft een indicatie van de toepassing die Ludolph voor al de berekeningen uit hoofdstuk 6 heeft. In het zevende hoofdstuk gaat hij namelijk de sinuswaarde uitrekenen van veel hoeken waarvan hij nu de bijbehorende koorden heeft berekend. Ludolph heeft ook enkele van de in hoofdstuk 6 berekende koorden nodig om de sinus van 1 graad te vinden. De koorden waarvan Ludolph de lengte geeft zijn dus zeker niet willekeurig gekozen. De berekeningen in hoofdstuk 6 dienen als voorbereidend werk voor de sinusberekeningen in hoofdstuk 7.

Hoofdstuk VI

Handmatig worteltrekken

Na al de berekeningen van zijdes en koorden is het in hoofdstuk 7 tijd om deze lengtes te gaan benaderen. Hiervoor moet Ludolph veel wortels benaderen. In de tijd van Van Ceulen was er al een methode om dit met de hand te kunnen doen. Ludolph legt niet uit hoe deze methode werkt, waarschijnlijk omdat het algoritme al sinds langere tijd bekend was.[1] De wiskundige al-Khwārizmī, die leefde rond 830 na Christus in Bagdad, beschrijft het algoritme in zijn boek over rekenen met Indiase cijfers.[2] In de tijd van Ludolph is het aannemelijk dat de methode bekend is onder wiskundigen en daarom niet toegelicht behoeft te worden. Dit algoritme, dat een beetje lijkt op de staartdeling, is met de komst van computers in onbruik geraakt, maar het is nog steeds een leuke opgave om de methode en de juistheid hiervan te onderzoeken. Allereerst zullen we de methode bekijken en illustreren met een voorbeeld. Hierna volgt een bewijs dat het algoritme het juiste antwoord geeft. Vervolgens gaan we weer terug naar Vanden Circkel en bekijken de notatie van Van Ceulen.

VI.1 Het algoritme

Laten we nu eerst eens kijken naar een voorbeeld. Stel we willen $\sqrt{1729}$ benaderen. We verdelen hiervoor het getal 1729 naar links in groepjes van 2 en krijgen zo 17 en 29. We nemen nu eerst het meest linkse groepje, in dit geval 17 en zoeken het grootste kwadraat dat in 17 past. De wortel hiervan is het eerste getal van onze benadering. We vinden als grootste kwadraat 16 en concluderen hieruit dat 4 het eerste getal is dat we zoeken. Vervolgens bekijken we de rest $17 - 16 = 1$ en plakken hier het tweede groepje 29 achter. Nu hebben we alle ingrediënten om het tweede getal van de benadering te berekenen. We bekijken hiervoor de ongelijkheid $(20 \cdot 4 + x) \cdot x \leq 129$. Het grootste gehele getal dat hieraan voldoet is $x = 1$. De bewering is nu dat $41 \leq \sqrt{1729} \leq 42$. Voor meer voorbeelden van het algoritme verwijzen we naar Coplakova [2004].

Algemener vinden we de volgende beschrijving van het algoritme. Stel we willen de wortel benaderen uit het getal $a \in \mathbb{N}$. We kunnen een $n \in \mathbb{N}$ vinden zodat a te schrijven is als $a = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^k$ met $a_k \in \{0, ..., 9\}$. We gaan als volgt te werk:

1. Eerst verdelen we ons getal van rechts in groepjes van twee cijfers, het meest linkse groepje bevat slechts één getal als n even is. In het vervolg gaan we ervan uit dat n oneven is, het geval dat n even is gaat op precies dezelfde manier.

2. Nu kijken we naar het meest linkse groepje $a_n \cdot 10 + a_{n-1}$ en zoeken het grootste gehele getal x_1 zodanig dat $x_1^2 \leq a_n \cdot 10 + a_{n-1}$.

3. Vervolgens bekijken we het getal $r_1 := a_n \cdot 10 + a_{n-1} - x_1^2$, dit is de eerste rest, en zoeken het grootste gehele getal x_2 zodat $(20 \cdot x_1 + x_2) \cdot x_2 \leq r_1 \cdot 100 + a_{n-2} \cdot 10 + a_{n-3}$.

[1] In de Fondamenten legt Ludolph wel uit hoe de methode werkt.
[2] Hogendijk [2007]

4. We nemen $r_2 := r_1 \cdot 100 + a_{n-2} \cdot 10 + a_{n-3} - (20 \cdot x_1 + x_2) \cdot x_2$ als tweede rest. Nu zoeken we het grootste gehele getal x_3 zodat $(20 \cdot (x_1 \cdot 10 + x_2) + x_3) \cdot x_3 \leq r_2 \cdot 100 + a_{n-4} \cdot 10 + a_{n-5}$.

5. De laatste stap blijven we herhalen tot we alle groepjes gehad hebben en de bewering is nu dat

$$x_1|x_2|\cdots|x_{\frac{1}{2}(n+1)} \leq \sqrt{a} < x_1|x_2|\cdots|x_{\frac{1}{2}(n+1)} + 1.$$ [3]

De resten kunnen op een gemakkelijke manier gevonden worden. Merk hiertoe op dat we de tweede rest kunnen schrijven als $a_n \cdot 1000 + a_{n-1} \cdot 100 + a_{n-2} \cdot 10 + a_{n-3} - (x_1 \cdot 10 + x_2)^2$ en na wat rekenwerk vinden we voor de derde rest $a_n \cdot 100000 + a_{n-1} \cdot 10000 + a_{n-2} \cdot 1000 + a_{n-3} \cdot 100 + a_{n-4} \cdot 10 + a_{n-5} - (x_1 \cdot 100 + x_2 \cdot 10 + x_3)^2$. Een soortgelijke formule geldt voor elke rest, dit blijkt erg handig te zijn als we de juistheid van de methode willen bewijzen.

Zoals boven beschreven geeft de methode voor een willekeurige $a \in \mathbb{N}$ een $x \in \mathbb{N}$ zodat $x^2 \leq a < (x+1)^2$. Het algoritme kan ook gebruikt worden om decimalen van $\sqrt{a}$ uit te rekenen. Stel we willen n decimalen van $\sqrt{a}$ berekenen. We kijken nu naar het getal $a \cdot 10^{2n}$ en passen op dit getal het algoritme toe. Zo vinden we een geheel getal x zodanig dat $x \leq \sqrt{a \cdot 10^{2n}} < x + 1$, hieruit volgt onmiddelijk $\frac{x}{10^n} \leq \sqrt{a} < \frac{x+1}{10^n}$. Zodoende hebben we dus $\sqrt{a}$ op de gewenste n decimalen berekend. Ludolph van Ceulen maakt veel gebruik van dit principe.

Stel dat we bijvoorbeeld $\sqrt{1729}$ op één decimaal nauwkeurig willen bepalen. We bekijken dan dus het getal 172900 en verdelen dit weer in groepjes van twee. We vinden op dezelfde manier als boven $x_1 = 4$ en $x_2 = 1$. Om nu x_3 te berekenen bekijken we de tweede rest $1729 - 41^2 = 48$. De laatste stap is nu het oplossen van $(20 \cdot 41 + x_3) \cdot x_3 \leq 4800$, dit geeft $x_3 = 5$. Zodoende vinden we $415 \leq \sqrt{172900} < 416$, oftewel $41,5 \leq \sqrt{1729} < 41,6$. We kunnen zo $\sqrt{1729}$ op een gewenst aantal decimalen bepalen. Wel zullen de op te lossen ongelijkheden steeds grotere getallen bevatten wat de kans op rekenfouten vergroot. Des te meer reden om bewondering te hebben voor Ludolph van Ceulen die soms tientallen decimalen van wortels berekent.

VI.2 Bewijs

De juistheid van het algoritme bewijzen we met behulp van inductie.

Propositie 7. *Voor elk getal $a \in \mathbb{N}$ vinden we met het hierboven beschreven algoritme het getal $x \in \mathbb{N}$ zodanig dat $x^2 \leq a < (x+1)^2$.*

Bewijs.

- Voor $0 \leq a < 100$ klopt het algoritme triviaal.
- Stel nu $100 \leq a < 100^2$. We schrijven $a = a_3 \cdot 1000 + a_2 \cdot 100 + a_1 \cdot 10 + a_0$, waarbij eventueel $a_3 = 0$ genomen moet worden. Er geldt dat $x = x_1 \cdot 10 + x_2$ voor zekere x_1 en x_2. Zodoende vinden we $(x_1 \cdot 10)^2 \leq a < ((x_1+1) \cdot 10)^2$. Hieruit krijgen we $x_1^2 \leq \frac{a}{100} \leq (x_1+1)^2$, oftewel $x_1^2 \leq a_3 \cdot 10 + a_2 + a_1 \cdot 10^{-1} + a_0 \cdot 10^{-2} \leq (x_1+1)^2$. Omdat x_1 een geheel getal is geldt nu ook dat $x_1^2 \leq a_3 \cdot 10 + a_2 \leq (x_1+1)^2$, dus x_1 is inderdaad het grootste gehele getal zodat $x_1^2 \leq a_3 \cdot 10 + a_2$. Verder zien we:

$$\begin{array}{rcl} x^2 & = & 100x_1^2 + 20x_1x_2 + x_2^2 \\ & = & 100x_1^2 + (20x_1 + x_2) \cdot x_2 \\ & \leq & a = a_3 \cdot 1000 + a_2 \cdot 100 + a_1 \cdot 10 + a_0 \\ & \Longleftrightarrow & \\ (20x_1 + x_2) \cdot x_2 & \leq & (a_3 \cdot 10 + a_2 - x_1^2) \cdot 100 + a_1 \cdot 10 + a_0 \end{array}$$

[3] Om de notatie overzichtelijk te houden is hier gekozen voor verticale strepen in plaats van 10-machten, $\alpha|\beta|\gamma$ staat bijvoorbeeld voor $\alpha \cdot 100 + \beta \cdot 10 + \gamma$ met $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, ..., 9\}$.

We zoeken het grootste gehele getal x_2 zodat aan de eerste ongelijkheid voldaan is. Deze x_2 is dus ook het grootste gehele getal dat aan de tweede opgelijkheid voldoet. De tweede ongelijkheid is nu precies de ongelijkheid die gebruikt wordt in het algoritme. Hiermee is bewezen dat x_1 en x_2 inderdaad gevonden kunnen worden met het algoritme.

- Stel nu dat het algoritme werkt voor $0 \leq a < 100^n$, we willen hieruit bewijzen dat het ook werkt voor $100^n \leq a < 100^{n+1}$. We schrijven a weer als de gebruikelijke som van 10-machten. Merk op dat $a' = \frac{a - a_1 \cdot 10 + a_0}{100} \in \mathbb{N}$ en $0 \leq a' < 100^n$. We kunnen dus met behulp van het algoritme $\sqrt{a'}$ benaderen en vinden zo een getal x' met $x'^2 \leq a' < (x'+1)^2$. Dit is hetzelfde getal dat we vinden als we op één na alle stappen van het algoritme hebben uitgevoerd op a. Het is makkelijk in te zien dat $(x' \cdot 10)^2 \leq a$, we willen bewijzen dat $x = x' \cdot 10 + b$ waarbij b gevonden is door de laatste keer stap 4 van het algoritme toe te passen. Uit $x^2 \leq a = a' \cdot 100 + a_1 \cdot 10 + a_0$ vinden we

$$(20x' + b) \cdot b \leq (a' - x'^2) \cdot 100 + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Om te zorgen dat $a < (x+1)^2$, is b dus het grootste gehele getal dat aan deze ongelijkheid voldoet. We weten dat $a' - x'^2$ gelijk is aan de rest van de op één na laatste stap, dus de bovenstaande ongelijkheid is precies de ongelijkheid die je krijgt bij de laatste stap van de methode. We zien dat b inderdaad wordt verkregen door het algoritme toe te passen. Hiermee is bewezen dat x verkregen wordt met behulp van het algoritme en daarmee is het bewijs compleet.

$\square$

VI.3 Terug naar Ludolph van Ceulen

Ludolph geeft in zijn werk zoals gezegd geen uitleg van het algoritme. Wel geeft Van Ceulen aan hoe we een wortel op een gewenst aantal decimalen kunnen benaderen. Ludolph verwijst hier naar artikel 17 uit zijn eerste hoofdstuk. In moderne notatie zegt dit artikel dat $\frac{\sqrt{a^2 b^2}}{a} = b$. Voor Ludolph is het alleen interessant als a en b twee niet-negatieve getallen zijn, in dit geval is het resultaat inderdaad waar. Van Ceulen gebruikt de formule als volgt: we vinden $\frac{\sqrt{a \cdot 10^{2n}}}{10^n} = \sqrt{a}$ met a het getal waaruit we de wortel willen vinden en n het gewenst aantal decimalen. Als Ludolph n deciamlen van $\sqrt{a}$ wil berekenen, benadert hij dus $\sqrt{a \cdot 10^{2n}}$ met behulp van het algoritme. Van Ceulen begint met het benaderen van de zijde van de twaalfhoek. Dit doet hij op twee manieren. De zijde heeft lengte $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ en dit is gelijk aan $\sqrt{1\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$. Van deze beide schrijfwijzes maakt Ludolph een benadering. Voor ons lijkt dit misschien overbodig. We moeten echter niet vergeten dat veel laaggeschoolde tijdgenoten van Van Ceulen nog niet erg vertrouwd waren met irrationale getallen. Ludolph heeft eerder aangegeven dat hij de angst die veel mensen voor deze getallen hebben weg wil halen. Misschien heeft hij om deze reden de zijde van de twaalfhoek op twee manieren benaderd. Zo wil hij zijn lezer wellicht overtuigen dat de beide schrijfwijzes van de zijde gelijk zijn. Ludolph moet in dit geval vier keer een wortel benaderen. Hij laat al deze berekeningen in zijn geheel zien. Ludolph heeft een speciale notatie waarin we de resten en verdubbelde tussenantwoorden kunnen herkennen. De benaderingen van $\sqrt{3}$ en daarna van $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ zien er bijvoorbeeld zo uit (Vanden Circkel, fol. 5r).

29262 *211717679751936* *3000000000000000* *1| 7| 3| 2| 0| 5| 0| 8| 0|* *234466440100016* *33446644110* *3344664* *334*	*Te cleyn / ende een op't eynde te groot.*	*81077* *1639380981* *08634431561519* *2679492000000000* *5| 1| 7| 6| 3| 8| 0| 9.* *10023452267660* *11003355227* *1100335* *110*	*Te cort / ende een meer op't eynde te lanc.*

Straks zullen we bekijken waarom Ludolph zijn resultaat op deze manier opschrijft. Ludolph concludeert dat $\sqrt{2-\sqrt{3}} \approx 0.51763809$, dit is inderdaad het correcte antwoord. Van Ceulen vindt dezelfde waarde voor $\sqrt{1\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{2}}}$ en gaat daarna verder met het benaderen van de zijde van de vijftienhoek. Deze heeft lengte $\sqrt{1\frac{3}{4}-\sqrt{\frac{5}{16}}-\sqrt{1\frac{7}{8}-\sqrt{\frac{45}{64}}}}$ zoals we gezien hebben in III.3.3 en Ludolph moet dus vier wortels benaderen om een antwoord te vinden. Ook deze vier berekeningen laat hij nog in zijn geheel zien en wederom geeft hij het correcte antwoord. Ludolph had in het vijfde capittel twee alternatieve schrijfwijzes van de zijde van de vijftienhoek gevonden. Deze benadert Ludolph allebei, maar hij vindt het nu niet meer nodig om de diagrammen erbij te zetten. Van Ceulen gaat zelfs zover dat hij 56 decimalen van de zijde berekent, zijn benadering is geheel correct. Hierna worden nog de zijdes van de dertig- en zestighoek bepaald en dan gaat Ludolph over op het benaderen van sinuswaarden. Hier komt het werk van capittel 6 goed van pas. Ludolph benadert veel van de gevonden lengtes van koorden. Als een koorde een hoek van θ graden maakt, dan zal de lengte van deze koorde $2\sin(\frac{1}{2}\theta)$ zijn. Omdat we nu de lengtes van veel koorden weten, kunnen we gemakkelijk de sinuswaarden van veel hoeken bepalen. Ludolph gaat echter nog een stapje verder, hij geeft ook een benadering van $\sin(1^\circ)$. Deze benadering is erg wenselijk, omdat we dan met behulp van de formule $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$ andere sinuswaarden kunnen berekenen. Er geldt dat $\sin(1^\circ)$ gelijk is aan de helft van de lengte van de koorde die een hoek van 2 graden maakt, oftewel een zijde van de regelmatige ingeschreven 180-hoek. Het probleem is dat deze zijde niet uit te drukken is als keten van vierkantswortels, met andere woorden de 180-hoek is niet construeerbaar.[4] Ludolph moet dus een andere manier vinden om $\sin(1^\circ)$ te vinden. Hij heeft de lengtes van de koorden die een hoek van 1 graad en $7\frac{1}{32}$ seconden en een hoek van 1 graad en $28\frac{1}{8}$ seconden maken al gevonden in zijn hoofdstuk 6. Met behulp van lineaire extrapolatie kunnen we hiermee de lengte van de koorde die een hoek van 1 graad maakt schatten. De helft van deze lengte is dan ongeveer $\sin(\frac{1}{2}^\circ)$, laten we dit x noemen. Met behulp van de verdubbelingsformule geeft dit tenslotte $\sin(1^\circ) = 2\sin(\frac{1}{2}^\circ)\cos(\frac{1}{2}^\circ) \approx 2x\sqrt{1-x^2}$, Van Ceulen vindt op deze manier 20 decimalen van $\sin(1^\circ)$.

VI.3.1 De notatie zoals beschreven in De Fondamenten

Het is een interessante opgave uit te zoeken hoe de notatie van Ludolph van Ceulen in elkaar steekt. Laten we eens kijken naar het diagram waarmee Ludolph $\sqrt{3}$ benaderd. In het midden tussen de horizontale lijnen herkennen we de benadering van $\sqrt{3}$. Daarboven staat het getal waaruit de wortel getrokken moet worden. In dit geval staan er achter 3 zestien nullen. Dit omdat Ludolph $\sqrt{3}$ op acht decimalen wil benaderen. Boven 30000000000000000 staan de resten genoteerd. Ze staan echter niet netjes onder elkaar, waardoor het op het eerste gezicht moeilijk is de resten te herkennen. Onder de benadering vinden we de verdubbelde tussenresultaten. Ook hier zijn ze op een eigenaardige manier geordend. Hieronder is aangegeven hoe de resten en de tussenresultaten neergezet zijn door Van Ceulen. Bij de resten is te zien dat er een aantal foutjes tussenstaan. De 9 in de bovenste rij komt namelijk nergens in de resten terug. Verder staat in het diagram slechts 76 in plaats van 176, Ludolph gebruikt de 1 van 71 zowel voor 71 als voor 176.

	Stap	Rest	Tussenantwoord	Verdubbeld tussenantwoord
2**9**262	1	-	1	2
211717679751936	2	2	17	34
30000000000000000	3	11	173	346
1|7|3|2|0|5|0|8|0|	4	71	1732	3464
234466440100016	5	176	17320	34640
33446644110	6	17600	173205	346410
3344664	7	27975	1732050	3464100
334	8	2797500	17320508	34641016
	9	2621936	173205080	346410160

Ludolph laat niets los over de reden waarom de resten en tussenantwoorden op een dergelijke manier

[4] Hogendijk [2006]

genoteerd worden. Dit doet hij wel op pagina 45 - 47 van *De arithmetische en geometrische fondamenten*, een ander boek van zijn hand. Hier bespreekt hij zijn notatie aan de hand van het voorbeeld 622521. Ludolph begint met een lijstje waarin de kwadraten van de getallen 1 tot en met 9 staan, in Vanden Circkel staat een dergelijk lijstje niet. We gaan nu als volgt te werk. Het getal waaruit we de wortel willen trekken schrijven we op en we trekken daaronder een rechte lijn. Vervolgens verdelen we het getal met verticale lijnstukjes in groepjes van twee. We trekken nu nog een horizontale lijn onder de lijn die we al hadden, hiertussen komt de benadering te staan. Omdat 49 nu het grootste kwadraat is dat kleiner is dan 62, zetten we het getal 7 onder de 2 van 62. Als rest vinden we 13 en dit zetten we boven 62. Het verdubbelde tussenantwoord is 14 en dit zetten we zo dat de 1 onder de 3 van 13 staat. We hebben nu een dergelijk plaatje.

$$\begin{array}{l} 13 \\ 62 \mid 25 \mid 21 \\ \hline \;\;7 \\ \hline \;\;14 \end{array}$$

Het getal 1325 waarmee we nu willen werken staat zo diagonaal te lezen in het diagram. Om het tweede getal te vinden lossen we de ongelijkheid $(140 + x)x \leq 1325$ op. We vinden $x = 8$ met als rest 141. De 8 zetten we nu onder de 5 van 25 met een streep tussen de 7 en de 8. De rest zetten we zo neer dat de eerste 1 boven de 3 van 13 komt en de 41 boven 25. Hierdoor kunnen we het getal 14121 weer diagonaal aflezen. Het dubbele tussenresultaat 156 zetten we zo dat de 6 onder de gevonden 8 komt te staan. We vinden zo

$$\begin{array}{l} \;\;1 \\ 13 \;\; 41 \\ 62 \mid 25 \mid 21 \\ \hline \;\;7 \mid \;\;8 \mid \\ \hline \;\;14 \;\; 56 \\ \;\;\;\;1 \end{array}$$

Als laatste lossen we nu $(1560 + x)x \leq 14121$ op. Er geldt gelijkheid voor $x = 9$, dus hiermee hebben we gevonden dat $\sqrt{622521} = 789$. Het hele diagram ziet er nu zo uit

$$\begin{array}{l} \;\;1 \\ 13 \;\; 41 \\ 62 \mid 25 \mid 21 \\ \hline \;\;7 \mid \;\;8 \mid \;\;9 \mid \\ \hline \;\;14 \;\; 56 \;\; 78 \\ \;\;\;\;1 \;\; 15 \end{array}$$

Hierin staat ook 1578, de verdubbeling van het eindresultaat. In dit geval is dat eigenlijk niet nodig, omdat we al de exacte waarde van de wortel gevonden hebben. Ludolph zet 1578 dan ook niet in zijn diagram. Hier geven we het wel aan om het principe van de notatie duidelijk te maken. Overigens heeft Ludolph in de Fondamenten de gewoonte om de getallen die hij niet meer nodig heeft door te strepen. Als hij de 7 heeft gevonden, heeft hij daarna 62 niet meer nodig en zet hij hier een streep door. Zodra hij 8 heeft gevonden doet hij hetzelfde met 13, 25 en 14. De diagrammen die hij in de Fondamenten laat zien zijn hierdoor moeilijk leesbaar. De strepen zijn wel erg handig op het moment dat de berekeningen gemaakt worden, aangezien je dan minder snel vergissingen maakt in welk getal waarbij hoort. In Vanden Circkel staan geen strepen door de cijfers. Waarschijnlijk heeft Ludolph dit gedaan opdat de lezer het dan gemakkelijker kan narekenen. Verder zijn ook de verticale streepjes die het begingetal in groepjes van twee delen in Vanden Circkel niet aanwezig.

Het ordenen van de resten lijkt dus vooral gedaan te zijn omdat op deze manier de rechterzijdes van de op te lossen ongelijkheden diagonaal te zien zijn. Een soortgelijke reden heeft de ordening van de dubbele tussenantwoorden. De linkerzijde van de ongelijkheid is "het dubbele tussenantwoord $\cdot 10 \cdot x + x^2$". We bekijken dus een tienvoud van het verdubbelde tussenresultaat en zetten het daarom één plaats voor de gezochte x. Het verschil in orde tussen het dubbele tussenantwoord en het gezochte getal wordt zo duidelijk.

Als we de diagrammen uit Vanden Circkel bekijken zien we dit goed terug. We moeten hierbij wel het volgende opmerken. Zodra een gevonden getal van de wortel 0 blijkt te zijn, wordt de rest gewoon de vorige rest met het nieuwe groepje van twee erachter geplakt. Ludolph schrijft in dit geval niet deze rest op, omdat we deze dan al in het diagram kunnen aflezen.

Hoofdstuk VII

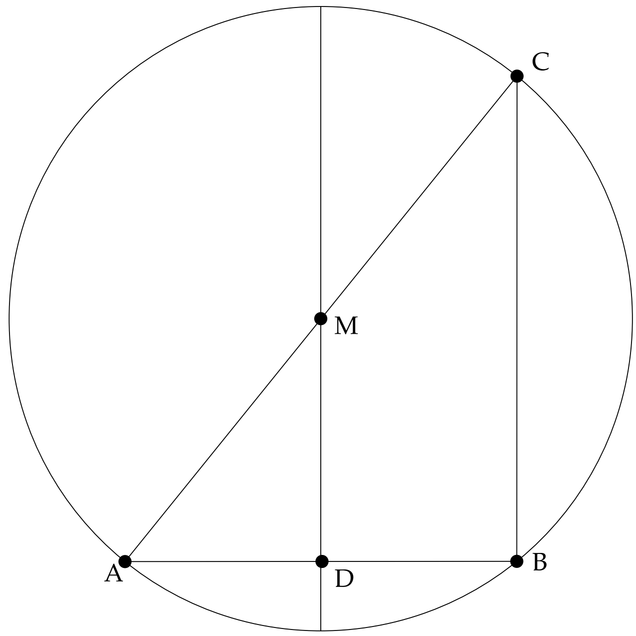
Oppervlakte van regelmatige veelhoeken

Ludolph besteedt het achtste hoofdstuk aan het berekenen van de oppervlaktes van regelmatige veelhoeken ingeschreven in de eenheidscirkel. Hij lijkt hierbij niet zozeer geïnteresseerd te zijn in de exacte waarde van de oppervlakte, maar veel meer in de numerieke benadering. De reden hiervoor zou gezocht kunnen worden in het feit dat de eenheidscirkel oppervlakte π heeft. Ludolph heeft immers als doel in Vanden Circkel om de waarde van π te benaderen. Nu, de oppervlakte van de regelmatige, ingeschreven n-hoek benadert steeds beter π naarmate n groter wordt. In hoofdstuk 8 zien we zo voor het eerst in Vanden Circkel benaderingen van π verschijnen. Ludolph zelf legt hier overigens nog niet de verbinding tussen de oppervlakte van de cirkel en de waarde van π, hij berekent slechts de oppervlaktes van verschillende veelhoeken zonder uitspraken te doen over de toepassing hiervan. In dit hoofdstuk zullen we bekijken welke methodes Ludolph gebruikt om de oppervlakte van regelmatige veelhoeken te berekenen. Vervolgens bespreken we verschillende methodes om π te benaderen.

VII.1 Handige formules

Om de oppervlaktes te berekenen maakt Ludolph gebruik van twee formules die hij afleidt uit twee artikelen in capittel 1. Allereerst gebruikt Ludolph artikel 20. In dit artikel wordt de lengte gegeven van dat deel van de middelloodlijn door een zijde van een ingeschreven veelhoek, dat tussen het middelpunt van de cirkel en de zijde valt (het lijnstuk MD in onderstaande afbeelding). Ludolph beweert dat dit lijnstuk dezelfde lengte heeft als de helft van het complement van de zijde. Dit is niet alleen waar voor zijdes van regelmatige veelhoeken, maar voor elke willekeurige koorde in de cirkel. Merk hierbij op dat het artikel triviaal waar is indien de koorde zelf een middellijn van de cirkel is. De gelijkheid komt dan immers neer op $0 = 0$. Voor de volledigheid geven we het artikel nu als propositie en formuleren we een bewijs.

Propositie 8. *We nemen een cirkel met middelpunt M en straal r en koorde AB met complement BC. Het punt D is het midden van AB. Nu geldt dat DM gelijk is aan de helft van BC.*



Bewijs. Bekijk de driehoeken ADM en ABC. We zien $\angle MAD = \angle CAB$ en $\angle ADM = \angle ABC = 90^\circ$. Hieruit volgt dat de driehoeken drie gelijke hoeken hebben en daarom gelijkvormig zijn. Nu, $AM = \frac{1}{2}AC$, dus ook $MD = \frac{1}{2}CB$. Hiermee hebben we het gewenste bewezen. □

Ludolph bekijkt alleen de situatie waarin AB een zijde van een regelmatige veelhoek is, omdat hij dan uit dit artikel een formule voor de oppervlakte van de veelhoek kan afleiden. Als AB lengte a heeft, dan heeft zijn complement lengte $\sqrt{4r^2 - a^2}$ en dus is MD $\frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2}$ lang. Als AB een zijde is van de regelmatige n-hoek, is de oppervlakte van de n-hoek gelijk aan n maal de oppervlakte van $\triangle ABM$ en dit is $\frac{1}{2} \cdot MD \cdot AB$. Zo vindt Ludolph voor de oppervlakte van de regelmatige n-hoek ingeschreven in een cirkel met straal r

$$\frac{n \cdot a}{4}\sqrt{4r^2 - a^2}. \tag{VII.1}$$

Ludolph gebruikt ook artikel 21 in hoofdstuk 8. Hierin staat een formule om uit de zijde van de n-hoek de oppervlakte van de $2n$-hoek te vinden. In moderne bewoordingen komt het artikel op hetzelfde neer als Propositie 9. Ook hier geven we een bewijs voor de volledigheid, hoewel Ludolph dit achterwege laat.

Propositie 9. *Stel de regelmatige, ingeschreven n-hoek heeft zijde a. Dan heeft de regelmatige $2n$-hoek, ingeschreven in dezelfde cirkel, oppervlakte*

$$\frac{n}{2}ar. \tag{VII.2}$$

Bewijs. We weten dat de zijde van de $2n$-hoek een lengte van $\sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}$ heeft. Zijn complement is dan $\sqrt{2r^2 + r\sqrt{4r^2 - a^2}}$ lang. Formule (VII.1) geeft nu voor de oppervlakte van de $2n$-hoek

$$\begin{aligned}
\tfrac{n}{2}\sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}} \cdot \sqrt{2r^2 + r\sqrt{4r^2 - a^2}} &= \tfrac{n}{2}\sqrt{(2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}) \cdot (2r^2 + r\sqrt{4r^2 - a^2})} \\
&= \tfrac{n}{2}\sqrt{4r^4 - r^2(4r^2 - a^2)} \\
&= \tfrac{n}{2}\sqrt{a^2r^2} \\
&= \tfrac{n}{2}ar.
\end{aligned}$$

We hebben zo formule (VII.2) gevonden. □

VII.2 Oppervlaktes van vele veelhoeken

Met de hierboven beschreven formules voor de oppervlakte van veelhoeken is het geen probleem voor Ludolph de gewenste oppervlaktes te vinden. Hij heeft immers van veel veelhoeken al de zijdes berekend en hiermee is het een eenvoudige opgave de oppervlaktes te vinden. Van Ceulen introduceert de formules echter niet aan het begin van hoofdstuk 8. Als een soort inleiding berekent hij eerst de oppervlakte van de driehoek zonder gebruik te maken van bovenstaande formules. Vervolgens verwijst hij naar artikel 20 en berekent hiermee de oppervlakte van de zeshoek. Daarna berekent hij dezelfde oppervlakte met behulp van de formule uit artikel 21. Ludolph gaat verder met de 12-, 24- en 48-hoek en hij gebruikt hierbij telkens formule (VII.1), hoewel formule (VII.2) minder rekenwerk geeft. Wel geeft Ludolph na de berekening van de oppervlakte aan dat deze inderdaad de vorm heeft van formule (VII.2). Het lijkt of Van Ceulen voor de lezer aannemelijk wil maken dat deze formule ook daadwerkelijk het goede antwoord geeft.

Ludolph berekent verder de oppervlaktes van de acht, zestien-, 32-, 64- en 128-hoek, de vijf-, tien-, twintig-, veertig- en tachtighoek, de dertighoek en de zestighoek. Hierbij gebruikt hij wel waar mogelijk formule (VII.2). Alleen voor de vijfhoek kan dit niet, hier berekent Ludolph de oppervlakte met behulp van formule (VII.1). Ludolph geeft slechts van de drie-, zes-, twaalf- en 24-hoek de exacte waarde van de oppervlakte, voor de andere veelhoeken geeft hij enkel een numerieke benadering. Voor de 128-hoek vindt Ludolph 3.1403311569545, de juiste waarde is 3.1403311569547. We zien hierin al de eerste twee decimalen van π terugkomen. Overigens geeft de omtrek van de 128-hoek al drie juiste decimalen van π, dit verschil in convergentie behandelen we in VII.4.1.

VII.3 Een bewering weerlegd

Nadat Ludolp de oppervlakte van de zeshoek heeft berekend, maakt hij een bijzondere aanname. Hij berekent de oppervlakte van de cirkel onder de aanname dat het verschil tussen de cirkel en de zeshoek $\frac{1}{6}$ deel van de oppervlakte van de zeshoek is. Ludolph vindt voor de zeshoek oppervlakte $\sqrt{6\frac{3}{4}}$ en dus voor de cirkel oppervlakte $\frac{6}{5}\sqrt{6\frac{3}{4}} = \sqrt{9\frac{18}{25}}$. Ludolph geeft meteen al aan dat dit niet de oppervlakte van de cirkel is en laat de kwestie rusten tot aan het eind van hoofdstuk 8. Hij heeft dan voldoende informatie om de aanname te weerleggen. Ludolph stelt allereerst dat de oppervlakte van elke ingeschreven veelhoek kleiner is dan de oppervlakte van de cirkel, de veelhoeken zijn immers ingeschreven in de cirkel. Maar $\sqrt{9\frac{18}{25}} \approx 3.1178$ is kleiner dan de gevonden oppervlaktes van de n-hoeken met $n \geq 30$. De oppervlakte van de regelmatige dertighoek bijvoorbeeld is bij benadering 3.1187. Hieruit concludeert Van Ceulen dat de aanname onjuist is. Overigens komt hij in capittel 21 weer terug op deze kwestie. Hij weerlegt de bewering daar opnieuw door te laten zien dat de oppervlakte van de 32-hoek groter is dan $\sqrt{9\frac{18}{25}}$, hoewel hij erbij zegt dat dit al bewezen is in capittel 8.

Waarom Ludolph deze aanname en de weerlegging ervan beschrijft is niet helemaal duidelijk. Het is goed mogelijk dat iemand in Ludolphs omgeving deze bewering heeft gedaan en dat Van Ceulen daarom het tegendeel bewijst. Dit doet Ludolph wel vaker, in I.1 hebben we bijvoorbeeld gezien dat Van Ceulen twee boeken heeft geschreven om de beweringen van Simon van der Eycke over de cirkelkwadratuur te weerleggen. Wat betreft de bewering dat de oppervlakte van de eenheidscirkel $\sqrt{9\frac{18}{25}}$ is, geeft Ludolph echter zowel in capittel 8 als in capittel 21 geen namen. Hierdoor kunnen we niet met zekerheid zeggen dat Ludolph inderdaad een uitspraak van iemand anders weerlegt.

VII.4 De benadering van π

In de berekeningen van hoofdstuk 8 ligt een manier om π te benaderen, maar Ludolph zegt in dit hoofdstuk niets hierover. Als hij wel π gaat benaderen, doet hij dat ook niet zozeer met behulp van oppervlaktes, maar gebruikt hij de omtrek van veelhoeken. In de hoofdstukken 9 en 10 berekent Ludolph van vele omgeschreven regelmatige veelhoeken de zijdes. Hiermee kan hij in hoofdstuk 11 afschattingen maken van de omtrek van de eenheidscirkel en daarmee kan ook π benaderd worden. Ludolph past het gegeven dat de omtrek van de cirkel groter is dan de omtrek van de ingeschreven n-hoek en kleiner is dan de omtrek van de omgeschreven n-hoek toe voor erg grote n. Hierdoor kan hij π op twintig decimalen schatten.

VII.4.1 Convergentie

We hebben twee manieren gezien om π benaderen: met de oppervlakte of met de omtrek van veelhoeken. We zullen nu laten zien dat beide methodes inderdaad gebruikt kunnen worden om een benadering van π te krijgen en vervolgens zullen we bekijken welke methode sneller convergeert. Allereerst volgt nu een bewijs dat de oppervlakte van de n-hoek ingeschreven in een cirkel met straal r naar de oppervlakte πr^2 van de cirkel convergeert als we n steeds groter nemen.

Propositie 10. *Bekijk de functie Opp: $\mathbb{N}_{\geq 3} \to \mathbb{R}$ die aan elke $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ de oppervlakte van de regelmatige n-hoek ingeschreven in een cirkel met straal r toekent. Er geldt $\lim_{n\to\infty} Opp(n) = \pi r^2$.*

Bewijs. De zijde van de regelmatige n-hoek heeft een lengte van $2r\sin(\frac{\pi}{n})$, hierbij rekenen we in radialen. Wegens formule (VII.1) geldt nu

$$\begin{aligned}
\mathrm{Opp}(n) &= \tfrac{1}{2}n\cdot r\sin(\tfrac{\pi}{n})\sqrt{4r^2-4r^2\sin^2(\tfrac{\pi}{n})}\\
&= \tfrac{1}{2}n\cdot r\sin(\tfrac{\pi}{n})\sqrt{4r^2\cos^2(\tfrac{\pi}{n})}\\
&= n\cdot r^2\sin(\tfrac{\pi}{n})\cos(\tfrac{\pi}{n})\\
&= n\cdot r^2(\tfrac{1}{2}\sin(0)+\tfrac{1}{2}\sin(\tfrac{2\pi}{n}))\\
&= \tfrac{n\cdot r^2}{2}\sin(\tfrac{2\pi}{n})\\
&= \pi\cdot r^2\frac{\sin(\frac{2\pi}{n})}{\frac{2\pi}{n}}.
\end{aligned}$$

Hierbij is gebruik gemaakt van de goniometrische gelijkheid $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)$. We willen nu $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\frac{2\pi}{n})}{\frac{2\pi}{n}}$ berekenen. Merk op dat deze limiet dezelfde waarde heeft als $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$. Deze limiet wordt tegenwoordig vaak als een standaardlimiet gezien en kan eenvoudig berekend worden met behulp van de taylorreeks van $\sin(x)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\frac{2\pi}{n})}{\frac{2\pi}{n}} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{(2k+1)!}\\
&= \lim_{x\to 0}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2k+1)!}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Dit geeft $\lim_{n\to\infty}\mathrm{Opp}(n) = \pi r^2\cdot 1 = \pi r^2$.

□

Op een soortgelijke manier kunnen we ook bewijzen dat de functie O: $\mathbb{N}_{\geq 3}\to\mathbb{R}$, die aan elke $n\in\mathbb{N}_{\geq 3}$ de omtrek van de n-hoek toevoegt, convergeert naar de omtrek van de cirkel $2r\pi$ als $n\to\infty$. We vinden in dit geval

$$\begin{aligned}
\mathrm{O}(n) &= n\cdot 2r\sin(\tfrac{\pi}{n})\\
&= 2r\pi\frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}}
\end{aligned}$$

waaruit we kunnen concluderen

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{O}(n) = 2r\pi\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}} = 2r\pi\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 2r\pi.$$

We gaan nu weer terug naar de eenheidscirkel, dus $r = 1$. Voor de oppervlakte vinden we de rij $(\pi\frac{\sin(\frac{2\pi}{n})}{\frac{2\pi}{n}})_{n\geq 3}$ die naar π convergeert en voor de omtrek hebben we de rij $(2\pi\frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}})_{n\geq 3}$ met als limiet 2π. We zijn nu geïnteresseerd in de vraag hoe snel beide rijen naar hun limiet convergeren. Laten we hiervoor kijken naar de functie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $h(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ en ons concentreren op het gedrag van deze functie in het interval $]0, \frac{2\pi}{3}]$.

Het blijkt dat h op dit interval monotoon daalt. We kunnen dit inzien door naar de afgeleide $h'(x) = \frac{x \cdot \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$ te kijken. Om de locale maxima en minima van h te vinden lossen we op $h'(x) = \frac{x \cdot \cos(x) - \sin(x)}{x^2} = 0$. Echter, de oplossingen van $x\cos(x) = \sin(x)$ als algebraïsche formules zijn niet te vinden. We kunnen wel bewijzen dat een oplossing van $x\cos(x) = \sin(x)$ niet in $]0, \frac{2\pi}{3}]$ kan liggen.

Propositie 11. $x\cos(x) = \sin(x)$ *heeft geen oplossingen in* $]0, \frac{2\pi}{3}]$.

Bewijs. Stel $\cos(x) = 0$, dan $\sin(x) \neq 0$ en dus is x geen oplossing van de vergelijking. In het bijzonder is $x = \frac{\pi}{2}$ geen oplossing. We kunnen de vergelijking nu omschrijven tot $\tan(x) = x$, met andere woorden: we zoeken een dekpunt van $\tan(x)$. Eén van de oplossingen is $x = 0$ en daarnaast geldt voor alle $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ dat $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} > 1$, hierdoor kan $\tan(x)$ geen dekpunten bevatten in $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Verder geldt voor alle $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}]$ dat $\tan(x) < 0$. Zodoende kan in dit interval ook geen dekpunt van $\tan(x)$ voorkomen. Hiermee hebben we bewezen dat geen van de punten in $]0, \frac{2\pi}{3}]$ een oplossing kan zijn van $x\cos(x) = \sin(x)$.

□

Hieruit concluderen we dat h monotoon stijgend of dalend is in dit interval. Nu, $h'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{4}{\pi^2}$ en dus geldt $h'(x) < 0$ voor alle $x \in]0, \frac{2\pi}{3}]$. Dit geeft dat h monotoon dalend is in $]0, \frac{2\pi}{3}]$.

We verkrijgen zo dat de rij $(\frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}})_{n\geq 3}$ sneller naar 1 convergeert dan de rij $(\frac{\sin(\frac{2\pi}{n})}{\frac{2\pi}{n}})_{n\geq 3}$, omdat $(\frac{\pi}{n})_{n\geq 3}$ sneller naar 0 gaat dan $(\frac{2\pi}{n})_{n\geq 3}$. Overigens is dit alleen duidelijk merkbaar voor redelijk kleine waardes van n. Als n heel groot wordt is het verschil tussen $\frac{2\pi}{n}$ en $\frac{\pi}{n}$ zo klein dat het verschil in convergentie niet meer belangrijk is. Als je π wilt benaderen op een groot aantal decimalen, zijn de verschillen in convergentie tussen de twee methodes verwaarloosbaar. Als je echter in een paar stappen een beeld wilt krijgen van π, dan kun je veel beter de omtrek gebruiken. Dit wordt geïllustreerd in onderstaande tabel, ter vergelijking $\pi \approx 3.14159$. We zien dat $\mathrm{O}(n)$ en π de eerste decimaal gelijk hebben voor $n = 12$, voor $\mathrm{Opp}(n)$ gebeurt dit pas bij $n = 23$.

n	$\mathrm{Opp}(n)$	$\frac{1}{2}\mathrm{O}(n)$
6	2.5981	3
8	2.8284	3.0615
11	2.9735	3.0991
12	3	3.1058
22	3.0991	3.1309
23	3.1027	3.1318

VII.4.2 Andere manieren om π te benaderen

Ludolph gebruikt regelmatige veelhoeken om π te benaderen, echter in de periode na Ludolph van Ceulen werden er andere, snellere methodes ontwikkeld om decimalen van π te vinden. Tussen 1650 en 1973 worden bijna alle π-berekeningen uitgevoerd met behulp van arctangens formules. De arctangens is de inverse functie van de tangens. Nu, we weten dat $\tan(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sin(\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\pi}{4})} = 1$, dus $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. De wiskundige James Gregory (1638?-1675) vond voor de oppervlakte onder de kromme $y = \frac{1}{1+x^2}$ in het interval $[0, x]$:

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

Hieruit leidde hij in 1671 een reeks voor de arctangens af die we tegenwoordig de Gregoryreeks noemen:

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Voor $x = 1$ vinden we dus $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$, dit wordt tegenwoordig de Leibniz reeks genoemd. Deze rij convergeert echter niet snel naar π en daarom worden met behulp van de formule $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$ al snel reeksen ontwikkeld die beter convergeren. John Machin (1680-1752) bedenkt de arctangens-reeks die het meest is gebruikt om π te benaderen, namelijk

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239}).$$

Hij gebruikt deze reeks zelf om in 1706 de eerste honderd decimalen van π te bepalen, een record in die tijd. In de jaren die daarop volgen berekenen verschillende wiskundigen decimalen van π met behulp van arctangens formules. Als rond 1940 de computer zijn intrede doet, zijn de eerste 620 decimalen al bekend. De computer blijkt een belangrijk hulpmiddel te zijn en zorgt ervoor dat in 1973 de eerste miljoen decimalen gevonden worden.

Hierna raken de arctangens formules in onbruik. Er zijn inmiddels verschillende algoritmes en reeksen ontwikkeld die sneller convergeren. Een voorbeeld van zo'n reeks is

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \frac{1103 + 26390n}{396^{4n}}. \tag{VII.3}$$

Deze werd in 1914 ontdekt door de Indiase Srinivasa Ramanujan (1877-1920) en heeft als groot voordeel dat elke term in de reeks 8 goede decimalen van π oplevert. Echter, pas in 1985 werd voor het eerst met deze reeks gewerkt, omdat hij niet erg bruikbaar is om mee te rekenen met de hand. Er moest daarom eerst een goede computer ontwikkeld zijn, voordat de reeks gebruikt kon worden voor π-benaderingen. Naast formules zijn er ook iteratieve processen om π te berekenen. Eén van de belangrijkste is gebaseerd op een formule die al in 1809 was gevonden door Gauß. In 1976 werd deze formule omgezet tot een iteratief proces dat het aantal correcte decimalen ongeveer verdubbelt in elke stap. Zo worden in de eerste 9 iteratiestappen 1, 4, 9, 20, 42, 85, 173, 347 en 697 goede decimalen gevonden. Door deze ontwikkelingen groeide het aantal verkregen decimalen erg snel, inmiddels zijn er vele miljoenen bekend. Voor praktisch rekenwerk volstaat vaak echter een benadering van π op enkele tientallen decimalen. Toch hebben de miljoenen gevonden decimalen wel een praktisch nut. Ze worden namelijk gebruikt voor het testen van computers. Voor het berekenen van miljoenen decimalen van π moet een computer enorm veel operaties uitvoeren. Als er nog foutjes zitten in de hardware van een computer, zullen deze dus zeer waarschijnlijk aan het licht komen als de computer aan zo'n grote taak onderworpen wordt. Maar de belangrijkste reden waarom er zoveel interesse is in π is dat er nog veel onbeantwoorde vragen omtrent π zijn. Vragen die stuk voor stuk erg interessant zijn. Het kennen van veel π-decimalen helpt bij het beantwoorden van deze vragen. Voor meer informatie over π verwijzen we naar Arndt and Haenel [2001].

Slotwoord

Het is inmiddels meer dan 400 jaar geleden dat Ludolph van Ceulen Vanden Circkel schreef. Men zou zich af kunnen vragen in hoeverre zo'n oud boek nog interessante informatie bevat. Tegenwoordig zullen we dingen misschien op een andere manier aanpakken dan Ludolph. Maar juist omdat hij soms net een andere aanpak heeft dan wij, is het heel verfrissend Vanden Circkel te lezen. Op een aantal plekken in deze scriptie hebben we de methodes van Ludolph naast een wat meer moderne aanpak gezet. Dit maakt het mogelijk de verschillende methodes te vergelijken.

In hoofdstuk II hebben we bijvoorbeeld niet alleen Van Ceulens bewijs van zijn propositie gezien, maar we hebben ook drie andere bewijzen bekeken. Het bewijs van Ludolph is volledig meetkundig, hierin verschilt het duidelijk van de andere drie bewijzen. Zijn bewijs is echter ook vrij omslachtig, we zullen daarom tegenwoordig waarschijnlijk één van de andere bewijzen verkiezen boven Ludolphs bewijs.

Verder hebben we in III.3 naast Ludolph berekening van de zijde van de vijfhoek, ook een andere methode besproken. Ook hier zien we dat Ludolph een meetkundige weg kiest, die echter wel omslachtig is. Hij berekent eerst de zijde van de tienhoek en gebruikt dit om de zijde van de vijfhoek te vinden. De moderne methode die we besproken hebben maakt gebruik van complexe analyse en heeft weinig meetkundigs in zich. Het is daarom ook niet waarschijnlijk dat Ludolph een dergelijke berekening verzonnen kon hebben. De methode die we gebruiken om de zijde van de vijfhoek te vinden kan tot op zekere hoogte gegeneraliseerd worden om de zijde van een regelmatige n-hoek te vinden. We moeten dan wel de eis stellen dat de n-hoek construeerbaar is. Dit hebben we besproken in hoofdstuk IV. Dit hoofdstuk staat wat verder van Ludolph werk af dan de andere hoofdstukken: we behandelen niet werk van Ludolph zelf, maar een belangrijke ontwikkeling op het gebied van regelmatige veelhoeken die heeft plaatsgevonden in de 400 jaar na Ludolph. Ludolph van Ceulen heeft van vele regelmatige veelhoeken de lengte van de zijdes berekend. Sommige lengtes kan hij exact uitdrukken, voor andere vindt hij slechts een benadering. Dit alles heeft te maken met het wel of niet construeerbaar zijn van de veelhoek. In de tijd van Ludolph wist men nog niet hoe te bewijzen welke veelhoeken construeerbaar zijn en welke niet, inmiddels is dit probleem echter opgelost en dit is het onderwerp van hoofdstuk IV.

Tenslotte hebben we in VII.4 verschillende manieren bekeken om π te benaderen. We zagen dat het benaderen van π met behulp van in- en omgeschreven veelhoeken tegenwoordig niet meer de snelste manier is om veel decimalen te verkrijgen. Het is echter wel een inzichtelijke manier om π te benaderen: dat de omtrek van een regelmatige n-hoek ingeschreven in een cirkel steeds beter de omtrek van die cirkel benaderd kunnen we eenvoudig inzien, het is intuïtief duidelijk. Dit in tegenstelling tot bijvoorbeeld formule (VII.3). Deze formule geeft snel veel decimalen van π, maar het is moeilijk in te zien dat de formule juist is.

In deze scriptie staan de hoofdstukken 2 tot en met 8 van Vanden Circkel centraal. In deze hoofdstukken legt Ludolph de basis van zijn π-benadering. Met behulp van één propositie weet Ludolph de zijdes van vele veelhoeken en de lengtes van vele koorden te berekenen. Van de meeste van deze gevonden lengtes berekent Ludolph ook een numerieke benadering, een gigantische klus. Ludolph kan door stug verder te rekenen uiteindelijk de waarde van π op twintig decimalen bepalen. Hij laat hiermee zien dat je met wil en uithoudingsvermogen ver kan komen.

Bijlage A

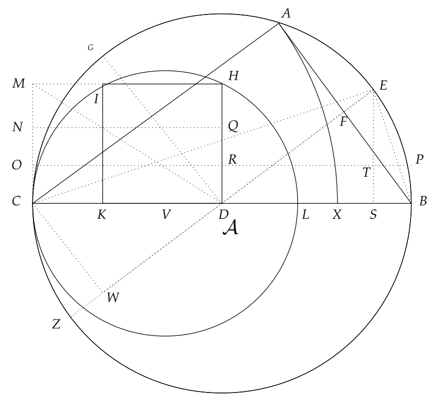
Capittel 2-8 uit Vanden Circkel

fol.1r

De Eerste Propositie: Ende tweede

Capittel.

Als een rechte Linie in een Circkel beschreven / alsoo dat beyde de eynden de Circonferentie raecken / dan is de middel proportionael Linie / tusschen den halven Diameter / ende de rest / om soo veel den Diameter langer als de eerste genoemde Linie Complement / ghelijck eener Linie die vanden om-loop snijdet eenen Boghe half soo groot als de eerste Linie.



Verclaringhe ende Demonstratie.

Tot een exempel / besiet hier desen by-gevoughden Circkel / daer in de Linie / A/B. beschreven / ende vanden eynde / B. den Diameter door het Centrum getrocken / wert den winckel / A/B/C. ghemaeckt / Dien is onder-toghen / A /C. Complement / A/B. De differentie tusschen A. C. ende de middel Linie C/B. is X/B. deze is gheteeckent van den Centro D. in L. alsoo dat D/L. ghelijck is X/B. Wijder is C/L. ghedeelt int punt 2. in twee ghelijcke deelen: ende den Circkel C/I/H/L. ghetrocken / ende uyt D. een Perpendiculaer aen den Boghe / in den punct H. compt D/H. welcke in midden der proportie staet / tusschen dem rest X/B. ende den halven Diameter D/C. Dese D/H. moet ghelijck zijn B/E. onder-trocken den Boghe E/B. de helfte van den Boghe A/E/B. Om dit grondelick te bewijsen: is de figuer bereydet als boven / de Boghe C/A. ende A/B. zijn elck in twee ghelijcke deelen ghedeelt: Daerom A/F/E/S. ende C/W. de perpendiculaer Linien zijn gelijck: Mede C/A. ghelijck W/F. Daerom F/E/Z/W. ende S/B. ghelijck.
Item S/B. ghelijck X/S. Hier uyt volght dat S/B. de helfte is der differentie X/B. Nu is het Quadraet der Lini E B. soo groot als het Quadraet E/S. ende het Quadraet van S/B. t'samen: E/S. staet int midden der Proportien van C/S. ende S/B. Daerom het Quadraet van E/S. ghelijck moet zijn den Parallelogram O/C/T/S. Hier by ghedaen het Quadraet van S/B. comt de recht-hoeckighe figuer O/C/P/B. ghelijck den Quadraet van E/B. Nu is deser gelijck-hoeckigher figuer O/C/P/B. ghelijck de figuer N/C/Q/D. welcke ghelijck is den Quadraet des Mediproportionael H/D. Daerom E/B. mede ghelijck is H/D. door de 4/35/43/47$^{\text{sten}}$ Propositie des eerste ende 30/31. des derden. Item de 8/13/17$^{\text{sten}}$ des 6sten

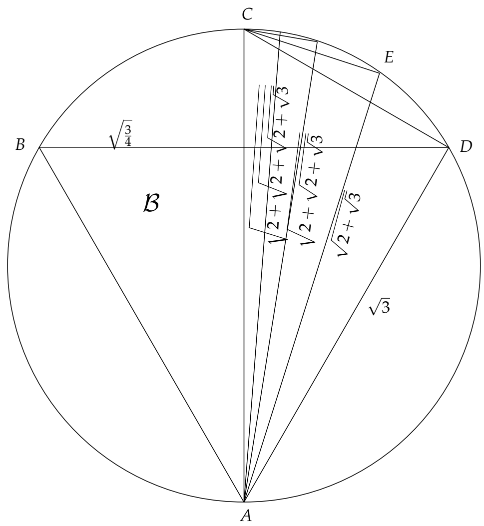
Euclides.
Door ghetallen kan tzelve lichter bewesen werden: Alsoo / Ick neme dat den Diameter C/B. is langh 15. Ende de Linie A/B. doet 9. Soo moet C/A.(door de 30ste des derden[1] / ende 47ste des eersten Euc.) doen 12. Ende de differentie X/B. 3. Dese gemultipliceert met den halven Diameter / als 7 $\frac{1}{2}$. comt 22 $\frac{1}{2}$. voor het Quadraet des Mediproportionael D/H. Ende voor D/H. $\sqrt{22\frac{1}{2}}$. Item als A/B. doet 9. dan is A/F. 4 $\frac{1}{2}$. Soo veel doet mede E/S. Haer Quadraet doet 20 $\frac{1}{4}$. Daer by ghedaen dat Quadraet der halver differentie (die langh is 1 $\frac{1}{2}$.) dat is 2 $\frac{1}{4}$. Summa voor beyde Quadraten (te weten: voor de Quadraten E/S. ende S/B. welcke tsamen soo veel doen alst Quadraet E/B.) 22 $\frac{1}{2}$. Hier uyt $\sqrt{}$ Comt voor E/B. $\sqrt{22\frac{1}{2}}$. soo veel boven ghevonden voor D/H. Daerom waer mijn voorgheven / &c.

[1] Dit moet de 31ste des derden zijn.

HET III. CAPITTEL.

Daer in geleert wert (uyt den boven

sten gronde) de zyden veelder gelijck-sydigher figueren: Beginnende aen den dry-houck / sonder arbeyt te vinden.



Om behendelijck te komen aen een getal eener veel-sydiger figuer-syden: moet men setten voor den Diameter des Circkels 2. dan is den halven Diameter 1. Soo veel doet mede C/D. dwelck is een syde des 6. houcx / door den aen hang des 15ste Propositie des 4den Euclid. Sijn Complement (als een syde des 3. houcx) doet $\sqrt{3}$. Dese genomen van den Diameter / rest $2-\sqrt{3}$. welck ghelijck is den quadraet des Medi-proportionaels / tusschen de rest en halven Diameter (dewijle nu het getal des halven Diameters in 't multipliceren niet en verandert) ende ghelijck der syden eens 12. houcx Quadraet (uyt den voor-gaenden) Hier uyt $\sqrt{}$ Comt voor C/E. een syde des 12. houcx / in den Circkel B. gheschreven $\sqrt{2-\sqrt{3}}$. ofte $\sqrt{1\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{2}}}$. Deser Quadraet ghenomen van't Quadraet des Diameters / rest het Quadraet E/H. Daer uyt $\sqrt{}$. Comt voor E/H Complement C/E. $\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Dese genomen van den Diameter / rest $2-\sqrt{2+\sqrt{3}}$. welck rest is uyt den voor-gaenden gronde / den quadraet des 24. houcx gelijck / Daer uyt $\sqrt{}$. Comt vooor[2] een syde des 24. houcx $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$. ghetekent in de figuer B. met C/F. Deser quadraet genomen van't Quadraet des Diameters / rest het Quadraet F/H. Daer uyt $\sqrt{}$. Comt voor F/H. $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$. Dese genomen vanden Diameter / ende uyt de rest $\sqrt{}$ .comt voor C G. (welck een syde des 48. houcx is) $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$. Ende so voort come ick sonder arbeydt aen de syde des 96. houcx. De selve doet $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$. Ende een syde des 192. houcx doet

$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}$. &c.

HET IIII. CAPITTEL.

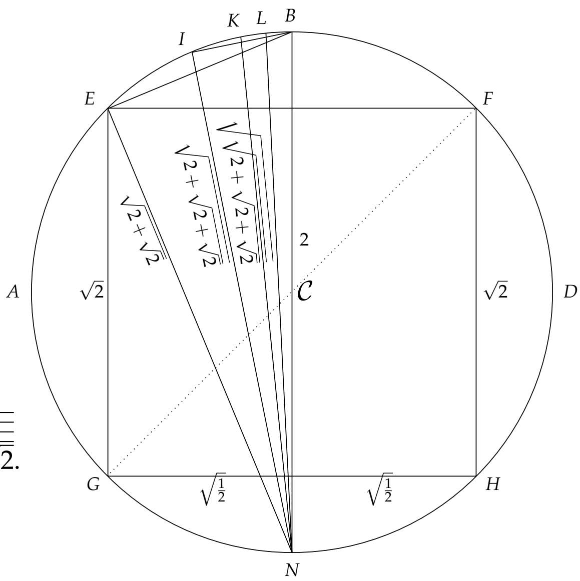
Daer in gheleert werdt te vinden

(uyt het voorschreven fondament) veelderhande figueren-syden: Beginnende aen den Vier-houck

[2] Zetfout

fol.2r

In deser figuere C. doet den Diameter des Circkels A/E/B/F/D 2. als boven: Daer om een sijde des Quadraets daer in beschreven / doet $\sqrt{2}$. Haer Complement doet mede $\sqrt{2}$. Die ghenomen van den Diameter / compt voor het Quadraet des 8. houcx sijde $2-\sqrt{2}$. hier uyt $\sqrt{\ }$ comt voor een syde des 8. houcx / of E/B. $\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Alsoo vinde ick sonder moeyten voor IB. een sijde des 16. houcx $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$. Ende voor een syde des 32. houcx / als K/B $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ Item voor L/B. een syde des ghelijck-sydighen 64. houcx / vinde ick $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$. Ende soo voort can ick comen tot de syden van figueren die veel duysent houcken hebben: Maer de leste can niemandt vinden.

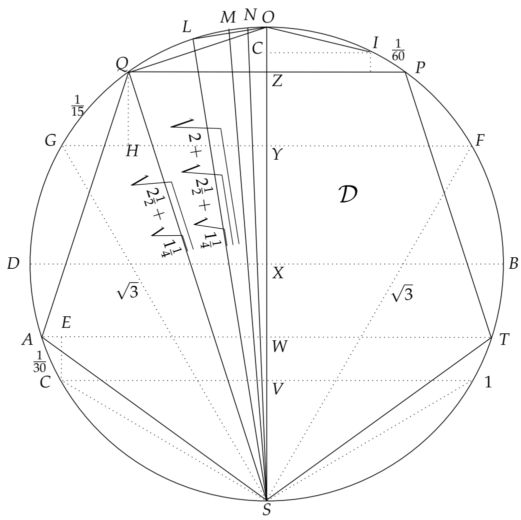


HET V. CAPITTEL

Daer in gheleert werdt te vinden / de

syden vanden 5.10.20.40.80. Ende den 15.30.60.120.240. Houck.

Hoemen eenen gelijc-sydighen 5. houck in oft om eenen Circkel sal beschrijven. Item in eenen 5. houck: of om den selven eenen Circkel schrijven / werdt gheleert in den vierden Bouck Euclides proportie[3] 11. 12. 13. 14. Ende in den tweeden aen-hangh der selver 4^{de} proportie[4] van Xilander van Augsburgh ghestelt: welck is de 3^{de} des 14^{de} Euclides: Hoemen een syde des ghelijck-sydighen 10. houcx sal vinden: te weten. Den halven Diameter eenes Circkels salmen deelen/ naer uyt-wijsen der 11. Proportie[5] des tweeden Boucks Euclides: Dan sal het grootste deel syn/



[3]propositie?
[4]propositie?
[5]Propositie?

een syde des begheerden 10. houcx/ diemen in den Circkel can beschrijven/ als in den Circkel D. is fol.2v
voor den selven ghevonden Q/O. Dese geteyckent van O. in den punct P. ende ghetrocken de rechte Q/P. dat is een syde des 5. houcx. De deylinghe wert te weghe ghebracht alsoo: Den halven Diameter X/B. deelt in twee gelijcke deelen/ daer nae settet den eenen voet des Circkels opt midden van X/B. den anderen streckt aent eynde des Diameters in O. ofte S. daer na laet den voet opt midden van X/B. ende teyckent de ghevonden wijde over X. in de ander helfte des Diameters / dan is de lengde tusschen den punct: (verstaet daer de voornoemde wijde valt) ende middel punct X. een syde des 10. houcks/ in den Circkel beschreven. De lengde der syden in ghetallen vinde ick alsoo: Het Quadraet van der halven Lini X/B. (als in desen daer den Diameter doet 2.) welck doet $\frac{1}{4}$. Addeer ick tot den Quadraet X/O. welc doet 1. comt voort Quadraet der voornoemde wyde $1\frac{1}{4}$. daer uyt $\surd$. comt voor de selve $\sqrt{1\frac{1}{4}}$. Hier van genomen $\frac{1}{2}$. als de helfte van X/B. rest voor een syde des 10. houcx $\sqrt{1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$. Deser Quadraet genomen van t'Quadraet des Diameters/ comt het quadraet Q/S. daer uyt $\surd$. comt voor Q S. $\sqrt{2\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}}}$. Om nu te comen tot het getal der Lini Q/P. Multipliceert Q/O met Q/S.comt $\sqrt{2\frac{1}{2} - \sqrt{1\frac{1}{4}}}$. voor Q/P. een syde des 5. houcx. My is wel bekent / dat in desen (als mede in voorleden) tijden veel gevonden werden / die grouwen / ende eenen schrick voor de Irrationale getallen hebben: Is nochtans een van de hoogh-noodighste stucken in den conste van Mathematica. Dat de alder geleersten groflick gemist hebben: is de oorsake datse onhervaren zijn geweest in getallen / daerom is mijnen raedt datmen de Fondamenten der voornoemde ghetallen wel leert / de welcke van veele seer vlijtigh beschreven zijn: Ick sal naer desen (zoo't Godt belieft) mede mijn beste doen: de sake en is in hem selven niet swaer/ ende lustigher inde voornoemde ghetallen te wercken als in ghemeene/ soo verre met practijcque het werck volbracht werdt. In den voorgaenden exempel moetmen Multipliceren $\sqrt{1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$. met $\sqrt{2\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}}}$. welck swaer schijnt/ dewijle dese niet van eener natueren zijn: Maer bedenckende mijne 19^{de} beschrijvinghe[6] / soo ist seer licht t'selve begheeren naer te comen. Alsoo Quadreert $\sqrt{1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$. comt $1\frac{1}{2} - \sqrt{1\frac{1}{4}}$: Dit multipliceert met $2\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}}$. (het quadraet van S/Q.) comt het Quadraet van Q/P. daer voor set $\surd$. comt voor Q/P. als boven. Volght hier onder het werck.

$\sqrt{1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}}$.	$+1\frac{1}{2}$
$\sqrt{1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2} - \sqrt{1\frac{1}{4}}$.	$-2\frac{1}{2}$
$+1\frac{1}{4}$	$+3\frac{3}{4} - \sqrt{1\frac{1}{4}}$	-1
$+\ \frac{1}{4}$	$-1\frac{1}{4}$	
$1\frac{1}{2} - \sqrt{1\frac{1}{4}}$	$\sqrt{2\frac{1}{2} - \sqrt{1\frac{1}{4}}}$	Voor P/Q.

Door het voorgaende can ick nu licht comen tot een sijde des 20/40/80. houcx / &c. alsoo Substr: Q/S. van den Diameter S/O. rest $2 - \sqrt{2\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}}}$. dit is het Quadraet van L/O. daer voor $\surd$. comt voor L/O. een syde des 20. houcx $\sqrt{2 - \sqrt{2\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}}}}$. Door de selve maniere sult ghy vinden voor een syde des 40. houcx $\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}}}}}$. ende $\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}}}}}}$. voor een syde des 80. houcx: Ende soo voort sonder eynde.

[6] Hier wordt artikel 19 uit capittel 1 bedoeld.

Om wyder te comen tot een syde des 15. houcx: Merckt G/F. is een syde des 3. houcx: Daerom den Boghe F/P/O/Q/G. is $\frac{1}{3}$. des omloops/ Ende O/L/Q/G. $\frac{1}{6}$. des selven / daer van den Boghe Q/L/O. (welck is $\frac{1}{10}$ des omloops) rest $\frac{1}{15}$ der Circonferentie: Daerom de rechte Linie Q/G. is een syde des 15. houcx/ den Circkel ingeschreven. De lengde vinde ick in ghetallen alsoo/ Q/Z. is de helfte des 5. houcx/ ende doet $\sqrt{\frac{5}{8} - \sqrt{\frac{5}{64}}}$. Dese genomen van $\sqrt{\frac{3}{4}}$. (de helft van G/F) rest voor G/H. $\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{5}{8} - \sqrt{\frac{5}{16}}}$[7] . deser Quadraet doet $1\frac{3}{8} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{1\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}$[8]. Wyder Substra. O/Z. als $\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}}$. van O/Y. welcke doet $\frac{1}{2}$. Rest $\sqrt{\frac{5}{16}} - \frac{1}{4}$. voor Z/Y. Dese is gelijck Q/H. haer Quadraet doet $\frac{3}{8} - \sqrt{\frac{5}{64}}$. Dese ghedaen tot den Quadraet G/H. comt het Quadraet G/Q. hier uyt $\sqrt{}$. Comt voor een syde des 15. houcx $\sqrt{1\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{1\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}$: Dat is $\sqrt{\frac{5}{8} + \sqrt{\frac{5}{64}}}$

[7] Dit moet $\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{5}{8} - \sqrt{\frac{5}{64}}}$ zijn

[8] Dit moet $1\frac{3}{8} - \sqrt{\frac{5}{64}} - \sqrt{1\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}$

$-\sqrt{1\frac{1}{8}-\sqrt{\frac{45}{64}}}$. oft $\sqrt{\frac{5}{8}+\sqrt{\frac{5}{64}}}-\sqrt{\frac{15}{16}}-\sqrt{\frac{3}{16}}$. mede voor een syde des 15. houcx / als den Diameter doet als boven. Door dese can ic nu licht comen (door de voorgaende Propositie) tot een syde des 30/60/120/240. houcx/ &c. Maer ick sal't u toonen om de selve te vinden door de bereyde figuer D. Also C/S. den Boge is $\frac{1}{6}$ des omloops / ende S/C/A. is $\frac{1}{5}$ der Circonferentie: Daerom moet A/C. $\frac{1}{30}$. des geheelen omloops zijn / ende de rechte Linie A/C. een syde des 30. houcx / den Circkel ingeschreven. Merct voorder/ Q/S. is gelijck A/T. daer van genomen C/Q[9] (een syde des 3. houcx) rest $\sqrt{2\frac{1}{2}+\sqrt{1\frac{1}{4}}-\sqrt{3}}$[10]. de helft deser / rest als $\sqrt{\frac{5}{8}+\sqrt{\frac{5}{64}}-\sqrt{\frac{3}{4}}}$[11]. is voor A/E. Deser Quadraet doet $1\frac{3}{8}+\sqrt{\frac{5}{64}}-\sqrt{1\frac{7}{8}+\sqrt{\frac{45}{64}}}$. Item S/W. doet $1\frac{1}{4}-\sqrt{\frac{5}{16}}$. daer van genomen SR.[12] (welck doet $\frac{1}{2}$.) rest voor E/C. $\frac{3}{4}-\sqrt{\frac{5}{16}}$. deser Quadraet doet $\frac{7}{8}-\sqrt{\frac{45}{64}}$. hier by gedaen het Quadraet van A/E. comt (door de 47ste des eersten Euc.) voor't Quadraet A/C. $2\frac{1}{4}-\sqrt{\frac{5}{16}}-\sqrt{1\frac{7}{8}+\sqrt{\frac{45}{64}}}$. Hier uyt $\sqrt{}$. comt $\sqrt{2\frac{1}{4}-\sqrt{\frac{5}{16}}-\sqrt{1\frac{7}{8}+\sqrt{\frac{45}{64}}}}$. voor een syde des 30. houcx. Om voorder te vinden een syde des 60. houcx / den Circkel ingeschreven: Merct/ den Boge P/I/O. is een $\frac{1}{10}$. des omloops / ende O/I. $\frac{1}{12}$. daerom moet I/P. $\frac{1}{60}$ des omloops zijn/ ende I/P. de rechte een syde des 60. houcx. Nu doet R/I.[13] $\frac{1}{2}$. ende is gelijc ZK. genomen van ZP. welcke doet $\sqrt{\frac{5}{8}-\sqrt{\frac{5}{64}}}$. rest voor KP. $\sqrt{\frac{5}{8}-\sqrt{\frac{5}{64}}-\frac{1}{2}}$. O/Z. doet $\frac{3}{4}-\sqrt{\frac{5}{16}}$[14]. Hier van R/O. (welck doet $1-\sqrt{\frac{3}{4}}$) rest voor R/Z. gelijck I K. $\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{5}{16}}-\frac{1}{4}$. Addeert de Quadraten IK. en K/P. comt het Quadraet I/P. De Quadraten doen alsoo / I/K. Quadraet doet $1\frac{1}{8}+\sqrt{\frac{5}{64}}-\sqrt{\frac{15}{16}}-\sqrt{\frac{3}{4}}$[15]. ende het Quadraet K/P. doet $\frac{7}{8}-\sqrt{\frac{5}{64}}-\sqrt{\frac{5}{8}-\sqrt{\frac{5}{64}}}$. Summa voor t'Quadraet I/P. $2-\sqrt{\frac{15}{16}}-\sqrt{\frac{3}{16}}-\sqrt{\frac{5}{8}-\sqrt{\frac{5}{64}}}$. Hier uyt $\sqrt{}$. comt voor een syde des 60. houcx $\sqrt{2-\sqrt{\frac{15}{16}}-\sqrt{\frac{3}{8}}-\sqrt{\frac{5}{8}-\sqrt{\frac{5}{64}}}}$[16].

Voor dese vinde ick door mijn Fundament $\sqrt{2-\sqrt{1\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{5}{16}}+\sqrt{1\frac{7}{8}+\sqrt{\frac{45}{64}}}}}$. Dese schijnen ongelijc / maer sal nochtans hier naer bevonden werden / dat de eene niet meer als de ander doet. Also vinde ick nu licht voor een syde des 120. houcx $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{1\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{5}{16}}+\sqrt{1\frac{7}{8}+\sqrt{\frac{45}{64}}}}}}$.

$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{1\frac{3}{4}+\frac{5}{16}+\sqrt{1\frac{7}{8}+\sqrt{\frac{45}{64}}}}}}}$[17]. voor een syde des 240. houcx

[9] Hier wordt niet CQ, maar C1 bedoeld.

[10] Dit moet $\sqrt{2\frac{1}{2}+\sqrt{1\frac{1}{4}}}-\sqrt{3}$ zijn

[11] Dit moet $\sqrt{\frac{5}{8}+\sqrt{\frac{5}{64}}}-\sqrt{\frac{3}{4}}$ zijn

[12] Hier wordt niet SR, maar SV bedoeld.

[13] Hier wordt C/I bedoeld, in de rest van de tekst wordt ook R voor C gebruikt.

[14] Dit moet $\sqrt{\frac{5}{8}-\sqrt{\frac{5}{64}}}-\frac{1}{2}$. O/Z. doet $\frac{3}{4}-\sqrt{\frac{5}{16}}$ zijn

[15] Dit moet $1\frac{1}{8}+\sqrt{\frac{5}{64}}-\sqrt{\frac{15}{16}}-\sqrt{\frac{3}{16}}$ zijn

[16] Dit moet $\sqrt{2-\sqrt{\frac{15}{16}}-\sqrt{\frac{3}{16}}-\sqrt{\frac{5}{8}-\sqrt{\frac{5}{64}}}}$ zijn

[17] Dit moet $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{1\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{5}{16}}+\sqrt{1\frac{7}{8}+\sqrt{\frac{45}{64}}}}}}}$ zijn.

$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{1\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{5}{16}}+\sqrt{1\frac{7}{8}+\sqrt{\frac{45}{64}}}}}}}}$. een syde des 480. houcks: Ende soo voort sonder eynde.

HET VI. CAPITTEL.[18]

Daer in gheleert wordt / de ghetallen

te vinden / van veel verscheyden Linien / inden Circkel beschreven.

In de figuer D. is den Boghe P/F/B. $\frac{3}{20}$ des omloops / Voor syn Corda vinde ick $\sqrt{2-\sqrt{2\frac{1}{2}-\sqrt{1\frac{1}{4}}}}$. syn Complement is $\sqrt{2+\sqrt{2\frac{1}{2}-\sqrt{1\frac{1}{4}}}}$. ondertoghen $\frac{7}{20}$. des omloops. Door dese (en 'tghene in't tweede Capittel geleert is) come ick licht tot der Linien ghetallen / onder-toghen $\frac{3}{40}$ / $\frac{7}{40}$ / $\frac{17}{40}$ / $\frac{13}{40}$ / $\frac{17}{80}$ / $\frac{23}{80}$ / $\frac{7}{80}$ / $\frac{33}{80}$ / $\frac{13}{80}$ / $\frac{27}{80}$. &c. des omloops: te weten / voor een Linie onder-toghen $\frac{3}{40}$. des omloops / comt $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2\frac{1}{2}-\sqrt{1\frac{1}{4}}}}}$. ende $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2\frac{1}{2}-\sqrt{1\frac{1}{4}}}}}$[19]. is onder-toghen $\frac{17}{40}$. des omloops / welcke Boghe doet 153. Graden: Verstaet als den Diameter doet 2. als boven.

Boghe.	
	A.
$\frac{17}{80}$	$\sqrt{}.2-\sqrt{}.2-\sqrt{}.2+\sqrt{}.2\frac{1}{2}-\sqrt{}1\frac{1}{4}$
	B.
$\frac{23}{80}$	$\sqrt{}.2+\sqrt{}.2-\sqrt{}.2+\sqrt{}.2\frac{1}{2}-\sqrt{}1\frac{1}{4}$
	C.
$\frac{17}{160}$	$\sqrt{}.2-\sqrt{}.2+\sqrt{}.2-\sqrt{}.2+\sqrt{}.2\frac{1}{2}-\sqrt{}1\frac{1}{4}$
	D.
$\frac{63}{160}$	$\sqrt{}.2+\sqrt{}.2+\sqrt{}.2-\sqrt{}.2+\sqrt{}.2\frac{1}{2}-\sqrt{}1\frac{1}{4}$
	E.
$\frac{23}{160}$	$\sqrt{}.2-\sqrt{}.2-\sqrt{}.2-\sqrt{}.2+\sqrt{}.2\frac{1}{2}-\sqrt{}1\frac{1}{4}$
	F.
$\frac{57}{160}$	$\sqrt{}.2+\sqrt{}.2-\sqrt{}.2-\sqrt{}.2+\sqrt{}.2\frac{1}{2}-\sqrt{}1\frac{1}{4}$

[18] In dit hoofdstuk worden de wortels in de tabellen weergegeven in de notatie van Ludolph van Ceulen. In deze notatie staat een punt achter een wortelteken voor '('. Dit is gedaan om de tabellen overzichtelijk te houden.

[19] Dit moet $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2\frac{1}{2}-\sqrt{1\frac{1}{4}}}}}$. zijn.

Boghe.	G.
$\frac{17}{120}$	[20] $\sqrt{}.2 - \sqrt{}.2 + \sqrt{}.1\frac{3}{4} - \sqrt{}\frac{5}{16} - \sqrt{}.1\frac{7}{8} - \sqrt{}\frac{45}{64}$
	H.
$\frac{43}{120}$	$\sqrt{}.2 + \sqrt{}.2 - \sqrt{}.1\frac{3}{4} - \sqrt{}\frac{5}{16} - \sqrt{}.1\frac{7}{8} - \sqrt{}\frac{45}{64}$
	I.
$\frac{43}{240}$	[21] $\sqrt{}.2 - \sqrt{}.2 + \sqrt{}.2 - \sqrt{}.1\frac{3}{4} - \sqrt{}\frac{5}{16} - \sqrt{}.1\frac{7}{8} - \sqrt{}\frac{45}{64}$
	K.
$\frac{77}{240}$	[22] $\sqrt{}.2 + \sqrt{}.2 + \sqrt{}.2 - \sqrt{}.1\frac{3}{4} - \sqrt{}\frac{5}{16} - \sqrt{}.1\frac{7}{8} - \sqrt{}\frac{45}{64}$
	L.
$\frac{7}{30}$	[23] $\sqrt{}.2\frac{1}{4} + \sqrt{}\frac{5}{16} - \sqrt{}.1\frac{7}{8} - \sqrt{}\frac{45}{64}$
	M.
$\frac{4}{15}$	$\sqrt{}.1\frac{3}{4} - \sqrt{}\frac{5}{16} + \sqrt{}.1\frac{7}{8} - \sqrt{}\frac{45}{64}$
	N.
$\frac{7}{60}$	$\sqrt{}.2 - \sqrt{}.1\frac{3}{4} - \sqrt{}\frac{5}{16} + \sqrt{}.1\frac{7}{8} - \sqrt{}\frac{45}{64}$ fol.3v
	O.
$\frac{23}{60}$	$\sqrt{}.2 + \sqrt{}.1\frac{3}{4} - \sqrt{}\frac{5}{16} + \sqrt{}.1\frac{7}{8} - \sqrt{}\frac{45}{64}$
$\frac{7}{120}$	$\sqrt{}.2 - \sqrt{}.2 + \sqrt{}.1\frac{3}{4} - \sqrt{}\frac{5}{16} + \sqrt{}.1\frac{7}{8} - \sqrt{}\frac{45}{64}$
$\frac{53}{120}$	$\sqrt{}.2 + \sqrt{}.2 + \sqrt{}.1\frac{3}{4} - \sqrt{}\frac{5}{16} + \sqrt{}.1\frac{7}{8} - \sqrt{}\frac{45}{64}$
$\frac{7}{240}$	$\sqrt{}.2 - \sqrt{}.2 + \sqrt{}.2 + \sqrt{}.1\frac{3}{4} - \sqrt{}\frac{5}{16} + \sqrt{}.1\frac{7}{8} - \sqrt{}\frac{45}{64}$
$\frac{113}{240}$	$\sqrt{}.2 + \sqrt{}.2 + \sqrt{}.2 + \sqrt{}.1\frac{3}{4} - \sqrt{}\frac{5}{16} + \sqrt{}.1\frac{7}{8} - \sqrt{}\frac{45}{64}$
$\frac{7}{480}$	
$\frac{233}{480}$	
$\frac{7}{960}$	
$\frac{473}{960}$	

$\frac{11}{30}$	[24] $\sqrt{}.2\frac{1}{4} - \sqrt{}\frac{5}{16} + \sqrt{}1\frac{7}{8} + \sqrt{}\frac{45}{64}$
$\frac{2}{15}$	$\sqrt{}.1\frac{3}{4} + \sqrt{}\frac{5}{16} - \sqrt{}.1\frac{7}{8} + \sqrt{}\frac{45}{64}$
$\frac{11}{60}$	$\sqrt{}.2 - \sqrt{}.1\frac{3}{4} + \sqrt{}\frac{5}{16} - \sqrt{}.1\frac{7}{8} + \sqrt{}\frac{45}{64}$
$\frac{19}{60}$	$\sqrt{}.2 + \sqrt{}.1\frac{3}{4} + \sqrt{}\frac{5}{16} - \sqrt{}.1\frac{7}{8} + \sqrt{}\frac{45}{64}$
$\frac{11}{120}$	$\sqrt{}.2 - \sqrt{}.2 + \sqrt{}.1\frac{3}{4} + \sqrt{}\frac{5}{16} - \sqrt{}.1\frac{7}{8} + \sqrt{}\frac{45}{64}$
$\frac{49}{120}$	$\sqrt{}.2 + \sqrt{}.2 + \sqrt{}.1\frac{3}{4} + \sqrt{}\frac{5}{16} - \sqrt{}.1\frac{7}{8} + \sqrt{}\frac{45}{64}$
$\frac{11}{240}$	$\sqrt{}.2 - \sqrt{}.2 + \sqrt{}.2 + \sqrt{}.1\frac{3}{4} + \sqrt{}\frac{5}{16} - \sqrt{}.1\frac{7}{8} + \sqrt{}\frac{45}{64}$
$\frac{109}{240}$	$\sqrt{}.2 + \sqrt{}.2 + \sqrt{}.2 + \sqrt{}.1\frac{3}{4} + \sqrt{}\frac{5}{16} - \sqrt{}.1\frac{7}{8} + \sqrt{}\frac{45}{64}$
$\frac{11}{480}$	$\sqrt{}.2 - \sqrt{}.2 + \sqrt{}.2 + \sqrt{}.2 + \sqrt{}.1\frac{3}{4} + \sqrt{}\frac{5}{16} - \sqrt{}.1\frac{7}{8} + \sqrt{}\frac{45}{64}$
$\frac{229}{480}$	$\sqrt{}.2 + \sqrt{}.2 + \sqrt{}.2 + \sqrt{}.2 + \sqrt{}.1\frac{3}{4} + \sqrt{}\frac{5}{16} - \sqrt{}.1\frac{7}{8} + \sqrt{}\frac{45}{64}$
$\frac{11}{960}$	$\sqrt{}.2 - \sqrt{}.2 + \sqrt{}.2 + \sqrt{}.2 + \sqrt{}.2 + \sqrt{}.1\frac{3}{4} + \sqrt{}\frac{5}{16} - \sqrt{}.1\frac{7}{8} + \sqrt{}\frac{45}{64}$
$\frac{469}{960}$	$\sqrt{}.2 + \sqrt{}.2 + \sqrt{}.2 + \sqrt{}.2 + \sqrt{}.2 + \sqrt{}.1\frac{3}{4} + \sqrt{}\frac{5}{16} - \sqrt{}.1\frac{7}{8} + \sqrt{}\frac{45}{64}$

[20] Dit moet $\sqrt{}.2 - \sqrt{}.2 - \sqrt{}.1\frac{3}{4} - \sqrt{}\frac{5}{16} - \sqrt{}.1\frac{7}{8} - \sqrt{}\frac{45}{64}$ zijn.
[21] Dit moet $\sqrt{}.2 - \sqrt{}.2 - \sqrt{}.2 - \sqrt{}.1\frac{3}{4} - \sqrt{}\frac{5}{16} - \sqrt{}.1\frac{7}{8} - \sqrt{}\frac{45}{64}$ zijn.
[22] Dit moet $\sqrt{}.2 + \sqrt{}.2 - \sqrt{}.2 - \sqrt{}.1\frac{3}{4} - \sqrt{}\frac{5}{16} - \sqrt{}.1\frac{7}{8} - \sqrt{}\frac{45}{64}$ zijn.
[23] In het origineel is niet duidelijk of de eerste breuk $\frac{1}{4}$ of $\frac{3}{4}$ is, $\frac{1}{4}$ is juist.
[24] Dit moet $\sqrt{}.2\frac{1}{4} - \sqrt{}\frac{5}{16} + \sqrt{}.1\frac{7}{8} + \sqrt{}\frac{45}{64}$ zijn.

$\frac{3}{20}$	$\surd.2 - \surd.2\frac{1}{2} - \surd 1\frac{1}{4}$
$\frac{7}{20}$	[25] $\surd.2 + \surd.2\frac{1}{2} - \surd.\frac{1}{4}$
$\frac{3}{40}$	$\surd.2 - \surd.2 + \surd.2\frac{1}{2} - \surd 1\frac{1}{4}$
$\frac{17}{40}$	$\surd.2 + \surd.2 + \surd.2\frac{1}{2} - \surd 1\frac{1}{4}$
$\frac{3}{80}$	$\surd.2 - \surd.2 + \surd.2 + \surd.2\frac{1}{2} - \surd 1\frac{1}{4}$
$\frac{37}{80}$	$\surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2\frac{1}{2} - \surd 1\frac{1}{4}$
$\frac{3}{160}$	$\surd.2 - \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2\frac{1}{2} - \surd 1\frac{1}{4}$
$\frac{77}{160}$	$\surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2\frac{1}{2} - \surd 1\frac{1}{4}$

$\frac{7}{40}$	$\surd.2 - \surd.2 - \surd.2\frac{1}{2} - \surd 1\frac{1}{4}$
$\frac{13}{40}$	$\surd.2 + \surd.2 - \surd.2\frac{1}{2} - \surd 1\frac{1}{4}$
$\frac{7}{80}$	$\surd.2 - \surd.2 + \surd.2 - \surd.2\frac{1}{2} - \surd 1\frac{1}{4}$
$\frac{33}{80}$	$\surd.2 + \surd.2 + \surd.2 - \surd.2\frac{1}{2} - \surd 1\frac{1}{4}$
$\frac{7}{160}$	$\surd.2 - \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 - \surd.2\frac{1}{2} - \surd 1\frac{1}{4}$
$\frac{73}{160}$	$\surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 - \surd.2\frac{1}{2} - \surd 1\frac{1}{4}$
$\frac{7}{320}$	[26] $\surd.2 - \surd.2 + \surd.2 + \surd 2 + \surd.2 - \surd.2\frac{1}{2} - \surd 1\frac{1}{4}$
$\frac{153}{320}$	$\surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 - \surd.2\frac{1}{2} - \surd 1\frac{1}{4}$

[25] Dit moet $\surd.2 + \surd.2\frac{1}{2} - \surd 1\frac{1}{4}$ zijn.
[26] dit moet $\surd.2 - \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 - \surd.2\frac{1}{2} - \surd 1\frac{1}{4}$ zijn.

Merckt: tusschen de Linien daer Boghe boven staet / beteyckent de gebroken / stucken / ofte gedeelten des omloops. De Irrationale getallen daer teghen / zijn de ghetallen haerder Coorden / ofte der rechte Linien die den Boghe onder toghen zijn: Welcke ghetallen vreemt ende swaer schijnen: maer sijn nochtans licht te vinden. Alsoo: Ick begheer een getal / welcker Linie onder-toghen is $\frac{3}{20}$ des omloops / wiens Boghe doet 54. Graden. Een Boghe noch so groot / doet 108. Graden / wiens Complement $\frac{1}{5}$ des omloops / doet 72 Graden. Sijn Corda is boven ghevonden $\sqrt{2\frac{1}{2} - \sqrt{1\frac{1}{4}}}$. Dese ghenomen van 2. (soo langh als den Diameter) rest $2 - \sqrt{2\frac{1}{2} - \sqrt{1\frac{1}{4}}}$. Het Quadraet eener Linie halff soo groot als $\sqrt{2\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}}}$.[27] (die onder-toghen den Boghe van 108. Graden) Hier uyt $\sqrt{}$. Comt voor een Linie onder-toghen $\frac{3}{20}$ ghedeelten des omloops $\sqrt{2 - \sqrt{2\frac{1}{2} - \sqrt{1\frac{1}{4}}}}$. Haer teghen-linie is ondertogen $\frac{7}{20}$. Daer voor comt $\sqrt{2 + \sqrt{2\frac{1}{2} - \sqrt{1\frac{1}{4}}}}$.

Dese ghenomen van 2. Ende uyt de rest $\sqrt{}$. Comt $\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2\frac{1}{2} - \sqrt{1\frac{1}{4}}}}}$. de Corda van $\frac{3}{40}$ des omloops / &c. Item / ick begheer een rechte Lini onder-toghen $\frac{11}{30}$ des omloops: Soo soecke ick eerst een rechte Lini onder-toghen $\frac{2}{15}$ des omloops. Alsoo / Den Boghe T/F/O/G/A. is $\frac{3}{5}$ der Circonferentie / Daer van den Boghe F/O/G. als $\frac{1}{3}$ der Circonferentie / rest $\frac{4}{15}$ des omloops / Daer om een rechte Linie ghetrocken van G. tot A. doet den begheeren ghenouch. Wijder Substraheert G/Y. als $\sqrt{\frac{3}{4}}$. van A/W. (welcke doet $\sqrt{\frac{5}{8} + \sqrt{\frac{5}{64}}}$.) Rest $\sqrt{\frac{5}{8} + \sqrt{\frac{5}{64}} - \sqrt{\frac{3}{4}}}$[28]. A/E. Wijder het Quadraet van A/W. ghenomen van't Quadraet A/S. Rest voor't Quadraet S/W. $1\frac{7}{8} - \sqrt{1\frac{61}{64}}$. Hier uyt de Quadraet-wortel. Comt voor S/W. $1\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}}$. Dese ghenomen van S/Y. (als $1\frac{1}{2}$) Rest voor W/Y. $\sqrt{\frac{5}{16}} + \frac{1}{4}$. Dese is ghelijck de Perpendiculaer / welcke van G. op A/T. in den punct E valt. Deser Quadraet doet $\frac{3}{8} + \sqrt{\frac{5}{64}}$. Ende het Quadraet van E/A. doet $1\frac{3}{8} + \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{1\frac{7}{8} + \sqrt{\frac{45}{64}}}$[29]. Deser beyder Quadraten t'samen doen (door de 47ste des eersten Euclides.) het Quadraet G/A: te weten / $1\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{1\frac{7}{8} + \sqrt{\frac{45}{64}}}$. Hier uyt $\sqrt{}$. Comt $\sqrt{1\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{1\frac{7}{8} + \sqrt{\frac{45}{64}}}}$. Het ghetal der Linie onder-toghen $\frac{2}{15}$ des omloops. Deser Quadraet ghenomen van't Quadraet des Diameters / rest het Quadraet der Lini onder-togen $\frac{11}{30}$. des omloops. Daer uyt $\sqrt{}$. Comt voor de begheerde Linie $\sqrt{2\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} + \sqrt{1\frac{7}{8} + \sqrt{\frac{45}{64}}}}$. Als ick het ghevonden ghetal voor $\frac{2}{15}$ der Circonferentie Addeer / ende Substraheer van den Diameter (als 2.) dan is de rest ghelijck het Quadraet eener Linie onder-trocken $\frac{11}{16}$[30] des omloops. Ende de summa ghelijck het Quadraet ondertrocken $\frac{19}{60}$ des omloops. Den $\sqrt{}$. uyt de rest / ende summa: Comt $\sqrt{2 - \sqrt{1\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{1\frac{7}{8} + \sqrt{\frac{45}{64}}}}}$.

---

[27] Dit moet $\sqrt{1\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}}}$ zijn.

[28] Dit moet $\sqrt{\frac{5}{8} + \sqrt{\frac{5}{64}}} - \sqrt{\frac{3}{4}}$ zijn.

[29] Dit moet $1\frac{3}{8} + \sqrt{\frac{5}{64}} - \sqrt{1\frac{7}{8} + \sqrt{\frac{45}{64}}}$ zijn.

[30] Dit moet $\frac{11}{60}$ zijn.

voor $\frac{11}{60}$. Ende voor een rechte onder-toghen $\frac{19}{60}$. $\sqrt{2+\sqrt{1\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{5}{16}}-\sqrt{1\frac{7}{8}+\sqrt{\frac{45}{64}}}}}$. Door het tweede Capittel / uyt den selven gronde / can ick veele rechte Linien (in een Circkel bschreven[31]) ghetallen vinden. Der welcke ick eenighe setten sal: twijfele niet / ghy sult de selve in der Proeve goet vinden.

Boghe.			Graden.
$\frac{57}{160}$	$\surd.2+\surd.2-\surd.2-\surd.2+\surd.2\frac{1}{2}-\surd 1\frac{1}{4}$	De Corda van	$128\frac{1}{4}$
$\frac{57}{320}$	$\surd.2-\surd.2-\surd.2-\surd.2-\surd.2+\surd.2\frac{1}{2}-\surd 1\frac{1}{4}$	——— ——— ———	$64\frac{1}{8}$
$\frac{57}{640}$	$\surd.2-\surd.2+\surd.2-\surd.2-\surd.2-\surd.2+\surd.2\frac{1}{2}-\surd 1\frac{1}{4}$	——— ———	$32\frac{1}{16}$
$\frac{57}{1280}$	$\surd.2-\surd.2+\surd.2+\surd.2-\surd.2-\surd.2-\surd.2+\surd.2\frac{1}{2}-\surd 1\frac{1}{4}$	— —	$16\frac{1}{32}$
$\frac{57}{2560}$	$\surd.2-\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2-\surd.2-\surd.2-\surd.2+\surd.2\frac{1}{2}-\surd 1\frac{1}{4}$	———	$8\frac{1}{64}$
$\frac{57}{5120}$	$\surd.2-\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2-\surd.2-\surd.2-\surd.2+\surd.2\frac{1}{2}-\surd 1\frac{1}{4}$		$4\frac{1}{128}$
$\frac{57}{10240}$ ———	$\surd.2-\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2-\surd.2-\surd.2-\surd.2$ $+\surd.2\frac{1}{2}-\surd 1\frac{1}{4}$	——— ——— ——— ———	$2\frac{1}{256}$
$\frac{57}{20480}$ ———	$\surd.2-\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2-\surd.2-\surd.2-\surd.2$ $+\surd.2\frac{1}{2}-\surd 1\frac{1}{4}$	——— ——— ——— ———	$1\frac{1}{512}$

$\frac{23}{160}$	$\surd.2-\surd.2-\surd.2-\surd.2+\surd.2\frac{1}{2}-\surd 1\frac{1}{4}$	Corda van ———	$51\frac{3}{4}$
$\frac{103}{320}$	$\surd.2+\surd.2-\surd.2-\surd.2-\surd.2+\surd.2\frac{1}{2}-\surd 1\frac{1}{4}$	——— ———	$115\frac{7}{8}$
$\frac{263}{640}$	[32] $\surd.2+\surd.2+\surd.2-\surd.2-\surd.2-\surd.2+\surd 2\frac{1}{2}-\surd.1\frac{1}{4}$	——— —	$147\frac{15}{16}$
$\frac{583}{1280}$	$\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2-\surd.2-\surd.2-\surd.2+\surd.2\frac{1}{2}-\surd 1\frac{1}{4}$	———	$163\frac{31}{32}$
$\frac{1223}{2560}$	$\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2-\surd.2-\surd.2-\surd.2+\surd.2\frac{1}{2}-\surd 1\frac{1}{4}$		$171\frac{63}{64}$

[31] Zetfout

[32] Dit moet $\surd.2+\surd.2+\surd.2-\surd.2-\surd.2-\surd.2+\surd.2\frac{1}{2}-\surd.1\frac{1}{4}$ zijn.

Boghe.		Graden.
$\frac{2???}{5120}$[33]	$\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2-\surd.2-\surd.2-\surd.2$ $+\surd.2\frac{1}{2}-\surd 1\frac{1}{4}$	$175\frac{127}{128}$
$\frac{5063}{10240}$	$\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2-\surd.2-\surd.2-\surd.2$ $+\surd.2\frac{1}{2}-\surd 1\frac{1}{4}$	$177\frac{255}{256}$
$\frac{10183}{20480}$	$\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2-\surd.2-\surd.2$ $-\surd.2+\surd.2\frac{1}{2}-\surd 1\frac{1}{4}$	$178\frac{511}{512}$

$\frac{17}{120}$	[34] $\surd.2-\surd.2-\surd.1\frac{3}{4}-\surd\frac{5}{16}-\surd 1\frac{7}{8}-\surd\frac{45}{64}$ Rechte Linien onder-toghen.	51.
$\frac{43}{120}$	$\surd.2+\surd.2-\surd.1\frac{3}{4}-\surd\frac{5}{16}-\surd.1\frac{7}{8}-\surd\frac{45}{64}$	129
$\frac{43}{240}$	$\surd.2-\surd.2-\surd.2-\surd.1\frac{3}{4}-\surd\frac{5}{16}-\surd.1\frac{7}{8}-\surd\frac{45}{64}$	$64\frac{1}{2}$
$\frac{43}{480}$	$\surd.2-\surd.2+\surd.2-\surd.2-\surd.1\frac{3}{4}-\surd\frac{5}{16}-\surd.1\frac{7}{8}-\surd\frac{45}{64}$	$32\frac{1}{4}$
$\frac{43}{960}$	$\surd.2-\surd.2+\surd.2+\surd.2-\surd.2-\surd.1\frac{3}{4}-\surd\frac{5}{16}-\surd.1\frac{7}{8}-\surd\frac{45}{64}$	$16\frac{1}{8}$
$\frac{43}{1920}$	$\surd.2-\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2-\surd.2-\surd.1\frac{3}{4}-\surd\frac{5}{16}-\surd.1\frac{7}{8}-\surd\frac{45}{64}$	$8\frac{1}{16}$
$\frac{43}{3840}$	$\surd.2-\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2-\surd.2-\surd.1\frac{3}{4}-\surd\frac{5}{16}-\surd.1\frac{7}{8}-\surd\frac{45}{64}$	$4\frac{1}{32}$
$\frac{43}{7680}$	[35] $\surd.2-\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2-\surd.2-\surd.1\frac{3}{4}-\surd\frac{5}{16}-\surd.1\frac{7}{8}-\surd\frac{45}{64}$	$2\frac{1}{64}$
$\frac{43}{10360}$[36]	[37] $\surd.2-\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2-\surd.2-\surd.1\frac{3}{4}-\surd\frac{5}{16}$ $-\surd.1\frac{7}{8}-\surd\frac{45}{64}$	$1\frac{1}{128}$

$\frac{77}{240}$	[38] $\surd.2+\surd.2-\surd.2-\surd.1\frac{3}{4}-\surd\frac{5}{16}-\surd.1\frac{7}{8}-\surd\frac{45}{64}$	$115\frac{?}{?}$[39]
$\frac{197}{480}$	$\surd.2+\surd.2+\surd.2-\surd.2-\surd.1\frac{3}{4}-\surd\frac{5}{16}-\surd.1\frac{7}{8}-\surd\frac{45}{64}$	$147\frac{3}{4}$
$\frac{473}{960}$[40]	$\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2-\surd.2-\surd.1\frac{3}{4}-\surd\frac{5}{16}-\surd.1\frac{7}{8}-\surd\frac{45}{64}$	$163\frac{7}{8}$
$\frac{917}{1920}$	$\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2-\surd.2-\surd.1\frac{3}{4}-\surd\frac{5}{16}-\surd.1\frac{7}{8}-\surd\frac{45}{64}$	$171\frac{15}{16}$
$\frac{1877}{3840}$	$\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2-\surd.2-\surd.1\frac{3}{4}-\surd\frac{5}{16}-\surd.1\frac{7}{8}-\surd\frac{45}{64}$	$175\frac{31}{32}$
$\frac{3797}{7680}$	$\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2-\surd.2-\surd.1\frac{3}{4}-\surd\frac{5}{16}$ $-\surd.1\frac{7}{8}-\surd\frac{45}{64}$	$177\frac{63}{64}$
$\frac{7637}{15360}$	$\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2-\surd.2-\surd.1\frac{3}{4}$ $-\surd\frac{5}{16}-\surd.1\frac{7}{8}-\surd\frac{45}{64}$	$178\frac{127}{128}$

HET VII. CAPITTEL.

Leert hoe de ongheschickte ghetallen

Rationael te maecken zijn / soo nae als men begheert.

[33] In het origineel is het niet duidelijk wat er in de teller staat, dit moet 2503 zijn.
[34] Dit moet $\surd.2-\surd.2-\surd.1\frac{3}{4}-\surd\frac{5}{16}-\surd.1\frac{7}{8}-\surd\frac{45}{64}$ zijn.
[35] Dit moet $\surd.2-\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2-\surd.2-\surd.1\frac{3}{4}-\surd\frac{5}{16}-\surd.1\frac{7}{8}-\surd\frac{45}{64}$ zijn.
[36] Dit moet $\frac{43}{15360}$ zijn.
[37] Dit moet $\surd.2-\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2-\surd.2-\surd.1\frac{3}{4}-\surd\frac{5}{16}-\surd.1\frac{7}{8}-\surd\frac{45}{64}$ zijn.
[38] Dit moet $\surd.2+\surd.2-\surd.2-\surd.1\frac{3}{4}-\surd\frac{5}{16}-\surd.1\frac{7}{8}-\surd\frac{45}{64}$ zijn.
[39] In het origineel is de breuk onduidelijk, dit moet $\frac{1}{2}$ zijn.
[40] Dit moet $\frac{437}{960}$ zijn.

Boven is ghevonden voor't Quadraet eener syde des 12. houcx $2-\sqrt{3}$. Dat is voor een syde $\sqrt{2-\sqrt{3}}$. ofte $\sqrt{1\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}$. Dese doen ghelijcke veel in uytsprekelicke ghetallen. Om nu uyt dese de Quadraet-wortel te Extraheren / sal ick beginnen aen $\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Hier moet eerst uyt 3. de Wortel ghetrocken werden. Het comende genomen van 2. uyt de rest den Radix. Deses $\sqrt{}$. teeckens / doet den begheeren ghenough. Door het 17$^{\text{de}}$ Artijckel Multipliceert 3. met 10000000000000000. uyt de Summa $\sqrt{}$. Het comende Gedivideert door 100000000. (welck is de Quadraet-wortel van't Quadraet daer 3. mede Ghemultipliceert) Den Quotient ghenomen van 2. De rest mede Ghemultipliceert met 10000000000000000. uyt den Product $\sqrt{}$. Den selven Ghedivideert door 100000000. Den Quotient is een syde des 12. Houcx: Als t'volgende werck uyt-wijset.

$\sqrt[3]{\frac{10000000000000000}{30000000000000000}}$

3

29262 211717679751936 30000000000000000 1|7|3|2|0|5|0|8|0| 234466440100016 33446644110 3344664 334	Te cleyn / ende een op't eynde te groot.
81077 1639380981 08634431561519 2679492000000000 5|1|7|6|3|8|0|9. 10023452267660 11003355227 1100335 110	Te cort / ende een meer op't eynde te lanc.

2 Subst. 1 Rest $\left\{ \frac{73205080}{100000000} \;\; \frac{26794920}{100000000} \;\; \frac{26794919}{100000000} \right\}$ te lanck. te cleyn.

Comt[41] $\frac{51763089}{100000000}$ te cort / ende $\frac{51763810}{100000000}$ te lanck. voor een syde des 12 houcx / Als den Diameter doet / als boven.

Item $\sqrt{1\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$ Exstraheer ick eerst $\sqrt{}$ uyt $1\frac{1}{2}$. Daer naer uyt $\frac{1}{2}$. Substraheert de leste van de eerste: Als volght.

Multipliceert $1\frac{1}{2}$

$\frac{10000000000000000}{150000000000000000}$

200 111173408 1080993487268 0616249124649631 15000000000000000 1|2|2|4|7|4|4|8|7| 224444894488896 22444499448 2244449 224	1111678 00910481503 101515947641116 5000000000000000 7|0|7|1|0|6|7|8| 1401414201234 1414414221 11414

Subst. $\left\{ \begin{array}{l} 122474487 \\ 70710678 \end{array} \right.$

Comt $\frac{51763809}{100000000}$ voor een syde des 12 houcx.

Boven is ghevonden voor een syde des 15 houcx $\sqrt{1\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{1\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}$. Ofte[42] $\sqrt{\frac{5}{8} + \sqrt{\frac{5}{64}} - \sqrt{1\frac{1}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}$.

Item[43] $\sqrt{\frac{5}{8} + \sqrt{\frac{5}{64}} - \sqrt{\frac{15}{16}} - \sqrt{\frac{3}{16}}}$. Dese drie ghetallen zijn ghelijck / Ende werden Rationael ghemaeckt: Als volght.

(8
Sub. $\left\{ \begin{array}{r} 15000000000 \\ 1875000000 \\ 838525491 \end{array} \right.$
1036474509000000000

(16
$\left\{ \begin{array}{l} 5000000000 \\ 625000000 \\ 3125000000000000000000 \end{array} \right.$

(64
$\left\{ \begin{array}{l} 45000000000000000000 \\ 5652 \\ \sqrt{70312500000000000} \end{array} \right.$

[41] Dit moet $\frac{51763809}{100000000}$ zijn.

[42] Dit moet $\sqrt{\frac{5}{8} + \sqrt{\frac{5}{64}} - \sqrt{1\frac{1}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}$ zijn.

[43] Dit moet $\sqrt{\frac{5}{8} + \sqrt{\frac{5}{64}} - \sqrt{\frac{15}{16}} - \sqrt{\frac{3}{16}}}$ zijn.

(4

Substraheert

$$\left\{\begin{array}{l} 7000000000 \\ \hline 1750000000 \\ 1577090915 \\ \hline \sqrt{172909085000000000} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{r} 1018073921 \\ 559016994 \\ \hline 1577090915 \end{array}\right\}$$

Addeert
dese summe
van $1\frac{3}{4}$

<table>
<tr><td>1526
9823520
1084220435425
642817596758499
703125000000000000</td><td>24
1043115
10787563883
163509841717936
1036474509000000000</td></tr>
<tr><td>8| 3| 8| 5| 2| 5| 4| 9| 1|</td><td>1| 0| 1| 8| 0| 7| 3| 9| 2| 1|</td></tr>
<tr><td>16667670045008
11667777005
1166777
116</td><td>20023636141468
220202036147
2036</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>48
1105591
1000711171433
600198199443999
312500000000000000</td><td>615
2318185
61981761737
148844426711156
172909085000000000</td></tr>
<tr><td>5| 5| 9| 0| 1| 6| 9| 9| 4|</td><td>4| 1| 5| 8| 2| 3| 3| 8| 1|</td></tr>
<tr><td>101018802323898
111111800333
11111880
1111</td><td>882301664466676
88371166446
8833116
883</td></tr>
</table>

Comt $\frac{41582338}{100000000}$ te cort / voor een syde des 15 houcx / ende 9 op't eynde te lanck. voor't eerste

Soo veel brengt mede [44] $\sqrt{\frac{5}{8}+\sqrt{\frac{5}{64}}-\sqrt{1\frac{1}{8}-\sqrt{\frac{45}{64}}}}$. Hier Extraheer ick eerst de Quadraet-wortel uyt $1\frac{1}{8}-\sqrt{\frac{45}{64}}$. daer naer uyt $\frac{5}{8}+\sqrt{\frac{5}{64}}$. Ende Substraheer de eerste van de tweede / de rest is gelijck so veel als boven gevonden is / voor den 15 houck / als volght:
Merckt: boven is ghevonden voor $\sqrt{\frac{45}{64}}$ / $\frac{818525491}{1000000000}$ [45]. Dese ghenomen van $1\frac{1}{8}$. Rest $\frac{286474509000000000}{1000000000000000000}$. Hier uyt $\sqrt{\ }$ Comt $\frac{535233135}{1000000000}$ [46]. Noch is boven ghevonden voor $\sqrt{\frac{5}{16}}$ / $\frac{559016994}{1000000100}$. [47] Ende $\sqrt{\frac{5}{64}}$ is de helfte van $\sqrt{\frac{5}{16}}$: Daerom moet voor $\sqrt{\frac{5}{64}}$ comen $\frac{279508497}{1000000000}$. Hier by ghedaen $\frac{5}{8}$. Comt $\frac{904508497}{1000000000}$. Hier aen noch 9 Nullen / ende $\sqrt{\ }$ gheextraheert / Comt $\frac{951056516}{1000000000}$. Hier van het eerste ghevonden / Rest $\frac{41582338}{100000000}$ te cort / ende $\frac{41582339}{100000000}$ te lanck / voor een syde des 15 houcx.

Item soo veel moet mede comen van [48] $\sqrt{\frac{5}{8}+\sqrt{\frac{5}{64}}-\sqrt{\frac{15}{16}}-\sqrt{\frac{3}{16}}}$. Hier Extraheert eerst den $\sqrt{\ }$ uyt [49] $\frac{5}{16}$. (door de voorgaende Practica) Comt $\frac{433012701}{1000000000}$. Daer naer uyt $\frac{15}{16}$. Comt $\frac{968245836}{1000000000}$. Substraheert de eerste van de tweede / rest $\frac{535233135}{1000000000}$. Dese rest ghenomen van $\frac{951056516}{1000000000}$. (welck boven ghevonden is voor de Quadraet-wortel uyt $\frac{5}{8}+\sqrt{\frac{5}{64}}$) Comt voor een syde des 15 houcx $\frac{41582338}{100000000}$ te cort / als vooren.

---

[44] Dit moet $\sqrt{\frac{5}{8}+\sqrt{\frac{5}{64}}}-\sqrt{1\frac{1}{8}-\sqrt{\frac{45}{64}}}$ zijn.

[45] Dit moet $\frac{838525491}{1000000000}$ zijn.

[46] Dit is correct, maar $\sqrt{1\frac{1}{8}-\sqrt{\frac{45}{64}}}\approx 0,5352331347$.

[47] Zetfout

[48] Dit moet $\sqrt{\frac{5}{8}+\sqrt{\frac{5}{64}}}-\sqrt{\frac{15}{16}}-\sqrt{\frac{3}{16}}$ zijn.

[49] Dit moet $\frac{3}{16}$ zijn.

Die lust heeft naerder te soecken sal vinden: $\frac{41582338163551867420348456881025033243316952125544767281}{100000000000000000000000000000000000000000000000000000000}$ voor de syde voornoemdt / by my noch naerder ghesocht.

Voor de syde des 30 houcx / is ghevonden $\sqrt{2\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{1\frac{7}{8} + \sqrt{\frac{45}{64}}}}$. Haer Quadraet doet $2\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{1\frac{7}{8} + \sqrt{\frac{45}{64}}}$. Hier beginne ick mede aen $\sqrt{\frac{45}{64}}$ / daer voor ghevonden is $\frac{838525491}{1000000000}$. Dese gheaddeert tot $1\frac{7}{8}$. Comt [50] $\frac{27135254910}{10000000000}$. Hier uyt $\sqrt{\ }$ Comt $\frac{1647278207}{1000000000}$.
Hier by ghedaen $\frac{559016994}{1000000000}$. (soo veel boven ghevonden voor $\sqrt{\frac{5}{16}}$) Comt t'samen $\frac{2206295201}{1000000000}$. Dese summa ghenomen van $2\frac{1}{4}$. Rest voor't Quadraet des 30 houcx [51] $\frac{43704799}{1000000000}$. Hier uyt $\sqrt{\ }$. Comt voor een syde des 30 houcx $\frac{20905692}{100000000}$ te cort / ende 3 op't eynde te lanck. Voor een syde des 60 houcx / is boven ghevonden / in ongheschickte ghetallen $\sqrt{2 - \sqrt{1\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{5}{16}} + \sqrt{1\frac{7}{8} + \sqrt{\frac{45}{64}}}}}$. Door het voorgaende come ick lichtelijck

[50] Dit moet $\frac{27135254915}{10000000000}$ zijn.

[51] Dit is correct, maar $2\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{1\frac{7}{8} + \sqrt{\frac{45}{64}}} \approx 0,0437047985$.

tot het uytsprekelick getal deser syden / Alsoo: Voor de Quadraet-wortel van $1\frac{7}{8}+\sqrt{\frac{45}{64}}$ is ghevonden $\frac{1647278207}{1000000000}$. Ende voor $\sqrt{\frac{5}{16}}$. $\frac{559016994}{1000000000}$. Dese twee Gheaddeert tot $1\frac{3}{4}$ Comt voor't Quadraet $\sqrt{1\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{5}{16}}+\sqrt{1\frac{7}{8}+\sqrt{\frac{45}{64}}}}$. $\frac{3956295201}{1000000000}$. Hier uyt $\surd$. Comt $\frac{198904379}{100000000}$. Dese ghenomen van 2. Rest [52] $\frac{1095621}{100000000}$ voor't Quadraet des 60 houcx: Daer uyt $\surd$. Comt $\frac{10467191}{100000000}$ te cort / voor een syde des 60 houcx / Ende $\frac{10467192}{100000000}$ te lanck.
Item voor een Linie die van den om-loop snijdet $\frac{57}{160}$: ofte onder-trocken $128\frac{1}{4}$ Graden / is ghevonden $\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2\frac{1}{2}-\sqrt{1\frac{1}{4}}}}}}}$. Om dese Rationael te maken / beginne ick aen $\sqrt{1\frac{1}{4}}$. daer voor vinde ick $\frac{11180339887}{10000000000}$. Dese ghenomen van $2\frac{1}{2}$. Rest [53] $\frac{13819660113}{10000000000}$. Hier uyt $\surd$. Comt $\frac{11755705045}{10000000000}$ te cort / ende 6 op't eynde te lanck. (Soo veel doet mede een syde des 5 houcx) Dit Gheaddeert tot 2. Comt [54] $\frac{31755705046}{10000000000}$. Hier uyt $\surd$. Comt $\frac{17820130483}{10000000000}$. Dese ghenomen van 2. ende uyt de rest $\surd$. Comt [55] $\frac{4608907276}{10000000000}$. Dese noch ghenomen van 2. ende uyt de rest $\surd$. Comt $\frac{12381878986}{10000000000}$. Ten laesten dese Wortel gheaddeert tot 2. ende uyt de Summe $\surd$. Comt $\frac{17994965681}{10000000000}$ voor de Corda van $\frac{57}{160}$ des omloops. De helfte van de ghevonden Corda als 89974828 is den Sinus van 64 Graden / 7 Minuten / 30 Secunden / als den Diameter eenes Circkels doet 200000000. Ende de eerst ghevonden $\frac{17820130483}{10000000000}$ is de Corda van 126 Graden: Daerom 891006524 moet zijn den Sinus van 63 Graden / als den Diameter doet 2000000000. Ende $\frac{4668907276}{10000000000}$ is de rechte Linie onder-trocken 27 Graden: Daerom 233445364. den Sinus van 13 Graden 30 Minuten. Item $\frac{12381873985}{10000000000}$ is de Corda van $76\frac{1}{2}$ Graden / soo moet 619093949 zijn den Sinus van 38 Graden / ende 15 Minuten. Oorsake: De syde des gelijcksydighen 5 houcx / is Complement $\frac{3}{10}$ des omloops: Daerom den selven ghenomen van de middel-linie (als 2.) Rest $2-\sqrt{2\frac{1}{2}-\sqrt{1\frac{1}{4}}}$. Dit is het Quadraet van eener Lini ondertoghen $\frac{3}{20}$ der Circonferentie. Den $\surd$ daer uyt / Comt voor de selve Linie $\sqrt{2-\sqrt{2\frac{1}{8}-\sqrt{1\frac{1}{4}}}}$. Haer Complement / ofte teghen-linie doet $\sqrt{2+\sqrt{2\frac{1}{2}-\sqrt{1\frac{1}{4}}}}$ ondertoghen $\frac{7}{20}$. Dese ghenomen van der middel-linie / ende uyt den rest $\surd$. Comt voor een Linie ondertoghen eenen Boghe halff[56] soo groot / (als $\frac{3}{20}$) te weten: $\frac{3}{40}$ des omloops $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2\frac{1}{2}-\sqrt{1\frac{1}{4}}}}}$. door het bewijs des tweede Capittels / &c.

Door dese ende het volghende is de Tafel Sinum te bereyden / welcke haeft in't licht sal comen: Bereydet door den hoogh-gheleerden Adriaen van Romen / ten minsten teghen den Diameter van 2000000000. Wijder een rechte Linie ondertrocken $\frac{7}{15}$ der Circonferentie / doet $\sqrt{1\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{5}{16}}+\sqrt{1\frac{7}{8}+\sqrt{\frac{45}{64}}}}$. Dese Rationael ghemaeckt / Comt [57] $\frac{19893437907}{10000000000}$. Door dese werdt voor den Sinus van 84 Graden ghevonden 994521895. Addeert de ghevonden Corda tot de middel-linie / ende uyt der summa $\surd$. Comt $\frac{19972590695}{10000000000}$: Daerom voor den Sinus van 87 Graden sal comen 998629535.

Item Substraheert ende Addeert $\frac{19972590695}{10000000000}$ tot / ende van den Diameter / de helfte des $\surd$ der summe doet [58]998629535. Dit is den Sinus van 88 Graden 30 Minuten / Ende de helfte des $\surd$ uyt den rest / doet

[52] Dit is correct, maar $2-\sqrt{1\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{5}{16}}+\sqrt{1\frac{7}{8}+\sqrt{\frac{45}{64}}}}\approx 0,010956209$.

[53] Dit is correct, maar $2\frac{1}{2}-\sqrt{1\frac{1}{4}}\approx 1,38196601125$.

[54] Dit moet $\frac{31755705045}{10000000000}$ zijn.

[55] Dit moet $\frac{4668907277}{10000000000}$ zijn.

[56] Zetfout

[57] Dit moet $\frac{19890437907}{10000000000}$ zijn.

[58] Dit moet 999657325 zijn.

[59]6176948. is den Sinus van 1 Graedt 30 Minuten. Op dese maniere canmen veelderhande ghedeelten des omloops-coorden vinden / als volght: daer ghy de ghedeelten des omloops sult vinden aen de slinckerhandt / ende de ghetallen der rechte Linien/ den deelen ondertoghen / tusschen de eerste twee Linien / ende den Sinus van Graden / Minuten / tusschen de volghende Linien.

[59]Dit moet 26176948 zijn.

Deele des omloops.	De rechte Linien/ den Deelen ondertoghen.	Den Sinus van	Gr.	Mi.	Secun.
$\frac{1}{5}$	[60]11755705046	[61]5877852523	36	——	——
$\frac{3}{20}$	9079809994	4539904997	27	——	——
$\frac{7}{20}$	17820130483	8910065241	63	——	——
$\frac{3}{40}$	[62]4668907276	2334453638	13	30	——
$\frac{17}{40}$	19447398407	9723699203	76	30	——
$\frac{17}{80}$	[63]12381878985	[64]6190939492	38	15	——
$\frac{23}{80}$	15706338617	7853169308	51	45	——
$\frac{23}{160}$	[65]8728184814	[66]4364092407	25	52	30
$\frac{57}{160}$	17994965681	8997482840	64	7	30
$\frac{23}{320}$	4477760957	2238880478	12	56	15
$\frac{137}{320}$	[67]19492297627	[68]9746148813	77	3	45
$\frac{103}{320}$	16949390789	8474695394	57	56	15
$\frac{57}{320}$	10616880514	5308440257	32	3	45
$\frac{57}{640}$	5523232034	2761616017	16	1	$52\frac{1}{2}$
$\frac{263}{640}$	19222224322	9611112161	73	58	$7\frac{1}{2}$
$\frac{57}{1280}$	[69]2788862995	[70]1394431497	8	——	$56\frac{1}{4}$
$\frac{583}{1280}$	19804601566	9902300783	81	59	[71]$3\frac{1}{4}$
$\frac{57}{2560}$	[72]1397849899	[73]698924949	4	——	$28\frac{1}{8}$
$\frac{1223}{2560}$	19951090588	9975545294	85	59	$31\frac{7}{8}$
$\frac{57}{5120}$	[74]699352643	[75]349676321	2	——	$14\frac{1}{16}$
$\frac{2503}{5120}$	[76]19987768906	[77]999388453	87	59	$45\frac{15}{16}$
$\frac{57}{10240}$	[78]349729810	[79]174864905	1	——	$7\frac{1}{32}$
$\frac{5063}{10240}$	19996941992	9998470996	88	59	$52\frac{31}{32}$
$\frac{57}{20480}$	[80]174871607	[81]87435803	——	30	$3\frac{33}{64}$
$\frac{10183}{20480}$	19999235483	9999617741	89	29	$56\frac{31}{64}$

HIer is te bedencken: Hoe cleynder Boge / wiens Corda men begheert op't naeste te hebben / hoe meerder Nullen tot de Extraxtien gebruyckt moeten werden. In desen zijn 20 Nullen ghebruyckt: Daerom sullen de Corden der cleynder Bogen goedt vallen / als den Diameter doet 200000000 Parten. Ick hebbe (om te comen tot den Sinus van een graedt) de Corde des Boghes van 1 Graedt / 0 Minuten / $7\frac{1}{32}$ Sucunden gebruyckt 24 Nullen / Ende daer voor gevonden [82]17487158173. als den Diameter doet 2000000000000. Item voor de Corda van $\frac{43}{15360}$. ofte een Graet 0 Minuten / $28\frac{1}{8}$. Secunden / vinde ick [83]17589419618 als den Diameter doet als boven. Door deser Corden differentie / vinde ick licht / voor den Sinus van een Graedt 174524064 te cort / ende 174524065 te lanck / als den Diameter doet 20000000000. t'welcke ick op een constigher maniere (als volghen sal) veel naerder gevonden heb / te weten: Als de Middel-linie des Circkels doet 200000000000000000000.

[60] Dit moet 11755705045 zijn.
[61] Dit moet 5877852522 zijn.
[62] Dit moet 4668907277 zijn.
[63] Dit moet 12381878986 zijn.
[64] Dit moet 6190939493 zijn.
[65] Dit moet 8728184813 zijn.
[66] Dit moet 4364092406 zijn.
[67] Dit moet 19492297371 zijn.
[68] Dit moet 9746148685 zijn.
[69] Dit moet 2788862990 zijn.
[70] Dit moet 1394431495 zijn.
[71] Dit moet $3\frac{3}{4}$ zijn.
[72] Dit moet 1397849895 zijn.
[73] Dit moet 698924947 zijn.
[74] Dit moet 699352640 zijn.
[75] Dit moet 349676320 zijn.
[76] Dit moet 19987768907 zijn.
[77] Dit moet 9993884453 zijn.
[78] Dit moet 349729793 zijn.
[79] Dit moet 174864896 zijn.
[80] Dit moet 174871581 zijn.
[81] Dit moet 87435790 zijn.
[82] Dit moet 17487158158 zijn.
[83] Dit moet 17589419612 zijn.

$\frac{1}{15}$	4158233816	2079116908	12	—	—
$\frac{13}{30}$	19562952014	9781476007	78	—	—
$\frac{13}{60}$	12586407821	6293203910	39	—	—
$\frac{17}{60}$	15542919229	7771459614	51	—	—
$\frac{17}{120}$	8610221936	4305110968	25	30	—
$\frac{43}{120}$	18051705687	9025852843	64	30	—
$\frac{13}{120}$	6676137184	3338068592	19	30	—
$\frac{47}{120}$	[84]18852829822	[85]9426414911	70	30	—
$\frac{43}{240}$	10672290318	5336145159	32	15	—
$\frac{77}{240}$	16914556434	8457278217	57	45	—
$\frac{43}{480}$	5554676917	2777338458	16	7	30
$\frac{197}{480}$	19213161227	9606580613	73	52	30
$\frac{43}{960}$	2805064656	1402532328	8	3	45
$\frac{437}{960}$	19802313306	9901156653	81	56	15
$\frac{43}{1920}$	[86]1406011003	703005501	4	1	$52\frac{1}{2}$
$\frac{917}{1920}$	19950517112	9975258556	85	58	$7\frac{1}{2}$
$\frac{43}{3840}$	[87]703440744	[88]351720372	2	—	$56\frac{1}{4}$
$\frac{1877}{3840}$	[89]19987625448	9993812724	87	59	$3\frac{3}{4}$
$\frac{43}{7680}$	[90]351774814	[91]175887407	1	—	$28\frac{1}{8}$
$\frac{3797}{7680}$	[92]19996906122	9998453061	88	59	$31\frac{7}{8}$
$\frac{43}{15360}$	175894196	87947098	—	30	$14\frac{1}{16}$
$\frac{7637}{15360}$	19999226515	9999613257	89	29	$45\frac{15}{16}$
$\frac{7}{20}$	17820130483	8910065241	63	—	—
$\frac{7}{40}$	10449971294	5224985647	31	30	—

Compt 1745240643728351281 te cort / ende 2 op't eynde te lanck / voor den Sinus van een Graedt / welcke ick veel naerder toonen can. Den Sinus van 1 Minuyt cost meerder arbeydt te vinden. Ick hebbe ghesocht een syde des 10240 houcx / welcke doet [93] $\surd.2 - \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd 2\frac{1}{2} - \surd 1\frac{1}{4}$. Om dese Rationael te maken / moeten veel Nullen ghebruyckt werden. Daer voor vinde ick 6135923055 als den Diameter doet 20000000000000. Dese Corda snijdet van den Om-loop [94]$2\frac{7}{60}$ Minuten. Set't in den Regel [95]$2\frac{7}{60}$. mi. gheven 6135923055. Hoe veel gheven 2 Minuten?comt [96]5817764082. Ofte op't sekerste [97]581776408 / so lanck is de Corda onder-togen 2 Minuten. De helfte als 290888204 is den Sinus van 1 Minuyt. Hier soude den ervarenen/ in desen moghen dencken/ dat mijn voor nemen[98] / dit aengaende / niet recht en ware nae den Euclides in de 20ste Propositie des eersten Boucx bewijst: dat de 2 Linien eens Triangels langher dan de

[84]Dit moet 18852829821 zijn.
[85]Dit moet 9426414910 zijn.
[86]Dit moet 1406011002 zijn.
[87]Dit moet 703440739 zijn.
[88]Dit moet 351720369 zijn.
[89]Dit moet 19987625449 zijn.
[90]Dit moet 351774787 zijn.
[91]Dit moet 175887393 zijn.
[92]Dit moet 19996906123 zijn.
[93]We gebruiken hier weer de notatie van Ludolph van Ceulen. Dit moet $\surd.2 - \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2\frac{1}{2} + \surd 1\frac{1}{4}$ zijn.
[94]Dit moet $2\frac{7}{64}$ zijn.
[95]Dit moet $2\frac{7}{64}$ zijn.
[96]Dit moet 5817764091 zijn.
[97]Dit moet 581776409 zijn.
[98]voornemen

fol.7r

Deele	Corda	Sinus	Gra	Mi.	Secun.
$\frac{13}{40}$	[99]17052803286	8526401643	58	30	——
$\frac{7}{80}$	[100]5428808998	[101]2714404499	15	45	——
$\frac{33}{80}$	19249104729	9624552364	74	15	——
$\frac{7}{160}$	[102]2740246834	[103]1370123417	7	52	30
$\frac{73}{160}$	[104]19811386809	9905693404	82	7	30
$\frac{7}{320}$	1373365177	686682588	3	56	15
$\frac{153}{320}$	[105]19952790985	9976395492	86	3	45
$\frac{7}{640}$	687088167	343544083	1	58	$7\frac{1}{2}$
$\frac{313}{640}$	[106]19988194262	[107]9994097131	88	1	$52\frac{1}{2}$
$\frac{7}{1280}$	[108]343594804	[109]171797402	——	59	$3\frac{3}{4}$
$\frac{633}{1280}$	19997048347	9998524173	89	——	$56\frac{1}{4}$
$\frac{7}{2560}$	171803735	85901867	——	29	$31\frac{7}{8}$
$\frac{1273}{2560}$	19999262073	9999631036	89	30	$28\frac{1}{8}$

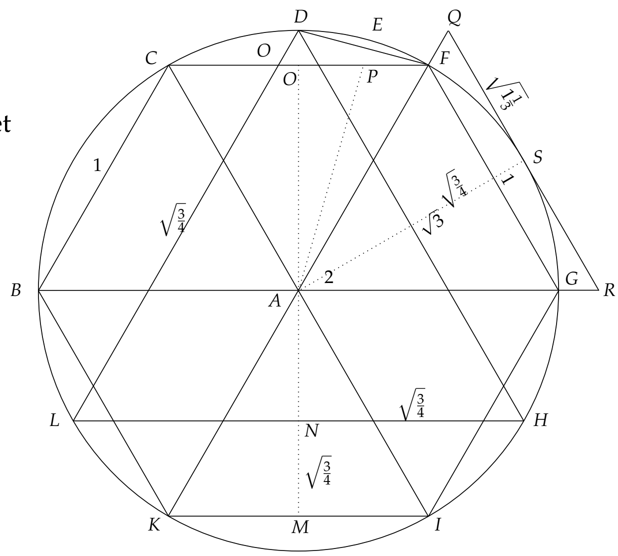
derde / welcke den wijdtsten winckel onder-toghen zijn. Ick bekenne t'selve waerachtich te wesen / ende soude wyd nullen / soo verre den Diameter langer genomen ware : Maer in desen daer den Diameter doet 20000000000 sal den Sinus van een Minuyt doen 290888204. welck ick op meer manieren waer bevonden hebben als hier naer volgen sal / daer ghy den selven veel duysentmael duysent naerder vinden sult. Ende als ghy uyt dat voor ghevonden ghetal neemt $\frac{1}{60}$. ghy sult den Sinus van een Secunda hebben.

HET VIII. CAPITTEL.

Daer inne (door een bysonder Practi-

ca) gheleerdt werdt / den in-houdt der ghelijcksydigher Figueren (in een Circkel beschreven) te vinden.

In desen Circkel / wiens middel-lini doet 2. is D L H den ghelijcksydighen Triangel beschreven / wiens syde doet $\sqrt{3}$. Ende N H de helfte $\sqrt{\frac{3}{4}}$. Substraheert het Quadraet N H van't Quadraet DH. Rest $2\frac{1}{4}$ voor't Quadraet D N. Den $\surd$ daer uyt / doet $1\frac{1}{2}$ voor de Perpendiculaer DN. Dese gemultipliceert met $\sqrt{\frac{3}{4}}$ Comt voor den Triangel [110]D B H $\sqrt{1\frac{11}{16}}$ / dat is $1\frac{2990381}{10000000}$ te weynich / ende $1\frac{2990382}{10000000}$ te veel.



Item C F G I K B is een ghelijck-sydigen 6 houck (wiens syde den halven Diameter ghelijck is) doet 1: Daerom moet de Perpendiculaer A M (welcke vanden Centro op de syde van K I ghetrocken is) $\sqrt{\frac{3}{4}}$ doen / (door het 20ste Artijckel des eerste Capittels. Dese Multipliceert met 3. Comt voor den in-houdt des 6 houcx $\sqrt{6\frac{3}{4}}$.

[99]Dit moet 17052803287 zijn.
[100]Dit moet 5428808997 zijn.
[101]Dit moet 2714404498 zijn.
[102]Dit moet 2740246833 zijn.
[103]Dit moet 1370123416 zijn.
[104]Dit moet 19811386808 zijn.
[105]Dit moet 19952790984 zijn.
[106]Dit moet 19988194261 zijn.
[107]Dit moet 9994097130 zijn.
[108]Dit moet 343594792 zijn.
[109]Dit moet 171797396 zijn.
[110]Dit moet D L H zijn.

Soo verre nu den Circkel 36 mael soo groot zijn soude / als een af-ghesneden stucke des 6 houcx / Dat is: 36 af-ghesneden stucken / daer elck soo veel doet als ⊙ / zijn t'samen soo groot als den Circkel / ofte het stuck C D F O. Soo moeste den in-gheschreven 6 houck zijn $\frac{5}{6}$ van't vermoghen des gheheelen Circkels / ende den in-houdt des Circkels moeste groot zijn $\sqrt{9\frac{18}{25}}$ / dat is in Rationale ghetallen / voor den 6 houck [111] $2\frac{5980763}{10000000}$. ende voor den Circkel $3\frac{1176914}{10000000}$ te cleyn / ende $3\frac{1176915}{10000000}$ te groot.

[111] Dit moet $2\frac{5980762}{10000000}$ zijn.

Maer veel te cleyn /als hier naer bewesen sal werden. Veel lichter is te comen tot den inhoudt des 6 houcx / door het 21 artijckel des eersten. Alsoo: Multipliceert de syde des 3 houcx / welcke doet $\sqrt{3}$. ofte [112] $1\frac{732050875}{1000000000}$ met $1\frac{1}{2}$. Comt voor den 6 houck als boven. Op dese maniere can ick licht (sonder moeyten) comen tot den inhoudt des 12/24/48 houcx/ ende andere/ Sal nochtans volghende manieren ghebruycken / daer uyt de grondt der voorgaender Practica te maken is. Boven is gevonden voor een syde des 12 houcx / in den Circkel $\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Haer teghen-linie doet $\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Daerom de Perpendiculaer P A doet $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. Dese Ghemultipliceert met PD als $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. Comt $\frac{1}{4}$ voor den Triangel ADF. welck is $\frac{1}{12}$ der gantscher Figuer: Daerom $\frac{1}{4}$ (welck mede is $\frac{1}{4}$ eener syde des 6 Houcx) Ghemultipliceert met 12. Comt voor de grootheydt des 12 Houcx 3.

Voor de syde des 24 houcx /is voor ghevonden $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$. De Perpendiculaer die van den Centro op een syde valt/ doet [113] $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$. Dese Ghemultipliceert met de helfte der syde des voornoemden houcx. Comt $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{4}$ voor een Trianghel/ welcker 24 doen dat vermogen der Figuer (Dese Triangel is gelijck het $\frac{1}{4}$ der syde des ghetal des 12 houcx) Daerom $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{4}$ ghemultipliceert met 24. Comt $\sqrt{72-\sqrt{3888}}$. voor den inhout des 24 houcx/ dat is [114] $3\frac{1068284}{10000000}$ te weynich/ Ende [115] 5 op't eynde te groot.

Noch is boven gevonden voor een syde des 48 houcx $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$. De Perpendiculaer-linie/ die vanden Centro op een syde getrocken / doet $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{2}$.

Dese Ghemultipliceert met de helfte der eener syden / Comt $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{4}$ voor een Triangel / welck doet $\frac{1}{48}$ der Figuer. Dese Multipliceert met 48. Ende Extraheert $\sqrt{}$. sult vinden voor den inhout des 48 houcx [116] $3\frac{1326286128}{10000000000}$. Hier siet ghy dat $\frac{1}{4}$ der syde des 24 houcx Ghemultipliceert wert met 48. &c.

Wijder/ een ghelijcksydige Figuer van 4 hoecken / in den Circkel beschreven / doet 2. Haer syde $\sqrt{2}$. Dat is $1\frac{414213562373}{1000000000000}$. Dese Ghemultipliceert met 2. Comt voor een Figuer van 8 houcken $2\frac{8284271247}{10000000000}$. te cleyn / Ende 8 op het eynde te groot. De syde van een ghelijckhouckighen 8 houck / doet $\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Dat is $\frac{765366864 73}{100000000000}$. Dese Ghemultipliceert met 4. Comt voor den inhoudt des 16 houcx [117] $3\frac{6146745892}{10000000000}$ te cleyn/ ende 3 op't eynde te groot. Voor de syde is voor ghevonden $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$. Dat is $\frac{39018064403}{100000000000}$. Dese Ghemultipliceert met 8. Comt voor den inhoudt eenes 32 houcx $3\frac{12144515225}{100000000000}$. Voor een syde des 32 houcx. Comt $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$. Dat is $\frac{196034280659}{1000000000000}$. Dese Ghemultipliceert met 16. Comt voor den in-houdt des 64 houcx $3\frac{13654849054}{100000000000}$.

Item een syde des 64 houcx / doet $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$. Dat is [118] $\frac{981353486548}{1000000000000}$. Dese ghemultipliceert met 32. Comt voor een ghelijcksydighe Figuer / in den Circkel van 128 houcken / [119] $3\frac{1403311569545}{10000000000000}$.

---

[112] Dit moet $1\frac{732050807}{1000000000}$ zijn.
[113] Dit moet $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$ zijn.
[114] Dit moet $3\frac{1058285}{10000000}$ zijn.
[115] Dit moet 6 zijn.
[116] Dit moet $3\frac{1326286132}{10000000000}$ zijn.
[117] Dit moet $3\frac{6146745892}{100000000000}$ zijn.
[118] Dit moet $\frac{981353486548}{1000000000000}$ zijn.
[119] Dit moet $3\frac{1403311569547}{10000000000000}$ zijn.

De syde des 5 houcx / doet $\sqrt{2\frac{1}{2} - \sqrt{1\frac{1}{4}}}$. De Perpendiculaer / van den Centro / op een syde ghetrocken / doet $\frac{\sqrt{1\frac{1}{2}+\sqrt{1\frac{1}{4}}}}{2}$. Dese Ghemultipliceert met de helfte van een syde / comt voor $\frac{1}{5}$ der Figuer $\frac{\sqrt{2\frac{1}{2}+\sqrt{1\frac{1}{4}}}}{4}$. Dit met 5 gemultipliceert/ ende uyt den comende $\surd$ geextraheert. Comt voor den 5 houc/ in den Circkel $2\frac{3776412907}{10000000000}$. Den inhoudt der Figueren van 10/20/40/80/160 syden/ &c. In den Circkel/ zijn nu licht/ door't voorgaende te vinden / Alsoo: De syde des 5 houcx Multipliceert met $2\frac{1}{2}$. Comt voor de grootheyt des 10 houcx $2\frac{938926261462}{1000000000000}$. Multipliceert de syde des 10 houcx met 5. Comt voor den inhoudt des 20 houcx $3\frac{901699437491}{1000000000000}$. De syde des 20 houcx ghemultipliceert met 10. Comt $3\frac{1286893008}{10000000000}$ voor den ghelijcksydigen 40 houck. Dees syde ghemultipliceert met 20. Comt voor den 80 houck [120] $3\frac{13836382911378}{100000000000000}$. Item voor de syde eenes 15 houcx/ is voor ghevonden $\frac{415823381635518}{1000000000000000}$. Dese ghemultipliceert met $7\frac{1}{2}$. Comt voor de Figuer

[120] Dit moet $3\frac{13836382911379}{100000000000000}$ zijn.

van 30 syden $3\frac{11867536622663}{100000000000000}$. Dese Figuer-syde Multipliceert met 15/ sult vinden voor den 60 houck $3\frac{135853898029}{1000000000000}$. De grootheyt van dese Figueren zijn alle kleynder dan den Circkel: oorsaecke sy in den selven ghetrocken zijn. Daerom $\sqrt{9\frac{18}{25}}$ (dat is den inhoudt des 6 houcx/ ende $\frac{1}{5}$ des selven / doet minder dan $3\frac{117692}{1000000}$) welck minder is dan de grootheyt des 30/32/40/48. ende veel ontallicke veel houckiger Figueren meer / in den Circkel beschreven / moet te cleyn zijn / voor den Circkel: Nademael $\sqrt{9\frac{18}{25}}$ kleynder / dan boven te cleyn bewesen is / als boven / als den Diameter doet 2. Hier uyt volght t'ghene van 36 Segmenten / of af-ghesneden stucken eenes 6 houcx (cortelinghen beschreven) teghen de waerheyt strijdet / dat mede 30 der af-ghesneden stucken/ grooter zijn / als den in-gheschreven 6 houck/ sal hier naer bewesen werden.

Bibliografie

Jörg Arndt and Christoph Haenel. *π unleashed*. Berlijn: Springer, 2001.

David Bierens De Haan. Ludolph van Ceulen. *Bouwstoffen voor de Geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden*, 2(8):123–169, 1893.

Henk J. M. Bos. De cirkel gedeeld, de omtrek becijferd en pi gebeiteld: Ludolph van Ceulen en de uitdaging van de wiskunde. *Nieuw Archief voor de Wiskunde*, 2(8):259–262, 2000.

Eva Coplakova. Worteltrekken met de hand. *Pythagoras*, 43(6):20–21, juni 2004.

William A. Coppel. *Number Theory, An Introduction to Mathematics: Part A*. New York: Springer, 2006. ISBN 0-387-29851-7.

Gunther Cornelissen. *Galoistheorie*. Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht, 2007.

Carl Friedrich Gauß. *Disquisitiones Arithmeticae*. 1801.

Robin Hartshorne. *Geometry: Euclid and beyond*. New York: Springer, 2000.

Sir Thomas L. Heath. *The Thirteen books of Euclid's Elements*, volume 1. New York : Dover, tweede edition, 1975a. ISBN 0-486-60088-2.

Sir Thomas L. Heath. *The Thirteen books of Euclid's Elements*, volume 2. New York : Dover, tweede edition, 1975b. ISBN 0-486-60089-0.

Sir Thomas L. Heath. *The Thirteen books of Euclid's Elements*, volume 3. New York : Dover, tweede edition, 1975c. ISBN 0-486-60090-4.

Jan P. Hogendijk. Vergeten wortels. 2007. URL `http://www.math.uu.nl/people/hogend/wortels.pdf`.

Jan P. Hogendijk. Het rekenwonder van het Rapenburg. *Eureka!*, 3(12):15–17, januari 2006.

George E. Martin. *Geometric Constructions*. New York: Springer, 1998.

F. Schöll. *Allgemeine Deutsche Biographie*, volume 44, pages 582–593. Leipzig: Duncker und Humblot, 1898.

Willebrord Snellius. *Fundamenta Arithmetica et Geometrica*. Leiden, 1615.

Willebrord Snellius. *de Circulo et adscriptis*. Leiden, 1619.

Heinrich Tietze. *Famous Problems of Mathematics*. New York: Graylock Press, 1965.

Ludolph van Ceulen. *Kort Claar bewijs*. Amsterdam, 1585.

Ludolph van Ceulen. *Proefsteen ende Claerder wederlegginghh*. Amsterdam, 1586.

Ludolph van Ceulen. *De arithmetische en geometrische fondamenten*. Leiden, 1615.

Ludolph van Ceulen. *Solutie ende Werckinghe Op twee Geometrische vraghen by Willem Goudaen*. Amsterdam, 1584.

Ludolph van Ceulen. *Vanden Circkel*. Delft, 1596.

Simon van der Eycke. *Claerder bewijs*. 1586.

Steven Wepster. Van Ceulens Veelhoeken en Veeltermen. 2008.