Воронежский государственный университет
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Математический институт имени В. А. Стеклова
Российской академии наук

МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ «ВОРОНЕЖСКАЯ ЗИМНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА С. Г. КРЕЙНА – 2020»

Под редакцией В. А. Костина

Воронеж
Издательско-полиграфический центр
«Научная книга»
2020

УДК 517.5+517.9(083)
ББК 22.16я4
М34

Издание осуществлено при поддержке АО «Турбонасос»

М34 **Материалы** Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2020» / под ред. В. А. Костина. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2020. – 340 с. – ISBN 978-5-4446-1376-4. – Текст : непосредственный.

В сборнике представлены статьи участников Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2020», содержащие новые результаты по функциональному анализу, дифференциальным уравнениям, краевым задачам математической физики и другим разделам современной математики.

Предназначен для научных работников, аспирантов и студентов.

Сборник включен в РИНЦ.

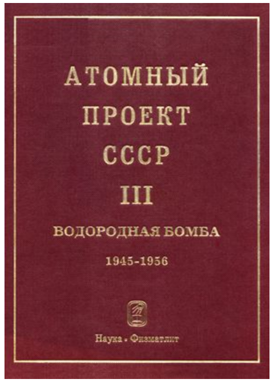
УДК 517.5+517.9(083)
ББК 22.16я4

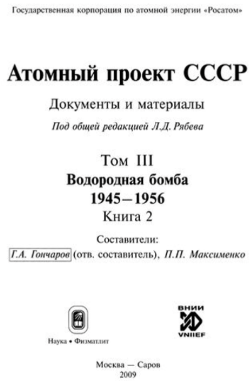
ISBN 978-5-4446-1376-4

С.Г. КРЕЙН И ЦЕПНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ РЕАКЦИЯ В ВОРОНЕЖЕ

©2020 *В. А. Костин*, *Д. В. Костин*
(Воронеж; *vlkostin@mail.ru*)

Во время работы традиционной «Воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна-2018» одним из авторов (Д.В. Костин, зам. председателя программного комитета школы) был обнаружен неизвестный и неожиданный для воронежских математиков факт, открывшийся после рассекречивания Атомного проекта по созданию водородной бомбы СССР, участником которого, как оказалось, был С.Г. Крейн.





Но так как труды конференции были уже опубликованы, то эта информация в них не попала. В тоже время, важность этого факта в очередной раз высветила значение С.Г. Крейна не только в воронежской, но и в отечественной математике и заставила нас с новых позиций посмотреть и проследить за теми, иногда неожиданными и судьбоносными человеческими «сцеплениями», благодаря которым наш университет, а вместе с ним и город Воронеж, стали причастными к разработке грандиозного проекта. Этот факт вызвал необходимость публикации дополнения к вышедшим материалам математической школы С.Г. Крейна-2018.

№ 110

Протокол совещания в КБ-11 по вопросу РДС-6С от 12 мая 1950 года[1]

12 мая 1950 г.[2]
Сов. секретно
(Особая папка)

Присутствовали: Курчатов, Павлов, Александров, Зернов, Харитон, Щелкин, Мещеряков, Зельдович, Тамм, Сахаров, Флеров, Боголюбов.

Слушали:

Предложения т. Тамма И.Е. о мерах усиления расчетно-математической группы КБ-11 по РДС-6С:

а) перевод в КБ-11 из Киевского математического института АН УССР математической группы под руководством т. Погребысского с вычислителями и машинно-счетным оборудованием;

б) перевод из Ленинграда в КБ-11 группы Канторовича, филиал Математического института АН СССР;

в) усиление группы т. Боголюбова Н.Н. в КБ-11 за счет перевода отдельных математиков и расчетчиков из других организаций;

г) организация расчетно-математического бюро в ФИАН в количестве 4–5 человек под руководством т. Гинзбурга В.Л.;

д) организация математического бюро под руководством т. Боголюбова Н.Н. в Математическом институте АН СССР.

Постановили:

I. Считать необходимым усиление расчетно-математических работ по изделию РДС-6С.

II. Просить Первое главное управление (т. Ванникова Б.Л.):

а) дать указание отделу кадров (т. Бабкину А.Н.) о проверке и направлении на работу в КБ-11 следующих специалистов:

1. Владимирова	– ст. научного сотрудника филиала Ин-та мат[ематики] АН СССР (группа т. Канторовича).
2. Гольдина	– науч. сотрудника Ин-та геофизики АН СССР (группа т. Тихонова).
3.[3] Погребысского И.Б.	– ст. научного сотрудника Ин-та мат[ематики] АН УССР[4].
4. Крейна С.Г.	– ст. научного сотрудника Киевского математического ин-та.
5. Зубарева	– быв. референта 9-го Управления МВД СССР;

б) дать указание отделу кадров (т. Бабкину А.Н.) отобрать вместе с КБ-11 (т. Зерновым П.М.), проверить и направить на работу в КБ-11 3–4 молодых математиков из числа оканчивающих в этом году механико-математические факультеты МГУ и ЛГУ и 8–10 вычислителей по договоренности с Военно-геодезическим управлением Военного министерства;

301

в) поручить т. Павлову Н.И. договориться с президентом АН СССР т. Вавиловым С.И. об усилении группы ФИАН (тт. Гинзбург, Фрадкин) 4–5 расчетчиками;

г) считать нецелесообразным в настоящее время перевод в КБ-11 группы Канторовича из Ленинграда или группы т. Погребысского из Киева, а также организацию математического бюро в Математическом институте АН СССР под руководством т. Боголюбова.

III. Поручить т. Тамму И.Е. составить задание по расчетам отдельных элементов изделия РДС-6С для передачи его филиалу Института математики АН СССР (т. Канторовичу). Тт. Павлову, Александрову и Харитону рассмотреть указанное задание и решить вопрос о передаче его для выполнения Ленинградскому филиалу Института математики АН СССР (т. Канторовичу).

19.05.50

И. Курчатов
Н. Павлов
А. Александров
П. Зернов
Ю. Харитон
К. Щелкин
Я. Зельдович
И. Тамм
Н. Боголюбов[5]

Исполнено от руки в 1 экз. на 3 листах.
13 мая 1950 г.
Исполнитель Павлов Н.И.
маш. № 397 оп.

Архив ВНИИЭФ. Ф. 1, оп. 2с, ед. хр. 26, л. 86–88. Автограф Н.И. Павлова.

---

[1] Заголовок документа.

[2] Датируется по дате проведения совещания.

[3] Далее зачеркнуто: *Тябликова* и сверху вписано: *Погребысского И.Б.*

[4] Зачеркнуто: *ученого секретаря Ин-та математики АН СССР* и вписано: *ст. научного сотрудника Ин-та математ. АН УССР.*

[5] Боголюбов Николай Николаевич (1909–1992) — математик и физик-теоретик, основатель научных школ по нелинейной механике и теоретической физике, акад. АН СССР (1953), АН УССР (1948). Герой Соц. Труда (1969, 1979), лауреат Ленинской (1958) и Сталинской (1953) премий. В 1941–1943 проф. Педагогического ин-та в г. Уфе. Работал в Московском ун-те, Ин-те химической физики АН СССР, Математическом ин-те им. В.А. Стеклова, в КБ-11 (1950–1953) и Объединенном ин-те ядерных исследований. С 1965 по 1989 был директором ОИЯИ, а с 1989 по 1992 — почетным директором [12. С. 151], [16. С. 64–66].

302

Может показаться удивительным, но, по мнению авторов, такая «сцепка» начинается с семьи нашего выдающегося земляка – математика А.П. Киселева.

А.П. Киселев и А.Д. Билимович

Имя выдающегося русского педагога нашего земляка воронежца Андрея Петровича Киселева известно многим поколениям учащихся нашей страны. После окончания в 1875 году Санкт-Петербургского университета, где он слушал лекции П.Л. Чебышева, А.Н. Коркина и др., Киселев был назначен преподавателем математики, механики и черчения в Воронежское реальное училище, открывшееся в 1876 году. Здесь началась его работа над созданием его знаменитых учебников, которые выдержали более трёхсот изданий общим тиражом в несколько сотен миллионов экземпляров. Будучи человеком большой эрудиции и широкого кругозора интересов, во время частых поездок заграницу он имел возможность знакомиться с новейшими открытиями в области естествознания, в частности физики, астрономии, медицины. Так, после открытия В. Рентгена, Киселев даже приобрёл за границей большую катушку Румкорфа и с её использованием провёл ряд лекций о рентгеновских лучах. Об одной лекции по астрономии рассказывается в воронежской газете «Дон» от 5 января 1892 года: «Публичная лекция „Исследование состава Солнца и других небесных тел посредством спектрального анализа“, прочитанной А.П. Киселевым 2 января в зале реального училища, привлекла массу публики. Этого и надо было ожидать по двум причинам: во-первых, самое содержание лекции небезынтересно для каждого, а во-вторых, симпатичной была самая её цель — вспомоществование пострадавшим от неурожая в Воронежской губернии. Нельзя не выразить искренней благодарности за все старания, которые он приложил к тому, чтобы столь серьёзный и важный отдел физики, как спектральный анализ, сделать вполне общедоступным для понимания каждого. Кроме того, все сказанное на лекции обставлялось

вполне удавшимися опытами, при помощи электрического света.

Остаётся от души пожелать, чтобы подобные лекции повторялись и на будущее время. Они принесли бы, без сомнения, более интереса и пользы, чем оперетки и „отчаянные“ и „раздражительные“ драмы, как, например, „Гетман“, „Две сиротки“ и тому подобная белиберда».

А.П. Киселев (художник Е.А. Киселева)

Не удивительно, что находившемуся постоянно в широких научных кругах Андрею Петровичу было суждено породниться и с другим известным российским математиком А.Д. Билимовичем, за которого вышла замуж его дочь Елена Андреевна.

А.Д. Билимович (художник Е.А. Киселева)

Билимович Антон Дмитриевич родился 20.06.1879 г. в г. Житомире. В то время Украина входила в состав Российской Империи. Начальную школу окончил в г. Владимире, где служил его отец в качестве военного врача. В 1896 году закончил с отличием Киевский кадетский корпус, а в 1903 г. и физико-математический факультет Киевского университета также с отличием. Оставленный при университете сверхштатным ассистентом, он начал активную научную деятельность. В 1907 г. была опубликована его работа «Приложение геометрических производных к теории кривых и поверхностей», содержавшая систематическое изложение вопросов дифференциальной геометрии в векторной форме.

После защиты магистерской диссертации «Уравнения движения для консервативных систем» (Киев, 1912) Билимович был направлен на стажировку в Париж и в Гёттинген. В Париже и произошло знакомство талантливого математика А.Д. Билимовича с талантливой ученицей И.Е. Репина Еленой Киселевой. После женитьбы они в 1914 году вернулись в Россию, где Антон Дмитриевич получил профессорскую должность в Новороссийском университете в Одессе.

В апреле 1915 г. он стал ординарным профессором кафедры прикладной математики Новороссийского университета. На этой должности он читает базовый курс теоретической механики, дополнительные разделы динамики твёрдого тела, теорию упругости, а также спецкурсы по интегрированию уравнений механики и по теории аэроплана. Одновременно возглавляет механическую мастерскую университета и кабинет механики (1915-1917), продолжает научную работу в области аналитической механики. После смерти А. М. Ляпунова 3 ноября 1918 г. возглавил комиссию по сохранению, обработке и подготовке к печати работ академика, благодаря чему была сохранена его рукопись «О

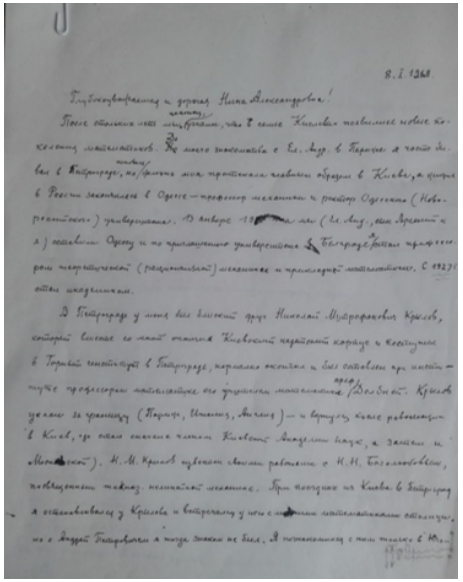
некоторых фигурах равновесия вращающейся жидкости». В январе 1920 г. оставил Одессу и вскоре нашёл убежище в Сербии, где создал большую научную школу по аналитической механике. Ему также принадлежит заслуга создания в Сербии (в 1920-1960) ряда научных объединений и институтов, участие в издательской деятельности соотечественников-эмигрантов: Российского академического кружка, Российского научного института, двух изданий «Материалов для библиографии русских научных трудов за рубежом», Математического института Сербской Академии наук, открытие которого состоялось в мае 1946г. В 1949 г. вышел первый том «Трудов математического института Сербской Академии наук». Именно в этом издании в течение нескольких лет он печатал свои работы, включая воспоминания «Ляпунов в Одессе» (1956). Кроме того, А. Д. Билимович был одним из основателей Югославского общества механиков.

Научная деятельность была отмечена избранием его 18 февраля 1925 г. членом-корреспондентом, а 17 февраля 1936 г. – действительным членом Сербской Академии наук и искусств.

А.Д. Билимович и Н.М. Крылов

Спустя 48 лет после отъезда из России в неопубликованном письме своей знакомой Нине Александровне от 8.01.1968г. А.Д. Билимович пишет о своём друге Н.М. Крылове.

«В Петрограде у меня был близкий друг Н.М. Крылов, который вместе со мной окончил Киевский кадетский корпус и поступил в Горный институт в Петрограде, нормально окончил и был оставлен при институте профессором математики его учителем математики был проф. Долбня. Крылов уехал заграницу (Париж, Италия, Англия) – и вернулся после революции в Крым, где стал сначала академиком Киевской Академии Наук, а затем и Московской. М.Н. Крылов известен своими работами с Н.Н. Боголюбовым, посвящёнными так наз. нелинейной механике. При поездках из Киева в Петроград я останавливался у Крылова и встречался у него с многими математиками столицы, но с Андреем Петровичем *(Киселевым – прим. авт.)* я тогда знаком не был. Я познакомился с ним только в Югославии, куда он приезжал навестить Владимира Андреевича *(сын Киселева – прим. авт.)* преподавателя математики в Белой Церкви и нас, Елену Андреевну, сына Арсения и меня».

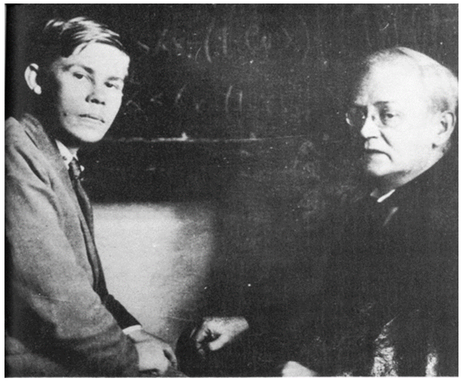


Фрагмент копии письма А.Д. Билимовича, снятый с одного из экспонатов региональной конференции «Киселевские чтения – 2002», посвящённой 150-летию со дня рождения А.П. Киселева, проводимой Воронежским госуниверситетом 16-17 декабря 2002 года

Н.М. Крылов, академик АН СССР

Николай Митрофанович Крылов родился 29 ноября 1879 года в Санкт-Петербурге. В 1889 (1890) был принят в Киевский кадетский корпус. Окончил Петербургский горный институт в 1902 году. Позже служил в институте профессором в 1912—1917 годах. В 1917 году переехал в Крым, где до 1922 года служил профессором Крымского университета; с 1917 года также профессор Киевского университета. В 1922-1945 годах возглавлял отдел математической физики АН УССР.

Н.М. Крылов и Н.Н. Боголюбов



Эта фотография взята из книги А.Н. Боголюбова о своём старшем брате «Н.Н. Боголюбов. Жизнь. Творчество»

(Дубна : ОИЯИ, 1996). На фотографии слева — будущий академик Н.Н. Боголюбов, а справа — его учитель академик Н.М. Крылов. Свою первую научную работу Н.Н. Боголюбов сделал в 15 лет совместно и под руководством Н.М. Крылова. Несмотря на то, что Н.М. Крылов по образованию был горным инженером, его интересовала математика с точки зрения её приложений не только в горном деле, но и в самых разных областях природы и техники. Здесь он находил важные задачи и ставил их перед своим учеником.

Будущий академик Николай Николаевич Боголюбов был сыном потомственного священника, профессора богословия Н.М. Боголюбова. У Н.Н. рано проявились математические способности. В 12 лет он самостоятельно, при некотором участии отца, который в молодости также питал влечение к точным наукам, овладел дифференциальным и интегральным исчислением; роль отца заключалась в том, что он снабжал сына необходимой литературой, а впоследствии и сам овладел высшей математикой, чтобы понимать работы сына.

Став учеником Н.М. Крылова, он восемь лет проживал в его квартире. Поэтому Боголюбов был более чем ученик Н.М. Крылова. Он был его воспитанник.

К 1932 году Н.М. Крылов и Н.Н. Боголюбов создали совершенно новую область математической физики — нелинейную механику. В разработанных ими асимптотических методах, оказавшихся исключительно общими и гибкими, особое внимание было уделено построению простых и эффективных приёмов, которые позволили бы, исходя из элементарных соображений, составить приближенные формулы. Предложенные Н.М. Крыловым и Н.Н. Боголюбовым весьма эффективный принцип эквивалентной линеаризации, символические и другие методы существенно облегчили исследования многочисленных нелинейных задач.

Н.Н. Боголюбов и С.Г. Крейн

Н.Н. Боголюбов, академик АН СССР

Николай Николаевич Боголюбов родился 8 августа 1909 года в городе Нижний Новгород в семье преподавателей Нижегородского Мариинского института благородных девиц.

Начальное образование получил в церковно-приходской школе, которую окончил в 12 лет. Дальнейшее официальное образование для сына «служителя культа» было невозможным, поэтому отец стал обучать Николая и его младших братьев дома. Благодаря отцу сыновья не только получили обширные знания по истории, философии, лингвистике, литературе, но и унаследовали стремление к интеллектуальному труду. Отец первым заметил у старшего сына талант к точным наукам, особенно к математике и сделал все возможное для его развития.

В 1921 году семья переехала в Киев. Благодаря уникальным математическим способностям юный Николай Боголюбов уже в 14 лет стал полноправным участником семинаров по математике. В 1924 году он познакомился с академиком Н.М. Крыловым, признанным лидером целого направления в математике, членом многих иностранных математических обществ. Уже через год работы с Крыловым Николай опубликовал свою первую математическую работу «О поведении решений линейных дифференциальных уравнений на бесконечности». Исследование оказалось настолько самостоятельным и глубоким, что в 1925 году, в порядке исключения, малый президиум УкрГлавНауки принял решение принять Н.Н. Боголюбова аспирантом на кафедру математики Киевского университета.

В 1928 году (в 19 лет) защитил кандидатскую диссертацию, а в 1930 году Академия наук Украины присудила ему степень доктора математики. С 1928 года — научный сотрудник Института теоретической физики АН УССР (Киев). Работы двадцатидвухлетнего Николая Боголюбова уже получили международную известность, и одна из них была удостоена специальной премии Болонской академии наук.

Нелинейная механика сыграла чрезвычайно важную роль в развитии теории колебаний и многих актуальных разделов техники: радиотехники, теории статической и динамической устойчивости синхронных машин, продольной устойчивости летательных аппаратов и других. Буквально из лаборатории результаты поступали в производство, и уже в первой половине 1930-х годов на базе нелинейной механики в ряде ведущих технических областей были созданы новые расчётные методы.

В 1936 году молодого профессора впервые направили в научную командировку по Европе, он побывал в Берлине, Париже, Брюсселе.

С началом Великой Отечественной войны киевские академические институты были эвакуированы в Башкирию и Н.Н. Боголюбов оказался в Уфе, где он возглавил кафедры Уфимского авиационного института и Уфимского педагогического института (1941-1943). Кроме того, он продолжил теоретические исследования. Ещё перед войной Н.Н. Боголюбов начал работать над проблемой статистических методов в математической физике. Эти исследования он продолжил в Уфе и в 1946 году опубликовал монографию «Проблемы динамической теории в статистической физике».

В начале 1950 года Н.Н. Боголюбов был направлен на «объект» в Сарове (Арзамас-16), где велась работа по созданию ядерного и термоядерного оружия, начальником математического отдела, который затем был преобразован в отделение (сектор).

В это же время, в соответствии с выше приведённым протоколом совещания в КБ-11 по вопросу РДС–6С от 12 мая 1950 года, вместе с ним был переведён и его ученик (аспирант) С.Г. Крейн.

М.А. Лаврентьев и С.Г. Крейн

М.А. Лаврентьев, академик АН СССР

Михаил Алексеевич Лаврентьев родился 19 ноября 1900 года в семье преподавателя математики технического учебного заведения, позже профессора механики Казанского университета А.Л. Лаврентьева.

В 1910—1911 годах вместе с отцом находился в Гёттингене (Германия), где начал посещать среднюю школу. Среднее образование окончил в Казанском коммерческом училище. В 1918 году поступил в Казанский университет, а в 1921 году перевёлся на физико-математический факультет Московского университета, который окончил в 1922 году. Был оставлен в аспирантуре: в 1923-1926гг. — аспирант Н. Н. Лузина. В 1927 году защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук и был командирован на полгода во Францию для научного совершенствования.

С 1931 года — профессор МГУ. Без защиты диссертации (по совокупности научных работ) в 1934 году ему была присуждена учёная степень доктора технических наук, а в 1935 году — доктора физико-математических наук.

Во время Великой Отечественной войны работал в области приложений математики и механики к оборонным вопросам техники и народного хозяйства. Во время эвакуации основного состава Академии наук УССР в Уфу изучал действие на преграду металлического стержня, движущегося с большой скоростью вдоль своей оси. Этим предвосхищается, в сущности, идея кумулятивного действия взрыва, теорией которого М. А. Лаврентьев вплотную занялся в 1944 году. В 1946 году Лаврентьев предложил оригинальную гидродинамическую трактовку явления кумуляции, в соответствии с которой при огромных давлениях, возникающих в момент взрыва, металл можно рассматривать как идеальную несжимаемую жидкость; после этого, используя уравнения гидродинамики, можно было рассчитать динамику струи металла и вычислить пробивной эффект. За работы в области кумуляции Лаврентьев был в 1949 году удостоен Сталинской премии.

Интересны и удивительны научно-технические средства и соответствующие эксперименты, применяемые в научных исследованиях М.А. и его группы, в которую входил и С.Г. Крейн, при решении такой важной для страны проблемы, как создание кумулятивных снарядов. Вот что по этому поводу пишет один из членов этой группы доктор технических наук С.В. Малашенко в той же книге.

«Исследуя всесторонне свойства кумулятивной струи, М.А. буквально „сработал“ свои зубы. Опыт требовал — для облицовки внутренней поверхности кумулятивной оболочки снаряда — высокопластичных и особо тяжёлых металлов. Уникальная серебряная стопка, уведённая из семейного буфета Веры Евгеньевны, была пущена в дело беспощадно. А мне однажды пришлось переплавить в угольном тигле золотой зубной протез, который М.А. вручил мне со словами: „Я себе другой добуду. Жаль, здесь маловато металла“. „Золотой опыт“ выполнили, результат его показался нам неясным, а М.А., как всегда в таких случаях, глубоко задумался. Дефицитные осесимметричные кумулятивные оболочки стали препятствием для удовлетворения растущих аппетитов в опыте по бронепробиванию. Изобретательный М.А. пустил в ход подручные материалы. Детям приказали яички всмятку есть аккуратно, не разрушая скорлупу полностью. Кумулятивные выемки в форме весьма правильного эллипсоида принесли пользу. Но более эффективной оказалась другая технология. Любимые цветы Веры Евгеньевны (жена М.А.) на подоконнике преждевременно увядали, так как освобождённые от них глиняные конусообразные горшки отлично себя показали при моделировании кумулятивных струй в воде (оболочка типа усечённого конуса). Опыты с применением горшков и вазонов выполнялись в так называемом верхнем „лягушечьем“ пруду. Туда ходили компанией — всегда с гостями. Горшок с закрытым отверстием в дне, с подвязанным внизу зарядом тола отпускался плавать в пруд и там подрывался. Кумулятивная струя была эффектно видна, опыт оценивался по её высоте („выше осины или выше берёзы“). Научных результатов в таком опыте было, как правило, два. Гости начинали веровать в наличие особого явления — кумуляции, а М.А. и соучастники опыта с изумлением подтверждали, что лягушки, живущие в пруду, выдерживают действие взрыва. Их выбрасывало на берег, но они были живы».

Лаврентьев и его ученики много внимания уделяли также изучению устойчивости движения твёрдых тел с жидким наполнением с приложением к задачам артиллерии.

Об этом времени М.А вспоминает в книге «Век Лаврентьева»: «Уфа. Военные задачи. Академия наук Украины была переведена в Уфу, туда поехал и я с семьёй. Первая зима была самой трудной. Всей семьёй из пяти человек жили в гостинице, на шести квадратных метрах. Дети несколько раз болели. Я большую часть времени проводил на работе. Украинской Академии было предоставлено два здания: в одном из них одну комнату занимал Институт математики, где я первый год проводил основную часть времени. Там же работали Н.Н. Боголюбов, С.Г. Крейн, И.З. Штокало, Г.И. Дринфельд. Мы с Крейном занимались проблемой устойчивости снарядов. . . »

С.Г. Крейн и Воронежская математическая школа

Селим Григорьевич Крейн, доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РСФСР

Является учеником академиков Н.Н. Боголюбова и М.А. Лаврентьева, под руководством которых работал во время Великой Отечественной войны в области приложения математики и механики к оборонным вопросам техники.

С.Г. Крейн родился 15 июля 1917 г. Выдающийся учёный и педагог, крупнейший специалист в области функционального анализа, гидродинамики, дифференциальных уравнений и их приложений, доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ Селим Григорьевич Крейн большую часть своей жизни (сорок пять лет) отдал созданию и развитию воронежской математической школы. Им опубликовано 175 статей и 18 монографий. Под его руководством было написано 81 диссертация, 24 его ученика стали докторами наук, а двое из них — Ю.М. Березанский и Ю.Л. Далецкий — стали действительными членами АН Украины.

В годы войны Селим Григорьевич под руководством академика М.А. Лаврентьева работал над математическими проблемами теории кумулятивных снарядов. Затем работал в группе академика Боголюбова в КБ-11 по созданию водородной бомбы. В 1950 году в Академии артиллерийских наук защитил диссертацию на соискание степени доктора технических наук.

После войны он возвращается в Киев, а в 1954 году приезжает в Воронеж, где работает в качестве профессора в лесотехническом институте, а с 1964 года – он профессор ВГУ. Ведёт чрезвычайно интенсивную научную и педагогическую работу. Круг его интересов очень широк, но основа многих его исследований - функциональный анализ. Вместе с М.А. Красносельским и В.И. Соболевым Селим Григорьевич создаёт, ставшую хорошо известной в нашей стране и за рубежом, школу функционального анализа.

Учёный. С.Г. Крейн один из первых применил методы функционального анализа к задачам гидродинамики и получил фундаментальные результаты о колебаниях вязкой несжимаемой жидкости. Эти исследования подытожены в монографиях «Операторные методы в линейной гидродинамике» и «Эволюционная теория», написанных совместно с его вьетнамским учеником Нго Зуй Каном и профессором Н.Д. Копачевским.

Вместе с тем, задачи термодинамики привели С.Г. Крейна к необходимости рассматривать в качестве математических моделей дифференциальные уравнения в банаховых пространствах, исследованию корректной и некорректной разрешимости этих задач. Соответствующие исследования были отражены в его классическом труде «Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве», вскоре переведённом в США и Японии. Наряду с всемирно известными французскими математиками Э. Гальярдо, Ж. Лионсом, А. Кальдероном Селим Григорьевич является создателем современной теории интерполяции линейных операторов. Предложенный им метод шкал банаховых пространств нашёл широкое применение как в теории операторов, так и в теории дифференциальных уравнений. По этим исследованиям совместно с его учениками Ю.И. Петуниным и Е.М. Семеновым написана монография «Интерполяция линейных операторов», переведённая в США.

Организатор. В 1967 году по его инициативе С.Г. Крейна и под его руководством впервые в Воронеже была проведена зимняя математическая школа, вскоре ставшая популярной и оказавшая большое влияние на развитие контактов между математиками из разных городов и стран. В связи с идеей создания школы, приведём слова Селима Григорьевича, характеризующие масштабы его интересов и планов, направленных на развитие воронежской математики: «В 1966

году в Москве проходил Международный съезд математиков. Наряду с яркими впечатлениями от многих докладов и бесед с известными зарубежными математиками (Филлипс, Иосида, Кальдерон, Комацу и д.р.) у меня осталось чувство неудовлетворённости. Мне показалось, что у нас имеется по ряду направлений отставание от современного на тот момент уровня».

Так появилась и захватила идея проведения зимних математических школ, в которых читались лекции и делались доклады по самым современным проблемам математики как ведущими учёными, так и молодыми математиками.

Первая воронежская зимняя математическая школа (ВЗМШ) 27 января 1967 года. Дом отдыха им. Горького

Трудно переоценить значение математических разговоров и дискуссий между участниками школы. Иногда до поздней ночи работали небольшие внеплановые «самодеятельные» семинары. По словам С.Г. Крейна: «В школе нет выборов, нет премий, нет демократии, поэтому работа проходит в спокойной, творческой обстановке. Молодые математики очень легко воспринимают новые идеи и смело начинают их использовать. Мы тоже, по мере сил, пытались „задрав штаны, бежать за комсомолом“».

В разные годы лекторами и активными участниками ВЗМШ были выдающиеся математики, учёные с мировым именем: академики РАН С.П. Новиков, В.И. Арнольд, В.П. Маслов, А.Т. Фоменко, чл.-кор. Укр. Академии Наук Ю.М. Березанский и чл.-кор. Укр. Академии Наук Ю.Л. Далецкий.

В частности, были прочитаны лекции: В.И. Арнольд «Топопология алгебраических многообразий», В.П. Маслов «Функции от некоммутирующих операторов и их применение». А.Т. Фоменко выступал с курсами лекций на темы «Минимальные поверхности и проблема Плато», «Многомерные вариационные задачи», «Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем».

В настоящее время школа получила международный статус. Её бессменными руководителями, начиная с 2006 года, являются академики РАН В.П. Маслов – председатель оргкомитета и А.Т. Фоменко – председатель программного комитета.

Виктор Павлович Маслов, академик АН СССР

Выдающийся специалист в области математической физики, дифференциальных уравнений, функционального анализа, механики и квантовой физики.

С 1992 г. по 2016 г., вслед за Н.Н. Боголюбовым, возглавлял кафедру квантовой статистики и теории поля в МГУ. Н.Н. Боголюбов и С.Г. Крейн были оппонентами при защите докторской диссертации Маслова на тему «Теория возмущений и асимптотические методы». Разработал асимптотические методы, широко применяемые к уравнениям, возникающим в квантовой механике, теории поля, статистической физике, абстрактной математике, и носящие его имя. Асимптотические методы Маслова тесно связаны с такими проблемами, как теория самосогласованного поля в квантовой и классической статистике, сверхтекучесть и сверхпроводимость, квантование солитонов, квантовая теория поля в сильных внешних полях и в искривлённом пространстве-времени, метод разложения по обратному числу типов частиц.

Занимался проблемами жидкости и газа, проводил фундаментальные исследования по проблемам магнитной гидродинамики, связанным с проблемой динамо.

В 1986 г. руководил группой экспертов-математиков, участвовавших в создании проекта захоронения аварийного блока Чернобыльской АЭС. О ситуации на АЭС в монографии «Математическое моделирование аварийного блока Чернобыльской АЭС» В.П. Маслов с соавторами пишут: «Драматическая обстановка аварии и осознанная ответственность за обоснованность выводов и рекомендаций обусловливали, несмотря на сжатые сроки исполнения, особенно тщательный и беспристрастный анализ всей совокупности полученных данных». Здесь весьма важно подчеркнуть, что, несмотря на чрезвычайность ситуации, был применён строго научный подход решения кон-

кретных задач с использованием фундаментальных исследований. В указанной монографии говорится: «Хотя уравнения модели являются классическими, новый тип краевых задач для них привёл к открытию новых физических эффектов, которые позволили последовательно объяснить важные особенности в поведении аварийного реактора».

С начала 90-х годов работал над использованием уравнений математической физики в экономике и финансовом анализе. При расчётах использовались уравнения, аналогичные уравнениям фазового перехода в физике.

Автор более 300 научных работ, в том числе 12 монографий.

Государственная премия СССР (1978), Золотая медаль им. А.М. Ляпунова (1982), Ленинская премия (1985), дважды лауреат Государственной премии РФ (1997, 2013), Демидовская премия (2000).

Анатолий Тимофеевич Фоменко, академик РАН

Родился в 1945 году. Академик Российской Академии Наук (РАН), доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой механико-математического факультета Московского государственного университета.

Выдающийся специалист в области многомерного вариационного исчисления, дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли, симплектической и компьютерной геометрии. Действительный член общественных организаций «Российская академия естественных наук» и «Международная академия наук высшей школы». Автор нескольких книг по разработке и применению новых эмпирико-статистических методов к анализу исторических летописей, хронологии древности и средневековья.

А.Т. Фоменко хорошо известен в научном мире как оригинальный художник-график. Избранная коллекция его работ, любезно подаренная им Воронежскому государственному университету, является бесценным экспонатом университетского музея. Эту грань многогранного таланта он успешно использует в разработке математических методов познания окружающего мира через геометрические образы. По этому поводу в интервью Российской Философской газете (№6 [20] июнь 2008) А.Т. Фоменко говорит, что эти работы были сделаны для целей математики – для чтения спецкурса и для иллюстраций математических книг, т.е. для лучшего донесения до студентов и аспирантов математических теорем. Он подчёркивает: «Дело в том, что в топологии и геометрии очень много сложных конструкций, которые обычно трудно объяснять, причём для доказательства теорем часто не только пишут формулы (иногда это не просто), но и используют «жаргон», наглядные образы. …Графические работы оказались полезны для преподавания, вызвали интерес и у студентов, и у математиков. Потом по просьбе коллег я стал делать иллюстрации для гидродинамики, для теории вероятностей».

Автор более 200 научных работ, 30 монографий и учебников.

Лауреат Государственной Премии РФ в области математики (1966) за цикл работ по теории многообразий и гамильтоновых динамических систем.

Хранители ценностей «крейновских» математических школ

Опыт проведения «крейновских» зимних математических школ с успехом распространился и на другие регионы. Так, в последнее время зимние математические школы по теории функций и функциональному анализу проводятся в Воронеже по нечётным годам, а по чётным годам – в Саратове, под руководством академика Б.С. Кашина и поддерживаемые грантами РФФИ.

Борис Сергеевич Кашин, академик РАН

Родился в 1951 году. Доктор физико-математических наук, зав. кафедрой теории функций и функционального анализа мехмата МГУ, Действительный член Академии Наук РФ.

Специалист в области ортогональных рядов, теории аппроксимации, геометрии выпуклых тел. Полученный Кашиным важный результат в теории выпуклых тел лёг в основу нового метода обработки сигнала «сжатые измерения», получивший важные практические приложения. Монография Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. 2-е изд. — М.: Изд-во АФЦ, 1999. 550 с. — ISBN 5-93379-003-6.

Евгений Иванович Моисеев, академик РАН

Родился в 1948 году. Российский физик и математик, профессор, академик РАН (2003).

Область научных интересов: информатика, математическое моделирование, спектральная теория, дифференциальные уравнения. Получены фундаментальные результаты в теории задач для уравнений смешанного типа в газовой динамике, в теории турбулентной плазмы. Развиты разностные методы решения краевых задач, возникающих в теории турбулентности и плазмы. Совместно с академиком В.А. Ильиным выполнен большой цикл работ по оптимизации граничного управления колебания струны.

Автор свыше 120 научных работ.

В 1966 году у С.Г. Крейна возникла идея создания в ВГУ научно-исследовательского института математики. Он пишет: «Когда меня уговаривали стать деканом, то в качестве одного из условий, я поставил оказание ректором помощи в организации института. Такая помощь была обещана». Но, так как организация института не значилась ни в каких планах нашего планового хозяйства, то Селиму Григорьевичу пришлось пройти много испытаний, прежде чем институт был открыт. Например, С.Г. в двухдневный срок пришлось для Госплана по науке и технике написать перспективный план развития института по 16-ти научным направлениям. Поддержку Академии Наук СССР ускорил академик Н.Н. Боголюбов. И институт математики был открыт 30 ноября 1967 года. На волне моды на эконометрику, поднявшуюся в следствии присуждения Нобелевской премии по экономике академику Л.В. Канторовичу, с которым С.Г. был близок, при его активном участии была открыта экономическая лаборатория, которая позже была преобразована в экономический институт под руководством В.Н. Эйтингона. Благодаря активной деятельности Крейна были открыты на математико-механическом факультете следующие

кафедры: кафедра уравнений с частными производными и теории вероятностей, а кафедра вычислительной математики и кафедра математических методов в экономике, по существу, заложили основы факультета прикладной математики и механики, открывшемуся в 1969 году. К числу созидательных дел, свершившихся также благодаря Крейну, нужно отнести и создание кафедры математического моделирования, 20-летие которой мы отметили в 2018 году.

Кафедра математического моделирования (2018). Слева направо. Сидят: И.С. Гудович, Ю.И. Сапронов, В.А. Костин (зав. кафедры), Г.Б. Савченко. Стоят: М.Н. Силаева, В.П. Орлов, Д.В. Костин, С.Л. Царёв, А.П. Карпова, А.В. Костин, Н.Б. Подтынникова, Е.А. Рогулькина.

Являясь председателем ГЭК на математическом факультете, в 1983 году Крейн сразу высоко оценил и поддержал увлечение математикой молодого инженера-конструктора Сергея Валюхова, уже окончившего к тому времени с красным дипломом Московское Бауманское училище и работающего на космическом предприятии КБ Химавтоматики, созданном знаменитым советским конструктором С.А. Косбергом.

Семён Ариевич Косберг

С.А. Косберг (1903–1965 гг.) – знаменитый авиаконструктор. Венцом его многочисленных конструкторских достижений является создание третьей ступени ракеты Р-7, позволившей развить вторую космическую скорость. Именно эта ступень обеспечила вывод аппарата Ю.А. Гагарина на орбиту. Когда это произошло, Юрий Гагарин, забыв о требовании секретности, открытым текстом сообщил миру: «Косберг включился!» Семён Ариевич трагически погиб в автомобильной катастрофе 3 января 1965 года на обледенелой ВОГРЭСовской дамбе.

Его именем назван кратер на обратной стороне Луны.

Понимая особое значение математики в решении стоящих перед космическим производством задач, Сергей Валюхов нашёл необходимым получить более глубокие знания по математике, успешно закончив математический факультет воронежского университета. Позже С.Г. Валюхов поддержал идею создания на факультете сначала лаборатории, а

затем и кафедры математического моделирования, при этом оказав помощь как в направлении научной тематики, так и финансовую.

Сергей Георгиевич Валюхов

Родился в 1953 году. Доктор технических наук, профессор, генеральный конструктор, генеральный директор АО «Турбонасос» (г. Воронеж), заведующий кафедрой нефтегазового оборудования и транспортировки Воронежского государственного технического университета, Академик Российской Инженерной академии.

В 1983 году начались наши научные контакты с КБ Химавтоматика. Они проходили в рамках хоздоговоров по кафедре функционального анализа. Но уже в начале девяностых годов С.Г. Валюхов вместе со своим отделом выделился в самостоятельную организацию «Турбонасос». С этого момента наши связи стали постоянно расширяться и углубляться. Перед нами ставились актуальные и важные, с производственной точки зрения, задачи. В то же время они были новыми и интересными для нас, так как фундаментальные математические исследования реализовывались в конкретном производственном процессе. Сюда относятся исследования по геометрии винтовых шестерёнчатых зацеплений, теории движения жидкости в гидроциклоне, задачи по теории гидроцепей и многое другое. К этому времени у нас сформировался исследовательский коллектив единомышленников. Стал вопрос о создании учебно-научной лаборатории, которая была открыта в 1997 году при полной финансовой поддержке со стороны предприятия «Турбонасос». Оставался последний шаг к созданию кафедры. И он был сделан уже через год. Так, в 1998 году в ВГУ родилась кафедра математического моделирования (КММ), освящённая делами и идеями выдающихся наших современников С.Г. Крейна, С.А. Косберга.

Ученики С.Г. Крейна

По данным Американского Математического общества на 2003 год первое место в мире по количеству учеников, имеющих учёную степень за все времена, занимает воронежский математик С.Г. Крейн, опережая таких выдающихся математиков современности, как Д. Гильберт и А.Н. Колмогоров.

Доктора физ.-мат. наук

1. акад. Академия Наук УССР
   Березанский Юрий Макарович (г. Киев)
2. акад. Академия Наук УССР
   Далецкий Юрий Львович (г. Киев)
3. Петунин Юрий Иванович (г. Киев)
4. Копачевский Николай Дмитриевич (г. Симферополь)
5. Панков Александр Андреевич (США)
6. Павлов Евгений Александрович (г. Луганск)
7. Соболевский Павел Евсеевич (Израиль)
8. Кучмент Пётр Абрамович (США)
9. Нго Зуй Канн (Вьетнам)

10. Фам Ки Ань (Вьетнам)
11. Зайденберг Михаил Григорьевич (Франция)
12. Глушко Владимир Павлович (г. Воронеж)
13. Семенов Евгений Михайлович (г. Воронеж)
14. Седаев Александр Андреевич (г. Воронеж)
15. Овчинников Владимир Иванович (г. Воронеж)
16. Курина Галина Алексеевна (г. Воронеж)
17. Чернышов Корнелий Исидорович (г. Воронеж)
18. Костин Владимир Алексеевич (г. Воронеж)
19. Зарубин Анатолий Георгиевич (г. Хабаровск)
20. Фролов Николай Николаевич (г. Владивосток)
21. Лаптев Геннадий Иванович (г. Тула)
22. Зубова Светлана Петровна (г. Воронеж)
23. д. тех. н. Сысоев Юрий Семёнович (г. Волгодонск)
24. д. тех. н. Поличка Нина Петровна (г. Хабаровск)

Кандидаты физ.-мат. наук

1. Костарчук Виктор Николай (г. Чернигов)
2. Артемов Георгий Абрамович (г. Севастополь)
3. Духовный Михаил Сергеевич (г. Кривой Рог)
4. Шихватов Александр Александрович (г. Николаев)
5. Козлов Овсей Маркович (г. Киев)
6. Якут Лидия Ивановна (г. Киев)
7. Ярошенко Николай Степанович (г. Киев)
8. Кведерас Брюнюс Винцевич (г. Вильнюс)
9. Аскеров Назим Кафарович (г. Баку)
10. Ливчак Алексей Яковлевич (г. Рига)
11. Нгуен Ши Хонг (Вьетнам)
12. Чан Тху Ха (Вьетнам)
13. Зобин Наум Михайлович (США)
14. Львин Сергей Яковлевич (США)
15. Грабовская Маргарита Яковлевна (США)
16. Товбис Александр Исаакович (Австралия)
17. Рутицкая Алла Яковлевна (Австралия)

18. Николова Людмила (Болгария)
19. Николов Красемир (Болгария)
20. Беляева Елена Владимировна (Н.Зеландия)
21. Литминков Степан Сергеевич (г. Воронеж)
22. Прозоровская Ольга Ивановна (г. Воронеж)
23. Иевлева Оксана Борисовна (г. Воронеж)
24. Шаблицкая Лилия Нколаевна (г. Воронеж)
25. Скляднев Сергей Анатольевич (г. Воронеж)
26. Гудович Николай Николаевич (г. Воронеж)
27. Руссман Исаак Борисович (г. Воронеж)
28. Савченко Юлия Борисовна (г. Воронеж)
29. Трофимов Валерий Павлович (г. Воронеж)
30. Колупанова (Цветкова) Галина Андреевна (г. Воронеж)
31. Гудович (Титиевская) Ирина Семёновна (г. Воронеж)
32. Иванов Леонид Александрович (г. Воронеж)
33. Штейнберг Иосиф Яковлевич (г. Воронеж)
34. Салехов Дмитрий Васильевич (г. Воронеж)
35. Котко Людмила Антоновна (г. Воронеж)
36. Фурменко Александр Иванович (г. Воронеж)
37. Савченко Галина Борисовна (г. Воронеж)
38. Дементьева Ольга Владимировна (г. Воронеж)
39. Зюкин Павел Николаевич (г. Воронеж)
40. Горохов Евгений Владимирович (г. Воронеж)
41. Сапронов Иван Васильевич (г. Воронеж)
42. Копанева Вера Ивановна (г. Воронеж)
43. Гохман Алексей Оскарович (Канада)
44. Атласов Игорь Викторович (г. Воронеж)
45. Веневитина Светлана Семёновна (г. Воронеж)
46. Куликов Иван Михайлович (г. Борисоглебск)
47. Денисов Игорь Васильевич (г. Тула)
48. Симонов Александр Сергеевич (г. Тула)
49. Осипов Валерий Борисович (г. Владивосток)
50. Кседзенко Людмила Степановна (г. Владивосток)

51. Гасанов Насир Мелекович (г. Махачкала)
52. Дмитриев Вячеслав Иванович (г. Курск)
53. Яцкин Николай Иванович (г. Иваново)
54. Брыскин Илья Борисович (Израиль)
55. Плющев Юрий Васильевич (г. Сергиев Посад)
56. Чубарин Юрий Павлович (г. Ижевск)
57. Пененсон Исаак Залманович (США)
58. Фомин Василий Иванович (г. Тамбов)
59. Соломатина Любовь Евгеньевна (г. Москва)

Литература

1. Атомный проект СССР: документы и материалы : в 3 т. Т. 3. Водородная бомба. 1945–1956. Кн. 2. / под общ. ред. Л.Д. Рябева ; Гос. корпорация по атом. энергии «Росатом»; отв. сост. Г.А. Гончаров. – Саров : РФЯЦ-ВНИИЭФ ; М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 600 с.

2. Моргулис А. Законодатель школьной математики / А. Моргулис, В. Тростников // Наука и жизнь. – 1968. – № 1. – С. 121.

3. Професоры Одеського (Новоросійского) університету : биограф. словарь: в 4 т. Т. 1. Ректори / ОНУ ім. І.І. Мечникова, Науч.б-ка. – 2-ге вид., доп. – Одеса : Астропринт, 2005. – С. 66–69.

4. История отечественной математики 1917–1967 : в 4 т. / Академия наук СССР, Академия наук УССР. – Киев : Наукова думка, 1970. – Т. 4, кн. 2. – С. 668.

5. Боголюбов А.Н. Николай Митрофанович Крылов / А.Н. Боголюбов, В.М. Урбанский. – Киев : Наук. думка, 1987. – С. 178.

6. Малашенко С.В. И тогда он встал к станку. Век Лаврентьева: сб. статей / С.В. Малашенко – Новосибирск : Издательство СОРАН, 2000. – С. 94–100.

7. Маслов В.П. Воспоминания о Н.Н. Боголюбове. Воспоминания об академике Н.Н. Боголюбове. К 100-летию со

дня рождения : сб. статей / В.П. Маслов. – М. : МИАН, 2009. – 178 с.

8. Фоменко А.Т. Как было на самом деле. Каждая история желает быть рассказанной / А.Е. Фоменко. – М. : АСТ, 2017. – 788 С.

9. Костин В.А. С.Г. Крейн. Воспоминания учеников и коллег / В.А. Костин (отв. ред.), Б.Н. Садовский, Е.М. Семенов. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2008. – С. 151.

10. Костин В.А. Учёный. Учитель. Кумир / В.А. Костин // Воронежский университет. – 2012. – 17 сент. – № 16 (2488).

11. Костин В. Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2008 / В. Костин, В.П. Маслов, В.И. Овчинников, Ю.И. Сапронов, Е.М. Семенов, В.Т. Титов, А.Т. Фоменко // Вестник РФФИ. – 2008. – № 2 (58). – С. 24-26.

12. Шаракшанэ С. История + математика = научная революция? / С. Шаракшанэ / Российская философская газета. – 2008. – № 6 (20).

ПОВЕДЕНИЕ В ГРАНИЧНОЙ ТОЧКЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ P–ЛАПЛАСИАНА, РАВНОМЕРНО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ НА ЧАСТИ ОБЛАСТИ ПО МАЛОМУ ПАРАМЕТРУ[1]

©2020 *Ю. А. Алхутов, А. С. Хрипунова Балджы*
(Россия, г. Владимир, ВлГУ им. А.Г. и Н.Г. Столетовых;
Германия, Билефельдский Университет;
yurij-alkhutov@yandex.ru; *akhripun@math.uni-bielefeld.de*)

Рассмотрим в ограниченной области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, где $n \geq 2$, уравнение

$$Lu = \operatorname{div}\left(\omega_\varepsilon(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = 0, \ p = const > 1 \qquad (1)$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 19-01-00184-а.

с положительным весом ω_ε, содержащим малый параметр, который сейчас определим. Предполагается, что область D разделена гиперплоскостью Σ на части $D^{(1)}$, $D^{(2)}$ и

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon, \text{ если } x \in D^{(1)} \\ 1, \text{ если } x \in D^{(2)} \end{cases}, \ \varepsilon \in (0, 1].$$

Ниже $W_p^1(D)$ означает соболевское пространство функций, которые L_p-суммируемы в D вместе со всеми обобщёнными производными первого порядка, а $\overset{\circ}{W}{}_p^1(D)$ — замыкание финитных, бесконечно дифференцируемых в D функций $C_0^\infty(D)$ по норме $W_p^1(D)$. Скажем, что функция $u \in W_p^1(D)$ является решением уравнения (1) в D, если интегральное тождество

$$\int\limits_D \omega_\varepsilon(x)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi \, dx = 0 \qquad (2)$$

выполнено для любой пробной функции $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(D)$.

Рассмотрим задачу Дирихле

$$Lu = 0 \quad \text{в } D, \quad u \in W_p^1(D), \quad h \in W_p^1(D), \quad (u-h) \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(D).$$

Решение данной задачи совпадает с минимизантом решения вариационной задачи

$$\min_{w \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(D)} F(w+h), \quad F(u) = \int\limits_D \omega_\varepsilon(x)|\nabla u|^p \, dx.$$

Настоящее сообщение посвящено граничным свойствам решения задачи Дирихле

$$Lu_f = 0 \quad \text{в} \quad D, \quad u_f|_{\partial D} = f \qquad (3)$$

с непрерывной на ∂D функцией f.

Решение задачи (3) определяется следующим образом. Продолжим граничную функцию f по непрерывности на $\overline{D}$, сохранив за продолжением то же обозначение. Возьмём последовательность бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^n$ функций f_k, которые равномерно на $\overline{D}$ сходятся к f. Решим задачи Дирихле

$$Lu_k = 0 \quad \text{в} \quad D, \quad u_k \in W_p^1(D), \quad (u_k - f_k) \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(D).$$

Последовательность u_k сходится равномерно на компактных подмножествах D к функции u, принадлежащей пространству $W_p^1(D')$ в произвольной подобласти $D' \Subset D$, которая удовлетворяет интегральному тождеству (2) на пробных функциях $\varphi \in W_p^1(D)$ с компактным носителем в D. Предельная функция не зависит от способов продолжения и аппроксимации граничной функции f и называется обобщённым решением задачи Дирихле (3).

Граничная точка $x_0 \in \partial D$ называется регулярной, если

$$\lim_{D \ni x \to x_0} u_f(x) = f(x_0)$$

для любой непрерывной на ∂D функции f.

Далее нам потребуется понятие ёмкости. Ёмкостью компакта $K \subset B$ относительно относительно шара $B \subset \mathbb{R}^n$ называется число

$$C_p(K,\, B) = \inf \left\{ \int\limits_B |\nabla \varphi|^p \, dx \; : \; \varphi \in C_0^\infty(B),\; \varphi \geq 1 \text{ на } K \right\}.$$

Критерий регулярности граничной точки состоит в выполнении равенства

$$\int\limits_0 \left(\frac{C_p\left(\overline{B_r^{x_0}} \setminus D,\, B_{2r}^{x_0}\right)}{r^{n-p}} \right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{dr}{r} = \infty, \tag{4}$$

где $B_r^{x_0}$ — открытый шар с центром в точке x_0 радиуса r, а $\overline{B_r^{x_0}}$ — его замыкание.

Для уравнения Лапласа это утверждение является классическим результатом Н. Винера [1]. В случае линейных уравнений, когда $p = 2$, критерий получен в [2]. Если $p \neq 2$, то достаточное условие регулярности граничной точки найдено В.Г. Мазьёй в [3]. Позже в работе [4] было показано, что полученное в [3] достаточное условие регулярности является и необходимым.

Для уравнения вида (1), не содержащего малый параметр ε, в статье [3] получена оценка модуля непрерывности решений задачи Дирихле в регулярной граничной точке. Настоящее сообщение посвящено оценке модуля непрерывности решений задачи Дирихле (3) для уравнения (1) с постоянными, не зависящими от ε. Предполагается, что в окрестности граничной точки границы $x_0 \in \partial D \cap \Sigma$ дополнение области D симметрично относительно гиперплоскости Σ.

Прежде чем сформулировать полученный результат, положим

$$\gamma(r) = \left(\frac{C_p\left(\overline{B_r^{x_0}} \setminus D,\, B_{2r}^{x_0}\right)}{r^{n-p}} \right)^{\frac{1}{p-1}}$$

Теорема. *Если выполнено условие (4), то при достаточно малом ρ и $r \leq \rho/4$ для решения u_f задачи Дирихле (3) справедливы оценки*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{D \cap B_r^{x_0}} |u_f - f(x_0)| \leq$$

$$\leq C\left(\operatorname*{osc}_{\partial D \cap B_\rho^{x_0}} f + \operatorname*{osc}_{\partial D} f \cdot \exp\left(-k \int\limits_r^\rho \gamma(t) t^{-1}\, dt \right) \right), \text{ *если* } p \leq n,$$

и

$$\operatorname*{ess\,sup}_{D\cap B_r^{x_0}} |u_f - f(x_0)| \le$$

$$\le C\left(\operatorname*{osc}_{\partial D\cap B_\rho^{x_0}} f + \operatorname*{osc}_{\partial D} f\cdot (r/\rho)^{1-n/p}\right), \text{ если } p > n,$$

в которых положительные постоянные C и k зависят только от n и p.

Литература

1. *Wiener N.* Certain notions in potential theory // J. Math. Phys. 1924. V. 3. P. 24–51.

2. *Littman W., Stampacchia G., Weinberger H. F.* Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 1963. V. 3. № 17. P. 43–77.

3. *Мазья В. Г.* О непрерывности в граничной точке решений квазилинейных эллиптических уравнений // Вестн. ЛГУ. Сер. матем. 1970. Т. 25. №13. С. 42–55.

4. *Kilpeläinen T., Malý J.* The Wiener test and potential estimates for quasilinear elliptic equations // Acta Math. 1994. V.172. P. 137–161.

ПРЯМОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЙ М.Г. КРЕЙНА ВЕЩЕСТВЕННОСТИ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНОВ

©2020 *В. П. Аносов*

(Новосибирск, Новосибирский государственный педагогический университет; *averi@ngs.ru*)

В работе [1] Левина А.Ю. рассматривались функции вида

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad (n \leqslant \infty)$$

с положительными коэффициентами, для вещественности корней которых были приведены необходимые условия, которые сформулируем в виде теоремы 1.

Теорема 1. *Условия*

$$a_k^2 \geqslant a_{k-1}a_{k+1} \quad (k \geqslant 1)$$

являются необходимыми условиями вещественности корней целой функции с положительными коэффициентами, если её порядок меньше единицы.

Как утверждает Левин А. Ю., эти условия были ранее отмечены М. Г. Крейном (см. [1, с. 72]). Мы считаем, что можно дать прямое доказательство этого результата для многочленов. А именно, мы докажем следующее утверждение.

Теорема 2. *Если многочлен*

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \tag{1}$$

степени $n \geqslant 2$ с положительными коэффициентами имеет только вещественные корни, то необходимо, чтобы для коэффициентов многочлена (1) была справедлива система неравенств

$$\begin{cases} a_{n-1}^2 \geqslant a_n a_{n-2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-k}^2 \geqslant a_{n-k+1}a_{n-k-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1^2 \geqslant a_2 a_0 \qquad\qquad . \end{cases} \tag{2}$$

Прежде чем начать доказательство, поясним некоторые обозначения. Систему неравенств в теореме 2 мы обозначили через (2), а через (2_k) обозначим k-ую строку системы

(2) сверху. Это пояснение относится и к последующим системам. А теперь приступим к доказательству теоремы 2 и проведём его методом математической индукции. При $n = 2$ данное утверждение легко проверяется.

Пусть утверждение теоремы 2 справедливо для всех таких многочленов степени $n = m \geqslant 2$. Докажем его для многочленов степени $m+1$, то есть докажем неравенство (2) для $n = m+1$ и $k = 1, 2, \ldots, m$. Для этого воспользуемся для многочлена $f_{m+1}(z)$ формулами Виета (см. [2, с. 512])

$$\begin{cases} z_1 + \ldots + z_{m+1} = -\frac{a_m}{a_{m+1}}, \\ z_1 z_2 + \ldots + z_m \cdot z_{m+1} = \frac{a_{m-1}}{a_{m+1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_{m+1} = (-1)^{m+1} \frac{a_0}{a_{m+1}} \end{cases}, \tag{3}$$

где $z_1, \ldots, z_{m+1}$ — вещественные корни многочлена $f_{m+1}(z)$. Отметим, что все эти корни отрицательные.

Наряду с многочленом $f_{m+1}(z)$ рассмотрим многочлен m-ой степени

$$g_m(z) = z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_0,$$

корнями которого являются числа $z_1, \ldots, z_m$, и для коэффициентов которого $b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}, b_m = 1$ имеют место следующие равенства

$$\begin{cases} z_1 + \ldots + z_m = -b_{m-1}, \\ z_1 \cdot z_2 + \ldots + z_{m-1} \cdot z_m = b_{m-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_1 \cdot z_2 \cdot z_k + \ldots + z_{m-k+1} \cdot \ldots \cdot z_m = (-1)^k b_{m-k}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_m = (-1)^m b_0 \end{cases}. \tag{4}$$

Из (4), в силу отрицательности корней z_i, вытекает, что $b_i > 0$ для $i = 0, 1, \ldots, m-1$, а также, из предложения индукции, следует справедливость неравенств

$$b_i^2 \geqslant b_{i-1} b_{i+1}, \quad (i = 1, 2, \ldots, m-1). \tag{5}$$

Из (4) и (3) имеем равенства

$$\begin{cases} -b_{m-1} + z_{m+1} = -\frac{a_m}{a_{m+1}}, \\ b_{m-2} + z_{m+1}(-b_{m-1}) = \frac{a_{m-1}}{a_{m+1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-1)^k b_{m-k} + z_{m+1}(-1)^{k-1} b_{m-k+1} = (-1)^k \frac{a_{m-k+1}}{a_{m+1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_0 z_{m+1} = (-1)^{m+1} \frac{a_0}{a_{m+1}} \end{cases}. \tag{6}$$

Возведя обе части равенства (6_1) в квадрат, будем иметь равенство

$$b_{m-1}^2 + 2 z_{m+1}(-b_{m-1}) + z_{m+1}^2 = \frac{a_m^2}{a_{m+1}^2},$$

из которого, учитывая неравенство (5) при $i = m-1$, получаем

$$\frac{a_m^2}{a_{m+1}^2} \geqslant b_{m-2} + z_{m+1}(-b_{m-1}).$$

Отсюда, с учётом равенства (6_2), убеждаемся в справедливости неравенства (2_1) для $n = m+1$ и $k = 1$.

Далее докажем справедливость неравенства (2_k) при $n = m+1$ и $1 < k \leqslant \frac{m+1}{2}$. Для этого возведём сначала обе части равенства (6_k) в квадрат. В результате получим

$$\frac{a_{m-k+1}^2}{a_{m+1}^2} = b_{m-k}^2 - 2 b_{m-k} \cdot b_{m-k+1} \cdot z_{m+1} + z_{m+1}^2 b_{m-k+1}^2. \tag{7}$$

Затем перемножив, соответственно, левые и правые части равенств (6_{k-1}), (6_{k+1}), будем иметь

$$\frac{a_{m-k}\cdot a_{m-k+2}}{a_{m+1}^2} = b_{m-k+1}\cdot b_{m-k-1} - b_{m-k-1}\cdot b_{m-k+2}z_{m+1} -$$

$$-b_{m-k}\cdot b_{m-k+1}\cdot z_{m+1} + z_{m+1}^2\cdot b_{m-k}\cdot b_{m-k+2}. \qquad (8)$$

Из (5) при $i = m-k+1$ и $i = m-k$ имеем, что

$$b_{m-k+1}^2 \geqslant b_{m-k}\cdot b_{m-k+2}, b_{m-k}^2 \geqslant b_{m-k-1}\cdot b_{m-k+1}, \qquad (9)$$

из которых следует неравенство

$$b_{m-k}\cdot b_{m-k+1} \geqslant b_{m-k-1}\cdot b_{m-k+2}. \qquad (10)$$

Из (9) – (10) вытекает, что правая часть (8) меньше правой части равенства (7). Отсюда следует справедливость неравенства (2_k) при $n = m+1$ и $k \leqslant \frac{m+1}{2}$. Остальные неравенства (2), то есть неравенства (2) при $n = m+1$ и $\frac{m+1}{2} < k \leqslant m$ вытекают из доказанных выше, если учесть что в том случае, когда многочлен $f_{m+1}(z)$ имеет отличные от нуля вещественные корни, то и многочлен $v_{m+1}(z) = a_0 z^{m+1} + \ldots + a_{m+1}$ также имеет вещественные корни. Здесь следует отметить, что утверждение, сформулированное в последнем предложении, следует из равенства

$$f_{m+1}(z) = z^{m+1}v_{m+1}(\frac{1}{z}).$$

Итак, мы доказали, что если утверждение теоремы 2 справедливо для всех n от 2 до m, то оно справедливо и для $n = m+1$. Тогда, на основании метода математической индукции, заключаем, что теорема 2 справедлива для любого $n \geqslant 2$. Теорема 2 доказана.

Замечание 1. *Константу 1, присутствующую в неравенствах $a_{n-k}^2 \geqslant 1\cdot a_{n-k-1}\cdot a_{n-k+1}$ теоремы 2, невозможно увеличить. Сказанное подтверждается следующей аргументацией. Рассмотрим функцию*

$$f_n(z) = (z+1)^n.$$

Коэффициенты a_k этого многочлена равны

$$a_k = \binom{k}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

Но для этих коэффициентов не справедливо неравенство

$$a_k^2 \geqslant q a_{k-1}a_{k+1}$$

при некотором $q > 1$, достаточно больших $n \geqslant 2$ и $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Замечание 2. *Доказательство теоремы 2 можно свести к теореме 53 из работы [3, с. 69], но доказательство которой практически отсутствует.*

Итак, мы привели одно из возможных доказательств необходимых условий М.Г. Крейна вещественности корней многочленов, которое является простым и экономным.

Литература

1. *Левин А. Ю.* Элементарный признак вещественности корней целой функции с положительными коэфициентами. Воронеж: Проблемы мат. анализа сложных систем, 1968, №2. С 72–77.

2. *Куликов Л. Я.* Алгебра и теория чисел. М.: Высшая школа, 1979, — 559 с.

3. *Харди Г., Литтльвуд Д., Полиа Г.* Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.

ЛИУВИЛЛЕВА КЛАССИФИКАЦИЯ ИНТЕГРИРУЕМОГО ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО ПОТОКА В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ НА ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

©2020 *Е. И. Антонов*
(Москва; *antonov.zhenya@hotmail.com*)

Полученные результаты основываются на теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем, созданной А. Т. Фоменко и его школой (см. [1]). Подробнее о лиувиллевой классификации (т.е. о вычислении инвариантов Фоменко-Цишанга) для геодезических потоков см.[1].

Рассмотрим риманово многообразие вращения $M = S^2$ с естественными координатами $(r;\varphi), r \in (0;L), \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, в которых метрика вращения записывается в виде

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + f^2(r)\mathrm{d}\varphi^2.$$

В окрестности полюсов введём локальные координаты

$$x = f(r)\cos\varphi, \qquad y = f(r)\sin\varphi.$$

При этом метрика в полюсах запишется в виде $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$.

Рассмотрим интегрируемую гамильтонову систему на кокасательном расслоении T^*S^2 с гамильтонианом

$$H = \begin{cases} \dfrac{p_r^2}{2} + \dfrac{p_\varphi^2}{2f^2(r)} + V(r), & \text{вне полюсов,} \\ \dfrac{p_x^2 + p_y^2}{2} + V(0), & \text{в полюсах} \end{cases}$$

и первым интегралом

$$K = \begin{cases} p_\varphi, & \text{вне полюсов,} \\ xp_y - yp_x, & \text{в окрестности полюсов.} \end{cases}$$

Представим проективную плоскость $\mathbb{RP}^2$ как фактор сферы S^2 по инволюции η, которая в координатах r, φ задаётся формулой:

$$\eta(\varphi, r) = (\varphi + \pi, L - r).$$

Полюса при инволюции переходят друг в друга: $\eta(S) = N, \eta(N) = S$. Имеем:

$$T^*\mathbb{R}\mathrm{P}^2 = T^*S^2/\eta^*,$$
$$\eta^*(p_r, p_\varphi, r, \varphi) = (-p_r, p_\varphi, L - r, \varphi + \pi).$$

Далее мы считаем, что $f(r) = f(L - r)$ и $V(r) = V(L - r)$, чтобы f и V задавали функции на $\mathbb{RP}^2$.

Теорема 1

Рассмотрим систему (то есть геодезический поток с линейным интегралом и с инвариантным при вращениях потенциалом) на многообразии вращения $M \approx \mathbb{R}\mathrm{P}^2$, заданную парой функций $(V(r); f(r))$. Пусть Q^3 — связная компонента неособой изоэнергетической поверхности Q^3_h. Пусть $W - W$ — молекула системы на Q^3.

1) Метки на нецентральных рёбрах молекулы следующие:

   (a) на рёбрах между седловыми атомами метки: $r = \infty, \varepsilon = +1$;

   (b) На рёбрах между седловыми атомами и атомами типа A метка $r = 0$, за исключением тех случаев, когда атом A отвечает неподвижной точке инволюции. В этом случае метка $r = \frac{1}{2}$. Метка ε в обоих случаях равна $+1$.

2) Метки на центральных рёбрах молекулы следующие:

(a) на ребре, соединяющем седловые атомы, метки следующие: $r = \infty, \varepsilon = -1$;

(b) Если молекула $W - W$ имеет тип $A - A$, то метка r определяется следующим образом:

- если $Q^3_{S^2} \approx \mathbb{R}\mathrm{P}^3$ то:
  $r = \frac{1}{4}, \varepsilon = +1$;
- если $Q^3_{S^2} \approx S^1 \times S^2$ то возможны два случая:
  - $r = \infty, \varepsilon = +1$;
  - $r = \infty, \varepsilon = +1$;
- если $Q^3_{S^2} \approx S^3$ то:
  $r = 0, \varepsilon = +1$;

3) Если молекула $W - W$ отлична от $A - A$, то она содержит единственную семью, получаемую отбрасыванием всех атомов A. Тогда значение метки n определяется топологическим типом $Q^3_{S^2}$ и сечением атомов, соединённых центральным ребром, то есть:

- Если $Q^3_{S^2} \approx \mathbb{R}\mathrm{P}^3$, то метка n равна 0.
- Если $Q^3_{S^2} \approx S^1 \times S^2$, то метка n равна либо 0, либо -1.
- Если $Q^3_{S^2} \approx S^3$, то метка n равна 1.

Литература

1. *А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко*, «Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация», Т. 1, 2, Изд. дом "Удмуртский университет", Ижевск, 1999, 444 с., 447 с.

2. *Е. О. Кантонистова,* «Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения в потенциальном поле», Матем. сб., 207:3 (2016), 47–92;

3. *D. S. Timonina*, «Topological classification of integrable geodesic flows in a potential field on the torus of revolution», Lobachevskii J. Math., 38:6 (2017), 1108–1120

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКЛАССИЧЕСКОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА[1]

©2020 *А. И. Аристов*
(Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова; *ai_aristov@mail.ru*)

Работа посвящена точным решениям уравнения

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}\left(u \frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{1}$$

В статье [1] рассмотрены начально-краевые задачи на отрезке и на луче для модельного уравнения теории ионно-звуковых волн

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon u - \frac{\varepsilon^2 u^2}{2}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{2}$$

Для первой задачи обоснована однозначная разрешимость, по крайней мере, локально по времени, для второй получена верхняя оценка времени существования слабого решения и, кроме того, указаны начальные данные, для которых имеет место мгновенное разрушение решения.

Уравнение (2) сводится к (1) с помощью линейной замены. В данной работе построено 6 классов точных решений для (1), представимых через элементарные и специальные функции.

Теорема 1. *Существуют точные решения уравнения (1), имеющие следующие типы качественного поведения:*

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 18-29-10085мк).

- *ограниченность глобально по времени;*
- *ограниченность на любом ограниченном промежутке времени, но не глобально;*
- *обращение в бесконечность на ограниченных промежутках времени.*

Справедливость этого утверждения вытекает из того, что среди построенных решений имеются решения, соответствующие всем типам, перечисленным в теореме.

При построении точных решений использовались методы аддитивного и мультипликативного разделения переменных, метод бегущей волны и поиск решений специального вида.

Литература

1. *Корпусов М.О.* О мгновенном разрушении слабого решения одной задачи теории плазмы на полупрямой. Дифференциальные уравнения. 2019 г. Том 55. Номер 1. С. 59–66.

2. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М., Физматлит, 2005.

ПРИМЕРЫ ГОЛОМОРФНО-ОДНОРОДНЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ В $\mathbb{C}^4$

©2020 *А. В. Атанов*
(Воронеж; *atanov.cs@gmail.com*)

Известная в комплексной геометрии задача классификации голоморфно-однородных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^n$ решена Э.Картаном для случая $n = 2$ (см. [1]). Решение аналогичной задачи при $n = 3$ также фактически завершено (см., например, [2]). При этом в комплексных пространствах больших размерностей к настоящему моменту отсутствуют нетривиальные примеры голоморфно-однородных гиперповерхностей. В тексте строится пример одной голоморфно-однородной гиперповерхности в $\mathbb{C}^4$.

Утверждение 1. *Любая гиперповерхность из семейства*

$$\mathrm{Im}(z_4) = |z_1| \left(\mathrm{Im}(z_2)^2 + \mathrm{Im}(z_3)\right)^{\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

является голоморфно-однородной в пространстве $\mathbb{C}^4_{z_1,z_2,z_3,z_4}$.

Для получения уравнения данного семейства гиперповерхностей будем применять подход, использованный в работах [2, 3] для случая $\mathbb{C}^3$. Данный подход основан на построении реализаций абстрактных алгебр Ли в виде алгебр голоморфных векторных полей.

В работе [3] описана процедура перехода от абстрактной алгебры Ли к соответствующей алгебре голоморфных векторных полей, касательных к однородным гиперповерхностям. Базисные векторные поля такой алгебры будем записывать в виде

$$e_k = a_k \frac{\partial}{\partial z_1} + b_k \frac{\partial}{\partial z_2} + c_k \frac{\partial}{\partial z_3} + d_k \frac{\partial}{\partial z_4},\ k = 1, \ldots, 7,$$

или, сокращённо, $e_k = (a_k, b_k, c_k, d_k)$. Здесь a_k, b_k, c_k, d_k — голоморфные (в окрестности некоторой точки гиперповерхности) функции четырёх переменных z_1, z_2, z_3, z_4.

Как известно, любое гладкое векторное поле в окрестности неособой точки может быть выпрямлено подходящим координатным диффеоморфизмом (под выпрямлением здесь понимается уменьшение количества переменных, участвующих в записи векторного поля — вплоть до одной переменной). В работе [3] для случая $\mathbb{C}^3$ показано, как такие упрощения могут проводиться сразу для нескольких полей. Очевидно, что выпрямление одного поля с учётом коммутационных соотношений алгебры упрощает и остальные поля.

Последовательно рассматривая все коммутаторы и постепенно упрощая базисный набор полей, приходим к некоторому относительно простому виду указанного набора. Интегрируя затем систему уравнений в частных производных, отвечающую рассматриваемым полям, можно получить явный вид уравнения голоморфно-однородной гиперповерхности.

Используя эту же технику, можно получать голоморфно-однородные объекты и в случае $\mathbb{C}^4$.

Рассмотрим 7-мерную (разложимую) алгебру Ли $\mathfrak{g}$, определяемую следующими коммутационными соотношениями:

$$\begin{gathered}
[e_1, e_2] = e_1, [e_1, e_3] = 2e_2, [e_2, e_3] = e_3, \\
[e_4, e_7] = (h+1)e_4, [e_5, e_6] = e_4, \\
[e_5, e_7] = e_5, [e_6, e_7] = he_6, \ |h| \leqslant 1.
\end{gathered} \tag{1}$$

Построение реализаций алгебры (1) в виде алгебр голоморфных векторных полей требует рассмотрения ряда подслучаев. В простейшем из них можно считать, что три векторных поля имеют простейший вид:

$$e_1 = (0,0,0,1), e_4 = (0,0,1,0), e_5 = (0,1,0,0).$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. *Базис голоморфной реализации алгебры (1) допускает представление в виде*

$$\begin{gathered}
e_1 = (0,0,0,1), \quad e_2 = (z_1, 0, 0, z_4), \\
e_3 = \left(2z_1z_4 + A_3z_1^2, 0, 0, z_4^2 - \tfrac{1}{4}A_3^2z_1^2\right), \\
e_4 = (0,0,1,0), \quad e_5 = (0,1,0,0), \quad e_6 = (0, B_6, z_2, 0), \\
e_7 = \left(A_7z_1, z_2, 2z_3 + C_7, -\tfrac{1}{2}A_3A_7z_1\right),
\end{gathered} \tag{2}$$

где $A_3,\ A_7,\ B_6,\ B_7 \in \mathbb{C}$.

Уравнение однородной гиперповерхности M, соответствующей алгебре (2), будем искать в виде $\mathrm{Im}(z_4) = F(z_1, z_2, z_3, z_4)$. Определяющая функция $\Phi = -\mathrm{Im}(z_4) + F$ этой гиперповерхности должна удовлетворять системе семи уравнений в частных производных

$$\mathrm{Re}\left(e_k\left(\Phi\right)|_M\right) \equiv 0, \ k = 1, \ldots, 7.$$

Решив эту систему и выполнив элементарные преобразования координат, получим уравнение голоморфно-однородной гиперповерхности вида

$$\mathrm{Im}(z_4) = |z_1| \left(\mathrm{Im}(z_2)^2 + \mathrm{Im}(z_3)\right)^\alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Литература

1. *Cartan E.* Sur la géométrie pseudoconforme des hypersurfaces de deux variables complexes: I / E. Cartan // Ann. Math. Pura Appl. — 1932. — V. 11, № 4. — P. 17–90.

2. *Атанов А. В.* Разложимые пятимерные алгебры Ли в задаче о голоморфной однородности в $\mathbb{C}^3$ / А.В. Атанов, А.В. Лобода // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. Темат. обз. – 2019. – Т. 173. – С. 86–115.

3. *Beloshapka V. K.* Homogeneous hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$, associated with a model CR-cubic / V. K.Beloshapka, I. G. Kossovskiy // J. Geom. Anal. — 2010. — V. 20, № 3. — P. 538–564.

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

©2020 *А. О. Бабаян*
(Ереван; *barmenak@gmail.com*)

Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ — единичный круг комплексной плоскости, а $\Gamma = \partial D$ — его граница. В области D рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 V(x,y) = 0, (x,y) \in D, \quad (1)$$

где λ_1, λ_2 — различные действительные числа. Решение уравнения (1) ищем в классе функций $C^4(D) \cap C^{(1,\alpha)}(D \cup \Gamma)$. На границе Γ решение удовлетворяет условиям Дирихле:

$$V\big|_\Gamma = f_0(x,y), \quad V_r\big|_\Gamma = f_1(x,y), (x,y) \in \Gamma. \quad (2)$$

Здесь $f_k \in C^{(1-k,\alpha)}(\Gamma)$, $k = 0,1$ — заданные функции, $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \theta}$ — производные, соответственно, по радиусу и аргументу комплексного числа $z = x + iy = re^{i\theta}$.

Как известно (см. [1]), задача Дирихле для неэллиптического уравнения не является корректно поставленной, однако в этом случае также удаётся получить содержательные результаты. В работе [2] рассмотрено уравнение $u_{xy} = 0$ в произвольной области. Были получены условия на границу области, при которых задача Дирихле имеет решение. Далее, в [3] было рассмотрено уравнение $(1+\lambda)u_{xx} - (1-\lambda)u_{yy} = 0$ в единичном круге и получены условия на λ, при которых однородная задача Дирихле для этого уравнения имеет нетривиальные решения. В работах [4,5] исследована задача Дирихле для строго гиперболической системы первого порядка в произвольной области. Были получены условия на

геометрию границы области, при которых задача Дирихле имеет решение.

В работе предлагается схема решения краевых задач в единичном круге, основанная на представлении искомого решения в виде ряда по полиномам Чебышева. Приведём краткое описание метода и сформулируем полученный результат. Общее решение уравнения (1) представим в виде:

$$V = \Phi_0(x+\lambda_1 y) + \frac{\partial}{\partial \theta}\Phi_1(x+\lambda_1 y) + \Psi_0(x+\lambda_2 y) + \frac{\partial}{\partial \theta}\Psi_1(x+\lambda_2 y)$$

Здесь Φ_j, Ψ_j — функции, подлежащие определению. Граничные условия (2) представим в эквивалентной форме:

$$V_x|_\Gamma = F; V_x|_\Gamma = G; V(1,0) = f_0(1,0). \quad (3)$$

Здесь $F = \cos\theta f_1 - r^{-1}\sin\theta f_0'$ и $G = \sin\theta f_1 + r^{-1}\cos\theta f_0'$. Подставим общее решение в равенства (3) и используем операторные тождества: $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}$. Получим два уравнения для определения функций Φ_j', Ψ_j'.

$$\Phi_0'(A_1) + \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \lambda_1 I\right)\Phi_1'(A_1) + \Psi_0'(A_2) + \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \lambda_2 I\right)\Psi_1'(A_2) =$$

$$= F(\theta); \quad \lambda_1 \Phi_0'(A_1) + \left(\lambda_1 \frac{\partial}{\partial \theta} - I\right)\Phi_1'(A_2) + \lambda_2 \Psi_0'(A_2) +$$

$$+ \left(\lambda_2 \frac{\partial}{\partial \theta} - I\right)\Psi_1'(A_2) = G(\theta), \ A_j = \cos\theta + \lambda_j \sin\theta, \quad (4)$$

где $j = 1,2$. Аргументы A_j представим в виде

$$A_j = \sqrt{1+\lambda_j^2}\cos(\theta - \alpha_j); \ \cos\alpha_j = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_j^2}}, \sin\alpha_j = \frac{\lambda_j}{\sqrt{1+\lambda_j^2}}.$$

Тогда неизвестные функции будут зависеть от $\cos(\theta-\alpha_j)$ и, следовательно, могут быть представлены рядами по многочленам Чебышева первого рода. Далее, приравнивая в уравнениях (4) коэффициенты при $\cos k\theta$ и $\sin k\theta$, получим систему линейных уравнений четвёртого порядка для определения коэффициентов этих рядов. Определитель этой системы, с точностью до ненулевого сомножителя, равен $\Delta_k(\gamma) = k^2-U_{k-1}^2(\cos\gamma)$, где U_{k-1} — многочлен Чебышева второго рода степени $k-1$, $\gamma=\alpha_2-\alpha_1$. Учитывая, что при $\gamma\neq 0,\pi$ имеем оценку $|U_{k-1}(\cos\gamma)| < k$ (см.[6], пункт 2.2) искомые коэффициенты разложений определяем однозначно для произвольных граничных функций. Итак, получена следующая теорема.

Теорема 1. *Задача (1),(2) однозначно разрешима.*

Литература

1. *Courant R., Hilbert D.* Methods of Mathematical Physics. New York, Chichester etc.: John Wiley and Sons, 1989. 831p.

2. *John F.* The Dirichlet problem for a Hyperbolic Equation. Amer. J. of Math. 1941.— V.63(1) - P.141-155.

3. *Александрян Р.А.* Спектральные свойства операторов, порождённых системами дифференциальных уравнений типа С.Л. Соболева. Труды ММО, 1960. — Т.9. - С.455-505.

4. *Жура Н.А., Солдатов А.П.* Граничная задача для гиперболической системы первого порядка в двухмерной области. Известия РАН, сер. Математика, 2017. — Т.81, No.3. - С. 83-108

5. *Солдатов А. П.* Характеристически замкнутые области для строго гиперболических систем первого порядка на плоскости. Проблемы матем. анализа, 2018. — No. 93. - С. 133-135 с.

6. *Mason J.S., Handscomb D.C.* Chebyshev Polynomials. New York etc.: CRC Press, 2003. 335p.

НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ СДВИГОВОГО ТЕЧЕНИЯ НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

©2020 *Е. С. Барановский, А. А. Домнич, М. А. Артемов*
(Воронеж, ВГУ; *esbaranovskii@gmail.com*)

В настоящей работе изучается математическая модель, описывающая установившееся сдвиговое течение несжимаемой вязкой жидкости между плоскостями $z=-h$ и $z=h$. Предполагается, что течение обусловлено действием постоянного перепада давления $\partial p/\partial x = -\xi$ и осуществляется в условиях пристенного скольжения типа Навье при наличии теплового потока ω:

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dz}\big\{\mu[\theta(z)]u'(z)\big\} = \xi, \quad z\in[-h,h], \\ -\dfrac{d}{dz}\big\{k[\theta(z)]\theta'(z)\big\} = \omega(z), \quad z\in[-h,h], \\ \mu[\theta(h)]u'(h) = -\chi[\theta(h)]u(h), \\ \mu[\theta(-h)]u'(-h) = \chi[\theta(-h)]u(-h), \\ k[\theta(h)]\theta'(h) = -\beta\theta(h), \\ k[\theta(-h)]\theta'(-h) = \beta\theta(-h), \end{cases} \qquad (\mathbf{A})$$

где u — скорость течения жидкости вдоль оси x; θ — температура; $\mu[\theta]$, $k[\theta]$, $\chi[\theta]$ — коэффициенты вязкости, теплопроводности и проскальзывания соответственно; β — постоянный коэффициент теплообмена на стенках канала.

Неизвестными в системе ($\mathbf{A}$) являются скорость u и темпертрура θ, а все остальные функции и величины считаются заданными. Предположим, что:

(C1) функция $\omega\colon[-h,h]\to\mathbf{R}$ является чётной и принадлежит пространству Лебега $L^2[-h,h]$;

(**C2**) функции $\chi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\mu\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $k\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ непрерывны;

(**C3**) существует константа k_0 такая, что $0 < k_0 \le k(s)$ для любого $s \in \mathbf{R}$;

(**C4**) для любого $r > 0$ существуют константы χ_r и μ_r такие, что $0 < \chi_r \le \chi(s)$ и $0 < \mu_r \le \mu(s)$ для $\forall s \in [-r, r]$;

(**C5**) выполнено неравенство $\beta > 0$.

Введём следующие обозначения:

$$\overline{v}_h \overset{\text{def}}{=} (2h)^{-1} \int_{-h}^{h} v(z)\,dz,$$

$$H^1_{even}[-h,h] \overset{\text{def}}{=} \{v \in H^1[-h,h] :\ v(-z) = v(z)\ \forall z \in [-h,h]\},$$

где $H^1[-h,h]$ — пространство Соболева.

Определение. *Слабым решением* задачи (**A**) назовём пару функций $(u,\theta) \in H^1_{even}[-h,h] \times H^1_{even}[-h,h]$ такую, что

$$\int_{-h}^{h} \mu[\theta(z)]u'(z)\psi'(z)\,dz + 2\chi[\theta(h)]u(h)\psi(h) = \xi \int_{-h}^{h} \psi(z)\,dz,$$

$$\int_{-h}^{h} k[\theta(z)]\theta'(z)\psi'(z)\,dz + 2\beta\theta(h)\psi(h) = \int_{-h}^{h} \omega(z)\psi(z)\,dz$$

для любой пробной функции $\psi \in H^1_{even}[-h,h]$.

Сформулируем теперь основные результаты работы.

Теорема. *Пусть выполнены условия* (**C1**)–(**C5**). *Тогда*

(i) *задача* (**A**) *имеет по крайней мере одно слабое решение;*

(ii) *если* (u,θ) — *слабое решение задачи* (**A**), *то на стенках канала* $z = \pm h$ *выполнены соотношения:*

$$u(h) = u(-h) = \frac{\xi h}{\chi[\overline{\omega}_h h \beta^{-1}]}, \quad \theta(h) = \theta(-h) = \overline{\omega}_h h \beta^{-1};$$

(iii) *если* (u,θ) — *слабое решение задачи* (**A**), *то выполнены следующие энергетические равенства:*

$$\int_{-h}^{h} \mu[\theta(z)]|u'(z)|^2\,dz + 2\chi[\theta(h)]u^2(h) = 2h\xi\overline{u}_h,$$

$$\int_{-h}^{h} k[\theta(z)]|\theta'(z)|^2\,dz + 2\beta\theta^2(h) = \int_{-h}^{h} \omega(z)\theta(z)\,dz;$$

(vi) *если* (u,θ) *и* (v,θ) — *слабые решения задачи* (**A**), *то* $u = v$;

(v) *если* k *удовлетворяет условию Липшица с константой* M, *где* $M < \min\{k_0^2, \beta^2\}/\big(\|\omega\|_{L^1[-h,h]} \max\{1, 4h\}\big)$, *то задача* (**A**) *имеет единственное слабое решение.*

Замечание. В линейной постановке задача о протекании неравномерно нагретой вязкой жидкости сквозь ограниченный сосуд с двумя плоскими отверстиями рассмотрена в [1]. В статье [2] изучается обратная задача для эволюционной линейной модели однонаправленного термогравитационного движения вязкой жидкости в плоском канале. В работе [3] предложена модель оптимального граничного управления неизотермическим течением жидкости через заданную локально-липшицеву область $\Omega \subset \mathbf{R}^d$, $d = 2, 3$.

Литература

1. *Крейн С.Г., Чан Тху Ха.* Задача протекания неравномерно нагретой вязкой жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1989. Т. 29. № 8. С. 1153–1158.

2. *Черемных Е.Н.* Априорные оценки решения задачи об однонаправленном термогравитационном движении вязкой жидкости в плоском канале // Математические заметки. 2018. Т. 103. № 1. С. 147–157.

3. *Baranovskii E.S., Domnich A.A., Artemov M.A.* Optimal boundary control of non-isothermal viscous fluid flow // Fluids. 2019. V. 4. № 3. Article ID 133.

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ БИЛЛИАРДОВ НА КВАДРИКАХ В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

©2020 *Г. В. Белозеров*
(Москва; *gleb0511beloz@yandex.ru*)

Теории математического биллиарда, т. е. задаче о движении материальной точки в плоской области, ограниченной кусочно-гладкой кривой с абсолютно упругим отражением на границе, посвящено много работ.

Биллиарды в областях, ограниченных дугами софокусных квадрик, являются интегрируемыми гамильтоновыми системами. Такие системы с точностью до лиувиллевой эквивалентности начали изучаться в работах В. Драговича, М. Раднович [1], [2], а также В. В. Ведюшкиной (Фокичевой) [3], [4].

Данная работа посвящена интегрируемым геодезическим биллиардам на поверхностях положительной и отрицательной гауссовой кривизны, а именно на невырожденных квадриках E, т.е. на эллипсоиде, однополостном и двуполостном гиперболоидах. Биллиардным столом на такой

[1]Исследование выполнено в рамках Программы Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-2554.2020.1).

квадрике E назовём замкнутую область, ограниченную конечным числом квадрик, софокусных с данной, и имеющую углы излома на границе равные $\frac{\pi}{2}$. Возникает динамическая система: материальная точка (шар) движется по биллиардному столу вдоль геодезических с постоянной по модулю скоростью, отражаясь от границы абсолютно упруго. На множестве биллиардных столов (на фиксированной квадрике) введём отношение эквивалентности. Назовём две области эквивалентными в том и только в том случае, когда они получаются друг из друга элементарными преобразованиями. Автором получена полная классификация биллиардных столов на квадриках. Оказывается, что на эллипсоиде есть ровно 21 тип неэквивалентных биллиардных столов, на однополостном гиперболоиде – 21, а на двуполостном – 13.

Интегрируемость этих биллиардов следует из известной теоремы Якоби – Шаля. Далее автор полностью классифицировал все такие геодезические биллиарды с точностью до лиувиллевой эквивалентности. Как оказалось, на эллипсоиде их ровно 7, на однополостном гиперболоиде тоже 7, а на двуполостном – 6.

Далее оказалось, что некоторые геодезические биллиарды на квадриках разного типа лиувиллево эквивалентны. В итоге, на квадриках в $\mathbb{R}^3$ есть ровно 10 лиувиллево неэквивалентных биллиардов.

Как оказалось, существует частичное соответствие между геодезическими биллиардами на эллипсоиде и плоскими биллиардами внутри эллипса. При этом омбилические точки заменяются фокусами, а сетка эллиптических координат на эллипсоиде — на сетку на плоскости. Для биллиардов на двуполостном гиперболоиде автором доказаны следующие 2 теоремы. Первая утверждает существование взаимно однозначного соответствия между биллиардными столами на двуполостном гиперболоиде и биллиардными столами на плоскости, ограниченными софокусными квадриками. При этом отношение эквивалентности биллиардных столов сохраняется. Вторая теорема утверждает существование взаимно однозначного соответствия между плоскими биллиардными системами (ограниченными софокусными квадриками) и геодезическими биллиардными системами на двуполостном гиперболоиде. Это соответствие сохраняет лиувиллеву эквивалентность. Интересно, что для однополостного гиперболоида даже частичного соответствия нет.

Также оказалось, что все найденные геодезические биллиарды на квадриках лиувиллево эквивалентны некоторым известным интегрируемым системам из физики, механики и геометрии.

Литература

1. *V. Dragovich, M. Radnovich*, «Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards», Regul. Chaotic Dyn., 14:4-5 (2009), 479-494.

2. *В. Драгович, М. Раднович*, Интегрируемые биллиарды, квадрики и многомерные поризмы Понселе, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», М. - Ижевск, 2010, 338 с.

3. *В. В. Фокичева*, «Описание особенностей системы “биллиард в эллипсе”», Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех., 2012, No 5, 31 - 34; англ. пер.: V. V. Fokicheva, «Description of singularities for system “billiard in an ellipse”», Moscow Univ. Math. Bull., 67:5-6 (2012), 217-220.

4. *В. В. Фокичева*, «Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами и гиперболами», Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Ма- тем. Мех., 2014, No 4, 18-27; англ. пер.: V. V. Fokicheva, «Description of singularities for billiard systems bounded by confocal ellipses or hyperbolas», Moscow Univ. Math. Bull., 69:4 (2014), 148-158.

О ВЛИЯНИИ ЛИНЕЙНО ВОЗРАСТАЮЩЕГО ВДУВА И ЛИНЕЙНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ФАКТОРА НА ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛОВ ГИПЕРЗВУКОВОЙ АЭРОДИНАМИКИ

©2020 *Г. Г. Бильченко (мл.)*, *Н. Г. Бильченко*
(Казань; *ggbil2@gmail.com*; *bilchnat@gmail.com*)

В данной работе, продолжающей исследования свойств полученной с помощью метода обобщённых интегральных соотношений А. А. Дородницына [1] математической модели ламинарного пограничного слоя (ЛПС) электропроводящего газа на проницаемых цилиндрических и сферических поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов (ГЛА) [2–7], рассматривается влияние следующего сочетания управляющих воздействий: **линейно возрастающего** вдува, **линейного** температурного фактора и **постоянного** магнитного поля на интегральные характеристики тепломассообмена и трения и суммарную мощность системы, обеспечивающей вдув.

1. Постановка задачи. В прямой задаче [7]

$$(m, \tau_w, s) \to (q, f, \eta; Q, F, N) \tag{1}$$

по заданным управлениям: $m(x)$ − *вдуву* в ЛПС, где $x \in X = [0; 1]$, а ось x направлена вдоль контура тела; $\tau_w(x) = T_w(x)/T_{e_0}$ − *температурному фактору*, где $T_w(x)$ − температура стенки, а T_{e_0} − температура в точке торможения $x_0 = 0$ потока; $s(x) = \sigma B_0^2(x)$ − *магнитному полю* требуется рассчитать параметры $\theta_0\,(x; m, \tau_w, s)$, $\theta_1\,(\ldots)$, $\omega_0\,(\ldots)$, $\omega_1\,(\ldots)$ математической модели ЛПС [2, 7] для случаев обтекания боковой поверхности кругового цилиндра и поверхности сферического носка. Для нахождения параметров θ_0, $\ldots$, ω_1 ЛПС применяется **объединённая** аппроксимирующая система обыкновенных дифференциальных уравнений

(5)–(8) [7] с начальными условиями, полученными из **объединённой** нелинейной алгебраической системы (10)–(13) [7]. После этого определяются локальный тепловой поток $q\,(x; m, \tau_w, s)$; локальное напряжение трения $f\,(x; m, \tau_w, s)$; локальная мощность $\eta\,(x; m, \tau_w, s)$ системы, обеспечивающей вдув. Затем (для $x_k = 1$) определяются **интегральный тепловой поток** (2) [7]

$$Q\,(m, \tau_w, s) = \int_0^{x_k} (2\pi r)^{k_4} \left(\frac{\lambda}{C_p} \frac{\partial H}{\partial y} \right)_{y=0} \cdot dx\,; \tag{2}$$

суммарная сила трения Ньютона (3) [7]

$$F\,(m, \tau_w, s) = \int_0^{x_k} (2\pi r)^{k_4} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \cdot dx\,; \tag{3}$$

вычисляемая с использованием фильтрационного закона Дарси **суммарная мощность** (4) [7]

$$N\,(m, \tau_w, s) = \int_0^{x_k} (2\pi r)^{k_4} a v_w^2(x) \cdot dx \tag{4}$$

системы, обеспечивающей вдув. В (2)–(4) коэффициент $k_4 = 0$ для боковой поверхности цилиндра, $k_4 = 1$ для поверхности сферического носка с радиусом $r(x)$.

2. Вычислительные эксперименты. Пусть фиксированы значения *неизменяемых параметров*:

$$\text{число Маха} \quad M_\infty \in [10; 40]\,; \tag{5}$$

$$\text{высота полёта} \quad H \in [10; 30]\,[\text{км}]\,; \tag{6}$$

$$\text{радиус тела} \quad R \in [0{,}1; 1]\,[\text{м}]\,. \tag{7}$$

Пусть диапазоны изменения *управляющих параметров* ограничены:

$$m \in M^c = [0; 1]\,; \tag{8}$$

$$\tau_w \in T^c_{\text{pr}} = [0{,}15; 0{,}9]\,, \quad T^c_{\text{pr}} \subset T^c_{\text{th}} = [0; 1]\,; \tag{9}$$

$$s \in S^c = [0; 5 \cdot 10^4]\,[\text{Тл}/(\text{Ом} \cdot \text{м})]\,. \tag{10}$$

Далее индекс “w” параметра τ_w и размерность $[\text{Тл}/(\text{Ом} \cdot \text{м})]$ параметра s опущены. Обозначим

$$M^d_{05} = \{0; 0{,}05; \ldots; 1\} \subset M^c; \tag{11}$$

$$M^d_{25} = \{0; 0{,}25; 0{,}5; 0{,}75; 1\} \subset M^d_{05}\,; \tag{12}$$

$$M^d_{25'} = \{0{,}25; 0{,}5; 0{,}75\} \subset M^d_{25}\,; \tag{13}$$

$$T^d_{05,\text{th}} = \{0; 0{,}05; \ldots; 0{,}95; 1\} \subset T^c_{\text{th}}\,; \tag{14}$$

$$T^d_{05,\text{pr}} = \{0{,}15; 0{,}2; \ldots; 0{,}9\} = T^d_{05,\text{th}} \cap T^c_{\text{pr}}\,; \tag{15}$$

$$T^d_{15} = \{0{,}15; 0{,}3; \ldots; 0{,}9\} \subset T^d_{05,\text{pr}}\,; \tag{16}$$

$$T^d_{15'} = \{0{,}15; 0{,}45; 0{,}6\} \subset T^d_{15}\,; \tag{17}$$

$$S^d_{25} = \{0; 2{,}5 \cdot 10^4; 5 \cdot 10^4\} \subset S^c. \tag{18}$$

Линейный вдув $m(x)$, определяемый законом (8) [8]

$$m(x) = m(x; m_0, m_1) = m_0 \cdot (1 - x) + m_1 \cdot x =$$
$$= m_0 + m' \cdot x\,, \quad \text{где} \quad m_0\,, m_1 \in M^c, \quad m' = m_1 - m_0\,, \tag{19}$$

назовём [9] *возрастающим* (для $m' > 0$) или *убывающим* (для $m' < 0$) *слабо* при $|m'| \in (0; 0{,}3)$, *умеренно* при $|m'| \in [0{,}3; 0{,}7)$, *сильно* при $|m'| \in [0{,}7; 1]$.

Линейный температурный фактор $\tau(x)$, определяемый законом (8) [10]

$$\tau(x) = \tau(x; \tau_0, \tau_1) = \tau_0 \cdot (1 - x) + \tau_1 \cdot x =$$
$$= \tau_0 + \tau' \cdot x\,, \quad \text{где} \quad \tau_0\,, \tau_1 \in T^c, \quad \tau' = \tau_1 - \tau_0\,, \tag{20}$$

назовём [9] *возрастающим* (для $\tau' > 0$) или *убывающим* (для $\tau' < 0$) *слабо* при $|\tau'| \in (0; 0{,}25)$, *умеренно* при $|\tau'| \in [0{,}25; 0{,}5)$, *сильно* при $|\tau'| \in [0{,}5; 0{,}75]$.

На рис. 1–6 представлены (символ “$\diamond$”) результаты вычислительных экспериментов (для удобства сравнения с [3–7] выполненных для воздуха в атмосфере Земли при $H = 10$ [км], $M_\infty = 10$, $R = 0{,}1$ [м]), для случаев [9, 11]

$$(m' = +0{,}25; \tau' = +0{,}15), \quad (m' = +0{,}25; \tau' = -0{,}15),$$
$$(m' = +0{,}25; \tau' = +0{,}45), \quad (m' = +0{,}25; \tau' = -0{,}45),$$
$$(m' = +0{,}50; \tau' = +0{,}15), \quad (m' = +0{,}50; \tau' = -0{,}15)$$

управлений (19), (20) при $m_0, m_1 \in M^d_{25}$, $\tau_0, \tau_1 \in T^d_{15}$, $s \equiv 0$.

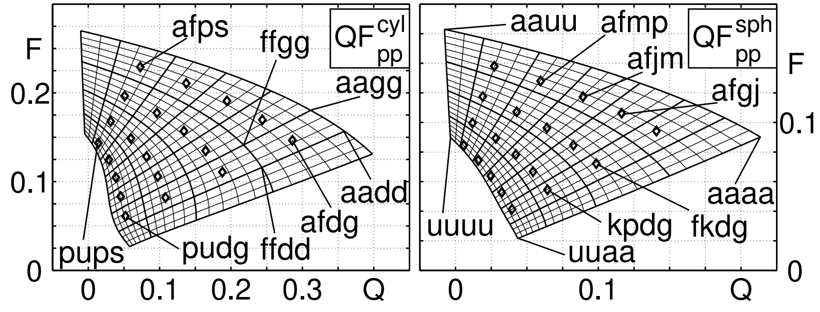


Рис. 1. Случай $m' = +0{,}25$, $\tau' = +0{,}15$, $s \equiv 0$

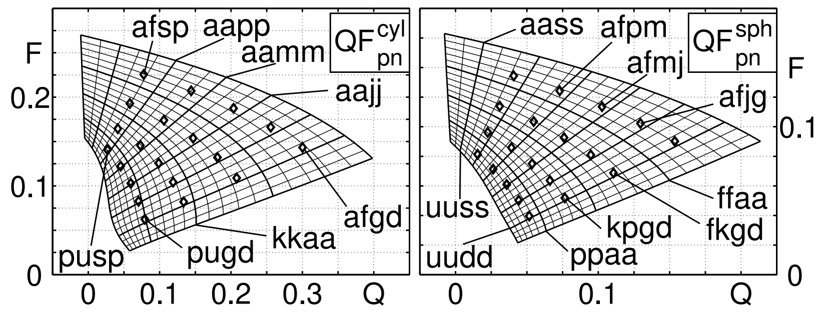


Рис. 2. Случай $m' = +0{,}25$, $\tau' = -0{,}15$, $s \equiv 0$

Сопоставляя [8, 10] элементам множеств M^d_{05} и $T^d_{05,\text{th}}$ буквы латинского алфавита от “a” до “u”, элементам $T^d_{05,\text{pr}}$ – буквы от “d” до “s”, отметим положение пар (Q, F) для некоторых сочетаний управлений. Например, “afdg” соответствует

($m_0 = 0{,}0$; $m_1 = 0{,}25$; $\tau_0 = 0{,}15$; $\tau_1 = 0{,}3$). На рис. 1–6 представлены образы линий двух семейств [7]

$$M = \Big\{ \big\{ (m, \tau, s) \,\big|\, m = Const \in M^c \big\} \,\Big|\, \tau = Const \in T^d_{05},\, s \equiv 0 \Big\},$$
$$T = \Big\{ \big\{ (m, \tau, s) \,\big|\, \tau = Const \in T^c \big\} \,\Big|\, m = Const \in M^d_{05},\, s \equiv 0 \Big\}.$$

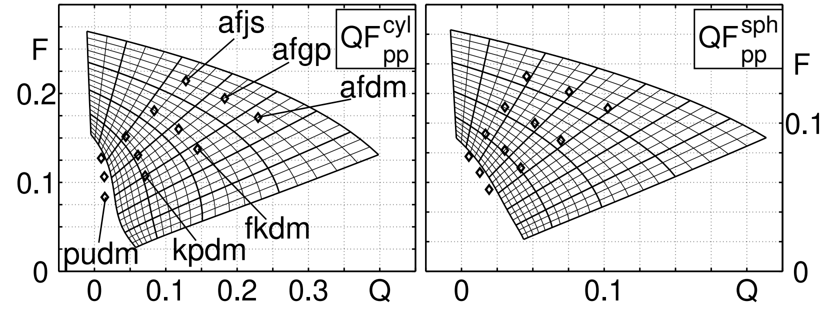


Рис. 3. Случай $m' = +0{,}25$, $\tau' = +0{,}45$, $s \equiv 0$

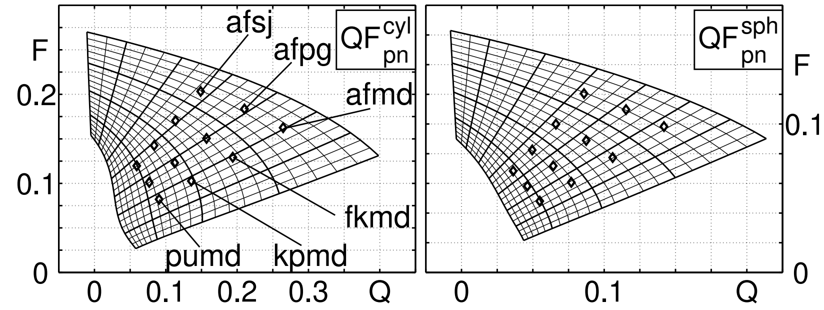


Рис. 4. Случай $m' = +0{,}25$, $\tau' = -0{,}45$, $s \equiv 0$

3. Замечания. 1) Исследование влияния другого сочетания управляющих воздействий: **линейно убывающего** вдува, **линейного** температурного фактора и **постоянного** магнитного поля на интегральные характеристики тепломассообмена и трения и суммарную мощность системы, обеспечивающей вдув, проводится в работе [12].

2) Графики параметров $\theta_0(x), \ldots, \omega_1(x)$ математической модели ЛПС и локальных зависимостей $q(x)$ и $f(x)$ представлены в [9, 11].

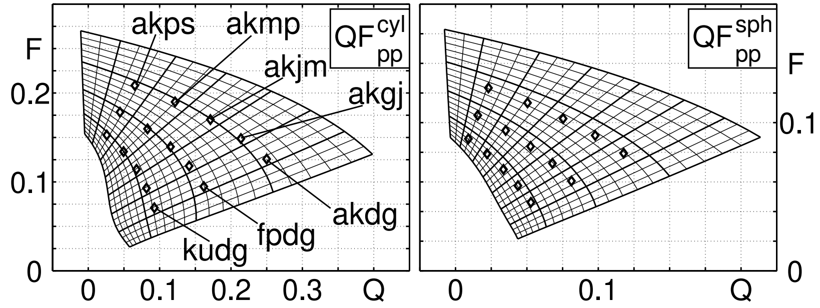


Рис. 5. Случай $m' = +0{,}50$, $\tau' = +0{,}15$, $s \equiv 0$

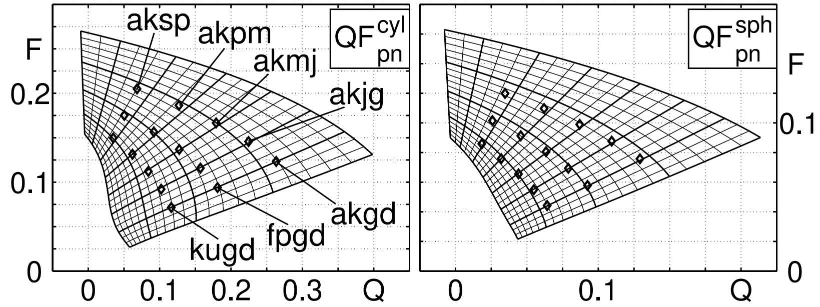


Рис. 6. Случай $m' = +0{,}50$, $\tau' = -0{,}15$, $s \equiv 0$

Литература

1. *Дородницын А. А.* Об одном методе решения уравнений ламинарного пограничного слоя // Прикладная математика и техническая физика. — 1960. — № 3. — С. 111–118.

2. *Бильченко Н. Г.* Метод А. А. Дородницына в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2016. — № 1. — С. 5–14.

3. *Бильченко Н. Г.* Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. — 2015. — № 1. — С. 83–94.

4. *Бильченко Н. Г.* Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях тел вращения при гиперзвуковых режимах полёта // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2015. — № 1. — С. 5–8.

5. *Бильченко Н. Г.* Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта: сравнительный анализ применения “простых” законов вдува // Вестник Воронеж гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. — 2015. — № 1. — С. 95–102.

6. *Бильченко Н. Г.* Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2016. — № 3. — С. 5–11.

7. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Анализ влияния постоянных управляющих воздействий на область значений функционалов гиперзвуковой аэродинамики // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2018. — № 2. — С. 5–13.

8. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Анализ влияния линейного вдува и постоянного температурного фактора на параметры математической модели и локальные характеристики тепломассообмена и трения на проницаемых поверхностях ГЛА // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Си-

стемный анализ и информационные технологии. — 2019. — № 2. — С. 5–14.

9. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Анализ влияния линейно возрастающего вдува и линейно возрастающего температурного фактора на параметры математической модели и локальные характеристики тепломассообмена и трения на проницаемых поверхностях ГЛА // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2019. — № 3. — С. 53–62.

10. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Анализ влияния линейного температурного фактора и постоянного вдува на параметры математической модели и локальные характеристики тепломассообмена и трения на проницаемых поверхностях ГЛА // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2019. — № 2. — С. 15–22.

11. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Анализ влияния линейно возрастающего вдува и линейно убывающего температурного фактора на параметры математической модели и локальные характеристики тепломассообмена и трения на проницаемых поверхностях ГЛА // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2019. — № 4. — С. 5–12.

12. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* О влиянии линейно убывающего вдува и линейного температурного фактора на область значений функционалов гиперзвуковой аэродинамики // «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2020», посвящённая 100-летию М. А. Красносельского: Материалы международной конференции (27–30 января 2020 г.). — Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2020.

О ВЛИЯНИИ ЛИНЕЙНО УБЫВАЮЩЕГО ВДУВА И ЛИНЕЙНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ФАКТОРА НА ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛОВ ГИПЕРЗВУКОВОЙ АЭРОДИНАМИКИ

©2020 *Г. Г. Бильченко (мл.), Н. Г. Бильченко*
(Казань; *ggbil2@gmail.com*; *bilchnat@gmail.com*)

В данной работе, сохраняющей все обозначения и сокращения работы [1] и продолжающей исследование свойств полученной с помощью метода обобщённых интегральных соотношений А. А. Дородницына математической модели ЛПС электропроводящего газа на проницаемых цилиндрических и сферических поверхностях ГЛА, рассматривается влияние следующего сочетания управляющих воздействий: **линейно убывающего** вдува, **линейного** температурного фактора и **постоянного** магнитного поля на интегральные характеристики тепломассообмена и трения и суммарную мощность системы, обеспечивающей вдув.

1. Вычислительные эксперименты. Результаты вычислительных экспериментов, выполненных в условиях (5)–(10) [1] по схеме [7–11] из [1] для управлений (19), (20) [1] при $m_0\,, m_1 \in M^d_{25}\,,\ \tau_0\,, \tau_1 \in T^d_{15}\,,\ s \equiv 0$, для случаев [2–4]

$$(m' = -0{,}25; \tau' = +0{,}15), \quad (m' = -0{,}25; \tau' = -0{,}15),$$
$$(m' = -0{,}25; \tau' = +0{,}45), \quad (m' = -0{,}25; \tau' = -0{,}45),$$
$$(m' = -0{,}50; \tau' = +0{,}15), \quad (m' = -0{,}50; \tau' = -0{,}15)$$

для воздуха в атмосфере Земли при $H = 10$ [км], $M_\infty = 10$, $R = 0{,}1$ [м], представлены (символ “$\diamond$”) на рис. 1–6.

2. Замечания. 1) Графики параметров $\theta_0\,(x)\,, \ldots, \omega_1\,(x)$ математической модели ЛПС представлены в [2, 3], а локальных зависимостей $q(x)$ и $f(x)$ – в [2, 4].

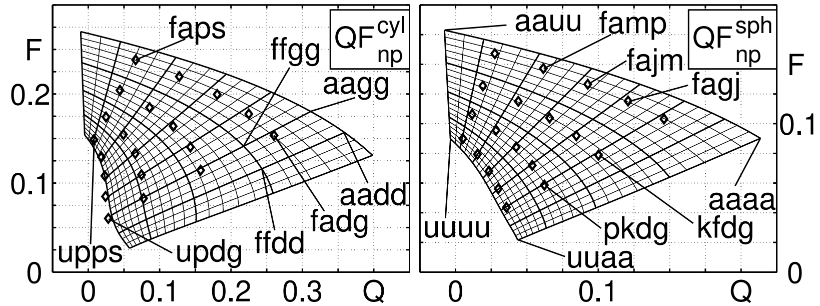


Рис. 1. Случай $m' = -0{,}25$, $\tau' = +0{,}15$, $s \equiv 0$

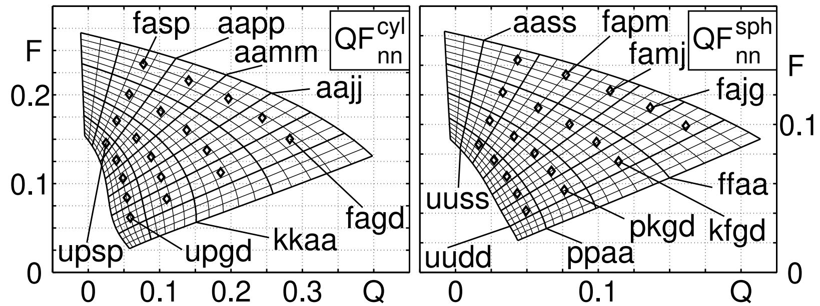


Рис. 2. Случай $m' = -0{,}25$, $\tau' = -0{,}15$, $s \equiv 0$

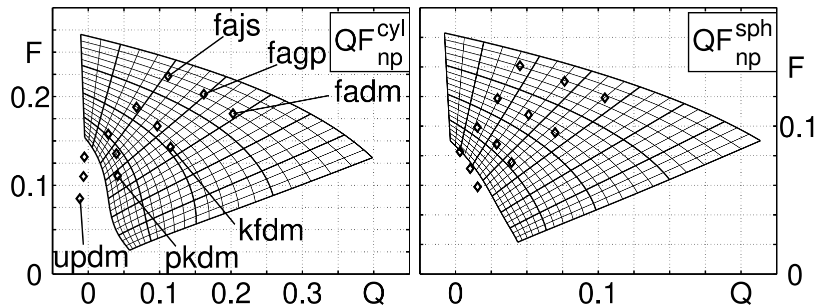


Рис. 3. Случай $m' = -0{,}25$, $\tau' = +0{,}45$, $s \equiv 0$

2) Результаты вычислительных экспериментов, а также результаты [1, 5, 6] могут быть использованы в качестве моделей ограничений (33)–(35) [7] и (45_1)–(45_r) [8] в задачах

синтеза эффективного управления, как на всём участке, так и на его фрагментах.

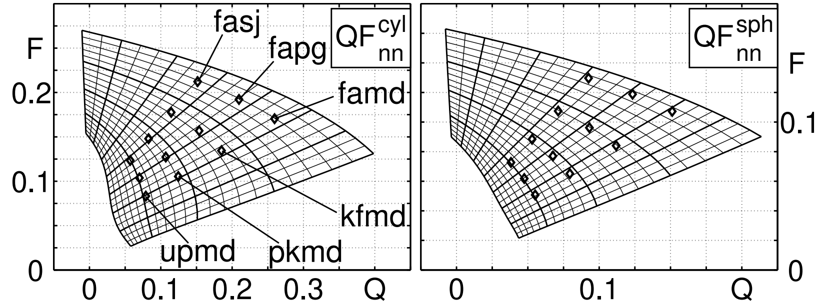


Рис. 4. Случай $m' = -0{,}25$, $\tau' = -0{,}45$, $s \equiv 0$

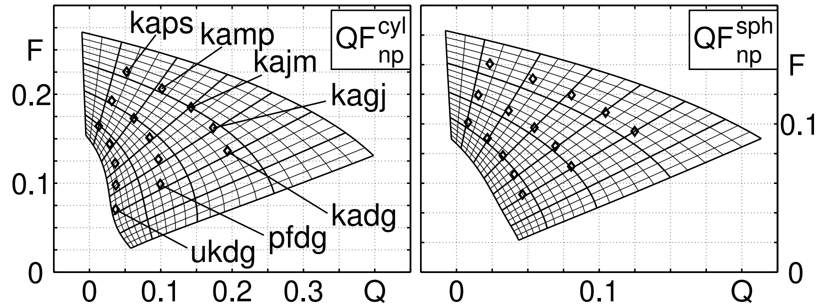


Рис. 5. Случай $m' = -0{,}50$, $\tau' = +0{,}15$, $s \equiv 0$

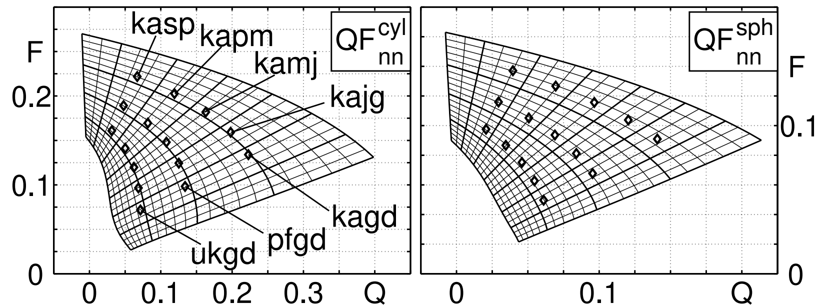


Рис. 6. Случай $m' = -0{,}50$, $\tau' = -0{,}15$, $s \equiv 0$

3) Кроме представленных (здесь и в [1]) зависимостей Q, F, исследовано влияние предложенных сочетаний m и τ на Q, F, N при различных постоянных значениях $s \in S_{25}^{d}$ магнитного поля.

Литература

1. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* О влиянии линейно возрастающего вдува и линейного температурного фактора на область значений функционалов гиперзвуковой аэродинамики // «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2020», посвящённая 100-летию М. А. Красносельского: Материалы международной конференции (27–30 января 2020 г.). — Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2020.

2. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Анализ влияния линейно убывающего вдува и линейно возрастающего температурного фактора на параметры математической модели и локальные характеристики тепломассообмена и трения на проницаемых поверхностях ГЛА // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2019. — № 4. — С. 13–20.

3. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* О влиянии линейно убывающего вдува и линейно убывающего температурного фактора на локальные характеристики тепломассообмена и трения на проницаемых поверхностях ГЛА // «Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения–2019»: Материалы научной конференции, 8–12 апреля 2019 г. — СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2019. — С. 33–38.

4. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* О влиянии линейно убывающего вдува и линейно убывающего температурного фактора на параметры математической модели на проницаемых поверхностях ГЛА // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: Сборник трудов XII Международной научной конференции «ПМТУКТ–2019», Воронеж, 25–28 сентября 2019 г. — Воронеж: ВГУИТ, 2019. — С. 87–90.

5. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* О влиянии линейного вдува и постоянного температурного фактора на интегральные характеристики тепломассообмена и трения на проницаемых поверхностях ГЛА // «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики»: Сборник трудов Международной научно-технической конференции, Воронеж, 11–13 ноября 2019 г. — Воронеж: Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2019.

6. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* О влиянии линейного температурного фактора и постоянного вдува на интегральные характеристики тепломассообмена и трения на проницаемых поверхностях ГЛА // «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики»: Сборник трудов Международной научно-технической конференции, Воронеж, 11–13 ноября 2019 г. — Воронеж: Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2019.

7. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. IV. Классификация задач на всём участке управления // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2018. — № 3. — С. 5–12.

8. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. V. Смешанные задачи на фрагментах участка управления // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2018. — № 3. — С. 13–22.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ КРИВЫХ, ЗАДАВАЕМЫХ ОПРЕДЕЛЯЮЩИМИ УРАВНЕНИЯМИ. ЧАСТЬ 2

©2020 *Г. Г. Бильченко (ст.)*
(Казань; *ggbil40@gmail.com*)

Рассматривается движение механической системы, состоящей из носителя и груза, совершающего заданное движение по отношению к носителю [1–3]. В алгоритмах установления типа двусторонних движений носителя по горизонтальной плоскости используются определяющие выражения [4].

В рассматриваемом сообщении устанавливается важное свойство определяющих уравнений, записанных для определяющих выражений $I_2(\varphi;\beta)$ и $I_3(\varphi;\beta)$ – отсутствие других точек пересечения, кроме единственной точки $M_0(0;\beta_0)$ [5].

Ключевые слова: носитель, груз, угол установки канала, определяющие уравнения, двусторонние движения носителя.

1. Дифференциальные уравнения движения носителя.

Рассматривается движение механической системы, состоящей из носителя и груза [1–4]. Носитель, располагаясь всё время в горизонтальной плоскости, двигается поступательно по прямолинейной траектории. Носитель имеет прямолинейный канал, по которому может перемещаться груз. Ось канала расположена в вертикальной плоскости, проходящей через траекторию носителя. Пусть закон движения груза в канале задан в виде $\ell \cdot \sin(\omega t)$, где $\ell = const$, $\omega = const$, а силы сопротивления среды движению носителя моделируются силами типа кулонова трения. Тогда дифференциальные уравнения движения носителя (ДУДН), согласно [1, 2], будут следующими

$$\ddot{x} = \beta \cdot (\cos\varphi + f \cdot \sin\varphi) \cdot \sin(\omega t) - \gamma \qquad \text{при} \quad \dot{x} > 0\,; \tag{1}$$

$$\ddot{x} = \beta \cdot (\cos\varphi - f \cdot \sin\varphi) \cdot \sin(\omega t) + \gamma \qquad \text{при} \quad \dot{x} < 0\,; \tag{2}$$

$$\ddot{x} = 0 \qquad \text{при} \quad \dot{x} = 0\,, \tag{3}$$

где x – координата носителя; φ – угол установки канала; $\beta = \ell \cdot \omega^2 \cdot \dfrac{m}{m+M}$; $\gamma = g \cdot f$; M – масса носителя; m – масса груза; g – ускорение свободного падения; f – коэффициент трения скольжения в движении, равный коэффициенту трения скольжения в покое, для пары материалов «носитель – подстилающая горизонтальная плоскость». Пусть угол установки канала

$$0 \le \varphi < \frac{\pi}{2}\,. \tag{4}$$

Предполагается, что выполнено неравенство [3]

$$\beta \cdot \sin\varphi \le g\,, \tag{5}$$

которое гарантирует безотрывное от горизонтальной плоскости движение носителя. Если $\beta \ge g$, то из (5) вытекает вместо (4) ограничение на угол установки канала

$$0 \le \varphi \le \arcsin\left(\frac{g}{\beta}\right). \tag{6}$$

2. Условия двусторонних движений носителя из состояния покоя.

Условием того, чтобы ДУДН (1) имело место в действительной динамике носителя является неравенство

$$\beta \cdot (\cos\varphi + f \cdot \sin\varphi) > \gamma\,, \tag{7}$$

а условием реализации ДУДН (2) в действительной динамике будет неравенство

$$\beta \cdot (\cos\varphi - f \cdot \sin\varphi) > \gamma\,. \tag{8}$$

При этом, так как $\varphi \geq 0$, то $\cos\varphi + f \cdot \sin\varphi > 0$ всегда, а из требования $\cos\varphi - f \cdot \sin\varphi > 0$ вытекает ограничение на угол установки канала в виде

$$0 \leq \varphi < \operatorname{arctg}\frac{1}{f}\,. \tag{9}$$

Ранее [3] было установлено, что если

$$\beta > \frac{\gamma}{\sqrt{1+f^2}}\,, \tag{10}$$

а $\varphi \in \overrightarrow{\Phi} \equiv (\overrightarrow{\varphi}_1; \overrightarrow{\varphi}_2)$, где

$$\overrightarrow{\varphi}_1(\beta) = 2\operatorname{arctg}\frac{\beta \cdot f - \sqrt{\beta^2(1+f^2)-\gamma^2}}{\beta+\gamma}\,,$$

$$\overrightarrow{\varphi}_2(\beta) = 2\operatorname{arctg}\frac{\beta \cdot f + \sqrt{\beta^2(1+f^2)-\gamma^2}}{\beta+\gamma}\,,$$

то носитель может двигаться из состояния покоя в положительном направлении оси Ox, т.е., ДУДН (1) может иметь место в действительной динамике носителя.

Если (10) выполнено, а $\varphi \in \overleftarrow{\Phi} \equiv (\overleftarrow{\varphi}_1; \overleftarrow{\varphi}_2)$, где $\overleftarrow{\varphi}_1 = -\overrightarrow{\varphi}_2$, $\overleftarrow{\varphi}_2 = -\overrightarrow{\varphi}_1$, то носитель может двигаться из состояния покоя в отрицательном направлении оси Ox, т.е., ДУДН (2) может иметь место.

Было показано [3], что если

$$\beta > \gamma\,, \tag{11}$$

а угол установки канала $\varphi \in \overleftrightarrow{\Phi} \equiv (\overrightarrow{\varphi}_1; \overleftarrow{\varphi}_2)$, то из состояния покоя носитель может двигаться как в положительном, так и в отрицательном направлении оси Ox, т.е., могут реализовываться ДУДН (1) и (2).

Тогда, с учётом (6), двусторонние движения носителя из состояния покоя в рассматриваемом случае возможны, если

$$\varphi \in [0; \overleftarrow{\varphi}_2(\beta)) \qquad \text{при} \qquad \beta_1 < \beta < \beta_2\,; \tag{12.1}$$

$$\varphi \in \left[0; \arcsin\left(\frac{g}{\beta}\right)\right] \qquad \text{при} \qquad \beta_2 \leq \beta\,, \tag{12.2}$$

где $\beta_1 = \gamma$; $\beta_2 = g \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot f^2}$ – корень уравнения

$$2\operatorname{arctg}\frac{-\beta_2 \cdot f + \sqrt{\beta_2^2(1+f^2)-\gamma^2}}{\beta_2+\gamma} = \arcsin\left(\frac{g}{\beta_2}\right). \tag{13}$$

3. Определяющие уравнения.

Пусть угол установки канала таков, что выполняются условия (12). При этом вводятся

$$\tau_+ = \frac{1}{\omega}\arcsin\frac{\gamma_+}{\beta}\,, \qquad \tau_- = \frac{1}{\omega}\arcsin\frac{\gamma_-}{\beta}\,,$$

где

$$\gamma_+ = \frac{\gamma}{\cos\varphi + f \cdot \sin\varphi}\,, \qquad \gamma_- = \frac{\gamma}{\cos\varphi - f \cdot \sin\varphi}\,.$$

Затем, следуя [4], выделяются определяющие выражения

$$I_1(\varphi;\beta) = \sqrt{\beta^2-\gamma_+^2} + \sqrt{\beta^2-\gamma_-^2} -$$
$$- \gamma_+ \cdot \left[\pi + \arcsin\left(\frac{\gamma_-}{\beta}\right) - \arcsin\left(\frac{\gamma_+}{\beta}\right)\right];$$
$$I_2(\varphi;\beta) = \sqrt{\beta^2-\gamma_+^2} + \sqrt{\beta^2-\gamma_-^2} -$$
$$- \gamma_- \cdot \left[\pi + \arcsin\left(\frac{\gamma_+}{\beta}\right) - \arcsin\left(\frac{\gamma_-}{\beta}\right)\right];$$
$$I_3(\varphi;\beta) = \sqrt{\beta^2-\gamma_+^2} - \frac{\gamma\pi}{\cos\varphi} +$$

$$+\beta\cdot\cos\left[\arcsin\left(\frac{\gamma_+}{\beta}\right)+\pi\cdot f\cdot\operatorname{tg}\varphi\right],$$

используя которые, можно записать определяющие уравнения

$$I_1(\varphi;\beta)=0\,; \tag{14}$$

$$I_2(\varphi;\beta)=0\,; \tag{15}$$

$$I_3(\varphi;\beta)=0\,. \tag{16}$$

Определяющее выражение $I_3(\varphi;\beta)$ привлекается для установления типа движения носителя, когда $I_1(\varphi;\beta)>0$ и $I_2(\varphi;\beta)>0$. При этом [4]

$$\int\limits_{\tau_+}^{\frac{T}{2}+\tau_-}\Big[\beta\cdot(\cos\varphi+f\cdot\sin\varphi)\cdot\sin(\omega t)-\gamma\Big]\cdot dt>0 \tag{17}$$

и

$$-\int\limits_{\frac{T}{2}+\tau_-}^{T+\tau_+}\Big[\beta\cdot(\cos\varphi-f\cdot\sin\varphi)\cdot\sin(\omega t)+\gamma\Big]\cdot dt>0\,. \tag{18}$$

Неравенства (17) и (18) приводятся к виду

$$\beta\left[\cos(\omega\tau_+)+\cos(\omega\tau_-)\right]-\gamma_+\left[\pi+\omega\tau_--\omega\tau_+\right]>0 \tag{19}$$

и

$$\beta\left[\cos(\omega\tau_+)+\cos(\omega\tau_-)\right]-\gamma_-\left[\pi+\omega\tau_+-\omega\tau_-\right]<0\,. \tag{20}$$

Неравенства (19) и (20) сводятся к одному неравенству

$$\gamma_-\left[\pi+\omega\tau_+-\omega\tau_-\right]>\gamma_+\left[\pi+\omega\tau_--\omega\tau_+\right],$$

которое принимает вид

$$\arcsin\left(\frac{\gamma_-}{\beta}\right)-\arcsin\left(\frac{\gamma_+}{\beta}\right)<\pi\cdot f\cdot\operatorname{tg}\varphi\,, \tag{21}$$

т.е., при $I_1(\varphi;\beta)>0$ и $I_2(\varphi;\beta)>0$ рассматриваются только такие механические системы «носитель – груз», параметры которых удовлетворяют условию (21).

Если $\varphi=0$, то

$$\gamma_+=\gamma_-=\gamma=g\cdot f\,,$$

$$I_2=I_3=I=2\sqrt{\beta^2-\gamma^2}-\gamma\cdot\pi\,,$$

а (15) и (16) приводятся к одному виду $I=0$. Откуда

$$\beta_0=\gamma\cdot\frac{\sqrt{\pi^2+4}}{2}\,. \tag{22}$$

Т.е., на плоскости $(\varphi;\beta)$ кривые, задаваемые уравнениями (15) и (16), имеют одну общую точку $M_0(0;\beta_0)$.

Пусть теперь $\varphi\neq0$. Покажем, что на плоскости $(\varphi;\beta)$ в области, где определённые условиями (12) допустимы двусторонние движения носителя из состояния покоя, не существует ни одной точки $M_*(\varphi_*;\beta_*)$, в которой $I_2(\varphi_*;\beta_*)=0$ и $I_3(\varphi_*;\beta_*)=0$, отличной от точки $M_0(0;\beta_0)$.

Сделаем предположение, что такая точка найдётся, т.е., определяющие уравнения (15) и (16) совместны при условии (21).

При этом несовпадающие члены уравнений (15) и (16) должны быть равными, т.е.,

$$\sqrt{\beta^2-\gamma_-^2}-\gamma_-\cdot\left[\pi+\arcsin\left(\frac{\gamma_+}{\beta}\right)-\arcsin\left(\frac{\gamma_-}{\beta}\right)\right]=$$

$$=\beta\cdot\cos\left[\arcsin\left(\frac{\gamma_+}{\beta}\right)+\pi\cdot f\cdot\operatorname{tg}\varphi\right]-\frac{\gamma\pi}{\cos\varphi}\,. \tag{23}$$

После замены $\beta=k\cdot\gamma_-$, где $k>1$, условие (21) запишется в виде

$$\arcsin\left(\frac{1}{k}\right)-\arcsin\left(\frac{1}{k}\cdot\frac{1-z}{1+z}\right)<\pi\cdot z\,, \tag{24}$$

а уравнение (23) будет иметь вид

$$k \cdot \cos \left[\arcsin \left(\frac{1}{k} \cdot \frac{1-z}{1+z} \right) + \pi \cdot z \right] +$$

$$+ \arcsin \left(\frac{1}{k} \cdot \frac{1-z}{1+z} \right) + \pi \cdot z = \sqrt{k^2 - 1} + \arcsin \left(\frac{1}{k} \right), \quad (25)$$

где $z = f \cdot \operatorname{tg} \varphi$. Уравнение (25) удовлетворяется если

$$\arcsin \left(\frac{1}{k} \cdot \frac{1-z}{1+z} \right) + \pi \cdot z = \arcsin \left(\frac{1}{k} \right),$$

т.е.,

$$\arcsin \left(\frac{1}{k} \right) - \arcsin \left(\frac{1}{k} \cdot \frac{1-z}{1+z} \right) = \pi \cdot z \,. \qquad (26)$$

Уравнение (26) противоречит условию (24), что доказывает факт отсутствия других точек пересечения кривых, задаваемых определяющими уравнениями (15) и (16), кроме единственной точки $M_0\,(0; \beta_0)$.

Заключение. Установленные в Частях 1 и 2 свойства кривых, задаваемых определяющими уравнениями $I_1 = 0$, $I_2 = 0$ и $I_3 = 0$, гарантируют разбиение области плоскости $(\varphi; \beta)$, где определённые условиями (12) допустимы двусторонние движения носителя из состояния покоя, на подобласти, в каждой из которых будет своя комбинация значений определяющих выражений, что используется в процессе установления типа движений носителя.

Литература

1. *Бильченко Г. Г.* Влияние подвижного груза на динамику носителя // Тезисы докладов международной конференции «Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы», посвящённой памяти профессора В. Ф. Демьянова (CNSA – 2017, г. Санкт-Петербург, 22–27 мая 2017 г.). — Ч. I. — СПб.: Изд-во ВВМ, 2017. — С. 218–224.

2. *Бильченко Г. Г.* Влияние подвижного груза на движение носителя // Аналитическая механика, устойчивость и управление: Труды XI Международной Четаевской конференции. – Т. 1. Секция 1. Аналитическая Механика. Казань, 13–17 июня 2017 г. — Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017. — С. 37–44.

3. *Бильченко Г. Г.* Движение носителя с подвижным грузом по горизонтальной плоскости // Сборник материалов международной конференции «XXVIII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам» (КРОМШ – 2017). Секции 1–4. — Симферополь: ДИАЙПИ, 2017. — С. 58–61.

4. *Бильченко Г. Г.* Алгоритмы установления типа двусторонних движений носителя с подвижным грузом по горизонтальной плоскости // «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики»: Сборник трудов Международной научно-технической конференции, Воронеж, 17–19 декабря 2018 г. — Воронеж: Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2019. — С. 605–611.

5. *Бильченко Г. Г.* Об одном свойстве кривых, задаваемых определяющими уравнениями. Часть 1. // «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики»: Сборник трудов Международной научно-технической конференции, Воронеж, 11–13 ноября 2019 г. — Воронеж: Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2019.

О РАЗВИТИИ ТЕОРИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ВКЛАДЕ М.А. КРАСНОСЕЛЬСКОГО[1]

©2020 *Е. М. Богатов*
(Старый Оскол, Губкин; *embogatov@inbox.ru*)

В начале XX в. в математическом мире обнаружился интерес к матрицам вида

$$A = \{a_{ij} \geq 0\}. \qquad (1)$$

С одной стороны, это было связано с изучением малых колебаний упругих континуумов (развитие идей Ш.Ф. Штурма), а с другой - с появлением марковских цепей и стохастических матриц. Первые результаты о положительных собственных значениях матриц (1) были получены О. Перроном и Ф.Г. Фробениусом в 1907-1908 гг. [1][2].

Исследования И. Фредгольма и Д. Гильберта открыли дорогу для обобщения теоремы Перрона-Фробениуса[3] на интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода с положительным ядром. Это обобщение было выполнено учеником Фробениуса Р. Ентчем в 1912г. [1].

Более интересные результаты были получены московским математиком П.С. Урысоном в 1918 г. [1] в контексте исследования положительной разрешимости нелинейного уравнения

$$y = \mu \int_a^b K(x, s, y(s))ds. \qquad (2)$$

[1]Работа выполнена при поддежке РФФИ, проект 20-011-00402.

[2]Ссылка на работу [1] здесь и далее означает, что в ней имеются выходные данные статей цитируемых в тексте авторов.

[3]О существовании наибольшего по модулю собственного значения матрицы (1).

Урысон доказал существование положительных собственных значений (2), пользуясь методом последовательных приближений и оценил спектральный интервал порождённого задачей (2) оператора.

В 1935 г. П.С. Александров и Х. Хопф продемонстрировали оригинальный подход к доказательству теоремы существования положительных решений матричного уравнения

$$Ay = \lambda y, \qquad (3)$$

применив теорему Брауэра о неподвижной точке [1].

Дальнейшее продвижение в исследованиях положительных решений (3), где A — положительный оператор произвольной природы, оказалось более естественным проделывать в функционально-аналитическом контексте. Оно было связано с именем М.Г. Крейна, который ввёл понятие конуса K в банахово пространство E и позитивного функционала в K, исследуя проблему моментов[4].

Отметим, что понятие позитивного функционала было также дано в работе Л.В. Канторовича [2] также в рамках исследования проблемы моментов (1937). Более того, конце 1930-х гг. им была создана теория полуупорядоченных пространств, позволяющая, в частности, ответить на вопрос о положительной разрешимости уравнений вида (3) в одной из самых общих постановок [1].

С конца 1930-х гг. М. Крейн вместе со своим учеником М. Рутманом стали активно разрабатывать теорию кону-

[4]Здесь видятся минимум три побудительных мотива. Первый — дальнейшая «геометризация» банаховых пространств в стиле польской математической школы, обобщение теоремы Асколи-Мазура. Второй - возможность развития идей Александрова-Хопфа на основе теоремы Шаудера о неподвижной точке, в которой фигурирует выпуклое подмножество банахова пространства E, инвариантное относительно оператора A. И третий - изоморфность множества положительных функций из пространства $C[a, b]$ некоторому конусу $K \subset E$.

сов в банаховых пространствах. При этом бо́льшая часть результатов была получена ими для линейных операторов (в пространствах с конусом), и уже на их основе стало возможно обобщение теоремы Ентча на нелинейный случай. Итогом 10-летней работы М. Крейна и М. Рутмана стала фундаментальная статья, опубликованная в УМН в 1948 г. [1] и вошедшая в золотой фонд отечественной науки.

Следующий этап в развитии теории положительных операторов ассоциируется с именем М.А. Красносельского и воронежской математической школой [3]. С 1947 по 1952 г., Красносельский работал в НИИ математики АН УССР, посещал семинары М.Г. Крейна по функциональному анализу и Н.Н. Боголюбова по нелинейной механике. Это оказало существенное влияние на его научное мировоззрение. В результате

- теория конусов попала в число приоритетных для Красносельского методов *исследования нелинейных интегральных уравнений*[5];
- знание передовых идей и актуальных задач нелинейной механики[6] дало возможность для проверки работоспособности разрабатываемых конусных методов.

В исследованиях М.А. Красносельского по теории положительных операторов можно выделить два отправных пункта - теоретический (восходящий к логике развития математики), и прикладной (относящийся к задачам нелинейной механики).

Отметим, что Красносельский не ограничился применением теории конусов к доказательству теорем существования решений уравнений вида (3), как это сделали М. Рутман, Э. Роте и Г. Биркгоф [1]. Он стал рассматривать эту теорию, как дополнительную возможность (наряду с вариационными методами, теорией ветвления и теорией вращения векторных полей) для изучения качественных свойств решений уравнения (3) с нелинейным оператором A, действующим в банаховом пространстве. Сюда, в том числе, входил поиск ответа на вопросы о структуре и кратности спектра A, о структуре множества собственных функций A, об условиях сходимости метода последовательных приближений (3) и др.

Деятельность Красносельского предполагала наличие активных участников научного процесса, в первую очередь студентов и аспирантов. Почти сразу после своего приезда в Воронеж (1952 г.) он привлёк к научной работе в указанной области молодых математиков - Л.А. Ладыженского, И.А. Бахтина, В.Я. Стеценко, Ю.В. Покорного и др. Прицип разработки нового научного направления, характерный для Красносельского, был сформулирован в статье Б.Н. Садовского [4, с.147]:

" ...*Стержнем работы являлся всегда семинар с обязательным привлечением сотрудников факультета, аспирантов и студентов. За 3-4 года по данной тематике готовилось и издавалось в журналах 2-3 десятка публикаций, содержащих оригинальные результаты. Одновременно, с самого начала, обычно писался и текст монографии, который в последующем претерпевал ряд изменений...* "

Итогом 10-летней деятельности созданного Красносельским научного коллектива явилась монография [5], переведённая в 1964 г. на английский язык.

Одним из наиболее интересных (с моей точки зрения) результатов, нашедших своё продолжение в дальнейшем в работах отечественных и зарубежных математиков [6, с. 4-5]

[5] Основной темой исследований М.А. Красносельского в то время.

[6] Модельной задачей, рассматриваемой Красносельским, приводящей к уравнению (2), была задача о продольном изгибе шарнирно-опёртого стержня переменной жёсткости.

явилась так называемая «*конусная теорема Красносельского о неподвижной точке*» [5, гл. 4, §2,4]:

Пусть вполне непрерывный оператор A сжимает или растягивает конус K. Тогда оператор A имеет в конусе K по крайней мере одну неподвижную точку.

Специалист по нелинейному функциональному анализу, профессор М.К. Квонг (КНР) указывает на то, что данная теорема может быть интерпретирована за рамками метрического восприятия и тем самым *поставлена в один ряд с теоремой о неподвижной точке Брауэра-Шаудера* [6, с. 2].

Усилиями Красносельского и его учеников теория положительных операторов внесла весомый вклад в развитие нелинейного функционального анализа (1950-1970 гг.). Отметим здесь появление *новых* типов операторов и теорем о неподвижной точке, *новых* методов исследования спектральных свойств операторов и *ранее неизвестных* применений производных операторов (по конусу).

В докладе будут представлены некоторые подробности развития теории конусов в работах воронежской математической школы и анализ дальнейшего развития этой теории в исследованиях отечественных и зарубежных учёных (1960 – 1980 гг.) с использованием результатов [7].

Литература

1. *Богатов Е.М.* Об истории теории конусов и полуупорядоченных пространств (в контексте развития нелинейного функционального анализа) / В сб. Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVI междунар. конф., посвящ. 80-летию со дня рождения проф. Мишеля Деза (13-18 мая 2019). - Тула, ТГПУ им. Л.Н. Толстого. 2019. с. 322-325.

2. *Канторович Л.В.* К проблеме моментов для конечного интервала // Доклады АН СССР, Т. XIV (1937), вып. 9. С. 531-536.

3. *Садовский Б.Н.* Научная школа М.А. Красносельского в Воронеже / В сб. Материалы к истории математического факультета ВГУ. Воронеж, ВГУ, 1998. с. 34-50.

4. Марк Александрович Красносельский. К 80-летию со дня рождения. Сб. статей. М.: ИППИ РАН, 2000. - 216 с.

5. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. М.: ФИЗМАТГИЗ, 1962. - 394 с.

6. *Kwong M. K.* The topological nature of Krasnoselskii's cone fixed point theorem // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. - 2008. - V. 69. - Iss. 3. - p. 891-897.

7. *Богатов Е.М.* О развитии теории конусов в работах отечественных математиков / В сб. Годичная научная конференция ИИЕТ РАН им. С.И. Вавилова, 2019. Саратов: Амирит, 2019. с. 224-227.

МОДЕЛЬ ОБОБЩЁННОГО ЛЮФТА В УСЛОВИЯХ СТОХАСТИЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ[1]

©2020 *С. В. Борзунов, М. Е. Семенов, П. А. Мелешенко, А. В. Толкачев*
(Воронеж; *mkl150@mail.ru*)

Изучение и моделирование сложных технических систем приводит к необходимости представлять в формальном виде нелинейности гистерезисной природы. Многие физико-химические, биологические и экономические системы демонстрируют гистерезисное поведение, что обуславливается либо их внутренней структурой, либо динамическими особенностями протекающих в таких системах процессов. Работа посвящена обобщению одной из основных моделей гистерезиса — люфта на класс преобразователей, характеристики которых определяются случайными параметрами.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант №19-08-00158-а) и РНФ (грант №19-11-00197).

Физическая модель люфта представляет собой систему, состоящую из цилиндра длины h и поршня, которые могут перемещаться в горизонтальном направлении (см. рис. 1*а*). Положение цилиндра будем считать входной координатой, а положение поршня — выходной. Вход системы в зависимости от времени на конечном интервале $t \in [t_0, T]$ обозначим через $x(t)$, выход — через $u(t)$.

Для вещественных чисел $v_r, v_l \in \mathbb{R}$ рассмотрим *определяющие кривые* $\tilde{\Gamma}_l^{v_l}$, $\tilde{\Gamma}_r^{v_r}$ *обобщённого люфта с параметрами сдвига* v_l, v_r. Такие кривые вводятся согласно правилам: $\tilde{\Gamma}_l^{v_l}\colon u_l(x) = l(x) + v_l$ и $\tilde{\Gamma}_r^{v_r}\colon u_r(x) = r(x) + v_r$. Здесь $l(x)$ и $r(x)$ — функции, отражающие механизм передачи движения цилиндра на движение поршня. Предполагается, что функции $l(x)$ и $r(x)$ удовлетворяют глобальному условию Липшица на всей области определения и монотонно возрастают. Кроме того, пусть выполняется условие отсутствия пересечения положений границ люфта: $\forall x\ (l(x) > r(x))$. Для $v_r, v_l \in \mathbb{R}$, таких, что $l(w) + v_l > r(w) + v_r$ для всех $w \in \mathbb{R}$, и для произвольной непрерывной функции $x : [t_0, T] \to \mathbb{R}$, и $x_0 := x(t_0)$ введём понятие обобщённого люфта. Выход $u(t)$ в каждый момент времени t подчиняется операторному соотношению

$$u(t) = \hat{L}_S[t_0, u_0; \tilde{\Gamma}_l^{v_l}, \tilde{\Gamma}_r^{v_r}]x(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

где t_0 — начальный момент времени, $u_0 := u(t_0)$ — начальное значение функции выхода.

Параметры носителей гистерезисных свойств могут испытывать изменения, связанные со старением материалов или варьироваться за счёт воздействия иных неконтролируемых факторов. В связи с этим возникает необходимость обобщения конструктивных моделей гистерезисных преобразователей, учитывающих вероятностный характер определяющих их параметров. Введём понятие недетерминированного обобщённого люфта. Если считать положения левой

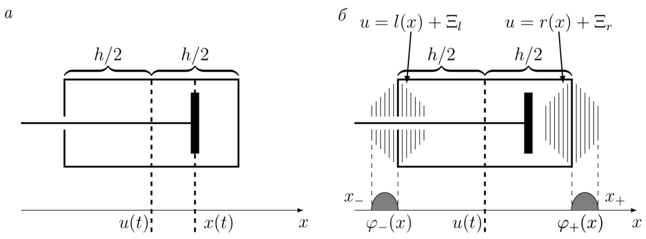


Рис. 1. Схематическое изображение люфта. Панель *а*) — люфт с детерминированными параметрами, *б*) — со стохастическими параметрами. Серой заливкой выделены области под кривыми $\varphi_l(z)$ и $\varphi_r(z)$, определяющими плотность вероятности левой и правой границ цилиндра соответственно

и правой стенок цилиндра распределёнными по случайному закону, то соответствующий преобразователь естественно назвать люфтом со случайными параметрами, или недетерминированным обобщённым люфтом. Предполагаются заданными функции $\varphi_l(x)$ и $\varphi_r(x)$, трактуемые как плотности вероятности, соответствующие положениям левой и правой границ цилиндра соответственно (см. рис. 1*б*). Выход преобразователя-люфта со случайными параметрами будем считать случайным процессом $u(t)$.

Следуя классической схеме [1], определим выход на произвольных входах. Случайный процесс $u(t)$ в каждый момент времени t подчиняется операторному соотношению

$$u(t) = \hat{L}[t_0, u_0; \tilde{\Gamma}_l^{\Xi_l}, \tilde{\Gamma}_r^{\Xi_r}]x(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

где $x_0 = x(t_0)$ и $u_0 = u(t_0)$ — начальные значения функций входа и выхода соответственно. Здесь $\tilde{\Gamma}_l^{\Xi_l}$, $\tilde{\Gamma}_r^{\Xi_r}$ — определяющие кривые люфта, $\tilde{\Gamma}_l^{\Xi_l}\colon u_l = l(x) + \Xi_l$ и $\tilde{\Gamma}_r^{\Xi_r}\colon u_r = r(x) + \Xi_r$,

Ξ_l, Ξ_r — случайные величины с плотностями вероятности $\varphi_l(x)$ и $\varphi_r(x)$ соответственно.

Теорема. *Пусть на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ имеет место равномерная сходимость последовательности кусочно-монотонных функций $\{x_n(t)\}$, $n = 1, 2, \dots$, к функции $x_*(t)$:*

$$x_n(t) \rightrightarrows x_*(t) \quad \forall t \in [t_0, T]. \tag{3}$$

Тогда выход преобразователя представляет собой случайный процесс, сходящийся по распределению к случайному процессу

$$u_*(t) = \hat{L}[u_0, x_0; \tilde{\Gamma}_l^{\Xi_l}, \tilde{\Gamma}_r^{\Xi_r}]x_*(t). \tag{4}$$

Литература

1. *Красносельский М.А., Покровский А.В.* Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983. 272 с.

ПОСТРОЕНИЕ ОПЕРАТОРА ПОЛЗУЧЕСТИ В НЕЛИНЕЙНОЙ НАСЛЕДСТВЕННОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

©2020 *А. П. Бырдин, В. С. Прач, А. А. Сидоренко, О. А. Соколова*

(Россия, Воронеж, ВГТУ; Украина, Донецк, ДНУ;)

При решении задач о нагружении материалов, проявляющих релаксационные свойства и нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями, возникает проблема [1] построения решений нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. В одномерном случае в работе [2] построен рекуррентный алгоритм, позволяющий определять ядра полилинейных операторов, представляющих решения. В настоящей работе обобщаются полученные ранее результаты на случай системы нелинейных интегральных уравнений.

Уравнения закона Гука для нелинейной наследственно-упругой изотропной среды имеют вид

$$\sigma_i = \hat{\lambda}\theta + 2\hat{\mu}\varepsilon_i, \quad \tau_{ij} = 2\hat{\mu}\varepsilon_{ij}, \quad \theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad (i, j = 1, 2, 3), \tag{1}$$

где σ_i, τ_{ij}, ε_i, ε_{ij} — компоненты тензоров напряжений и деформаций, $\hat{\lambda}$, $\hat{\mu}$ — операторы Ламе, выбранные в виде

$$\hat{\lambda} = \lambda_0(\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_3), \quad \hat{\mu} = \mu_0\hat{\mu}_1, \tag{2}$$

где λ_0, μ_0- нерелаксированные значения упругой постоянной Ламе и модуля упругости при сдвиге, а операторы в (2) действуют по правилу

$$\begin{gathered} \hat{\lambda}_1 u(t) = \int_0^t \lambda_1(\tau)u(t-\tau)d\tau, \quad \hat{\mu}_1 u(t) = \int_0^t \mu_1(\tau)u(t-\tau)d\tau, \\ \hat{\lambda}_3 u(t) = \int\int\limits_0^t\int \lambda_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)\prod_{k=1}^3 u(t-\tau_k)d\tau_k, \end{gathered} \tag{3}$$

$\lambda_1(\tau)$, $\mu_1(\tau)$, $\lambda_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ — зависящие от времени ядра наследственности, удовлетворяющие условиям симметрии, принципу затухающей памятии содержащие аддитивно дельта функции [1]

$$\begin{gathered} \lambda_1(t) = \delta(t) - k_1\Lambda_1(t), \quad \mu_1(t) = \delta(t) - k_2 M_1(t), \\ k_1 = \tfrac{\lambda_0 - \lambda_r}{\lambda_0}, \quad k_2 = \tfrac{\mu_0 - \mu_r}{\mu_0}, \end{gathered} \tag{4}$$

λ_r, μ_r — релаксированные значения упругих модулей.

Рассматривая реологические соотношения (1) как уравнения относительно деформаций, получим решение в виде

$$\begin{gathered} \varepsilon_i = 0.5(\hat{\mu}_1^{-1}\sigma_i - \hat{\mu}_1^{-1}\hat{\lambda}\hat{K}^{-1}3\sigma), \quad (i = 1, 2, 3) \\ \hat{K} = 3K_0\left(\hat{I} - \hat{G}_1 + \tfrac{\lambda_0}{K_0}\hat{\lambda}_3\right), \quad \hat{G}_1 = \tfrac{\lambda_0 k_1}{K_0}\hat{\Lambda}_1 + \tfrac{2\mu_0 k_2}{3K_0}\hat{M}_1, \end{gathered} \tag{5}$$

где K_0 — нерелаксированный модуль объёмного сжатия, $\hat{I}$ — единичный оператор, $\hat{\Lambda}_1$, $\hat{M}_1$ — линейные интегральные операторы вида (3) с ядрами $\Lambda_1(t)$ 8 $M_1(t)$. Для построения оператора $\hat{K}^{-1}$ используем обобщение методики, развитой в работе [2] для одномерного случая. Представим $\hat{K}^{-1}$ операторным рядом Вольтерра-Фреше

$$\hat{K}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{L}_{2n+1}$$

и для ядер интегральных полилинейных операторов $\hat{L}_n$ получим реккурентные соотношения, связывающие трансформанты Лапласа искомых ядер и ядер операторов $\hat{\mu}$ и $\hat{\lambda}$.

Предполагая сепарабельность ядра оператора $\hat{\lambda}_3$

$$\lambda_3(t_1, t_2, t_3) = a_3 \prod_{n=1}^{3} G_1(t_n),$$

Разрешая систему рекуррентных уравнений относительно трансформант ядер, получим

$$L^*_{2n+1}(p_1, ..., p_{2n+1}) = \varphi_n L^*_1(p_1+...+p_{2n+1}), \;\; L^*_1(p) = (G^*_1(p))^{-1}, \tag{6}$$

$$\varphi_n = \frac{3(a_0^{(0)})^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} \cdot \exp\left(\frac{1}{3}\arcsin x\right)\Bigg|_{x=0}, \quad a_3^{(0)} = \frac{27\lambda_0 a_3}{8\pi K_0}.$$

Учитывая (6), получим

$$(\hat{K})^{-1}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \int_0^t L_1(t-\tau)(\sigma_1(\tau)+\sigma_2(\tau)+\sigma_3(\tau))d\tau.$$

Таким образои, операторв в выражениях для деформаций (5) полностью определены. В качестве примера построены выражения для деформаций при выборе ядер наследственности $\Lambda_1(t)$ и $M_1(t)$ соответствующих модели стандартного линейного тела [1] и получены в явном виде выражения для релаксационных параметров в ядрах интегральных операторов ползучести.

Литература

1. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твёрдых тел. – М.: Наука, 1977. – 384 с.

2. *Бырдин А.П., Розовский М.Н.* Метод рядов Вольтерра в динамических задачах нелинейной наследственной упругости. – Изв. АН Арм. ССР, 1985, №5. – с. 49-56.

ОБ ОПЕРАТОРНЫХ СЕМЕЙСТВАХ НА МНОГООБРАЗИИ С НЕГЛАДКИМ КРАЕМ

©2020 *В. Б. Васильев*
(Белгород; *vbv57@inbox.ru*)

Материал этого доклада основан на двух авторских препринтах [1,2], которые развивают абстрактные операторные идеи И.Б. Симоненко [3] с одной стороны и факторизационные идеи Г.И. Эскина для эллиптических символов псевдодифференциальных операторов с другой стороны [4].

Рассматриваются специальные классы операторов, действующих в функциональных пространствах на многообразиях. Такие операторы называются операторами локального типа и определяются с точностью до компактного оператора [3]. Этот подход можно назвать операторно-геометрической трактовкой хорошо известного локального принципа. Описываются в абстрактной форме условия фредгольмовости рассматриваемых операторов и показывается, как эти результаты можно применить к исследованию эллиптических псевдодифференциальных операторов на многообразиях с негладкой границей.

Пусть M — компактное многообразие с краем ∂M, и $A(x)$ — некоторая оператор-функция, определённая на M. Выделим на границе ∂M подмногообразия $M_k, k = 0, 1, ..., m-1$, как гладкие k-мерные многообразия так, что по определению $M_{m-1} \equiv \partial M, M_0$ представляет собой совокупность изолированных точек $\partial M, M_m \equiv M$. Наконец, введём множество классов операторов $\mathrm{T}_k, k = 0, 1, ..., m$, так, что для $x \in M_k$ оператор $A(x) : H_k^{(1)} \to H_k^{(2)}$ является линейным ограниченным оператором, а $H_k^{(j)}, k = 0, 1, ..., m, j = 1, 2,$ — некоторые банаховы пространства.

Такое подмногообразие M_k мы называем сингулярным k-подмногообразием, если для всех $x \in M_k$ имеет место включение $A(x) \in \mathrm{T}_k$.

Теорема 1. *Если семейство $A(x)$ состоит из локальных фредгольмовых операторов и непрерывно на каждой компоненте $\overline{M_k \setminus \cup_{i=0}^{k-1} M_i}, k = 0, 1, ..., m$, то оно порождает единственный фредгольмов оператор A', действующий в пространствах прямых сумм $\sum\limits_{k=0}^{m} \oplus H_1^{(k)} \to \sum\limits_{k=0}^{m} \oplus H_2^{(k)}$.*

Такой оператор A' мы называем виртуальным оператором, соответствующим семейству $A(x)$. Виртуальный оператор A' называется эллиптическим, если семейство $A(x)$ состоит из фредгольмовых операторов для всех $x \in M$.

Предложенная абстрактная схема применяется для исследования псевдодифференциального оператора A на m-мерном компактном многообразии M с краем, содержащим особенности. Такой оператор обычно определяют с помощью символа $A(x, \xi), (x, \xi) \in \mathbf{R}^{2m}$ (здесь мы используем локальные координаты; обычно символ задаётся на (ко)касательном расслоении). Предполагается, что на границе ∂M имеются гладкие компактные подмногообразия M_k

размерности $0 \le k \le m-1$, которые представляют собой особенности границы. Эти особенности границы описываются специальными локальными представителями оператора A в точке $x_0 \in M$ на карте $U \ni x_0$ следующим образом

$$(A_{x_0} u)(x) = \int\limits_{D_{x_0}} \int\limits_{\mathbf{R}^m} e^{i\xi \cdot (x-y)} A(\varphi(x_0), \xi) u(y) d\xi dy, \quad x \in D_{x_0},$$

где $\varphi : U \to D_{x_0}$ — диффеоморфизм, и каноническая область D_{x_0} имеет разную форму в зависимости от расположения точки x_0 на многообразии M. Рассматриваются следующие канонические области: D_{x_0}: $\mathbf{R}^m, \mathbf{R}_+^m = \{x \in \mathbf{R}^m : x = (x', x_m), x_m > 0\}, W^k = \mathbf{R}^k \times C^{m-k}$, где C^{m-k} — выпуклый конус в $\mathbf{R}^{m-k}$. Другими словами, граница ∂M может содержать конические точки и ребра различных размерностей.

Псевдодифференциальный оператор A изучается в пространствах Соболева–Слободецкого $H^s(M)$, и в качестве локального варианта этих пространств выбираются пространства $H^s(D_{x_0})$.

Можно предложить следующие достаточные условия фредгольмовости.

Теорема 2. *Предположим, что классический эллиптический символ $A(x, \xi), x \in M_k$, допускает k-волновую факторизацию относительно конусов C^{m-k} с индексами $\kappa_k(x), k = 0, 1, \cdots, m-2$ [5], удовлетворяющими условиям:*

$$|\kappa_k(x) - s| < 1/2, \quad \forall x \in M_k, \quad k = 0, 1, \cdots, m-1. \qquad (1)$$

Тогда оператор $A : H^s(M) \to H^{s-\alpha}(M)$ фредгольмов.

Замечание. *Если эллиптичность нарушается на подмногообразиях M_k, рассматриваются модификации оператора A с привлечением граничных или кограничных операторов* [4, 5]. *В частности, это происходит, когда нарушается одно из условий* (1).

Литература

1. *Vasilyev V.B.* Operator symbols. ArXiv: Math.FA/1901.06630, pp. 1–11.

2. *Vasilyev V.B.* Operator symbols. II. ArXiv: Math.FA/1911.08099, pp. 1–13.

3. *Симоненко И.Б.* Локальный метод в теории инвариантных относительно сдвига операторов и их огибающих. Ростов-на-Дону, ЦВВР, 2007. —120 с.

4. *Эскин Г.И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973. — 232 с.

5. *Васильев В.Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. М.: КомКнига, 2010.—135 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЕНИЙ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ БИЛЛИАРДАМИ НА КЛЕТОЧНЫХ КОМПЛЕКСАХ

©2020 *В. В. Ведюшкина*
(Москва; *arinir@yandex.ru*)

В работе [1] А.Т. Фоменко выдвинул фундаментальную гипотезу о моделировании (реализации) биллиардами интегрируемых систем с двумя степенями свободы. В настоящей работе мы анализируем раздел C этой гипотезы.

Гипотеза C (реализация меченых молекул). Широкий класс инвариантов Фоменко–Цишанга (т.е. меченых молекул [2], задающих с точностью до лиувиллевой эквивалентности множество всех интегрируемых систем), которые моделируются интегрируемыми биллиардами. Тем самым, для многих невырожденных интегрируемых систем их слоения Лиувилля на инвариантных трёхмерных поверхностях (возможно, все такие слоения) послойно гомеоморфны слоениям интегрируемых биллиардных систем из подходящего класса.

В данный момент эта гипотеза доказана для большого числа интегрируемых гамильтоновых систем, известных в математической физике, механике и геометрии. В частности, для многих классических случаев интегрируемости в динамике твёрдого тела (например, для многих зон энергии случаев Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Горячева–Чаплыгина, Клебша, Соколова, Стеклова, Ковалевской–Яхьи и др.). Гипотеза C также доказана В. В. Ведюшкиной и А. Т. Фоменко для всех интегрируемых при помощи линейных и квадратичных интегралов геодезических потоков на ориентированных замкнутых двумерных поверхностях, т.е. для потоков на торе и на сфере.

В качестве естественного класса плоских интегрируемых биллиардов рассматриваются биллиарды, ограниченные дугами софокусных квадрик. Такие биллиарды называются в работах В.В.Ведюшкиной элементарными. Их интегрируемость эквивалентна малой теоремы Понселе: любая траектория такого биллиарда лежит на прямых, касательных к некоторой квадрике — эллипсу или гиперболе — софокусных с квадриками, образующими границу биллиарда. Топологические биллиарды и биллиардные книжки получаются склейками таких биллиардов вдоль сегментов их границ. Если вдоль граничного сегмента склеено больше двух элементарных биллиардов-листов (случай биллиардной книжки), то этому ребру склейки необходимо приписать перестановку, которая определяет порядок перехода биллиардной частицы с одного биллиарда на другой при ударе об это ребро склейки. Очевидно, что биллиардные книжки, также как и элементарные биллиарды, интегрируемы с той же парой интегралов.

Вопрос о справедливости гипотезы Фоменко C в полном объёме пока неясен. В связи с этим А.Т. Фоменко сформулировал «локальный» вариант гипотезы C, являющийся «максимальным упрощением» общей гипотезы C.

1. Пусть γ — произвольное ребро с метками r, ε некоторой меченой молекулы W^*. Тогда существует интегрируемый биллиард, реализующий такую комбинацию чисел r, ε на одном из рёбер своей меченой молекулы.

Отметим, что имеются следующие четыре варианта: метка $r = p/q$ конечна, и $\varepsilon = \pm 1$; метка $r = \infty$, и $\varepsilon = \pm 1$.

2. (усиление пункта **1**) В условиях пункта **1** существует подходящий биллиард, реализующий произвольную пару меток r и ε на ребре между любыми, наперёд заданными атомами.

3. Пусть S — семья с целочисленной меткой n в некоторой меченой молекуле W^* интегрируемой системы. Тогда существует интегрируемый биллиард, реализующий некоторую семью с точно такой же целочисленной меткой n.

4. (усиление пункта **3**) В условиях пункта **2** существует подходящий биллиард, реализующий не только данную метку n, но и саму семью, т.е. граф с нужными атомами и нужным набором рёбер.

5. (реализация меченой окрестности любой семьи) Пусть S — семья с целочисленной меткой n в некоторой меченой молекуле, причём внешние ребра γ_i семьи оснащены произвольными метками r_i, ε_i. Тогда существует подходящий биллиард, реализующий такой меченый подграф в своей меченой молекуле.

Анализу и частичному доказательству этой гипотезы посвящён доклад.

Литература

1. *Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т.* Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности. Вестн.Моск.Унив., Серия Матем. и Мех. 2019. 3. 15–25.

2. *Фоменко А.Т., Цишанг Х.* Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Изв. АН СССР. Матем., 1990. 54, №3. 546–575.

ПРОБЛЕМА ФЕРМА–ШТЕЙНЕРА В ПРОСТРАНСТВЕ КОМПАКТНЫХ ПОДМНОЖЕСТВ $\mathbb{R}^m$ С МЕТРИКОЙ ХАУСДОРФА[1]

©2020 *А. Х. Галстян*
(Москва; *ares.1995@mail.ru*)

Проблема Ферма–Штейнера состоит в поиске всех точек метрического пространства Y таких, что сумма расстояний от каждой из них до точек из некоторого фиксированного конечного подмножества A пространства Y минимальна [1]. Мы изучаем эту проблему в случае, когда Y — это пространство компактных подмножеств евклидового пространства $\mathbb{R}^m$, наделённого метрикой Хаусдорфа, а точки из A — это конечные попарно непересекающиеся компакты в $\mathbb{R}^m$.

Множество $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ изначально заданных компактных подмножеств называется *границей*, а каждое A_i — граничным компактом. Положим $A_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} \{a_j^i\}$. Подмножества, которые реализуют минимум суммы расстояний до граничных компактов, называются *компактами Штейнера*. Мы обозначаем множество всех компактов Штейнера через $\Sigma(A)$. Оно разбивается на попарно непересекающиеся классы $\Sigma_d(A)$, где $d = (d_1, \dots, d_n)$, а d_i — это расстояние Хаусдорфа от компакта $K \in \Sigma_d(A)$ до A_i.

Известно [2], что каждый класс $\Sigma_d(A)$ содержит в себе единственный компакт K_d, который максимален по включе-

[1]Исследование выполнено в рамках Программы Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-2554.2020.1).

нию, а также некоторое количество минимальных по включению компактов. Через $B_r(y) \subset Y$ мы обозначаем замкнутый шар с центром в точке y радиуса r. Мы показываем, что для каждых d, i и j справедливо $B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d \neq \emptyset$. Если это множество конечно, мы обозначаем его через $\mathrm{HP}(a_j^i)$, иначе полагаем $\mathrm{HP}(a_j^i) = \emptyset$. Также пусть $\mathrm{HP}(A) = \bigcup \mathrm{HP}(a_j^i)$. Все результаты ниже справедливы для любой конечной границы $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$.

Теорема 1. *Существуют такие $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $j \in \{1, \ldots, m_i\}$, что множество $B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d$ имеет лишь конечное число точек.*

Следствие 2. *Пусть K — компакт Штейнера в классе $\Sigma_d(A)$. Тогда $K \cap \partial K_d \neq \emptyset$.*

Теорема 3. *Минимальный компакт $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ является конечным множеством, количество его точек не превосходит $\sum_{i=1}^n m_i - n + 1$, а в случае, когда имеется больше одного i, для которого $m_i > 1$, оно не превосходит $\sum_{i=1}^n m_i - n$, где n — количество граничных компактов. В обоих случаях оценка точна.*

Теорема 4. *Компакт $K \subset \mathbb{R}^m$ является минимальным компактом Штейнера в классе $\Sigma_d(A)$ тогда и только тогда, когда одновременно выполняются три следующие условия*:

(1) *K — конечное подмножество K_d;*

(2) *$K \cap B_j^i \neq \emptyset$ для любых $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $j \in \{1, \ldots, m_i\}$;*

(3) *Для любого $p \in K$ существуют $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $j \in \{1, \ldots, m_i\}$ такие, что $\big(K \setminus \{p\}\big) \cap B_j^i = \emptyset$.*

Теорема 5. *Минимальный компакт Штейнера K_λ — единственный минимальный в $\Sigma_d(A)$ тогда и только тогда, когда для каждой точки $p \in K_\lambda$ существует точка a_j^i такая, что* $\mathrm{HP}(a_j^i) = \{p\}$.

Будем говорить, что на точке $p \in \mathbb{R}^m$ *реализуется расстояние* d_i, если существует $a_j^i \in A_i$ такая, что $|a_j^i p| = d_i$.

Теорема 6. *Для каждого минимального компакта $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ и любого номера i существует точка $p \in K_\lambda$ такая, что на ней реализуются по крайней мере два расстояния d_i и d_k $(i \neq k)$.*

Автор выражает благодарность своим научным руководителям, профессору А. А. Тужилину и профессору А. О. Иванову, за постановку задачи и постоянное внимание к ней в процессе совместной работы.

Литература

1. *Ivanov A., Tuzhilin A.* Branching Solutions To One-Dimensional Variational Problems. World Scientific, 2001. 364 p.

2. *Ivanov A., Tuzhilin A., Tropin A.* Fermat–Steiner problem in the metric space of compact sets endowed with Hausdorff distance. Journal of Geom. 108, 2017. 575–590 pp.

О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ОДНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ МАТРИЦЫ

©2020 *Г. В. Гаркавенко, Д. Г. Усков*
(Воронеж; *g.garkavenko@mail.ru*; *uskov.dan@mail.ru*)

Рассматривается бесконечная матрица $\mathcal{A} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, элементы которой задаются формулами $\mathcal{A}(n, n) = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}(n, m) = 1/(n-m)^2$, $n \neq m$, n, $m \in \mathbb{N}$. Рассматриваемую матрицу можно представить в виде $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 - B$, где $\mathcal{A}_0 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ — диагональная матрица, т. е. $\mathcal{A}_0(n, n) = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, и $\mathcal{A}_0(n, m) = 0$, $n \neq m$. Матрица B будет иметь нулевую главную диагональ, остальные её элементы $B(n, m) = -1/(n-m)^2$, $n \neq m$, n, $m \in \mathbb{N}$. Отметим, что матрица B является теплицевой матрицей с суммируемыми диагоналями. Рассматривается вопрос приближенного нахождения собственных значений матрицы $\mathcal{A}$.

При применении проекционных методов в вопросах приближенного нахождения собственных значений [1] обычно вместо матрицы $\mathcal{A}$ рассматривают последовательность конечномерных матриц $\mathcal{A}_n$, собственные значения которых считают численно и далее полученные последовательности собственных значений используются в качестве приближений к искомым собственным значениям. Но здесь возникает вопрос обоснования проекционного метода (метода Галеркина). Важным является тот факт, что собственные значения λ_n, $n \in \mathbb{N}$, диагональной матрицы $\mathcal{A}_0$ стремятся к бесконечности, поэтому при конечном $n \in \mathbb{N}$ имеем $\|\mathcal{A} - \mathcal{A}_n\| \to \infty$. Таким образом, если рассматривать матрицу $\mathcal{A}$ как возмущение конечномерной матрицы $\mathcal{A}_n$, то возмущение не является матрицей ограниченного оператора.

Подойдём к методу Галеркина с точки зрения метода подобных операторов.

Пусть задано семейство матриц P_n, $n \in \mathbb{N}$, таких, что каждая из матриц P_i имеет только один ненулевой элемент $P_i(i,i) = 1$, а остальные элементы равны нулю и $P_{(n)} = \sum_{i \leqslant n} P_i$.

Согласно [2, Теорема 19.2] матрицы $\mathcal{A}_0 - B$ и

$$\mathcal{A}_0 - P_{(n)}\mathcal{X}P_{(n)} - \sum_{i>n} P_i\mathcal{X}P_i = \mathcal{A}_0 - J_n\mathcal{X}$$

$$= \mathcal{A}_0 P_{(n)} - P_{(n)}\mathcal{X}P_{(n)} + \sum_{i>n}(\mathcal{A}_0 P_i - P_i\mathcal{X}P_i),$$

где $\mathcal{X}$ — решение уравнения метода подобных операторов, подобны, если выполнено условие $\pi^2/(3(2n+1)) < 1/4$. В этом случае $\sigma(P_{(n)}(\mathcal{A}_0 - B)P_{(n)}) = \sigma(\mathcal{A}_0 P_{(n)} - P_{(n)}\mathcal{X}P_{(n)})$. Но нам известна не сама матрица $\mathcal{X}$, а последовательные

приближения к ней, причём первым приближением является матрица B, а также известна оценка $\|J_n\mathcal{X} - J_n B\| = \mathcal{O}((2n+1)^{-1})$. Таким образом, для собственных значений λ_k, $k \in \mathbb{N}$, матрицы $\mathcal{A}$ и соответствующих собственных значений λ_{kn} последовательности матриц A_n, $n \geqslant k$, имеет место оценка $|\lambda_k - \lambda_{kn}| = \mathcal{O}((2n+1)^{-1})$, $n \geqslant k$.

Проведён вычислительный эксперимент, результаты которого полностью согласуются с вышеизложенным.

Отметим, что вопросы асимптотической оценки элементов бесконечных матриц с помощью метода подобных операторов рассматривались, например, в [3 - 6].

Литература

1. *Красносельский М. А. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1967. 456 с.

2. *Баскаков А. Г.* Гармонический анализ линейных операторов. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1987. - 165 с.

3. *Бройтигам И. Н., Поляков Д. М.* Асимптотика собственных значений бесконечных блочных матриц — Уфимск. матем. журн. 11:3 (2019), С. 10-29.

4. *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* О диагонализации некоторых классов матриц — В сборнике: Информационные технологии в науке, образовании и производстве (ИТНОП-2018). VII Международная научно-техническая конференция. Сборник трудов конференции. 2018. С. 539-542.

5. *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Асимптотика собственных значений операторов с ленточной матрицей и полугруппыоператоров — Вопросы науки. – 2016. – Т. 1. – С. 27-30.

6. *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* О собственных значениях одного разностного оператора — В сборнике: Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2015). Сборник трудов VIII международной конференции. – 2015. – С. 369-371.

О НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

©2020 *В. Ю. Гончаров, Л. А. Муравей*
(Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет); РГУ имени А.Н. Косыгина; *fulu.happy@gmail.com*; *l_muravey@mail.ru*)

Экстремальные задачи, в которых функционал цели представляет собой собственное число некоторой краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения, встречаются в различных приложениях. В работе рассматриваются две такие задачи, относящиеся к классу задач оптимального проектирования элементов механических конструкций, связанных с потерей устойчивости.

Первая задача состоит в определении оптимального распределения толщины обшивки тонкого прямого крыла, для которого критическая скорость дивергенции (превышение которой приводит к разрушению крыла) максимальна, а масса имеет заданное значение. Краевая задача на собственные значения имеет вид

$$\begin{gathered}(a^3u\theta')'(x) + \lambda\,(a^2\theta)(x) = 0, \quad x \in \Omega \triangleq (0,1),\\ \theta(0) = 0, \quad (a^3u\theta')(0) = 0.\end{gathered} \qquad (\mathcal{E}_1)$$

Здесь u — фиксированное распределение толщины обшивки крыла, выступающее в качестве управляющей переменной; a — длина хорды профиля крыла. Наименьшее собственное значение $\lambda_1[u]$ краевой задачи $(\mathcal{E}_1)$ соответствует критической скорости дивергенции. Собственная функция θ, соответствующая первому собственному значению краевой задачи $(\mathcal{E}_1)$, представляет собой распределение угла закручивания крыла по размаху при скорости дивергенции. Будем предполагать, что $a \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$, $a(x) \geq a_0 > 0$ для всех $x \in \Omega$. Пусть $0 < \alpha < \beta < +\infty$.

Масса обшивки крыла определяется формулой

$$M[u] = \int_0^1 a(x)u(x)\,dx.$$

Введём множество

$$\mathcal{U}(m) = \{u \in L_\infty(\Omega):\ \alpha \leq u(x) \leq \beta,\ M[u] = m\}$$

допустимых распределений толщины обшивки крыла, предполагая, что параметры α, β и m выбраны так, что множество $\mathcal{U}(m)$ является непустым. Математическая формулировка рассматриваемой задачи имеет следующий вид:

$$\text{найти}\ \hat{u} \in \mathcal{U}(m):\ \lambda_1[\hat{u}] = \sup_{u\in\mathcal{U}(m)} \lambda_1[u]. \qquad (\mathcal{P}_1)$$

Поскольку допустимые управления принадлежат классу существенно ограниченных измеримых функций, оптимальное решение может не представлять практического интереса, например, в том случае, когда получаемая форма крыла будет иметь ступенчатые переходы. В связи с этим возникает необходимость исследования вопроса регулярности оптимального решения, т. е. определения класса функций, обладающих некоторой степенью гладкости (возможно, обобщённой), к которому указанное оптимальное решение относится.

Одно из первых исследований, посвящённых теме задач оптимального проектирования крыльев летательных аппаратов, было проведено в работе Макинтоша и Истепа [1]. В указанной работе была поставлена близкая к $(\mathcal{P}_1)$ задача, состоящая в минимизации массы обшивки крыла при заданном значении скорости дивергенции, и получено выражение для оптимального решения в случае линейного распределения хорды. Их подход был обобщён Н. В. Баничуком в работе [2] на случай переменных параметров крыла и более общего типа краевых условий. Примечательно, что в [1] и [2] на распределение толщины обшивки крыла не накладываются никакие ограничения и, как следствие, полученные там оптимальные решения обращаются в нуль в точке, соответствующей свободному концу крыла. Поэтому представляет интерес рассмотрение случая наличия положительной нижней грани для значений толщины обшивки крыла, который учитывается в приведённой нами постановке. Задача минимизации массы обшивки прямоугольного крыла, отвечающая случаю $a(x) \equiv 1$, при заданном значении скорости дивергенции была рассмотрена Ж.-Л. Арманом и В. Дж. Витте в [3], где рассмотрен как случай без ограничений, так и случай общей положительной нижней грани для значений толщины, а также дан вывод аналитических решений. Кроме того, следует отметить работу Ю. А. Арутюнова и А. П. Сейраняна [4], в которой рассмотрена задача минимизации массы обшивки крыла при дополнительных интегральных ограничениях. Подробный литературный обзор по задачам оптимального проектирования летательных аппаратах в связи с явлением дивергенции приводится в работе [5].

Приведём основные результаты для задачи $(\mathcal{P}_1)$.

Теорема 1. *Существует единственное решение задачи* $(\mathcal{P}_1)$, *причём элемент* $\hat{u} \in \mathcal{U}(m)$ *является решением тогда и только тогда, когда для некоторой не равной тождественно нулю функции*

$$\hat{y} \in W \triangleq \{y \in H^1(\Omega) : \ y(1) = 0\}$$

пара $(\hat{u}, \hat{y})$ *является седловой точкой функционала*

$$\Lambda(u, y) = \int_0^1 \frac{y'^2(x)}{a^2(x)}\, dx \bigg/ \int_0^1 \frac{y^2(x)}{a^3(x)u(x)}\, dx$$

на множестве $\mathcal{U}(m) \times (W \setminus \{0\})$, *т. е. выполняются следующие неравенства*

$$\Lambda(u, \hat{y}) \le \Lambda(\hat{u}, \hat{y}) \le \Lambda(\hat{u}, y), \quad (u, y) \in \mathcal{U}(m) \times (W \setminus \{0\})\,. \quad \text{(SP)}$$

Необходимое и достаточное условие оптимальности (SP) позволяет заменить задачу $(\mathcal{P}_1)$ эквивалентной задачей поиска седловой точки функционала $\Lambda(\cdot, \cdot)$. Сделанное замечание лежит в основе доказательств следующих утверждений.

Теорема 2. *Решение* $\hat{u}$ *задачи* $(\mathcal{P}_1)$ *является непрерывной по Липшицу функцией. Кроме того, задача* $(\mathcal{P}_1)$ *является корректной в смысле Адамара относительно параметра* m, *причём непрерывная зависимость от параметра* m *для оптимального решения имеет место в смысле сходимости по норме пространства* $C^{0,\kappa}(\bar{\Omega})$, *где* $\kappa \in (0, 1)$.

Теорема 3. *Пусть* $u_0 \in \mathcal{U}(m)$. *Рассмотрим последовательность* $\{u_n\}$, *каждый элемент которой определяется как решение экстремальной задачи*

$$\Lambda(u_{n+1}, y_n) = \sup_{u \in \mathcal{U}(m)} \Lambda(u, y_n),$$

где y_n *обозначает собственную функцию, отвечающую собственному значению* $\lambda_1[u_n]$. *Тогда если*

$$\frac{1}{u_n} \overset{*}{\rightharpoonup} \frac{1}{u_*},$$

то последовательность $\{u_n\}$ *в действительности сходится к оптимальному решению* $\hat{u}$ *в* $C^{0,\kappa}(\bar{\Omega})$ *для любого значения* $\kappa \in (0, 1)$.

Теорема 3 в сущности даёт метод отыскания оптимального решения, причём если в результате численного решения последовательность приближений сходится поточечно, то она сходится к оптимальному решению в соответствии с утверждением теоремы 3 в пространствах Гёльдера. В рамках обсуждения предполагается также уделить внимание вопросу о сходимости последовательностей приближений к оптимальному решению, порождаемыми другими итерационными методами.

Доказательства всех приведённых утверждений для задачи $(\mathcal{P}_1)$ приводятся в [5].

Вторая часть обсуждения посвящена задаче об определении оптимальной формы жёстко фиксированной неоднородной колонны, для которой критическая сила, приводящая к потере устойчивости колонны, максимальна, а масса колонны имеет заданное значение. Эта проблема является вариацией известной задачи Лагранжа о наивыгоднейшем очертании колонны.

Краевая задача на собственные значение имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}(eu^{\nu}y'')''(x) + \lambda y''(x) = 0, \quad x \in \Omega, \\ y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0.\end{gathered} \qquad (\mathcal{E}_2)$$

Будем предполагать, что $e, \rho \in L_\infty(\Omega)$, причём для некоторых положительных постоянных e_0, ρ_0 и п. в. $x \in \Omega$ выполняются неравенства $e(x) \geq e_0$, $\rho(x) \geq \rho_0$. При указанных предположениях будем рассматривать обобщённую постановку задачи $(\mathcal{E}_2)$. Здесь e — модуль упругости материала колонны, а ρ — его переменная плотность. Как и ранее, u выступает управляющей переменной, но характеризует площадь поперечных сечений колонны. Параметр $\nu > 0$ задаёт тип сечения. Первое собственное значение $\lambda_1[u]$ краевой задачи $(\mathcal{E}_2)$ соответствует критической силе, при которой происходит потеря устойчивости колонны. Масса колонны определяется формулой

$$M[u] = \int_0^1 \rho(x)u(x)\,dx.$$

Для заданного значения m массы колонны определим множество

$$\mathcal{U} = \{u \in L_\infty(\Omega) : \ \alpha \leq u(x) \leq \beta, \ M[u] = m\}$$

допустимых распределений площади поперечных сечений колонны, которое будем считать непустым. Рассматриваемая задача формулируется следующим образом:

$$\text{найти } \ \hat{u} \in \mathcal{U} : \ \lambda_1[\hat{u}] = \sup_{u \in \mathcal{U}} \lambda_1[u]. \qquad (\mathcal{P}_2)$$

Можно показать, что функционал $\lambda_1[\cdot]$ в задаче $(\mathcal{P}_2)$ является слабо* полунепрерывным сверху при $\nu \in (0,1]$ (см. [6]). Вместе с тем в приложениях параметр ν принимает только натуральные значения. Поэтому возникает необходимость в отыскании другого способа, позволяющего установить разрешимость задачи $(\mathcal{P}_2)$ и для остальных значений параметра ν.

Задача $(\mathcal{P}_2)$ для однородной колонны, отвечающей случаю $e(x) = \rho(x) \equiv 1$, подробно была рассмотрена в работе [7], в которой доказательство существования оптимального решения проведено с использованием соображений симметрии и утверждения о существовании положительной собственной функции, соответствующей первому собственному значению задачи $(\mathcal{E}_2)$. Указанные особенности доказательства объясняются тем, что в общей ситуации при осуществлении предельного перехода получившаяся краевая задача может отвечать старшему собственному значению. Отмеченная трудность, естественно, возникает и при исследовании задачи $(\mathcal{P}_2)$ в приведённой нами постановке. Заметим, что эта проблема в принципе является общей для ряда задач оптимального проектирования, постановка которых вовлекает собственные значения в качестве основного функционала. Кроме того, представляют интерес способы доказательства разрешимости экстремальных задач для собственных значений, не использующие характерных свойств собственных функций, сохраняющихся при предельных переходах, поскольку информации о них просто может и не быть.

Основной результат для задачи $(\mathcal{P}_2)$ заключён в следующем утверждении.

Теорема 4. *Задача $(\mathcal{P}_2)$ об определении оптимальной формы неоднородной колонны обладает решением для любого $\nu > 0$.*

Литература

1. *McIntosh S.C., Eastep F.E.* Design of minimum-mass structures with specified stiffness properties // AIAA Journal. 1968. Vol. 6. No. 5. Pp. 962–964.

2. *Баничук Н.В.* Минимизация веса крыла при ограничении по скорости дивергенции // Уч. зап. ЦАГИ. 1978. Т. 9. № 5. С. 97–103.

3. *Armand J.-L., Vitte W.J.* Foundations of aeroelastic optimization and some applications to continuous system. Stanford: Stanford University, 1970.

4. *Арутюнов Ю.А., Сейранян А.П.* Применение принципа максимума к задаче минимизации веса крыла летательного аппарата // Уч. зап. ЦАГИ. 1973. Т. 4. № 1. С. 55–70.

5. *Гончаров В.Ю., Муравей Л.А.* Минимизация массы тонкого прямого крыла при ограничении по скорости дивергенции // ЖВМ. 2019. Т. 59. № 3. С. 465–480.

6. *Goncharov V.Yu.* Existence criteria in some extremum problems involving eigenvalues of elliptic operators // J. Sib. Fed. Uni. 2016. Vol. 9. No. 1. Pp. 37–47.

7. *Cox S.J., Overton M.L.* On the optimal design of columns against buckling // SIAM J. Math. Anal. 1992. Vol. 23. No. 2. Pp. 287–325.

ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ ОДНОМЕРНЫМИ КОНСТАНТАМИ НИКОЛЬСКОГО–БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ ПОЛИНОМОВ И ФУНКЦИЙ[1]

©2020 *Д. В. Горбачев, И. А. Мартьянов*
(Тула; *dvgmail@mail.ru*; *martyanow.ivan@yandex.ru*)

Пусть $0 < p \le \infty$, $\mathcal{C}(n;p;r) = \sup \frac{\|T^{(r)}\|_{L^\infty[0,2\pi)}}{\|T\|_{L^p[0,2\pi)}}$ и $\mathcal{L}(p;r) = \sup \frac{\|F^{(r)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{\|F\|_{L^p(\mathbb{R})}}$ — точные константы Никольского–Бернштейна для r-х производных тригонометрических полиномов степени n и целых функций экспоненциального типа 1 соответственно. Недавно Е. Левин и Д. Любинский (2015) доказали, что для констант Никольского

$$\mathcal{C}(n;p;0) = n^{\frac{1}{p}}\mathcal{L}(p;0)(1+o(1)), \quad n \to \infty.$$

М. Ганзбург и С. Тихонов (2017) обобщили этот результат на случай констант Никольского–Бернштейна:

$$\mathcal{C}(n;p;r) = n^{r+\frac{1}{p}}\mathcal{L}(p;r)(1+o(1)), \quad n \to \infty.$$

Также они показали существование в этой задаче экстремальных полинома $\tilde{T}_{n,r}$ и функции $\tilde{F}_r$ соответственно. Ранее мы дали более точные границы в результате типа Левина–Любинского, доказав, что для всех p и n

$$n^{\frac{1}{p}}\mathcal{L}(p;0) \le \mathcal{C}(n;p;0) \le (n + \lceil \tfrac{1}{p} \rceil)^{\frac{1}{p}}\mathcal{L}(p;0).$$

Мы устанавливаем близкие факты для случая констант Никольского–Бернштейна, из которых также вытекает асимптотическое равенство Ганзбурга–Тихонова. Результаты формулируется в терминах экстремальных функций

[1] Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00199).

$\tilde{T}_{n,r}$, $\tilde{F}_r$ (норма которых равна единице) и коэффициентов Тейлора $A_{s,i}$ ядра типа Джексона–Фейера $(\frac{\sin \pi x}{\pi x})^{2s}$. В частности, имеем

Теорема. *Пусть* $p \in (0,\infty]$, $r, n \in \mathbb{Z}_+$, $s \in \mathbb{N}$.

(i) *Если* $2s \geq r+1$, $n \geq s-1$, *то*

$$\mathcal{C}(n;p;r) \geq (n-s+1)^{r+\frac{1}{p}}\left(\mathcal{L}(p;r)+\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \frac{(-1)^i \binom{r}{2i} A_{s,i} \tilde{F}_r^{(r-2i)}(0)}{n^{2i}}\right).$$

(ii) *Если* $n \geq 1$, $ps \geq 1$, *то*

$$\mathcal{C}(n;p;r) + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} (-1)^i \binom{r}{2i} A_{s,i} \tilde{T}_{n,r}^{(r-2i)}(0) \leq n^r (n+s)^{\frac{1}{p}} \mathcal{L}(p;r),$$

где

$$|\tilde{T}_{n,r}^{(r-2i)}(0)| \leq n^{r-2i}(n+\lceil \tfrac{1}{p} \rceil)^{\frac{1}{p}} \mathcal{L}(p;0).$$

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОЙ СТОИМОСТИ ЛИКВИДНОСТИ ПРИ ДЕЛЬТА-ХЕДЖИРОВАНИИ ОПЦИОНОВ[1]

©2020 *М. М. Дышаев, В. Е. Федоров, А. С. Авилович*
(Челябинск, Челябинский государственный университет;
Mikhail.Dyshaev@gmail.com; *kar@csu.ru*;
avilovich_ aas@bk.ru)

Рассматривается модель Роджера и Сингха (2010) [1], позволяющая оценить нелинейную стоимость ликвидности базового актива при операциях дельта-хеджирования в применении к рынку опционов на Московской Бирже. В ней эффект недостаточной ликвидности проявляется как дополнительные затраты при операциях, которые, однако, не влияют на цену базового актива. Эти затраты отражают глубину книги ордеров. Влияние ликвидности, моделируемой таким образом, подобно влиянию транзакционных издержек, но в отличие от классических моделей имеет нелинейный характер и не пропорционально объёму сделок.

Пусть имеется средняя цена S и книга лимитных ордеров (заявок на покупку и продажу, выставленных другими участниками), распределённая по обе стороны от средней цены S с плотностью котировок $\rho(x)$, где x — относительная цена. Если трейдер приобретает h единиц базового актива, он должен будет выкупить их через книгу ордеров до относительной цены s, определённой как

$$h = \int_1^s \rho(x)dx.$$

При этом он заплатит величину

$$S = \int_1^s x\rho(x)dx.$$

После совершения этой сделки средняя цена быстро возвращается к S, поэтому балансовая (так называемая «бумажная») стоимость базового актива, который он только что купил, составляет $S \cdot h$. Следовательно, сравнивая фактическую и балансовую стоимость, трейдер имеет балансовый убыток, отражающий стоимость ликвидности, в сумме

$$Sl(h) = S\int_1^s x\rho(x)dx - Sh = S\int_1^s (x-1)\rho(x)dx.$$

В дальнейших исследованиях Роджер и Сингх использовали форму $l(h) = \frac{1}{2}\varepsilon h^2$, которая была выбрана из соображений управляемости уравнения Гамильтона — Якоби —

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00244).

Беллмана (см. Замечание и уравнение (3.12) в [1]). Для численных решений Роджер и Сингх приняли $\varepsilon = 0.00006$, основываясь на эмпирических заключениях о рынке акций.

Поскольку вид данной функции оказывает влияние на стоимость репликации портфеля опционов, поставлена задача исследовать вид функции $l(h)$ для различных базовых активов, торгуемых на Московской Бирже. Были исследованы мгновенные состояния книги лимитных ордеров для фьючерса на курс доллар США — российский рубль Si-12.19 и для фьючерса BR-11.19 на нефть сорта Brent.

Результаты, представленные на рис. 1 показывают, что функция $l(h)$, рассчитанная на основании рыночных данных, отличается от принятой в работе Роджера и Сингха. Множество точек, расположенных в правой части рисунка, соответствует книге ордеров для фьючерса на курс доллар США — российский рубль (синие точки). В средней части рисунка расположены значения функции $l(h)$, соответствующие книге ордеров для фьючерса на нефть сорта Brent (зелёные треугольники). Близко к оси ординат расположен график функции $l(h)$, соответствующий модели Роджера и Сингха (фиолетовые крестики).

Для практического использования аппроксимацию l степенной функцией εh^n необходимо проводить по левой границе множеств значений $l(h)$ с тем, чтобы при дельта-хеджировании учесть максимально возможную стоимость ликвидности. Наблюдения показывают, что вид функции $l(h)$ меняется в течение торгов, поэтому необходимо провести дальнейшие исследования для уточнения характера исследуемой зависимости, а именно для установления возможной зависимости n и ε от рыночных параметров.

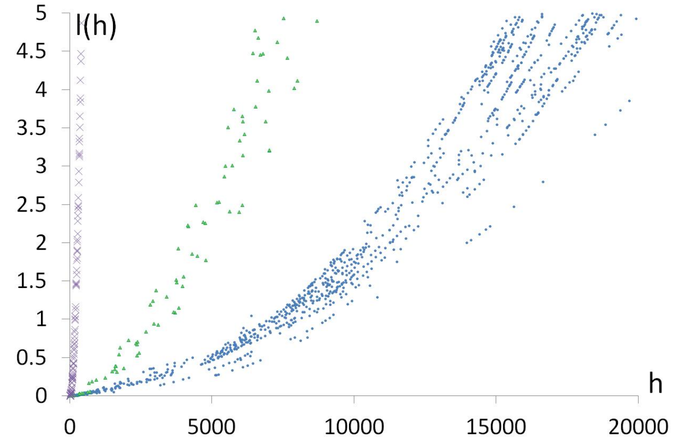


Рис. 1. Функция $l(h)$ для различных инструментов

Литература

1. *Rogers, L. C. G., and Singh, S.* The cost of illiquidity and its effects on hedging. Mathematical Finance, vol. 20, no. 4, pp. 597–615.

КУЛЬТУРНО-ИСТОРИЧЕСКИЙ ДИСКУРС КАК МЕХАНИЗМ ТРАНСЛЯЦИИ ЦЕННОСТНОГО СОДЕРЖАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ

©2020 *Л. В. Жук*
(Москва; *krasnikovalarisa@yandex.ru*)

Актуализируется проблема реализации психодидактического подхода к организации процесса обучения математике в вузе. В качестве эффективного средства достижения личностно-ориентированных целей математического образования рассматривается культурно-исторический дискурс. Представлены примеры интеграции конкретно-исторического содержания в практику обучения бакалавров.

Ключевые слова: психодидактическая парадигма образования, культурно-исторический дискурс, диалектика математики, коммуникация.

Отличительной особенностью математики как учебной дисциплины является высокая степень абстрактности объектов изучения. Наиболее ярко указанная специфика проявляется при обучении математике в вузе: освоение будущими бакалаврами понятий высшей алгебры, математического анализа, геометрии предполагает овладение теоретическими способами мышления через диалектическое восхождение от абстрактного к конкретному. При этом зачастую математическая теория представляется в виде списка определений, теорем и выводимых из них утверждений, подкрепляется набором упражнений и задач, ориентированных преимущественно на формально-логические действия с математическими объектами в стандартных ситуациях. Описанный формально-дедуктивный подход, традиционный для высшей школы, препятствует психическому развитию личности обучающихся в отношении таких качеств, как поисковая активность, креативность, достижению ими уровня понимания.

Одним из содержательных резервов реализации личностно-ориентированных целей математического образования бакалавров является культурно-исторический дискурс. Развивающий потенциал культурно-исторического дискурса заключается в формировании у обучающихся интереса к учению, представления об исторически взаимообусловленном единстве математики с другими составляющими духовной культуры, воспитании эстетического восприятия математики.

Культурно-исторический дискурс в математическом образовании предполагает использование математических суждений в адекватной целям математического образования интерпретации. Грамотное построение дискурса в процессе коммуникации отражает философское осмысление осваиваемых понятий, способов деятельности и культурных норм. Приведём некоторые примеры введения культурно-исторического дискурса в процесс обучения математике в вузе.

При изучении темы «Аффинная система координат на плоскости» мы формируем у будущих бакалавров представление о том, что идея координат возникла ещё у древних греков (Архимед, Аполлоний Пергский), однако её развитию помешал невысокий уровень древнегреческой алгебры и слабый интерес к кривым, отличным от прямой и окружности. Позднее, в 14 веке, Николай Орезмский использовал координатное изображение для функции, зависящей от времени, он называл координаты по аналогии с географическими - долготой и широтой. К этому времени развитое понятие о координатах уже существовало в астрономии и географии. Около 1637 года Ферма распространяет мемуар «Введение в изучение плоских и телесных мест», где выписывает и обсуждает уравнения различных кривых 2-го порядка в прямоугольных координатах, наглядно показывая, насколько новый подход проще и плодотворней чисто геометрического. Однако гораздо большее влияние имела «Геометрия» Декарта, вышедшая в том же 1637 году, которая независимо и гораздо более полно развивала те же идеи. Декарт включил в геометрию более широкий класс кривых, в том числе «механические» (трансцендентные, вроде спирали), построил их уравнения и провёл классификацию.

При изучении линий второго порядка студенты с интересом узнают, что эллипс, парабола и гипербола изначально были получены сечением прямого кругового конуса плоскостями, не проходящими через его вершину. Открывателем конических сечений считается Менехм (4 в. до н. э.), ученик

Платона. Он использовал параболу и равнобочную гиперболу для решения задачи об удвоении куба. В свою очередь, Аполлоний Пергский (ок. 260-170 гг. до н.э.) в знаменитом трактате «Конические сечения», варьируя угол наклона секущей плоскости, получил все конические сечения, ему мы обязаны и современными их названиями.

Согласно типологии, предложенной Лео Роджерсом, можно выделить пять подходов к организации культурно-исторического дискурса в процессе обучения математике:

1) эмпирический подход - хронологическая реконструкция прошлого как исторического прогресса математических идей;

2) социально-культурный подход - рассмотрение истории математики в контексте общественного (экономического, политического, культурного, технологического) развития;

3) личностно-ориентированный подход - анализ индивидуальных творческих процессов, логики математических открытий, психологии изобретений;

4) концептуальный подход - реконструкция математических теорий прошлого в соответствии с современным состоянием математики;

5) герменевтический подход - вовлечение в реконструкцию математического знания уточнённых исторических текстов.

При выборе преподавателем любого из перечисленных подходов культурно-исторический контекст должен быть непосредственно привязан к математическому образовательному контексту, то есть к конкретному математическому содержанию. В связи с этим актуален вопрос о разработке учебных пособий по различным разделам высшей математики, интегрирующих содержание культурно-исторического дискурса. Среди отечественных разработок, реализующих

практику математического культурно-исторического дискурса, следует отметить элективный курс «Введение в алгебру и анализ: культурно-исторический дискурс», предложенный А.Н. Земляковым [2]. В данном курсе ознакомление старшеклассников с основными линиями развития математического знания - числами, уравнениями, функциями, множествами – осуществляется в конкретно-историческом контексте: учащиеся знакомятся с историей развития алгебры и предысторией математического анализа, получают представления о взаимосвязях математики с другими науками и практикой.

Поводя итог, отметим, что интеграция культурно-исторического дискурса в процесс математического образования бакалавров способствует демонстрации целесообразности построения и развития математических теорий, даёт возможность раскрыть диалектику математики, показать её как развивающуюся систему взаимосвязанных теорий и различных подходов к решению конкретных задач в их зарождении, представить математику как органичную и неотъемлемую часть системы научного познания мира, раскрыть роль личности математиков и математических сообществ в становлении человеческой цивилизации, сформировать личностное, психологическое отношение к предмету математики.

Литература

1. *Арутюнова Н.Д.* Дискурс. Речь // Лингвистический энциклопедический словарь. – М.: Научное издательство «Большая Российская энциклопедия», 2002. – С. 136–137.

2. *Земляков А.Н.* Введение в алгебру и анализ: культурно-исторический дискурс. Элективный курс: Учебное пособие/ Земляков А.Н. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2007. – 320с.

3. *Земляков А.Н.* Психодидактические аспекты углублённого изучения математики в старших классах общеобразовательной средней школы // Учебно-методическая газета «Математика». «Первое сентября». –№6. –2005. – С. 17-21.

ИНТЕГРИРУЕМЫЙ БИЛЛИАРД С ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕМ[1]

©2020 *В. Н. Завьялов*
(Москва; *vnzavyalov@mail.ru*)

Пусть дана кусочно-гладкая кривая, ограниченная дугами софокусных квадрик (углы равны $\frac{\pi}{2}$). Определим систему биллиарда в области, ограниченной этой кривой. Шар (материальная точка) движется в области по прямолинейным отрезкам, с сохранением скорости и отражается от кривой по закону «угол падения равен углу отражения». При попадании в угол точка после отражения продолжает движение по той же прямой, по которой попала в этот угол.

В теории интегрируемых систем представляют интерес интегрируемые биллиарды, для которых вдоль траектории сохраняется дополнительная функция, функционально независимая от квадрата длины вектора скорости. Например, биллиард в окружности – любая траектория, касается меньшей окружности с тем же центром, т.е. радиус этой меньшей окружности есть интеграл. Биллиард в эллипсе также интегрируем – траектории (или их продолжения) касаются некоторого эллипса или некоторой гиперболы, софокусной с данным эллипсом [1]. Семейство софокусных квадрик можно задать уравнением

[1]Исследование выполнено в рамках Программы Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ РФ(грант НШ-2554.2020.1).

$$(b-\lambda)x^2 + (a-\lambda)y^2 = (a-\lambda)(b-\lambda),$$

где $a > b > 0$. Пусть эллипс, который ограничивает биллиард соответствует параметру $\lambda = 0$. Вдоль траектории биллиарда сохраняется параметр λ квадрики, которой касаются траектории или её продолжения.

Определим новую интегрируемую систему, называемую биллиардом с проскальзыванием. Пусть даны два эллипса. При попадании на границу точка продолжает движение по второму эллипсу выходя из соответствующей ей симметричной точке на другом эллипсе под тем же углом. Аналогично можно определить систему при которой точка после отражения продолжает движение по тому же эллипсу, но выходит из диаметрально противоположной точки, «проскальзывая». Заметим, что обе системы по прежнему останутся интегрируемыми с тем же интегралом, что и классический биллиард в эллипсе. Это позволяет изучить топологию соответствующей изоэнергетической поверхности, используя теорию инвариантов интегрируемых систем Фоменко-Цишанга [2].

Литература

1. *Козлов В.В., Трещев Д.В.* Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991.

2. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т.1,2, Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 1999.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЦ РАСХОДА ЖИДКОСТИ ПРИ ОДНОМ ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ

©2020 *Н. С. Задорожная, Т. В. Клодина*
(Ростов-на-Дону; *simon@sfedu.ru*)

В связи с тем, что при решении задач фильтрации наиболее важным является отыскание характеристик потока, которые зависят как от вида краевых условий, так и от формы границы области фильтрации, возникает вопрос, как изменяются эти характеристики при изменении границы области.

Ответить на этот вопрос позволяет метод мажорантных областей. Его сущность заключается в том, что путём деформации границы области фильтрации строятся две такие области, для которых поставленную задачу можно решить точно. Полученные характеристики для этих областей дают заведомо верхние и нижние оценки искомых. В работе Г.Н. Положего [1] наиболее полно изложены теоремы для различных случаев границ области фильтрации.

Однако, на практике встречаются задачи теории фильтрации, когда область фильтрации ограничена одной линией тока и тремя потенциальными линиями. Задачи такого рода представляют существенную трудность вследствие того, что в этом случае вид годографа комплексного потенциала может быть заранее неизвестен.

Предлагается определение верхней и нижней границ расхода жидкости в области фильтрации, ограниченной тремя потенциальными линиями AB, AD, CD и одной линией тока BC.

Имеем плоскую или осесимметричную задачу стационарной фильтрации

$$div\overline{V} = 0, \overline{V} = -\kappa_0\, grad\, h, \qquad (1)$$

($\overline{V} = (V_x, V_y)$ — скорость фильтрации, $h(x, y)$ — напорная функция, $\kappa_0(x, y)$ — коэффициент фильтрации).

Краевые условия имеют вид

$$\varphi|_{AB} = -\kappa_0 H, \varphi|_{CD} = 0, \varphi|_{AD} = -\kappa_0 H_0, \phi|_{BC} = 0, \qquad (2)$$

где $\varphi(x, y)$ — потенциальная функция, $\phi(x, y)$ — линия тока, H и H_0 — величины напоров на границе области фильтрации, когда $H_0 > H > 0$. Полагаем, что коэффициент фильтрации $k_0(x, y)$ вместе со своими частными производными является правильно непрерывной функцией в области фильтрации плоскости z.

Авторы предлагают новую теорему об изменении расхода при решении задачи, когда варьируется область фильтрации, ограниченная тремя потенциальными линиями и одной линией тока, при условии $H_0 > H > 0$.

Теорема. *При вдавливании линии тока расход жидкости через всякую связную часть потенциальной линии, имеющей общий конец с линией тока, уменьшается. При выдавливании линии тока расход увеличивается.*

Искомое решение находим как среднее арифметическое найденных оценок.

Отметим, что аналогичная теорема при условии $H > H_0$ изложена в работе [2].

Литература

1. *Положий Г. Н.* Теория и применение p-аналитических и (p, g)-аналитических функций. Киев : Наукова думка, 1973. 423 с.

2. *Клодина Т.В., Задорожная Н.С.* Теорема об изменении расхода жидкости при решении одной задачи стационарной фильтрации. Сборник материалов Международной конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения С.Г. Крейна. Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2017. — С. 116-117.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ТЕРМО-ЗАДАЧИ ГИДРОДИНАМИКИ[1]

©2020 *А. В. Звягин*
(Воронеж; *zvyagin.a@mail.ru*)

На $Q_T = \Omega \times [0,T]$, где $\Omega \subset R^n, n = 2,3$, область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$ и $T > 0$, рассматривается следующая начально-краевая задача:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - 2\mathrm{Div}\ (\mu(\theta)\mathcal{E}(v)) + \nabla p = f; \quad (1)$$

$$v = (I - \alpha^2\Delta)u; \qquad \mathrm{div}\, u = 0; \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = u_0; \quad u|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0; \quad \Delta u|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + (u\cdot\nabla)\theta - \chi\Delta\,\theta = 2\mu(\theta)\mathcal{E}(u) : \mathcal{E}(v) + g; \quad (4)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0; \quad \theta|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \quad (5)$$

Здесь, v — вектор-функция скорости движения частицы среды, u — вектор-функция модифицированной скорости движения частицы среды, $\theta(t,x)$ — функция температуры среды, p — функция давления, f — функция плотности внешних сил, g — источник внешнего тепла, $\alpha > 0$ — скалярный параметр, $\mu(\cdot) > 0$ — коэффициент вязкости среды, $\chi > 0$ — коэффициент теплопроводности, u_0 и θ_0 — начальные скорость и температура. Через $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ij}(v))$, $\mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big)$, $i,j = \overline{1,n}$, обозначается тензор скоростей деформации.

Изучаемая начально-краевая задача с постоянной вязкостью называется альфа-моделью системы Навье–Стокса

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект №19-11-00146).

(см. [1]). Введём пространства, в которых будет доказана разрешимость изучаемой задачи:

$$W_1 = \{u \in L_2(0,T;V^2) \cap L_\infty(0,T;V^1), u' \in L_2(0,T;V^{-2})\};$$

$$W_2 = \{\theta : \theta \in L_p(0,T;W_p^1(\Omega)), \theta' \in L_1(0,T;W_p^{-1}(\Omega)).$$

Определение 1. *Слабым решением задачи (1)–(5) называется пара (u,θ), где $u \in W_1$ и $\theta \in W_2$, удовлетворяющая при всех $\varphi \in V^2$, $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ и почти всех $t \in [0,T]$ соотношениям*

$$\langle (J+\alpha^2 A)u', \varphi\rangle - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} u_i((J+\alpha^2 A)u)_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx +$$

$$+ \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} ((J+\alpha^2 A)u)_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\varphi_j\,dx - 2\int_\Omega \mu(\theta)(J+\alpha^2 A)u\Delta\varphi\,dx =$$

$$\langle f, \varphi\rangle,$$

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial\theta}{\partial t}\phi dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} u_i\theta_j\frac{\partial\phi_j}{\partial x_i}dx + \chi\int\limits_\Omega \mathcal{E}(\theta) : \mathcal{E}(\phi)dx =$$

$$= 2\int\limits_\Omega \big(\mu(\theta)\mathcal{E}(u) : \mathcal{E}(u)\big) : \phi dx + \langle g, \phi\rangle,$$

и начальным условиям $u|_{t=0} = v_0$ и $\theta|_{t=0} = \theta_0$. Здесь $J = PI$, где P — проектор Лере, а I — тождественный оператор.

Теорема 1. *Пусть функция $\mu \in C^2(-\infty,+\infty)$ и $0 < \mu(\theta) \le M$ для всех $\theta \in W_2$, $f \in L_p(0,T;V^{-1})$, $g \in L_1(0,T; H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))$, $u_0 \in V^1$, $\theta_0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega)$. Тогда при $1 < p < 4/3$ для $n = 2$ и для $1 < p < 10/9$ при $n = 3$ существует слабое решение задачи (1)–(5).*

Доказательство теоремы 1 основано на последовательном применение аппроксимационно-топологического подхода к задачам гидродинамики и на итерационном процессе, и поэтому проводится поэтапно (см. работы [2]–[6]). На первом этапе устанавливается разрешимость задачи (1)–(3) при фиксированном $\theta \in W_2$. Затем устанавливается разрешимость задачи (4)–(5) с заданной $u \in W_1$. Далее, описывается итерационный процесс, состоящий в последовательном решении вышеприведённых задач, и, наконец, доказывается сходимость последовательных приближений к решению задачи (1)–(5).

Литература

1. *Звягин А.В.* Оптимальное управление с обратной связью для альфа-модели Лере и альфа-модели Навье-Стокса // Доклады Академии Наук. — 2019. — Т. 486, Н. 5. — С. 527–530.

2. *Звягин А.В.* Разрешимость задачи термовязкоупругости для альфа-модели Лере // Известия ВУЗов. Математика. — 2016. — Н. 10. — С. 70–75.

3. *Звягин А.В.* Оптимальное управление с обратной связью для термовязкоупругой модели движения жидкости Фойгта // Доклады Академии Наук. — 2016. — Т. 468, Н. 3. — С. 251–253.

4. *Звягин А.В.* Исследование разрешимости термовязкоупругой модели, описывающей движение слабо концентрированных водных растворов полимеров // Сибирский математический журнал. — 2018. — Т. 59, Н. 5. — С. 1066–1085.

5. *Звягин А.В.* Слабая разрешимость термовязкоупругой модели Кельвина-Фойгта // Известия ВУЗов. Математика. — 2018. — Н. 3. — С. 91–95.

6. *Звягин А. В.* Исследование разрешимости термовязкоупругой модели движения растворов полимеров, удовлетворяющей принципу объективности // Математические Заметки. — 2019. — Т. 105, Н. 6. — С. 839–856.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДЕНИЯ СИСТЕМЫ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

©2020 *С. П. Зубова, А. Х. Мохамад*
(Воронеж, ВГУ; *spzubova@mail.ru*;
abdulftah.hosni90@gmail.com)

Рассматривается уравнение

$$A(\frac{\partial U}{\partial t} + \alpha U) = B(\frac{\partial U}{\partial x} + \beta U) + f(t,x), \qquad (1)$$

где $A, B : E \to E$, E банахово пространство, A-замкнутый линейный оператор с плотной в E областью определения $D(A)$. имеющий число 0 нормальным собственным числом, $B \in L(E,E)$, B^{-1} не существует, $f(t,x)$ — непрерывная вектор-функция со значениями в E, $U = U(t,x) \in E$, α, β скалярные функции; $\alpha = \alpha(t,x), \beta = \beta(t,x)$, $(t,x) \in T \times X$, где $T = [0,t_0], X = [0,x_0]$.

Рассматривается регулярный случай, т.е. при λ достаточно малых по модулю отличных от нуля ($\lambda \in \dot{U}(0)$) оператор $(A - \lambda B)$ обратим. В этом случае оператор $(A-\lambda B)^{-1}A$ имеет число 0 нормальным собственным числом [1], что позволяет разложить пространство E в прямую сумму подпространств $M^{(1)}$ и $N^{(1)}$ с проекторами на них $Q^{(1)}$ и $P^{(1)}$ соответственно. Уравнение (1) расщепляется на уравнения в этих подпространствах и решается в них с условиями

$$Q^{(1)}U(0,x) = \varphi(x) \in M^{(1)}, \quad P^{(1)}U(t,0) = \psi(t) \in N^{(1)}. \quad (2)$$

Теорема 1. *Решение* $U(t,x)$ *задачи* (1), (2) *существует и единственно.*

Получены формулы для $U(t,x)$. Приводится иллюстрирующий пример.

Литература

1. *Зубова С.П.* Solution of the homogeneous Cauchy problem for an equation with a Fredholm operator multiplying the derivative // S.P. Zubova // Doklady Mathematics. - 2009. - Vol. 80, No. 2. — P. 710–712.

2. *Нгуен Х.Д.* О моделировании с использованием дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных / Х.Д. Нгуен, В.Ф. Чистяков // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. - 2013. - Т. 6, № 1. - С. 98–111.

3. *Зубова С.П., Мохамад А.Х.* Решение одной задачи для дескрипторного уравнения в частных производных. Современные методы теории краевых задач. Материалы Международной конференции ВВМШ «ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ — XXX» (3–9 мая 2019 г.). С. 145.

ПОСТРОЕНИЕ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

©2020 *С. П. Зубова, Е. В. Раецкая*

(Воронеж; *spzubova@mail.ru*; *raetskaya@inbox.ru*)

Рассматривается система в частных производных

$$\frac{\partial x}{\partial t} = B(\frac{\partial x}{\partial s} + \alpha x) + Du, \qquad (1)$$

где $t \in [0, T]$, $s \in [0, S]$; $x(t,s) \in R^n$; $u(t,s) \in R^m$; $\alpha(t,s)$ — скалярная функция; B, D — матрицы соответствующих размеров.

Система (1) называется полностью управляемой, если существует такое управление $u(t,s)$, под воздействием которого система переводится из произвольного состояния $x(0,s)$ в произвольное состояние $x(T,s)$.

Для системы (1), описывающей процессы в вязко-пластической среде, решается задача построения программного управления.

Основным методом исследования является метод каскадной декомпозиции ([1]−[6]), опирающийся на свойство фредгольмовости конечномерного отбражения и заключающийся в поэтапном переходе к системам в подпространствах, так что на последнем шаге декомпозиции формируется система

$$\frac{\partial x_p}{\partial t} = B(\frac{\partial x_p}{\partial s} + \alpha_p x_p) + D_p(\frac{\partial u_p}{\partial s} + \beta_p u_p), \qquad (2)$$

где $D_p = 0$ или D_p — сюръекция; $x_p(t,s)$ — удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial x_p^j}{\partial s}|_{t=0} = a_j, \frac{\partial x_p^j}{\partial s}|_{t=T} = b_j, j = 1, ..., p, \qquad (3)$$

где a_j и b_j — некоторые функции. Доказывается

Теорема 1. *Система* (1) *полностью управляема в том и только том случае, когда* D_p *— сюръекция.*

В случае сюръективного D_p, для любого гладкого x_p, удовлетворяющего условиям (3) существует гладкое u_p, удовлетворяющее уравнению (2). Обратным ходом декомпозиции строятся функции состояния и управления в аналитическом виде с любой желаемой степенью гладкости.

Литература

1. *Zubova S.P.* Construction of Controls Providing the Desired Output of the Linear Dynamic System /Zubova С.П., Raetskaya E.V.// Automation and Remote Control. 2018 .Vol.79, No. 5, p. 774–791.

2. *Zubova S.P.* Algorithm to Solve Of Control By The Method Of Cascade Decomposition /Zubova С.П., Raetskaya E.V.// Automation and Remote Control. 2017 .Vol.78, No. 7, p. 1189–1202.

3. *Zubova S.P.* A Study Of The Rigidity Of Descriptor Dynamical System In a Banach Space /Zubova C.П., Raetskaya E.V.// Journal of Mathematical Sciences. 2015. Vol.208, 1, p. 131–138.

4. *Zubova S.P.* Solution Of The Coushy Problem For Two Descriptive Equations With Fredholm Operator /Zubova C.П., Raetskaya E.V.// Doklady Mathematics. 2014. Vol. 90, No. 3. p. 732–736.

5. *Zubova S.P.* Invariance Of a Nonstationary Observability System Under Certain Perturbations /Zubova C.П., Raetskaya E.V.// Journal of Mathematical Sciences. 2013. Vol. 188, No. 3. p. 218–226.

6. *Zubova S.P.* On Polinomial Solution Of The Linear Stationary Control /Zubova C.П., Trung L.H., Raetskaya E.V.// Automation and Remote Control. 2008 .Vol.69, No. 11, p. 1852–1858.

ДРОБНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

©2020 *М. Илолов*
(Душанбе, Таджикистан; *ilolov.mamadsho@gmail.com*)

В работе доказана теорема существования решений задачи Коши для нелинейного дробного по времени импульсного дифференциального включения с почти секториальным оператором в линейной части. Соответствующий результат для линейных и полулинейных дробных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве без импульсных воздействий установлен в работе [1].

1. Рассмотрим задачу Коши для дробных дифференциальных включений с импульсными воздействиями

$$^cD^\alpha u(t) \in Au(t) + F(t, u(t)), t \in J = [0, T], t \neq t_k, k = 1, ..., m, \quad (1)$$

$$\triangle u\Big|_{t=t_k} = I_k(u(t_k^-)), k = 1, ..., m, \quad (2)$$

$$u(0) = u_0, \quad (3)$$

где $^cD^\alpha$ дробная производная Капуто, $0 < \alpha < 1, A$ почти секториальный оператор порождающий сингулярную полугруппу порядка $1 + \gamma(-1 < \gamma < 0)$ при $t = 0, F : J \times E \to P(E)$ многозначное отображение, $P(E)$ семейство непустых подмножеств банахово пространство $E, I_K : E \to E, k = 1, ..., m$ и $u_0 \in E$, $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m < t_{m+1} = T, \triangle u\Big|_{t=t_k} = u(t_k^+) - u(t_k^-)$, $u(t_k^+) = \lim\limits_{h\to 0+} u(t_k + h), u(t_k^-) = \lim\limits_{h\to 0-} u(t_k + h)$ являются правыми и левыми пределами $u(t)$ при $t = t_k, k = 1, ..., m$.

Аналогичные дифференциальные уравнения целого порядка с импульсными воздействиями и со секториальными операторами были предметом анализа работы [2]. В работе [3] рассматривались нелокальные дробные дифференциальные включения со секториальным оператором. В [1] приводится пример эллиптического дифференциального оператора A' действующего в пространстве функций Гёльдера $C^l(\bar{\Omega}), 0 < l < 1$, где Ω-ограниченная область в $R^n(N \geq 1)$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, такой что $A' + \nu, \nu > 0$ не является секториальным, но является почти секториальным оператором. Почти секториальный оператор A генерирует полугруппу $T(t)$ порядка роста $1 + \gamma$ со сингулярным поведением при $t = 0$.

Обозначим через $E_{\alpha,\beta}$ обобщённую функцию типа Миттаг-Лефлера в виде

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} = \frac{1}{\pi i} \int\limits_L \frac{\lambda^{\alpha \mp \beta} l^{\lambda}}{\lambda^{\alpha - z}} d\lambda, \alpha, \beta > 0, z \in C, \tag{4}$$

где контур L начинается и заканчивается в $-\infty$ и обходит диск $|\lambda| < |z|^{1/\alpha}$ против часовой стрелки. Определим также функцию

$$e_{\alpha,\beta}(z) = -\sum_{n=1}^{N-1} \frac{z^{-n}}{\Gamma(\beta - \alpha n)} + O(|z|^{-N}),\ z \to \infty. \tag{5}$$

С помощью функций (4),(5) и соответствующей резольвенты оператора A вводим семейство операторозначных функций

$$S_\alpha(t) = E_\alpha(-zt^\alpha)(A) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\theta} E_\alpha(-zt^\alpha) R(z, A) dz, E_\alpha(z) = E_{\alpha,\alpha}(z)$$

и

$$T_\alpha(t) = e_\alpha(-zt^\alpha)(A) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\theta} e_\alpha(-zt^\alpha) R(z, A) dz, e_\alpha(z) = e_{\alpha,\alpha}(z),$$

где интегральный контур $\Gamma_\theta = \{R_+ l^{i\theta}\} \cup \{R_+ l^{-i\theta}\}$ направлен против часовой стрелки и $\omega < \theta < \pi/2 - |\arg t|$.

Лемма 1. Для каждого $t > 0, S_\alpha(t)$ и $T_\alpha(t)$ являются линейными ограниченными операторами на E. Более того существуют постоянные $C_S = C(\alpha, \gamma) > 0$, $C_T = C(\alpha, \gamma) > 0$ такие, что

$$\|S_\alpha(t)\| \le C_S t^{-\alpha(1+\gamma)}, \|T_\alpha(t)\| \le C_T t^{-\alpha(1+\gamma)}.$$

2. Пусть F в (1) является компактным многозначным отображением.

Рассмотрим пространство кусочно непрерывных функций

$$PC(J, E) = \{u : J \to E, u \in C((t_k, t_{k+1}), E), k = 0, ..., m+1$$
$$u(t_k^-), u(t_k^+), u(t_k^-) = u(t_k), k = 0, ..., m\}$$

с нормой

$$\|u\|_{PC} = \sup_{t \in J} \|u(t)\|.$$

Через $AC((t_k, t_{k+1}), E)$ обозначим пространство абсолютно непрерывных функций. Пусть $J' = J/\{t_1, .., t_m\}$.

Определение 1. Функция $u \in PC(J, E) \cap \cup_{k=o}^{m} AC((t_k, t_{k+1}), E)$ с дробной производной порядка α называется слабым решением задачи (1)-(3), если существует функция $v \in L^1([0, T], E)$ такая, что $v(t) \in Av(t) + F(t, v(t))$ для п.в. $t \in [0, T]$ и

$$u(t) = S_\alpha(t) x_0 + \sum_{k=1}^{m} s_\alpha(t - t_k) I_k(u(t_k^-)) + \int\limits_0^t T_\alpha(t - s) v(s) ds,$$

где v является селектором для многозначного отображения $F(t, u(t))$.

Приводим основной результат для почти секториального оператора А.

Теорема 1. Пусть A почти секториальный оператор и пусть $F : J \times E \to P(E)$ непустое выпуклое компактное многозначное отображение. Пусть выполнены следующие предположения:

(HF1) Для каждого $u \in E$, функция $t \to F(t, u)$ измеримая и для п.в. $t \in J$ полунепрерывная сверху;

(HF2) Существует функция $\varphi \in L^{1/q}(J, R_+), q \in (0, \alpha)$ и неубывающая непрерывная функция $\psi : R_+ \to R_+$ такая, что для каждой $u \in E$,

$$\|F(t, u)\| \leq \varphi(t)\psi(\|u\|), t \in J;$$

(HF3) Существует функция $\beta \in L^{1/q}(J, R_+), qt(0, \alpha)$ удовлетворяющей неравенству

$$2\eta C_T \|\beta\|_{L^{1/q}(J,R_+)} < 1,$$

где $\eta = \frac{T^{\alpha-q}}{\bar{\omega}^{1-q}}$ и $\bar{\omega} = \frac{\alpha-q}{1-q}$, и для каждого ограниченного подмножества $D \subset E$

$$\chi(F(t, D)) \leq \beta(t)\chi(D)$$

для п.в. $t \in J$, где χ мера некомпактности Хаусдорфа в E.

(HI) Для каждого $k = 1, ..., m, I_k$ непрерывный и компактный оператор и существуют положительные постоянные h_k такие, что

$$\|I_k(u)\| \leq h_k\|u\|, u \in E.$$

Тогда задача (1)-(3) имеет слабое решение при условии, что

$$C_S(\|u_0\| + hr) + C_T n\psi(r)\|\varphi\|_{L^{1/2}(J,R_+)} \leq r,$$

где $r > 0$ и $h = \sum\limits_{k=i}^{m} h_k$.

Доказательство теоремы состоит в сведении задачи (1),(2),(3) к задаче о неподвижной точке многозначного отображения $R : P(C(J, E)) \to 2^{P(C(J,E))}$. Для $u \in P(C(J, E))$ $R(u)$ является множеством всех функций $v \in R(u)$ такие, что

$$v(t) = S_\alpha(t)u_0 + \sum_{k=1}^{n} S_\alpha(t - t_k)I_k(u(t_k^-)) + \int\limits_0^t (t - s)f(s)ds,$$

где f является селектором многозначного отображения $F(t, u(t))$. Легко видеть, что любая неподвижная точка отображения $R(u)$ является слабым решением задачи (1)-(3).

Таким образом задача сводится к доказательству существования неподвижной точки многозначного отображения $R(u)$. Существование неподвижной точки многозначного отображения $R(u)$ подробным образом исследовано в работе [4].

Литература

1. *Wang R.-N., Chen D.-H., Xiao T.-J.* Abstract fractional Cauchy problems with almost sectorial operators. J. Differential Equations. 2012. v.252. — pp. 202-235

2. *Самойленко А.М., Илолов М.* К теории неоднородных по времени эволюционных уравнений с импульсными воздействиями. Докл.АН СССР. 1991. т. 319, №1. — с.63-67

3. *Wang J., Ibrahim A.G. and Feckan M.* Nonlocal impulsive fractional differential inclusions with fractional sectorial operators on Banach Spaces. Appl.Math.Comput. 2015. v.257. — pp. 103-118

4. *Гельман Б.Д., Обуховский В.В.* О неподвижных точках многозначных отображений ациклического типа. Фундаментальная и прикладная математика. 2015. т.20, №3. — с.47-59

О ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ ОПЕРАТОРОВ И УРАВНЕНИЙ С МНОГОМЕРНЫМИ ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ НА ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ ФУНКЦИЙ[1]

©2020 *А. И. Иноземцев*
(Липецк; *inozemcev.a.i@gmail.com*)

В работе получен критерий фредгольмовости уравнения с частными интегралами

$$(I - \sum_{\alpha} K_\alpha)x = f, \qquad (1)$$

в пространстве непрерывных на $D = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ функций, где $(K_\alpha x)(t_1,t_2,t_3) = \int\limits_{D_\alpha} k_\alpha(t_1,t_2,t_3,t_\alpha)x(s_\alpha)dt_\alpha$, $k_\alpha \in C(L^1(D_\alpha))$, $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ — мультииндекс, $\alpha_j \in \{0,1\}$, $D_\alpha = \prod\limits_{j=1}^{n}[a_j,b_j]^{\alpha_j}$. При $\alpha_j = 0$ отрезок $[a_j,b_j]$ не входит в декартово произведение. t_α — совокупность элементов τ_j, для которых $\alpha_j = 1$, а s_α — совокупность элементов τ_j, для которых $\alpha_j = 1$ и элементов t_k, для которых $\alpha_k = 0$. $dt_\alpha = \prod\limits_{j=1}^{n} d\tau_j^{\alpha_j}$, $\bar\alpha = (\bar\alpha_1,\bar\alpha_2,\bar\alpha_3)$, где $\bar\alpha_j = 1-\alpha_j$, $k_\alpha \in C(D_\alpha)$.

Теория уравнений вида $(I - \sum\limits_{\alpha} K_\alpha)x = f$ существенно отлична не только от теории интегральный уравнений Фредгольма, но и от теории сингулярных интегральных уравнений [1, 2]. Никакая гладкость ядер k_α не обеспечивает ни нетеровость, ни фредгольмовость данного уравнения.

Принадлежность ядер k_α операторов K_α пространству $C(L^1(D_\alpha))$ означает $\sup\limits_{(t_1,t_2,t_3)\in D} \int\limits_{D_\alpha} |k_\alpha(t_1,t_2,t_3,t_\alpha)|dt_\alpha < \infty$ и

[1]Работа поддержана РФФИ (проект № 19-41-480002).

для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $|t_i - t_i'| < \delta$ $(i = 1,2,3)$ $\int\limits_{D_\alpha} |k_\alpha(t_1,t_2,t_3,t_\alpha) - k_\alpha(t_1',t_2',t_3',t_\alpha)|dt_\alpha < \varepsilon$. При сделанных предположениях операторы K_α непрерывны в пространстве $C(D)$. Непосредственно проверяется, что ядра их композиций также принадлежат $C(L^1(D_\alpha))$.

Пусть операторы $I - K_{(1,0,0)}$, $I - K_{(0,1,0)}$ и $I - K_{(0,0,1)}$ обратимы, то в силу [2] $(I - K_{(1,0,0)})^{-1} = I + R_{(1,0,0)}$, $(I - K_{(0,1,0)})^{-1} = I + R_{(0,1,0)}$, $(I - K_{(0,0,1)})^{-1} = I + R_{(0,0,1)}$, где R_i — операторы с частными интегралами. Тогда уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$x = (I + R_{(0,0,1)})(I + R_{(0,1,0)})(I + R_{(1,0,0)})\times$$
$$\times(K_{12}^{(1)} + K_{13}^{(1)} + K_{23}^{(1)} + K_{123}^{(1)})x + G_1 f, \qquad (2)$$

где $G_1 = (I - K_{(0,0,1)})^{-1}(I - K_{(0,1,0)})^{-1}(I - K_{(1,0,0)})^{-1}$, $K_{12}^{(1)} = K_{(1,1,0)} + K_{(1,0,0)}K_{(0,1,0)}$, $K_{13}^{(1)} = K_{(1,0,1)} + K_{(1,0,0)}K_{(0,0,1)}$, $K_{23}^{(1)} = K_{(0,1,1)} + K_{(0,1,0)}K_{(0,0,1)}$, $K_{123}^{(1)} = K_{(1,1,1)} + K_{(1,0,0)}K_{(0,1,0)}K_{(0,0,1)}$.

Умножая операторы в (2), получим уравнение $x = (K_{12}^{(2)} + K_{13}^{(2)} + K_{23}^{(2)} + K_{123}^{(2)})x + G_1 f$, эквивалентное уравнению $(I - K_{12}^{(2)})(I - K_{13}^{(2)})(I - K_{23}^{(2)})x = (K_{12}^{(2)}K_{13}^{(2)} + K_{12}^{(2)}K_{23}^{(2)} + K_{13}^{(2)}K_{23}^{(2)} - K_{12}^{(2)}K_{13}^{(2)}K_{23}^{(2)} + K_{123}^{(2)})x + G_1 f$.

Если существуют обратные операторы [2] $(I - K_{23}^{(2)})^{-1}$, $(I - K_{13}^{(2)})^{-1}$, $(I - K_{12}^{(2)})^{-1}$, то $(I - K_{23}^{(2)})^{-1} = I + R_{23}$, $(I - K_{13}^{(2)})^{-1} = I + R_{13}$, $(I - K_{12}^{(2)})^{-1} = I + R_{12}$, где R_{ij} — операторы с частными интегралами. После умножения операторов получим уравнение

$$x = H_{123}x + F, \qquad (3)$$

где $F = G_2 G_1 f$, $H_{123} = (I + R_{23})(I + R_{13})(I + R_{12})(K_{12}^{(2)}K_{13}^{(2)} + K_{12}^{(2)}K_{23}^{(2)} + K_{13}^{(2)}K_{23}^{(2)} - K_{12}^{(2)}K_{13}^{(2)}K_{23}^{(2)} + K_{123}^{(2)})$ — интегральный оператор, а уравнение (3) — интегральное уравнение.

Из приведённых рассуждений следует

Теорема. *Линейное интегральное уравнение (1) с частными интегралами фредгольмово в $C(D)$ тогда и только тогда, когда в $C(D)$ обратимы операторы* $(I-K_{(1,0,0)})$, $(I-K_{(0,1,0)})$, $(I-K_{(0,0,1)})$, $(I-K_{12}^{(2)})$, $(I-K_{13}^{(2)})$, $(I-K_{23}^{(2)})$.

Литература

1. *Appel J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P.* Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations / J.M. Appel, A.S. Kalitvin, P.P. Zabrejko. New York-Basel: Marcel Dekker, 200. — 560 pp.

2. *Калитвин А.С., Фролова Е.В.* Линейные уравнения с частными интегралами. С-теория: второе издание. – Липецк: ООО "Оперативная полиграфия", 2015. — 195 с.

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ДВУХ КЛАССОВ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ С ПРИМЕНЕНИЕМ PYTHON[1]

©2020 *В. А. Калитвин*

(Липецк; *kalitvin@mail.ru*)

К уравнениям Вольтерра с частными интегралами приводятся различные задачи механики сплошных сред [1-3].

В пространстве $C(D)$ непрерывных на $D=[a,b]\times[c,d]$ функций рассматривается линейное уравнение с частными интегралами вида

$$x(t,s)=\int_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau+\int_c^s m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma+f(t,s), \quad (1)$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект номер 19-41-480002).

где $(t,s)\in D$, l, m, f — заданные непрерывные на $D\times T$, $D\times S$, D соответственно функции, $T=\{\tau : a\le\tau\le t\le b\}$, $S=\{\sigma : c\le\sigma\le s\le d\}$.

Найти решение уравнения (1) в явном виде удаётся в редких случаях, поэтому актуальной задачей является разработка алгоритмов и программ для численного решения этого уравнения.

Отрезки $[a,b]$ и $[c,d]$ разобъем на части точками

$$t_p=a+ph \ (p=0,1,\dots,P,\ a+Ph\le b<(P+1)h),$$

$$s_q=c+qg \ (q=0,1,\dots,Q,\ c+Qg\le d<(Q+1)g)$$

соответственно. Полагая $t=t_p$, $s=s_q$ и применяя формулы

$$\int_a^{t_p} l(t_p,s_q,\tau)x(\tau,s_q)d\tau=h\sum_{i=0}^{p}\alpha_{pi}l_{pqi}x(t_i,s_q)+r_{pq}^l,$$

$$\int_c^{s_q} m(t_p,s_q,\sigma)x(t_p,\sigma)d\sigma=g\sum_{j=0}^{q}\beta_{jq}m_{pqj}x(t_p,s_j)+r_{pq}^m,$$

где $l_{pqi}=l(t_p,s_q,t_i)$, $m_{pqj}=m(t_p,s_q,s_j)$, а r_{pq}^l, r_{pq}^m — остатки квадратурных формул, получим после отбрасывания остатков систему уравнений для приближенных значений x_{p0}, x_{0q}, x_{pq} функции x в точках (t_p,s_0), (t_0,s_q), (t_p,s_q) $(p=1,\dots,P;$ $q=1,\dots,Q)$. Пусть δ_{p0}, δ_{0q}, δ_{pq} — погрешности в уравнениях с x_{p0}, x_{0q}, x_{pq}. Тогда

$$x_{00}=f(a,c),$$

$$x_{p0}=h\sum_{i=0}^{p}\alpha_{pi}l_{p0i}x_{i0}+f_{p0}+\delta_{p0},$$

$$x_{0q}=g\sum_{j=0}^{q}\beta_{jq}m_{0qj}x_{0j}+f_{0q}+\delta_{0q},$$

$$x_{pq}=h\sum_{i=0}^{p}\alpha_{pi}l_{pqi}x_{iq}+g\sum_{j=0}^{q}\beta_{jq}m_{pqj}x_{p_j}+f_{pq}+\delta_{pq}$$

$$(p=1,\ldots,P;q=1,\ldots,Q),$$

где

$$f_{p0}=f(t_p,s_0),f_{0q}=f(t_0,s_q),f_{pq}=f(t_p,s_q).$$

Теорема 1. *Если r_{pq}^l и r_{pq}^m стремятся к нулю равномерно относительно p,q при $h,g\to 0$; существуют такие числа A,B что $|\alpha_{pi}|\le A<\infty$, $|\beta_{jq}|\le B<\infty$; погрешности δ_{p0}, δ_{0q}, δ_{pq} стремятся к нулю равномерно относительно p,q при $h,g\to 0$, то при всех достаточно малых h и g приближенное решение x_{pq} может быть найдено из последней системы, причём для любого заданного $\epsilon>0$ найдутся такие h_0 и g_0, что при $h<h_0$ и $g<g_0$ будут выполняться неравенства $|x_{pq}-x(t_p,s_q)|<\epsilon$ $(p=0,1,\ldots,P;q=0,1,\ldots,Q)$, а последовательность функций*

$$x_{pq}(t,s)=h\sum_{i=0}^{p}\alpha_{pi}l(t,s,t_i)x_{iq}+g\sum_{j=0}^{q}\beta_{jq}m(t,s,s_j)x_{pj}+f(t,s)$$

равномерно сходится на D к решению $x(t,s)$ при $p,q\to\infty$.

С использованием данного алгоритма разработана программа на языке Python и проведены численные эксперименты, показывающие достаточно хорошие результаты.

В пространстве $C(D)$ непрерывных на $D=[a,b]\times[c,d]$ функций рассматривается нелинейное уравнение с частными интегралами вида

$$x(t,s)=\int_a^t l(t,s,\tau,x(\tau,s))d\tau+\int_c^s m(t,s,\sigma,x(t,\sigma))d\sigma+f(t,s), \qquad (2)$$

Здесь $(t,s)\in D=[a,b]\times[c,d]$, а l,m,f — заданные непрерывные функции.

При численном решении уравнения (2) отрезок $[a,b]$ разобъем на равные части точками t_i и s_j $(i,j=0,1,\ldots,n)$.

При $i=j=0$ $x(t_i,s_j=0)$. Заменяя интегралы в уравнении (2) конечными суммами с помощью какой-либо квадратурной формулы, при фиксированных $j=0$ и $i=0$ получаем значения $x(t_i,s_0)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ и $x(t_0,s_j)$ $(j=1,\ldots,n)$. Используя найденные значения, вычисляем значения $x(t_i,s_j)$ при $i=1,2,\ldots,n$ и $j=1,2,\ldots,n$. Например, при использовании квадратурной формулы средних прямоугольников,

$$x(t_i,s_0)=f(t_i,s_0)+h\sum_{k=0}^{i-1}(l(t_i,s_0,t_k+\frac{h}{2},x(t_k,s_0))),$$

$$x(t_0,s_j)=f(t_0,s_j)+h\sum_{k=0}^{j-1}(m(t_0,s_j,s_k+\frac{h}{2},x(t_0,s_k))),$$

$$x(t_i,s_j)=f(t_i,s_j)+h\sum_{k=0}^{i-1}(l(t_i,s_j,t_k+\frac{h}{2},x(t_k,s_j)))+$$

$$+h\sum_{k=0}^{j-1}(m(t_i,s_j,s_k+\frac{h}{2},x(t_i,s_k))),$$

$$i=1,2,\ldots,n;j=1,2,\ldots,n$$

С использованием данного алгоритма разработана программа на языке программирования Python и проведены численные эксперименты, демонстрирующие достаточно хорошие результаты.

Литература

1. *Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P.* Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. New York: Marcel Dekker, 2000, 560 p.

2. *Калитвин А.С.* Линейные операторы с частными интегралами. Воронеж: ЦЧКИ, 2000, 252 с.

3. *Калитвин А.С., Калитвин В.А.* Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами. Липецк: ЛГПУ, 2006, 177 с.

КЛАССИФИКАЦИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ БИЛЛИАРДОВ С ВЫПУКЛЫМИ СКЛЕЙКАМИ НА ПЛОСКОСТИ МИНКОВСКОГО[1]

©2020 *Е. Е. Каргинова*
(Москва; *karginov13@gmail.com*)

Определение 1. *Плоскостью Минковского называется* $\mathbf{R}^2$ *со скалярным произведением*

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 - x_2y_2$$

.

Рассмотрим на плоскости Минковского эллипс E, задаваемый соотношением:

$$E\colon \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$$

Здесь $a > b > 0$ и $\lambda \in \mathbf{R}$ — вещественные числа. Софокусное семейство квадрик C_λ задаётся уравнением

$$C_\lambda\colon \frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} = 1 \qquad (1)$$

Биллиард в эллипсе на плоскости Минковского был исследован в работе (2) В. Драгович и М. Раднович, а именно описан закон отражения в таком биллиарде, первые интегралы системы и движение в системе.

Определение 2. *Простым биллирадом назовём двумерное, связное, плоское, компактное многообразие с кусочно-гладким краем, состоящим из сегментов квадрик семейства (1), попарно пересекающихся под углами, не превышающими* $\frac{\pi}{2}$.

Определим отражение в простом биллиарде: при отражении сохраняется евклидова длина вектора скорости и угол падения в смысле Минковского равен углу отражения.

Определение 3. *Топологическим биллиардом называем двумерное ориентируемое многообразие с кусочно-гладкой метрикой Минковского, полученное отождествлением (склейкой) простых биллиардов вдоль некоторых выпуклых или прямолинейных сегментов (ребра склейки).*

Вышеописанная конструкция была предложена В. В. Ведюшкиной в работе [3].

Отражение в топологическом биллиарде устроено следующим образом: при попадании на ребро склейки материальная точка продолжает движение по другому листу, а при попадании в угол или ребро, не являющееся ребром склейки, точка продолжает движение так же, как и в случае плоской области.

Такое отражение сохраняет два первых интеграла: квадрат евклидовой длины вектора скорости v_E и каустику траектории λ. Эти функции находятся в инволюции и функционально независимы, следовательно, топологический биллиард интегрируем по Лиувиллю.

Рассмотрим ограничение фазового пространства системы топологического биллиарда на поверхность уровня интеграла v_E — это трёхмерное многообразие Q^3, называемое изоэнергетической поверхностью. Изменяя значения интеграла λ, получим слоение Q^3 на двумерные поверхности -

[1]Исследование выполнено в рамках Программы Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-2554.2020.1).

неособые слои (двумерные торы) и особые слои, описываемые 3-атомами.

В своей работе я рассматриваю топологические биллиарды, которые могут быть получены склейкой простых биллиардов на плоскости Минковского вдоль выпуклых сегментов границы. Я получила полную классификацию таких биллиардов, и для каждого класса посчитала меченую молекулу Фоменко-Цишанга - граф с целочисленными метками, являющийся инвариантом Лиувиллевой эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем (подробнее о теории Фоменко-Цишанга см. [1]).

Литература

1. *Болсинов А. В., Фоменко А. Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Ижевск НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 1999. - Т.1

2. *Драгович, В., Раднович, М.* Топологические инварианты эллиптических биллиардов и геодезических потоков на эллипсоиде. Фундаментальная и прикладная математика. - 2015. - Т. 20(2), - С. 51-64.

3. *Ведюшкина В.В.* Топологическая классификация биллиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик, Матем. сб., 206:10 (2015), 127-176

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМУЩЕННОЙ МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВА МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

©2020 *М. А. Кащенко, В. И. Усков*

(Воронеж; *vum1@yandex.ru*)

Рассматривается задача Коши для уравнения Леонтьева межотраслевого баланса, возмущённого операторной добавкой:

$$A\frac{dx}{dt} = (B + \varepsilon C)x(t, \varepsilon), \qquad (1)$$

$$x(0, \varepsilon) = x^0(\varepsilon). \qquad (2)$$

Здесь $A = \mathcal{B}$ — матрица коэффициентов приростной фондоёмкости, $B = I - \mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$ — матрица прямых затрат, x — вектор-столбец валовой продукции, $t \in [0, T]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Функция $x^0(\varepsilon)$ голоморфна в окрестности точки $\varepsilon = 0$.

Вектор-функция $A\frac{dx}{dt}$ называется акселератором Харрода [1].

Такие модели с непрерывными функциями времени отражают условия динамического равновесия валового и конечного продукта в экономике страны.

Целью работы является исследование влияния возмущения, вызываемого малым параметром в задаче (1), (2) с конкретными значениями коэффициентов. Отметим, что в случае вырожденного оператора A, стоящего перед производной, влияние может быть значительным. Модель рассматривается на примере трёх отраслей народного хозяйства: $A, B, C : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $x(t, \varepsilon) \in \mathbf{R}^3$.

Известно, что оператор A, задаваемый вырожденной квадратной матрицей, фредгольмов.

Зададим матрицы коэффициентов в уравнении (1):

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.1 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Ядро оператора A одномерно. Имеем:

$$\operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ -\frac{2}{5}x_1 \\ -\frac{1}{5}x_1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \operatorname{Coim} A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{5}x_1 + x_2 \\ \frac{1}{5}x_1 + x_3 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\operatorname{Im} A = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ 2y_1 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\}, \quad \operatorname{Coker} A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 - 2y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$e = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -8 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Применим результаты, полученные в работе [2].

$$d_{00} =< QBe, \varphi >= 0,$$

$$d_{01} =< QCe, \varphi >= -0.08 \neq 0,$$

$$d_{10} =< QBA^{-}Be, \varphi >= -0.16 \neq 0.$$

Следовательно,

$$\frac{d_{10}}{d_{01}} = 2 > 0. \qquad (3)$$

Таким образом, операторная пара (A, B) регулярна; длина B-жордановой цепочки равна 2.

Получен следующий результат.

Теорема. *В задаче* (1), (2) *имеет место явление погранслоя.*

Условие (3) — это условие регулярности вырождения.

Замечание. *Если не выполняется условие регулярности вырождения, то это влечёт за собой большое расхождение между планируемым объёмом производства* ($\varepsilon = 0$) *и полученным на практике.*

Литература

1. Динамические многоотраслевые модели [электронный ресурс]. – Режим доступа: http://vsh1791.ru/sbks/BKS/EMM2/05.pdf (дата обращения: 19.11.2019).

2. *Зубова С. П., Усков В. И.* Асимптотическое решение задачи Коши для уравнения первого порядка с малым параметром в банаховом пространстве. Регулярный случай // Математические заметки. – 2018. – Т. 103, вып. 3. – С. 393-404.

3. *Кащенко М. А.* Решение задачи Коши для динамической модели В. Леонтьева с вырожденным коэффициентом фондоёмкости // Материалы Всеукраинской научно-практической конференции соискателей высшего образования и молодых учёных 11-12 апреля 2019 года: Современные и исторические проблемы фундаментальные и прикладныематематической подготовки в учреждениях высшего образования. – Харьков: ХНАДУ, 2019. – С. 167-170.

ОБ ОДНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

©2020 *А. В. Келлер, А. А. Замышляева, Н. А. Манакова*
(Воронеж, Челябинск; *alevtinak@inbox.ru*)

Пусть $\Omega \equiv (\Omega, \mathrm{A}, P)$ — полное вероятностное пространство, $\mathbf{R}$ — множество вещественных чисел, наделённое борелевской σ-алгеброй. Измеримое отображение $\xi : \Omega \to \mathbf{R}$ — случайная величина. Множество случайных величин с $E\xi = 0$ и конечной дисперсией образует гильбертово пространство $\mathbf{L_2}$ со скалярным произведением $< \xi_1, \xi_2 >= E(\xi_1\xi_2)$. Пусть $I \subset \mathbf{R}$ — некоторый интервал. Отображение $\eta : I \times \Omega \to \mathbf{R}$ вида $\eta = \eta(t, \omega)$ — одномерный стохастический процесс, для каждого фиксированного $t \in I$ значение отображения $\eta = \eta(t, \cdot)$ является случайной величиной, т. е. $\eta = \eta(t, \cdot) \in \mathbf{L}_2$ и для любого фиксированного $\omega \in \Omega$ значение стохастического процесса $\eta = \eta(\cdot, \omega)$ называется (выборочной) траекторией. Обозначим: $C\mathbf{L}_2$ — пространство непрерывных случайных процессов, $\overset{o}{\eta}{}^{(\ell)}$ – ℓ-ю производную Нельсона-Гликлиха случайного процесса η [1]. Множество непрерывных стохастических процессов, имеющих непрерывные производные Нельсона-Гликлиха до порядка $k \in \mathbf{N}$ в каждой точке множества I, образуют пространство $C^k\mathbf{L}_2$. Рассмотрим стохастическую систему леонтьевского типа:

$$L\overset{o}{\xi} = A\xi + B(u + \varphi), \tag{1}$$

где $u : I \to \mathbf{R}^n$– вектор-функция, φ — стохастический процесс. Пусть матрица A – (L, p)-регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbf{N}$, и начальные состояния (1) описываются начальным условием Шоултера-Сидорова:

$$\left[(\alpha L - A)^{-1} L\right]^{p+1} (\xi(0) - \xi_0) = 0, \tag{2}$$

где $\xi_0 = \sum_{k=0}^{n} \xi_{0,k} e_k$, $\xi_{0,k}$ — попарно независимые гауссовские случайные величины, а $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ является ортонормированным базисом в $\mathbf{R}^n$.

Теорема 1. *Для любой вектор-функции* $u \in C^{p+1}(I, \mathbf{R}^n)$, *начальных значений* ξ_0 *и стохастического процесса* $\varphi \in C^{p+1}\mathbf{L}_2(I, \mathbf{R}^n)$, *независимых для любого* $t \in I$, *существует единственное решение* ξ *задачи (1), (2), заданное формулой*

$$\xi(t) = \xi_u(t) + \xi_\varphi(t),\ \xi_u \in C^1(I, \mathbf{R}^n),\ \xi_\varphi \in C^1\mathbf{L}_2(I, \mathbf{R}^n),$$

где

$$\xi_u(t) = \int_0^t U^{t-s} L_1^{-1} Q u(s) ds +$$

$$+ \sum_{q=0}^{p} \left(M^{-1}(I_n - Q) L\right)^q M^{-1} (Q - I_n) u^{(q)}(t)$$

есть детерминированная часть, а

$$\xi_\varphi(t) = U^t \xi_0 + \int_0^t U^{t-s} L_1^{-1} Q \varphi(s) ds +$$

$$+ \sum_{q=0}^{p} \left(M^{-1}(I_n - Q) L\right)^q M^{-1} (Q - I_n) \overset{o}{\varphi}{}^{(q)}(t)$$

есть стохастическая часть решения.

Здесь $U^t = \lim\limits_{r\to\infty} \left(\left(L - \frac{t}{r}M\right)^{-1} L\right)^r$, $Q = \lim\limits_{r\to\infty} \left(r L_r^L(M)\right)^p$, $L_r^L(M) = L\left(L - \frac{1}{r}M\right)^{-1}$, I_n — *единичная матрица порядка* n.

Аналогично детерминированному случаю введём пространство измерений $U = \{u \in L_2(I, \mathbf{R}^n) : u^{(p+1)} \in L_2(I, \mathbf{R}^n)\}$, выделим в нем замкнутое выпуклое множество допустимых измерений $U_\partial \subset U$, которое содержит априорную информацию об измерениях. Задача восстановления динамически искажённого сигнала сводится к решению задачи оптимального управления

$$J(v) = \min_{u \in U_\partial} J(u),$$

для (1) с условием (2), где функционал качества

$$J(u) = J(\eta(u)) = \sum_{k=0}^{1} \int_0^\tau E \left\| \overset{\circ}{\eta}{}^{(k)}(t) - \eta_0^{(k)}(t) \right\|^2 dt$$

отражает близость реального наблюдения $\eta_0(t)$ и виртуального наблюдения $\eta(t)$, полученного на основе математической модели измерительного устройства (ИУ) (1), (2). Точка минимума $v(t)$ функционала на множестве U_∂, являющаяся решением задачи оптимального управления, называется оптимальным динамическим измерением. На практике существует только косвенная информация о $v(t)$.

Теорема 2. *Оптимальное динамическое измерение не зависит от случайных начальных условий, шумов в цепях и на выходе МТ.*

Таким образом, доказательство теоремы приводит к возможности применения численных алгоритмов, разработанных для детерминированного случая [2], при решения задачи восстановления измеренного сигнала. Заметим, что модель ИУ (1), (2) при $\det L = 0$ представлена в [3].

Литература

1. *Gliklikh Yu.E., Mashkov E.Yu.* Stochastic Leontieff Type Equations and Mean Derivatives of Stochastic Processes // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software, 2013, vol. 6, pp. 25–39.

2. *Shestakov A.L., Keller A.V., Sviridyuk G.A.* Optimal Measurements XXI IMEKO World Congress «Measurement in Research and Industry», 2015, pp. 2072–2076.

3. *Khudyakov Yu.V.* On mathematical modeling of the measu- rement transducers // Journal of Computational and Engineering Mathematics, 2016, vol. 3, no. 3, pp. 68–73.

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ БИЛЛИАРДНЫ РЕАЛИЗУЮТ ЛЮБОЙ КЛАСС ЭЙЛЕРА МНОГООБРАЗИЙ ЗЕЙФЕРТА[[1]

©2020 *В. А. Кибкало*

(Москва; *slava.kibkalo@gmail.ru*)

Рассмотрим биллиард (движение материальной точки) в плоской области (столе) с гамильтонианом $H = v_x^2 + v_y^2$ и упругим отражением от границы по закону Снелла. Пусть эта граница состоит из дуг софокусных квадрик семейства

$$(b-\lambda)x^2+(a-\lambda)y^2 = (a-\lambda)(b-\lambda). \qquad (1)$$

Такие системы интегрируемы по Лиувиллю (если внутренние углы области равны $\pi/2$, а не $3\pi/2$). Каждая траектория имеет каустику — квадрику того же семейства (1) с неким значением $0 \leq \lambda \leq a$ первого интеграла $\Lambda(x, y, v_x, v_y)$.

Слоение Лиувилля на фазовом пространстве таких биллиардов и их обобщений можно изучать при помощи теории топологической классификации школы А.Т. Фоменко, аналогично системам механики с двумя степенями свободы. Неособая трёхмерная поверхность постоянной энергии $Q_h^3 = \{H = h \neq 0\}$ разбивается на поверхности T_λ уровня интеграла $\Lambda = \lambda$ (на регулярные двумерные торы и конечное число особых двумерных или одномерных слоёв). Инвариант Фоменко-Цишанга — граф с символами перестро-

[1]Работа выполнена при поддержке Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант НШ-6399.2018.1, соглашение № 075-02-2018-867)

ек в вершинах и числовыми метками — классифицирует такие слоения с точностью до послойной эквивалентности (подробнее см. [1]).

На основе полученных В.В.Ведюшкиной, А.Т. Фоменко и другими результатов А.Т. Фоменко сформулировал [2] гипотезу из нескольких пунктов о возможности моделировать слоения интегрируемых систем с различных точек зрения при помощи биллиардов и разных классов их обобщений (топологические биллиарды, биллиардные книжки, добавление потенциала, магнитного поля, и другие).

Некоторые пункты гипотезы уже доказаны (например, реализация любого атома [3]). В некоторых *подклассах* изучаемых биллиардов были найдены топологические препятствия — свойство слоения, с которым оно не может быть слоением (на Q_h^3) биллиарда такого подкласса. Отметим: для найденных препятствий имеются такие расширенные классы биллиардов, в котором такое слоение уже реализуется.

Проверку весьма общего пункта гипотезы — о существовании биллиарда с произвольным инвариантом Фоменко-Цишанга — вполне естественно начать с моделирования «локального» слоения. Сформулированный А.Т. Фоменко «локальный вариант» гипотезы о биллиардах, в частности, ставит вопрос о возможности реализовать слоение с произвольной целочисленной меткой n (тесно связанной с классом Эйлера соответствующего многообразия Зейферта, см. [1]) на произвольной «семье» (см. [1]) седловых атомов.

Выберем числа $b < \lambda_1 < \cdots < \lambda_{k-1} < a$. В семействе (1) им отвечают гиперболы. Склеим стол Ω_k из разрезанных по ветвям этих гипербол k экземпляров $\Omega_{(i)}$ стола-эллипса. А именно, стол $\Omega_{(1)}$ разрежем по гиперболе $\lambda = \lambda_1$ на области a_1, b_1, c_1, стол $\Omega_{(K)}$ — по гиперболе $\lambda = \lambda_{k-1}$ на a_k, b_k, c_k, а остальные $\Omega_{(i)}$ — по λ_{i-1} и Ω_i на области a_i, x_i, b_i, y_i, c_i.

Стол Ω_k склеим из них с перестановками $\sigma_1 = (a_2, x_2, a_1, b_1)$, $\rho_1 = (b_1, c_1, y_2, c_2)$, $\sigma_{k-1} = (a_k, b_k, x_{k-1}, b_{k-1})$, $\rho_{k-1} = (b_{k-1}, y_{k-1}, b_k, c_k)$, $\sigma_i = (a_{i+1}, x_{i+1}, x_i, b_i)$ и $\rho_i = (b_i, y_i, y_{i+1}, c_{i+1})$ при $1 < i < k$.

Теорема 1. (Ведюшкина, К.) *Инвариант Фоменко-Цишанга слоения стола* Ω_k *изображён на рис. 2. На рёбрах* $C_2 - C_2$ *стоят метки* $(r, \varepsilon) = (\infty, 1)$*, на остальных рёбрах:* $(0, 1)$.

Следствие 1. Метка n не препятствует моделированию слоений интегрируемых систем биллиардными книжками.

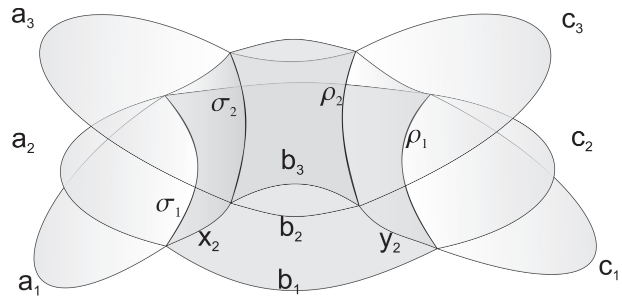


Рис. 1. Биллиардная книжка Ω_3 с меткой $n = 3$ на семье.

Литература

1. *Болсинов В.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы систмы: геометрия, топология, классификация. Ижевск, РХД, 1999.

2. *Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т.* Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности. Вестник МГУ, сер. 1, (3) 2019.

3. *Ведюшкина В.В., Харчева И.С.* Биллиардные книжки моделируют все трёхмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем, Матем. Сб., 209(12), 2018.

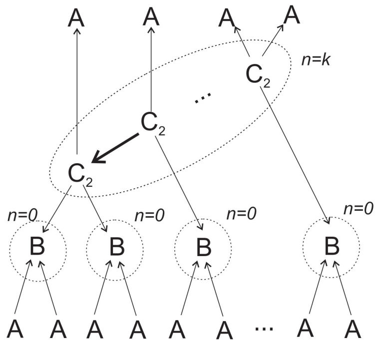


Рис. 2. Метки n на семьях седловых атомов для столов Ω_k.

МАГНИТНЫЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЙ ПОТОК НА МНОГООБРАЗИИ ВРАЩЕНИЯ: ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

©2020 *И. Ф. Кобцев*
(Москва; *int396.kobtsev@mail.ru*)

Рассмотрим многообразие $M \approx S^2$, на котором определено действие группы S^1 изометриями (такое многообразие называется многообразием вращения). Оно имеет метрику $ds^2 = dr^2 + f^2(r)d\varphi^2$. Определим на T^*M магнитный геодезический поток как гамильтонову систему с гамильтонианом $H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2f^2(r)}$ и симплектической структурой $\widetilde{\omega} = dp_r \wedge dr + dp_\varphi \wedge d\varphi + \Lambda'(r)dr \wedge d\varphi$.

В [1] использовался другой подход к получению новых систем на многообразии вращения — добавление потенциала: $H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2f^2(r)} + V(r)$. Рассмотрение магнитного поля вместо потенциала приводит к ряду новых топологических свойств.

Предположим, что выполнены следующие условия на функции $f(r)$ и $\Lambda(r)$ [1]:

1) $f(r) : (0, L) \to \mathbb{R}$ продолжается до гладкой нечётной $2L$-периодической функции Морса $f(r) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'(0) = 1$, $f'(L) = -1$;

2) $\Lambda(r) : (0, L) \to \mathbb{R}$ продолжается до гладкой чётной $2L$-периодической функции Морса $\Lambda(r) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

3) $(\Lambda'(r))^2 + (f'(r))^2 > 0$,

где L — длина геодезической, соединяющей полюса. Этот набор условий обеспечивает гладкость H и $\widetilde{\omega}$ на T^*M.

Целью исследования является вычисление инвариантов Фоменко-Цишанга, характеризующих топологию слоения Лиувилля на неособом изоэнергетическом многообразии $Q_h = \{H = h\}$.

Утверждение 1. *Определённая таким образом система имеет две степени свободы и является вполне интегрируемой по Лиувиллю; дополнительным интегралом является* $K = p_\varphi - \Lambda(r)$.

Фазовое пространство этой системы расслаивается на инвариантные (относительно фазового потока системы) двумерные слои, являющиеся совместными поверхностями уровня интегралов $H = h$, $K = k$, т.е. корректно определено слоение, называемое слоением Лиувилля. Согласно теореме Лиувилля это слоение состоит из слоёв двух типов:

- регулярные слои, диффеоморфные несвязному объединению торов T^2 (называемых торами Лиувилля);
- особые слои (бифуркации торов Лиувилля).

Структура слоения Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы известна и описана в [2].

В ходе исследования получены следующие результаты:

- построены бифуркационные диаграммы, найдены уравнения бифуркационных кривых;

- исследован топологический тип перестроек торов Лиувилля на неособом изоэнергетическом многообразии. В частности, обнаружены перестройки типов A, V_s (встречавшиеся в [1]) и найдены новые бифуркации (рис. 1), у которых критические окружности ориентированы несогласованно [2, раздел 3.3];

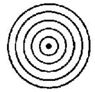
- по виду бифуркационных диаграмм вычислены инварианты Фоменко и Фоменко–Цишанга;

- обнаружено совпадение ряда инвариантов с уже встречавшимися в других задачах механики. Это позволяет сделать вывод о лиувиллевой эквивалентности систем с совпадающими инвариантами.

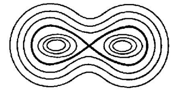
Литература

1. *Кантонистова Е. О.* Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения в потенциальном поле. Матем.сб.,2016, том 207, №3, с. 47–92.

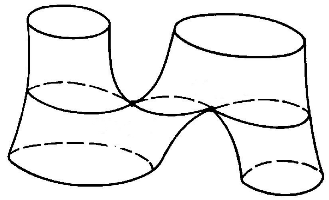
2. *Болсинов А. В., Фоменко А. Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999.



а)



б)



в)

Рис. 1. Двумерные базы 3-мерных окрестностей особых слоёв слоения Лиувилля на неособом изоэнергетическом многообразии: а — типа A; б — типа $V_2 = B$; в — пример 4-мерной перестройки торов Лиувилля с несогласованными ориентациями критических окружностей (показана зависимость двумерной базы от уровня энергии h). Трёхмерная (соотв. четырёхмерная) бифуркация получается в результате умножения двумерной базы (при каждом значении h) на окружность.

АППРОКСИМАЦИЯ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНЫ С ПРИСОЕДИНЁННЫМ ОСЦИЛЛЯТОРОМ[1]

©2020 *Д. М. Коростелева, А. А. Самсонов, П. С. Соловьёв, С. И. Соловьёв*
(Казань; *diana.korosteleva.kpfu@mail.ru*)

Исследуется нелинейная дифференциальная задача на собственные значения в частных производных четвёртого порядка, описывающая поперечные собственные колебания квадратной упругой изотропной пластины с присоединённым осциллятором. Предполагаются выполненными граничные условия шарнирного опирания. Эта задача имеет неубывающую последовательность положительных конечнократных собственных значений с предельной точкой на бесконечности. Последовательности собственных значений соответствует нормированная система собственных функций. В настоящей работе изучаются свойства собственных значений и собственных функций при изменении параметров присоединённого осциллятора. Исходная дифференциальная задача на собственные значения аппроксимируется сеточной схемой метода конечных разностей на равномерной сетке. Исследуется точность приближённых собственных значений и собственных функций в зависимости от шага сетки. Полученные результаты развивают и обобщают результаты работ [1–3].

Литература

1. *Соловьёв С.И.* Нелинейные задачи на собственные значения. Приближённые методы. Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2011. 256 с.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта № 18-41-160029. Работа поддержана РФФИ (проект № 19-31-90063).

2. *Соловьёв С.И.* Аппроксимация нелинейных спектральных задач в гильбертовом пространстве // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, № 7. С. 937–950.

3. *Соловьёв С.И.* Собственные колебания стержня с упруго присоединённым грузом // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 3. С. 418–432.

КЛЮЧЕВАЯ ФУНКЦИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЕЛЕЦКОГО

©2020 *Т. И. Костина*
(Воронеж; *tata@rambler.ru*)

Математическая модель колебаний спутника в плоскости эллиптической орбиты, представленная уравнением Белецкого имеет следующий вид [1]:

$$(1 + e\cos(\nu))2e\sin(\nu) + \frac{d\delta}{d\nu} + \mu\sin(\delta) - 4e\sin(\nu) = 0, \qquad (1)$$

где параметр e — эксцентриситет орбиты, μ — параметр, характеризующий распределение массы спутника, ν — угловая (полярная) координата центра масс спутника, δ — угол между фокальным радиусом и осью симметрии спутника.

В случаи $e \neq 0$ и $\mu \neq 1$ уравнение (3) не интегрируется, поэтому для его решения используются приближенные методы, например метод Ляпунова-Шмидта. Для его применения было доказано [3], что уравнение Белецкого является вариационным, был найден интегрирующий множитель $(1+e\cos(\nu))$, при умножении на который уравнения (1) получается уравнением Эйлера-Лагранжа для экстремалей функционала действия

$$V(q) = \int_0^{2\pi} L(\dot{q}, q)dt,$$

с лагранжианом $L(\dot{q}, q)$:

$$\frac{\dot{q}^2}{2}(1+e\cos(\nu))^2+(1+e\cos(\nu))4eq\sin(\nu)+(1+e\cos(\nu))\mu\cos(q).$$

Затем ставится задача построения алгоритма получения и исследования ключевой функции. Приближенное построение ключевых функций осуществляется на основе аппроксимации Галеркина-Ритца и редукции Пуанкаре, с помощью численного метода градиентного спуска в точку минимума функционала энергии V:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left((1+\varepsilon\, e_1(t))^2\ \frac{\dot{x}^2}{2}+(1+\varepsilon\, e_1(t))(\mu\cos(x)+4\varepsilon x e_2(t))\right)dt.$$

Получаются сходящиеся итерационные процессы, позволяющие строить ключевую функцию с любой требуемой точностью.

$$W(\xi_0,\xi_1,\xi_2,\mu,\varepsilon)=\inf V(\xi_0+\xi_1 e_1+\xi_2 e_2+v),$$

где $e_1=\sqrt{2}\cos(t), e_2=\sqrt{2}\sin(t)$.

В связи с развитием современной компьютерной техники и методов численного анализа стало возможным получить фазовые портреты решений и провести качественный анализ. При компьютерной реализации вычисления и анализа возникает существенные технические трудности. Требуется наличие большого объёма оперативной памяти, иначе происходит зацикливание или зависание программ. Исследование облегчает наличие круговой симметрии, возникающей из-за того, что функционал действия инвариантен относительно сдвига функции. Положив $\xi_2=0$ можно провести вторичную редукцию функционала.

Получены компьютерные изображения поверхностей линий уровней редуцированных приближений ключевой функции для уравнения Белецкого при двух различных значениях параметра:

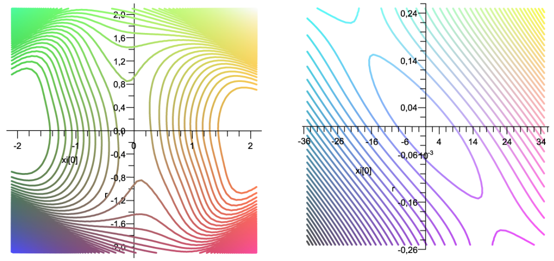


Рис. 1. Семейства линий уровней ключевой функции для уравнения Белецкого при $\mu=1.1$, $\varepsilon=0.2$; $\mu=1.05$, $\varepsilon=0.1$.

Литература

1. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. – М.: Наука, 1965. – 416 с.

2. Костина Т.И. Нелокальное вычисление ключевых функций в задаче о периодических решениях вариационных уравнений // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. №1. 2011 – С. 181-186.

3. Костина Т.И. О ветвлении периодических решений уравнения колебаний маятника и уравнения Белецкого // Т.И. Костина, Ю.И. Сапронов // Вестник Воронежского Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. №1. 2018 – С.99-114.

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ МАЙНАРДИ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

©2020 *В. А. Костин, Е. Д. Кочетова, С. С. Лемешаев*
(Воронеж; *jancd@inbox.ru*)

В Банаховом пространстве E с нормой $\|*\|_E$ рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^{1+\alpha}u(t)}{\partial t^{1+\alpha}} = Au(t), \quad t \geqslant 0 \tag{1}$$

где A — линейный замкнутый оператор с областью определения $D(A) \subset E$ и областью значения $R(A)$.

$$\frac{\partial^{1+\alpha}u(t,x)}{\partial t^{1+\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t \frac{u''(s)ds}{(t-s)^{\alpha}}; \quad \alpha \in (0,1) \tag{2}$$

- дробная производная в смысле Капуто.

Рассматривается задача о нахождении решения уравнения 1, удовлетворяющим условиям

$$u(0) = u_0, \ u'(0) = 0 \tag{3}$$

Определение 1 *Решением уравнения 1 называется оператор-функция $u(t)$ со значениями в $D(A)$, для которой определяется производная 2 и удовлетворяющая уравнению 1*

Определение 2 *Решением уравнения 1 удовлетворяющим условиям 3, где $u_0 \in D(A), u_1 \in D(A)$, называется решением задачи Коши.*

Определение 3 *Задачу 1 - 3 будем называть равномерно-корректной, если для её решения справедлива оценка*

$$||u(t)||_E \leq M||u_0||_E, \tag{4}$$

где константа M от t и u_0 не зависит.

Для оператора A, заданного выражением $D = d^2/dx^2$, уравнение 1 рассматривалось Ф. Майнарди [7].

В настоящем сообщении доказывается

Теорема 1 *Если оператор A является производящим оператором сильно-непрерывной косинус функции $C(t, A)$ с оценкой*

$$||C(t,A)||_E \leq M, \tag{5}$$

то задача Коши 1 - 3 равномерно-корректна и её решение имеет вид

$$u(t) = \int\limits_0^{\infty} I_t^{(1-\alpha)}(h_\alpha(t,\xi)C(\xi,A)u_0 d\xi, \tag{6}$$

где $I^{(1-\alpha)}f(t)$ — дробный интеграл Римана-Лиувилля,

$$h_\alpha(t,s) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{tp-\xi p^{\alpha}}dp$$

есть функция Иосиды и справедлива оценка 4

Литература

1. *Иосида К.* Функциональный анализ // К. Иосида - Издательство Мир, Москва 1967, с. 357.

2. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. Киев: Выща школа, 1989. 347 с.

3. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М.: Наука 1967. -464 с.

4. *Маслов В.П.* Операторные методы / Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука» – М., 1973. - 544 с.

5. *Kurepa S.* Semigroups and cosine functions. Lecture Notes in Math, vol 948 Berlin, Springs, 1982. - p. 47 - 72.

6. *Самко С.Г.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторих их приложения // С.Г. Самко / А.А. Килбис / О.И. Маричев

7. *Mainardi F.* Временное уравнение диффузии-волны. Радиофизика и квантовая электроника, вып. 38, №1-2, 1995

8. *Костин В.А., Костин А.В., Костин Д.В.* «Операторные косинус-функции и граничные задачи». ДАН, 2019,т.486 №5, с.531-536.

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ АЭРОДИНАМИКИ

©2020 *Д. В. Костин, М. Ю. Прицепов, М. Н. Силаева*
(Воронеж; *dvk605@mail.ru*; *marinanebolsina@yandex.ru*)

При исследовании процесса обтекания газовой средой крыла самолёта в [1] с.309 приходят к уравнению смешанного типа (см. [3])

$$\frac{\partial^2 u(r,\theta)}{\partial\theta^2} = r^2(r^2-1)\frac{\partial^2 u(r,\theta)}{\partial r^2} + r(r^2-1)\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r}, \theta > 0. \quad (1)$$

При $r > 1$ уравнение (1) описывает сверхзвуковой поток обтекаемой среды и является уравнением гиперболического типа.

При $r \in (0,1)$ — это уравнение эллиптического типа и оно описывает звуковой поток.

В настоящем сообщении для $r > 1$ рассматривается задача Коши нахождения решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям

$$u(r,0) = \varphi(r), \quad (2)$$

где функция $\varphi(r)$ разложима в ряд

$$\varphi(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(\frac{1}{r}), \quad (3)$$

$T_n(x)$- ортогональные многочлены Чебышева 1-го рода.

Справедливо следующее

Утверждение *Решение задачи (1)-(2) существует, единственно и представимо в виде*

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(\frac{1}{r}) \cos n\theta. \quad (4)$$

Литература

1. Современное состояние аэродинамики больших скоростей. Т.1. Под редакцией Л.Хоуарта. - Москва, 1955.— 491с.

2. *Костин В.А.* C_0 — операторные ортогональные многочлены Чебышева и их представления / В.А. Костин, М.Н. Небольсина // Записки научных семинаров ПОМИ, Том 376, 2010, С. 64-88.

3. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. М.:Наука, 1970 .— 295 с.

4. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. М.:Наука, 1979 .— 415 с.

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ОДНОРОДНЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ 4-МЕРНОГО КОМПЛЕКСНОГО ПРОСТРАНСТВА

©2020 *В. В. Крутских, А. В. Лобода*
(Воронеж; *lobvgasu@yandex.ru*)

Согласно [1], любая голоморфно однородная (5-мерная) вещественная гиперповерхность пространства $\mathbf{C}^3$, ассоциированная с 5-мерной нильпотентной алгеброй Ли, либо вырождена по Леви (во всех своих точках), либо (локально) голоморфно эквивалентна одной из невырожденных квадрик

$$Im\, z_3 = |z_1|^2 \pm |z_2|^2.$$

Ниже показано, что в 4-мерном комплексном пространстве аналогичное утверждение для вещественных 7-мерных орбит нильпотентных 7-мерных алгебр Ли НЕ верно.

Для доказательства рассматривается семейство нильпотентных 7-мерных алгебр Ли, обозначенное в работе [2] через 1357-M и зависящее от одного вещественного параметра. Коммутационные соотношения в этом семействе имеют в некотором базисе вид ($\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$)

$$[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_5,\ [e_1, e_4] = e_6,\ [e_1, e_5] = e_7, \tag{1}$$

$$[e_2, e_4] = e_5,\ [e_2, e_6] = \lambda e_7,\ [e_3, e_4] = (1-\lambda) e_7.$$

Авторами построена следующая реализация алгебр этого семейства в виде алгебр Ли голоморфных векторных полей в пространстве $\mathbf{C}^4$:

$$e_1 = i\frac{\partial}{\partial z_1} - z_1\frac{\partial}{\partial z_2} - z_2\frac{\partial}{\partial z_3} - z_3\frac{\partial}{\partial z_4},\ e_2 = \frac{\partial}{\partial z_1},\ e_3 = \frac{\partial}{\partial z_2},$$

$$e_4 = -i(1+\lambda)\frac{\partial}{\partial z_2} + z_1\frac{\partial}{\partial z_3} + (1-\lambda) z_2\frac{\partial}{\partial z_4}, \tag{2}$$

$$e_5 = \frac{\partial}{\partial z_3},\ e_6 = -i\lambda\frac{\partial}{\partial z_3} + \lambda z_1\frac{\partial}{\partial z_4},\ e_7 = \frac{\partial}{\partial z_4}.$$

При $\lambda = -1$ все орбиты такой алгебры в пространстве $\mathbf{C}^4$ аффинно эквивалентны вырожденной по Леви гиперповерхности $y_1 = y_2^2$.

Теорема 1. *При $\lambda \neq -1$ орбитами алгебр из семейства (2) являются (с точностью до аффинных преобразований пространства $\mathbf{C}^4$) алгебраические трубчатые поверхности*

$$y_4 = y_1 y_3 + A y_2^2 + B y_1^2 y_2 + C y_1^4,\ \textit{где} \tag{3}$$

$$A = \frac{1-\lambda}{2(1+\lambda)},\ B = \frac{1}{1+\lambda} C = \frac{1}{4(1+\lambda)}. \tag{4}$$

При $\lambda \neq 1$ согласованным растяжением переменных уравнение (3)-(4) можно привести к виду

$$y_4 = y_1 y_3 + y_2^2 + y_1^2 y_2 + A y_1^4, \quad A = \frac{1-\lambda}{8}. \tag{5}$$

Квадратичная форма $y_1 y_3 + y_2^2$ из правой части этого уравнения превращается в комплексных координатах в знаконеопределенную невырожденную форму Леви

$$H(z_1, z_2, z_3) = z_1 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1 + |z_2|^2.$$

Следовательно, при $\lambda \neq \pm 1$ все орбиты алгебры (2) являются невырожденными. При этом, согласно [3], поверхность с уравнением (5) голоморфно эквивалентна соответствующей квадрике

$$y_4 = z_1 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1 + |z_2|^2$$

только при $A = 1/12$, т.е. при $\lambda = 1/3$.

Тем самым, семейство поверхностей (3) иллюстрирует отличие ситуации в $\mathbf{C}^4$ от 3-мерного случая.

Замечание 1. При $\lambda = 1$ поверхность (3)-(4), т.е.

$$y_4 = y_1(y_3 + \frac{1}{2}y_1y_2 + \frac{1}{8}y_1^3). \qquad (6)$$

является вырожденной по Леви.

Замечание 2. Любая поверхность из семейства (5) допускает согласованное растяжение переменных, сохраняющее как поверхность, так и начало координат в $\mathbf{C}^4$, через которое она проходит. Это означает, что алгебра с базисом (2) является подалгеброй 8-мерной алгебры, дополнительным базисным полем которой является

$$e_8 = z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + 2z_2\frac{\partial}{\partial z_2} + 3z_3\frac{\partial}{\partial z_3} + 4z_4\frac{\partial}{\partial z_4}.$$

Замечание 3. Рассмотренное семейство 1357-M является одним из девяти однопараметрических семейств 7-мерных нильпотентных алгебр Ли. С использованием техники работы [4] авторами показано, что два других семейства из этих девяти (а именно, 12457-N и 123457-I) могут иметь лишь вырожденные по Леви орбиты в пространстве $\mathbf{C}^4$.

Литература

1. *Акопян Р.С., Лобода А.В.* О голоморфных реализациях нильпотентных алгебр Ли. Функц. анализ и его прил., 53:2 (2019), 59–63.

2. *Ming-Peng Gong.* Classification of Nilpotent Lie Algebras of Dimension 7. Waterloo, Canada, 1998. www.semanticscholar.org/paper/f72dbfc64f72f7b3d9a740c77181ae2186d58e22

3. *Исаев А.В., Мищенко М. А.* Классификация сферических трубчатых гиперповерхностей, имеющих в сигнатуре формы Леви один минус. Изв. АН СССР. Сер. матем., 52:6 (1988), 1123–1153.

4. *Beloshapka V. K., Kossovskiy I. G.* Homogeneous hypersurfaces in $\mathbf{C}^3$, associated with a model CR-cubic, J. Geom. Anal., 20:3 (2010), 538–564.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СОГЛАСОВАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ВТОРЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ГРАНИЧНОГО РЕЖИМА С НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ И ОДНОМЕРНЫМ ВОЛНОВЫМ УРАВНЕНИЕМ ДЛЯ ГЛАДКИХ РЕШЕНИЙ

©2020 *Ф. Е. Ломовцев, К. А. Спесивцева*
(Минск; *lomovcev@bsu.by*; *ksenia.spesivtseva@gmail.com*)

Для первой четверти плоскости $\dot{G}_\infty =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ в задаче

$$u_{tt}(x,t)+(a_1-a_2)u_{xt}(x,t)-a_1a_2u_{xx}(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in \dot{G}_\infty, \qquad (1)$$

$$u(x,t)|_{t=0}= \varphi(x),\ u_t(x,t)|_{t=0}= \psi(x),\ x > 0, \qquad (2)$$

$$[\zeta(t)u_{tt} + \xi(t)u_{xt} + \theta(t)u_{xx} + \alpha(t)u_t + \beta(t)u_x + \gamma(t)u]|_{x=0}= \mu(t),$$
$$t > 0, \qquad (3)$$

нижними индексами функции u обозначены её частные производные соответствующих порядков по указанным в индексах переменным, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $\zeta, \xi, \theta, \alpha, \beta, \gamma$ — заданные функции от t и f, φ, ψ, μ — заданные функции своих переменных x и t. Впервые зависящие от времени t коэффициенты в граничных режимах (3) для уравнения колебаний струны (1) при $a_1 = a_2$ появились в [1].

Уравнение (1) имеет характеристики $x - a_1t = C_1$, $x + a_2t = C_2$, $\forall\ C_1, C_2 \in \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$. Характеристика $x = a_1t$ является критической для уравнения (1) [2]. Она делит первую четверть плоскости $G_\infty = [0, +\infty[\times[0, +\infty[$ на два множества G_- и G_+ [2]. Под $C^k(\Omega)$ понимается множество всех k раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и $C^0(\Omega) = C(\Omega)$. В случае нехарактеристических вторых производных в граничном режиме (3) критерий корректности задачи (1)–(3) для классических решений $u \in C^2(G_\infty)$ найден в [2]. Для характеристических вторых производных в (3) для ограниченной струны нужны критерии корректности этой задачи для более гладких решений $u \in C^m(G_\infty)$, $m \geq 2$.

Определение. Гладким m раз непрерывно дифференцируемым решением начально-граничной задачи (1)–(3) называется функция $u \in C^m(G_\infty)$, где $m = 2, 3, 4, \ldots$, удовлетворяющая уравнению (1) в обычном смысле, а начальным (2) и граничному (3) условиям в смысле пределов соответствующих выражений от её значений $u(\dot{x}, \dot{t})$ во внутренних точках $(\dot{x}, \dot{t}) \in \dot{G}_\infty$ для всех указанных в них граничных точек x и t.

Для решений $u \in C^{m+1}(G_\infty)$ задачи (1)–(3) на «единицу» большей гладкости верны следующие условия согласования.

Теорема. *Пусть в граничном режиме (3) коэффициенты имеют гладкость порядка m: $\zeta, \xi, \theta, \alpha, \beta, \gamma \in C^m[0, +\infty[$, первые производные берутся не вдоль: $a_1\alpha(t) \neq \beta(t)$, $t \in [0, +\infty[$, а вторые производные – вдоль критической характеристики уравнения (1): $a_1^2\zeta(t) - a_1\xi(t) + \theta(t) \equiv 0$, $t \in [0, +\infty[$. Если начально-граничная задача (1)–(3) имеет решение $u \in C^{m+1}(G_\infty)$, то для правой части $f \in C^{m-1}(G_\infty)$, начальных $\varphi \in C^{m+1}[0, +\infty[$, $\psi \in C^m[0, +\infty[$ и граничного $\mu \in C^{m-1}[0, +\infty[$ данных верны условия согласования*

$$Y_{k+1} \equiv \sum_{i=0}^{k} Z_{i\,k} = \mu^{(k)}(0), \; k \in [0, m-1], \; m \geq 2, \qquad (4)$$

где слагаемые этой суммы соответственно равны

$$Z_{0\,k} \equiv \zeta^{(k)}(0)\big[f(0,0) + (a_2 - a_1)\{\psi^{(1)}(0) + a_1\varphi^{(2)}(0)\}\big] + \xi^{(k)}(0) \times$$
$$\times \big[\psi^{(1)}(0) + a_1\varphi^{(2)}(0)\big] + \alpha^{(k)}(0)\psi(0) + \beta^{(k)}(0)\varphi^{(1)}(0) + \gamma^{(k)}(0)\varphi(0),$$

$$Z_{1\,k} \equiv k\Big\{\zeta^{(k-1)}(0)[f^{(0,1)}(0,0) + (a_2 - a_1)f^{(1,0)}(0,0) + a_2(a_2 - a_1) \times$$
$$\times\{\psi^{(2)}(0) + a_1\varphi^{(3)}(0)\}] + \xi^{(k-1)}(0)[f^{(1,0)}(0,0) + a_2\{\psi^{(2)}(0) +$$
$$+ a_1\varphi^{(3)}(0)\}] + \alpha^{(k-1)}(0)[f(0,0) + (a_2 - a_1)\psi^{(1)}(0) + a_1a_2\varphi^{(2)}(0)] +$$
$$+ \beta^{(k-1)}(0)\psi^{(1)}(0) + \gamma^{(k-1)}(0)\psi(0)\Big\},$$

$$Z_{i\,k} \equiv \frac{k\,!}{i\,!\,(k-i)\,!}\Big\langle \zeta^{(k-i)}(0)\Big\{\sum_{s=1}^{i+1}\rho_{s-1}f^{(s-1,i-s+1)}(0,0) -$$
$$- a_1^2\sum_{s=1}^{i-1}\rho_{s-1}f^{(s+1,i-s-1)}(0,0) + \Big[\eta_{i+1} - a_1^2\eta_{i-1}\Big]\varphi^{(i+2)}(0) +$$
$$+ \Big[\rho_{i+1} - a_1^2\rho_{i-1}\Big]\psi^{(i+1)}(0)\Big\} + \xi^{(k-i)}(0)\Big\{\sum_{s=1}^{i}\rho_{s-1}f^{(s,i-s)}(0,0) +$$
$$+ a_1\sum_{s=1}^{i-1}\rho_{s-1}f^{(s+1,i-s-1)}(0,0) + \Big[\eta_i + a_1\eta_{i-1}\Big]\varphi^{(i+2)}(0) +$$
$$+ \Big[\rho_i + a_1\rho_{i-1}\Big]\psi^{(i+1)}(0)\Big\} + \alpha^{(k-i)}(0)\sum_{s=1}^{i}\rho_{s-1}f^{(s-1,i-s)}(0,0) +$$
$$+ \beta^{(k-i)}(0)\sum_{s=1}^{i-1}\rho_{s-1}f^{(s,i-s-1)}(0,0) + \Big[\eta_i\alpha^{(k-i)}(0) + \eta_{i-1}\beta^{(k-i)}(0)\Big] \times$$
$$\times \varphi^{(i+1)}(0) + \Big[\rho_i\alpha^{(k-i)}(0) + \rho_{i-1}\beta^{(k-i)}(0)\Big]\psi^{(i+1)}(0) +$$
$$+ \gamma^{(k-i)}(0)\Big\{\sum_{s=1}^{i-1}\rho_{s-1}f^{(s-1,i-s-1)}(0,0) + \eta_{i-1}\varphi^{(i)}(0) + \rho_{i-1}\psi^{(i-1)}(0)\Big\}\Big\rangle,$$

где $i \in [2, k]$, $k \in [2, m-1]$, и ρ_j и η_j находятся реккурентно

$$\rho_j = (a_2 - a_1)\rho_{j-1} + a_1a_2\rho_{j-2}, \; j \geq 2, \; \rho_0 = 1, \; \rho_1 = a_2 - a_1,$$

$$\eta_j = (a_2 - a_1)\eta_{j-1} + a_1a_2\eta_{j-2}, \; j \geq 2, \; \eta_0 = 0, \; \eta_1 = a_1a_2.$$

Здесь справа сверху над коэффициентами $\zeta, \xi, \theta, \alpha, \beta, \gamma$, начальными φ, ψ и граничным μ данными задачи цифрой в круглых скобках обозначены порядки производных по x или t. Аналогично обозначены в круглых скобках через запятую соответственно порядки частных производных по x и t от правой части f.

Идея доказательства. Доказательство осуществляется методом математической индукции. Чтобы получить условие (4) при $k = 0$ в равенстве (3) полагаем $t = 0$ и используем правую часть уравнения, начальные данные и характеристичность вторых производных. Для получения условий (4) при $0 < k \leq m-1$ равенство (3) дифференцируется k раз по t, вычисляются значения производных от решения u при $x = 0$, $t = 0$ с помощью начальных условий (2), уравнения (1) и характеристичности вторых производных.

Литература

1. *Ломовцев Ф.Е.* О необходимых и достаточных условиях однозначной разрешимости задачи Коши для гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка с переменной областью определения операторных коэффициентов./ Ф.Е. Ломовцев // Дифференц. уравнения. — 1992. — Т. 28, № 5. — С. 873–886.

2. *Ломовцев Ф.Е.* Нехарактеристическая смешанная задача для одномерного волнового уравнения в первой четверти плоскости при нестационарных граничных вторых производных. / Ф.Е. Ломовцев, В.В Лысенко // Веснiк Вiцебскага дзяржаунага унiверсiтэта, № 3 (104), — 2019. — С. 5–17.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СОГЛАСОВАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ГРАНИЧНОГО РЕЖИМА С НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ И ОДНОМЕРНЫМ ВОЛНОВЫМ УРАВНЕНИЕМ ДЛЯ ГЛАДКИХ РЕШЕНИЙ

©2020 *Ф. Е. Ломовцев, Е. В. Устилко*
(Минск; *lomovcev@bsu.by*; *ustilko@tut.by*)

Выведены достаточные условия согласования для смешанной задачи с характеристической косой производной в граничном режиме в первой четверти плоскости $\dot{G}_\infty =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$:

$$u_{tt}(x,t)+(a_1-a_2)u_{xt}(x,t)-a_1a_2u_{xx}(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in \dot{G}_\infty, \quad (1)$$

$$u(x,t)|_{t=0}= \varphi(x),\ u_t(x,t)|_{t=0}= \psi(x),\ x > 0, \quad (2)$$

$$[\alpha(t)u_t + \beta(t)u_x + \gamma(t)u]|_{x=0}= \mu(t),\ t > 0, \quad (3)$$

где нижними индексами функции u обозначены её частные производные соответствующих порядков по указанным в индексах переменным, постоянные $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, коэффициенты α, β, γ — заданные функции переменной t, $a_1\alpha(t) = \beta(t)$, $t > 0$, и исходные данные f, φ, ψ, μ — заданные функции своих переменных x и t.

Уравнение (1) имеет характеристики $x - a_1t = C_1$, $x + a_2t = C_2$, $\forall\ C_1, C_2 \in \mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$. Характеристика $x = a_1t$ является критической для уравнения (1) и делит множество $G_\infty = [0,+\infty[\times[0,+\infty[$ на два подмножества G_- и G_+ [1]. Под $C^k(\Omega)$ понимается множество всех k раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и $C^0(\Omega) = C(\Omega)$. Критерий корректности смешанной задачи (1)–(3) для простейшего уравнения колебаний полуограниченной струны (1) при $a_1 = a_2$ с характеристической косой производной граничного режима (3) во множестве классических решений $u \in C^2(G_\infty)$ установлен в [1]. Работа [2] свидетельствует о том, что в случае характеристической косой производной граничного режима (3) для уравнения колебаний ограниченной струны нужны критерии корректности этой вспомогательной смешанной задачи (1)–(3) для более гладких решений $u \in C^m(G_\infty)$, $m \geq 2$.

Определение. Гладким m раз непрерывно дифференцируемым решением начально-граничной задачи (1)–(3) называется функция $u \in C^m(G_\infty)$, где $m = 2, 3, 4, \ldots$, удовлетворяющая уравнению (1) в обычном смысле, а начальным условиям (2) и граничному режиму (3) в смысле пределов соответствующих выражений от её значений $u(\dot{x}, \dot{t})$ во внутренних точках $(\dot{x}, \dot{t}) \in \dot{G}_\infty$ для всех указанных в них граничных точек x и t.

Для решений $u \in C^{m+1}(G_\infty)$ задачи (1)–(3) на «единицу» большей гладкости нами найдены условия согласования. Для этих решений из (1)–(3) вытекают очевидные требования гладкости

$$f \in C^{m-1}(G_\infty),\ \varphi \in C^{m+1}[0, +\infty[,$$
$$\psi \in C^m[0, +\infty[,\ \mu \in C^m[0, +\infty[. \qquad (4)$$

Для получения первого условия согласования в равенстве (3) полагаем $t = 0$ и вычисляем значения слагаемых его левой части, используя условия (2) и характеристичность первых производных

$$\alpha(0)[\psi(0) + a_1\varphi^{(1)}(0)] + \gamma(0)\varphi(0) = \mu(0). \qquad (5)$$

Второе условие согласования граничного режима (3) с начальными условиями (2) и уравнением (1) находится, полагая $t = 0$ в первой производной по t от равенства (3) и вычисляя значения соответствующих производных от решения

u при $x = 0$, $t = 0$ с помощью начальных условий (2) при $x = 0$, уравнения (1) при $x = 0$, $t = 0$ и характеристичности первых производных

$$\alpha^{(1)}(0)[\psi(0) + a_1\varphi^{(1)}(0)] + \gamma^{(1)}(0)\varphi(0)+$$
$$+\alpha(0)\langle a_2[\psi^{(1)}(0) + a_1\varphi^{(2)}(0)] + f(0,0)\rangle + \gamma(0)\psi(0) = \mu^{(1)}(0). \qquad (6)$$

Аналогичным образом выводятся остальные условия согласования граничного режима с начальными условиями и уравнением.

Теорема. *Пусть в граничном режиме (3) с коэффициентами $\alpha, \beta, \gamma \in C^m[0, +\infty[$ косая производная является характеристической, т.е. она направлена вдоль критической характеристики уравнения (1): $a_1\alpha(t) = \beta(t)$, $t \in [0, +\infty[$. Если смешанная задача (1)–(3) имеет решение $u \in C^{m+1}(G_\infty)$, то для исходных данных f, φ, ψ, μ из (4) справедливы условия согласования (5), (6) и*

$$\alpha^{(q)}(0)[\psi(0) + a_1\varphi^{(1)}(0)] + \gamma^{(q)}(0)\varphi(0)+$$
$$+q\left\{\alpha^{(q-1)}(0)\left\langle a_2[\psi^{(1)}(0)+a_1\varphi^{(2)}(0)]+f(0,0)\right\rangle+\gamma^{(q-1)}(0)\psi(0)\right\}+$$
$$+\sum_{i=2}^{q}\frac{q\,!}{i\,!\,(q-i)\,!}\left\{\alpha^{(q-i)}(0)\left\langle a_2^i[\psi^{(i)}(0) + a_1\varphi^{(i+1)}(0)]+\right.\right.$$
$$\left.+\sum_{j=0}^{i-1} a_2^j f^{(j,\,i-j-1)}(0,0)\right\rangle + \gamma^{(q-i)}(0)\left\langle(-a_1)^{i-1}\psi^{(i-1)}(0)+\right.$$
$$+a_2\,\frac{a_2^{i-1} - (-a_1)^{i-1}}{a_1 + a_2}\,[\psi^{(i-1)}(0) + a_1\varphi^{(i)}(0)]+$$
$$\left.\left.+\sum_{k=0}^{i-2}\frac{a_2^{k+1} - (-a_1)^{k+1}}{a_1 + a_2}\,f^{(k,\,i-k-2)}(0,0)\right\rangle\right\} = \mu^{(q)}(0),\ q = \overline{2, m}. \qquad (7)$$

Здесь справа сверху над коэффициентами α, β, γ, начальными φ, ψ и граничным μ данными этой задачи цифрой в круглых скобках обозначены порядки производных по x или t. Аналогичным образом в круглых скобках через запятую обозначены соответственно порядки частных производных по x и t от правой части f.

Замечание. В дальнейшем мы ослабим достаточные условия согласования (сопряжения) (5)–(7) до необходимых условий таких, как, например, в [1]. Затем мы их применим для выявления критерия корректности аналогичной смешанной задачи при характеристических косых производных на двух концах ограниченной струны без продолжений данных новым методом «вспомогательных смешанных задач для волновых уравнений на полупрямой» из [3].

Литература

1. *Ломовцев Ф.Е.* Необходимые и достаточные условия вынужденных колебаний полуограниченной струны с первой характеристической косой производной в нестационарном граничном условии./ Ф.Е. Ломовцев // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. — 2016. — № 1 — С. 21–27.

2. *Ломовцев Ф.Е.* Смешанная задача для неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны при характеристических нестационарных первых косых производных на концах. / Ф.Е. Ломовцев, Т.С. Точко // Веснiк Гродзенскага дзяржаунага унiверсiтэта iмя Я. Купалы. Серыя 2. — 2019. — Т. 9, № 2. — С. 56–75.

3. *Ломовцев Ф.Е.* Метод вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны. / Ф.Е. Ломовцев // Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям: матер. Междунар. матем. конф. Минск БГУ. 7–10 дек. 2015 г. в 2 ч. Минск : ИМ НАН Беларуси. — 2015. — Ч. 2. — С. 74–75.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ B-ГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ

©2020 *Л. Н. Ляхов, Е. Л. Санина, С. А. Рощупкин*
(Воронеж; *levnlya@mail.ru*; *sanina08@mail.ru*; Елец; *roshupkinsa@mail.ru*)

Рассматривается сингулярный дифференциальный оператор Лапласа–Бесселя Δ_B и B-гармоническое уравнение $\Delta_B u = 0$ в шаре. Решение граничной задачи Дирихле представлено в виде ряда Лапласа по весовым сферическим функциям. Полученные решения совпадают с решениями классического гармонического уравнения при равенстве нулю всех размерностей операторов Бесселя, входящих в оператор Δ_B.

1. **Весовые сферические функции (B-гармоники)**. Пусть n и N натуральные числа и $1{\le}n{\le}N$ и пусть $\mathbb{R}_N^+\{x{=}(x',x''){=}(x_1\ \dots, x_n, x_{n+1}\ \dots, x_N),\ \ x_1{>}0,\dots,x_n{>}0\}$. В $\mathbb{R}_N^+$ рассматривается сингулярный дифференциальный оператор $\Delta_B = \sum_{j=1}^n B_j + \sum_{i=n+1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $B_{x_i}{=}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\gamma_i >$ 0. Отметим, что обозначение Δ_B (в настоящее время принятое в мировой литературе) введено И.А. Киприяновым в 60-х годах прошлого столетия. Из [1] и книги [2] вытекает, что ограниченные решения уравнений, содержащие оператор Δ_B, надо искать в классе функций C^2, чётных по каждой из переменных $x_1, \dots, x_n$. Такие функции будем называть x'-чётными.

Однородный x'-чётный многочлен $P_m^\gamma(x)$ порядка m, удовлетворяющий уравнению $\Delta_B P_m^\gamma(x) = 0$, называется B-гармоническим. Весовой сферической функцией (B-гармоникой) (далее используется сокращение в.с.ф.) *называется сужение B-гармонического многочлена на сферу:*

$$Y_m^\gamma(\Theta) = \frac{P_m^\gamma(x)}{|x|^m} = P_m^\gamma\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

Для наших исследований потребуются следующие свойства в.с.ф., полученные в [3], [4], [5] (см. также книгу [6]).

Пусть $S_1^+=\{x:\,|x|=1\}\cap\mathbb{R}_N^+$.

Ортогональность в.с.ф., отвечающих различным порядкам m и k (m, k=0,1,2,…), определяется равенством

$$\int\limits_{S_1^+} Y_m^\gamma(\Theta)\,Y_k^\gamma(\Theta)\,(\Theta')^\gamma\,dS{=}0,\quad m{\neq}k,\quad Y_0^\gamma(\Theta)=1\,. \tag{1}$$

где $(\Theta')^\gamma=\prod\limits_{i=1}^n\Theta_i^{\gamma_i}$, $\mathcal{P}_{\Theta'}^\gamma$ — многомерный оператор Пуассона, C_m^ν — многочлен Гегенбауэра и коэффициент $|S_1^+|_\gamma$ определён по формуле «площади нагруженной сферы» (см. [6], с. 20). Среди в.с. функций данного порядка m в свою очередь можно выбрать ортогональный базис $Y_{m,k}^\gamma(\Theta)$, $1{\le}k{\le}d_\gamma(m)$. В результате получим систему ортогональных в.с. функций

$$\{Y_{m,k}^\gamma(\Theta)\},\quad m{=}0,1,2,\,\ldots\,,\quad k{=}1,2,\,\ldots\,d_\gamma(m),$$

которая плотна в пространстве непрерывных на S_1^+ функций, чётных по каждому аргументу $x_1,\ldots,x_n$ и плотна в $L_2^\gamma(S_1^+)$ и полна в $L_2^\gamma(S_1^+)$.

Оценки D_B-производных от в.с. функций $Y_m^\gamma(\Theta)$ при $m\to\infty$.

Введём обозначение

$$(D_B)_{x'}^\beta=\begin{cases} B_{x_i}^{\frac{\beta_i}{2}} & ,\quad \beta_i=2k-\ \text{чётное число},\\ \frac{\partial}{\partial x_i}B_{x_i}^{\frac{\beta_i-1}{2}} & ,\quad \beta_i=2k{+}1-\ \text{нечётное число},.\end{cases}$$

Имеет место весовая среднеквадратическая оценка

$$\int\limits_{S_N^+}\left|\left((D_B)_{x'}^\beta\ D_{x''}^\alpha\,P_m^\gamma\right)(x)\right|^2(x')^\gamma\,dS\leqslant C_1m^{2|\alpha+\beta|}\|Y_m^\gamma\|_{L_2^\gamma(S_1^+)}$$

и равномерная оценка

$$\left|\left(B_{x'}^\beta D_{x''}^\alpha\,P_m^\gamma\right)(x)\right|^2\leqslant$$
$$\leqslant C_2m^{2|\alpha+2\beta|+N+|\gamma|-2}\,|x|^{2m-2|\alpha+2\beta|}\ \|Y_m^\gamma|_{L_2^\gamma(S_1^+)}\ ,$$

где постоянные C_1 и C_2 зависят от n,k,α и β, но не от m.

Дифференциальное уравнение в.с. функций:

$$(\Delta_B(\Theta)\,Y_m^\gamma)\,(\Theta){=}m(m{+}N{+}|\gamma|-2)Y_m^\gamma(\Theta)\,.$$

Здесь через $\Delta_B(\Theta)$ обозначено сужение Δ_B на сферу S_1^+ (оператор Бельтрами): $\Delta_B{=}\frac{\partial^2}{\partial r^2}{+}\frac{N+|\gamma|-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}{+}\frac{1}{r^2}\,\Delta_B(\Theta)$.

Ряды Лапласа по в.с. функциям. Справедливы следующие утверждения.

Пусть $f{\in}C_{ev}^{2l}(S_1^+)$ и $a_{m,k}$ и $b_{m,k}$ коэффициенты Фурье-Лапласа функций $f(\Theta)$ и $\left(\Delta_B^l(\Theta)\,f\right)(\Theta)$ соответственно по системе в.с.функций. Тогда

$$a_{m,k}=[m(m+N+|\gamma|-2)]^l\,b_{m,k}.$$

Если $f{\in}C_{ev}^{2l}(S_1^+)$, то

$$|a_{m,k}|\le M\,m^{-2l}\,,\quad M{=}\int\limits_{S_1^+}|(\Delta_B(\Theta)f)\,(\Theta)|^2\,(\Theta')^\gamma\,dS\,.$$

2. Задача Дирихле для B-гармонического уравнения в шаре

Пусть $U=\{x:\,|x|<1\}\cap\mathbb{R}_{\mathbb{N}}^+$. Рассмотрим задачу Дирихле

$$\Delta_Bu{=}0,\ \ u\left|_{|x|=1}\right.=f(\Theta)\ \ ,u\in C^2(U)\cap C(\overline{U}), \tag{4}$$

где $\Theta_j = \Theta(\varphi^i)$, $\varphi^i = (\varphi_1, ..., \varphi_j)$ — сферические координаты точки на замкнутой n-полусфере в $\mathbb{R}_N^+$:

$$\left.\begin{array}{l}\Theta_1 = \cos\varphi_1 \\ \Theta_2 = \sin\varphi_1\cos\varphi_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \Theta_{N-1} = \sin\varphi_1\sin\varphi_2 ... \sin\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-1}, \\ \Theta_N = \sin\varphi_1\sin\varphi_2 ... \sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1},\end{array}\right| \begin{array}{l} 0 \le \varphi_i \le \pi/2, \\ i = \overline{1,n}, \\ \\ 0 \le \varphi_j \le \pi, \\ j = \overline{n, N-1}, \\ 0 \le \varphi_{N-1} \le 2\pi. \end{array}$$

Решение задачи (4) в сферических координатах обозначим $\widetilde{u} = u(r, Q)$. Это приведёт к задаче:

$$\Delta_B u = \Delta B_{n_r|\gamma|-1,r}\widetilde{u}\,(r,\Theta) + \frac{1}{r^2}\Delta_{B,\Theta}\widetilde{u}(r,\Theta),\ \ \widetilde{u}\big|_{r=1} = f(\Theta)\,. \quad (5)$$

Предположим существование решения (5) в виде $\widetilde{u} = R(r)\cdot Y(\Theta)$. Тогда оно должно удовлетворять уравнению

$$r^2 Y(\Theta) B_{N+|\gamma|-1,r} R(r) + R(r)\Delta_{B,\Theta} Y\,(\Theta) = 0. \qquad (6)$$

Отсюда имеем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\begin{cases} r^2 B_{N+|\gamma|-1,r} R(r) - \lambda R(r) = 0, \\ \Delta_{B,\Theta} Y\,(\Theta) + \lambda Y(\Theta) = 0. \end{cases}$$

Из условия Дирихле следует, что по каждой переменной φ_j решение задачи (6) периодично с периодом 2π. Такому условию удовлетворяет и B-гармоника $Y_m^\gamma(\Theta)$. Поэтому за нетривиальное решение уравнения примем спектральный набор

$$\lambda = m\,(m + N + |\gamma| - 2)\,,\quad Y\,(\Theta) = Y_m^\gamma\,(\Theta)\,,\ \ m = 0, 1, 2, ...$$

Решение $R(r)$ ищем в виде $R(r) = r^k$. Имеем
$k\,(k + N + |\gamma| - 2) - k\,(m + N + |\gamma| - 2) = 0 \implies k^2 - km = 0.$

Таким образом, число k может принимать два значения $k_1 = 0$ и $k_2 = m$. В первом случае $R(r) = 1$ и мы получили решение, не зависящее от r. Т.е. оно постоянно на лучах, выходящих из центра шара и, следовательно, представляет собой однородную функцию, которая, очевидно, не определена в начале координат. Итак решение уравнения (6) имеет вид $\widetilde{u}_m(r,\Theta) = r^m \cdot a_m \cdot Y_m^\gamma(\Theta)$. Предположим, что это решение представлено рядом Лапласа

$$\widetilde{u}(r,\Theta) = \sum_{m=0}^{\infty} r^m a_m Y_m^\gamma(\Theta).$$

При выполнении условия задачи и при $r < 1$ он сходится абсолютно и равномерно, поэтому функция $\widetilde{u}(r,\Theta)$ — решение (5). Если это решение удовлетворяет условию Дирихле, то это условие представлено рядом Фурье–Бесселя $f(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m Y_m^\gamma(\Theta(\varphi))$, следовательно

$$a_m = \int_{S_N^+} f(\varphi) Y_m^\gamma\,(\Theta(\varphi))\,(\Theta')^\gamma\ \ dS(\Theta).$$

Литература

1. *Келдыш М.В.* О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области. // ДАН СССР. 1951. Т.77. № 1.С.181-183.

2. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические задачи / И. А. Киприянов. – М. : Наука, 1997. – 199 с.

3. *Ляхов Л.Н.* Об одном классе сферических функций и сингулярных псевдодифференциальных операторов. // ДАН. 1983. Т.272.№ 4. С.781-784

4. *Ляхов Л.Н.* О рядах по весовым сферическим функциям. // Новосибирскю: СО АН СССР. 1984 Кн. Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математ. физики. С. 102-109.

5. *Ляхов Л.Н.* Весовые сферические функции и сингулярные псевдодифференциальные операторы. // Дифференц. уравн. 1985. Т.21. № 6. С. 1020-1032.

6. *Ляхов Л.Н.* В-гиперсингулярные интегралы и их приложение к функциональным классам Киприянова и интегральным уравнениям с В-потенциальными ядрами. / Липецк: Редакционно издательский центр ЛГПУ. 2007. С. 232.

О НЕПРЕРЫВНОСТИ ОТОБРАЖЕНИЙ С s-УСРЕДНЁННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

©2020 *А. Н. Малютина, М. А. Бердалиева, У. К. Асанбеков*
(Томск; *nmd@math.tsu.ru*; *madina.berdalieva@mail.ru*; *urmat_1396@mail.ru*)

По известной теореме вложения С. Л. Соболева, если область G звёздная относительно шара, принадлежащего области G и $f \in W^1_{n,loc}(G)$ при $p > n$, то f непрерывна в G. В нашей работе доказывается непрерывность при $1 < p \leq n$ но при некоторых дополнительных условиях на отображение f с s-усреднённой характеристикой. Ключевые слова: отображение с s-усреднённой характеристикой, дифференциальные свойства, непрерывность.

Рассмотрим область $G \subset R^n$, $f : G \to R^n$, $f \in W^1_n(G)$, $1 < s < n$, такое что, для любого $y \in G$ выполняются неравенства

$$\int\limits_G (\lambda(x,f))^s k(|x-y|)d\sigma_x < M \tag{1}$$

$$\int\limits_G (\lambda^*(x,f))^{s^*} k(|x-y|)d\sigma_x < M^* \tag{2}$$

где функция $k(t)$, определена при $t > 0$, положительна, не возрастает и $\lim\limits_{t\to 0+} k(t) = +\infty$. В случае (1) будем говорить, что отображение f — отображение с (s,k) усреднённой характеристикой, а в случае (2) – отображение с (s^*,k)–усреднённой характеристикой, где функция

$$f \in W^1_n(G,k,M), 1 < s < n.$$

Определение 1. Назовём отображение f области D на область D' отображением класса $W^1_{n,loc}(D')$, если $f \in W^1_{n,loc}(D)$, $f^{-1} \in W^1_{n,loc}(D')$ и обладает N и N^{-1}-свойствами.

Теорема 1. *Если $f \in \widetilde{W}^1_{n,loc}(G)$ и для $1 < s \leq n$ и любой точки $y \in G$*

$$I\left(\int\limits_D \frac{|\bigtriangledown f|^n}{J(x,f)}\right)^s ||x-y||^{-\alpha}d\sigma_x \tag{3}$$

если $\alpha > n-s$, то на любом компакте K из области G функция f эквивалентна некоторой непрерывной функции.

Доказательство теоремы следует из теоремы Арцела. Для этого построим равностепенно непрерывную и равномерно ограниченную на K последовательность функций, сходящихся к функции f почти везде в G. Рассмотрим последовательность ϵ-усредненний функции f по С.Л. Соболеву при достаточно малых ϵ. ϵ-усреднением функции f по С.Л. Соболеву называется функция

$$f_\epsilon = \epsilon^{-n}\int\limits_{R^n} \phi\left(\frac{x-u}{\epsilon}\right) f(u)du = \epsilon^{-n}$$

$$\int\limits_{B(0,\epsilon)} \phi\left(\frac{u}{\epsilon}\right) f(x-u)du$$

Из [1, с. 79] $f_\epsilon = 0$ вне области G. Известно [1, с. 34], что функция f_ϵ бесконечно дифференцируема в R^n и $\|f_\epsilon - f\|_p$,

$R^n \to 0$ при $\epsilon \to 0$. Существуют открытые множества G_1 и G_2 такие, что компакт $K \subset G_1 \subset G_2$, $\overline{G_1} \subset G_2$, $\overline{G_2} \subset G$ где G_i- замыкание множества G_i, $i = 1, 2$. Покажем, что для достаточно малых ϵ

$$I\left(\left(\int\limits_D \frac{|\bigtriangledown f|^n}{J(x,f)}\right)^s G_2, y\right) d\sigma_x < M, y \in G_2$$

Известно [1,с. 172], что $\frac{\partial f_\epsilon}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_\epsilon$. Используя обобщённое неравенство Минковского [1, с. 27] и условие (1) получим

$$I\left(\int\limits_{G_2}\left(\frac{|\bigtriangledown f_\epsilon|^n}{J(x,f)}\right)^s, G_2, y\right)$$

$$= \left[\int\limits_{G_2} \epsilon^{-n} \int\limits_{B(0,\epsilon)} \phi\left(\frac{u}{\epsilon}\right)\left(\frac{|\bigtriangledown f(x-y)|^n}{J(x,f)}\right)^s du||x-y||^{-\alpha} d\sigma_x\right]^{\frac{1}{s}}$$

$$\le \epsilon^{-n} \int\limits_{B(0,\epsilon)} \left[\int\limits_{G_2} \phi\left(\frac{u}{\epsilon}\right)\left(\frac{|\bigtriangledown f(x-y)|^n}{J(x,f)}\right)^s ||x-y||^{-\alpha} d\sigma_x\right]^{\frac{1}{s}} du$$

$$\le \epsilon^{-n} \int\limits_{B(0,\epsilon)} \left[\phi\left(\frac{u}{\epsilon}\right)\int\limits_{G_2} \left(\frac{|\bigtriangledown f(x-y)|^n}{J(x,f)}\right)^s ||x-y||^{-\alpha} d\sigma_x\right]^{\frac{1}{s}} du$$

$$\le \epsilon^{-n} M \int\limits_{B(0,\epsilon)} \phi\left(\frac{u}{\epsilon}\right) du = M \quad (4)$$

если $(y-u) \in G$, т.е. при $\epsilon < \epsilon_0$, где ϵ_0 меньше расстояния от границы множества G_2 до границы G. Из неравенства (4)

следует, что $\forall y \in G_2$ выполнено неравенство:

$$\int\limits_{B(y,r)} \left|\frac{|\bigtriangledown f_\epsilon(x)|^n}{J(x,f)}\right|^s, d\sigma_x < n^{\frac{n}{2}} M r^\alpha \quad (5)$$

если $B(y,r) \subset G_2$. Из (5) следует, что непрерывные функции f_ϵ при $\epsilon < \epsilon_0$ удовлетворяет условию леммы Ч. Морри [2, с. 11], поэтому для любых точек x, y таких, что шар

$$B\left(\frac{x+y}{2}, \frac{3}{2}|x-y|\right) \subset G_2; |f_\epsilon(x) - f_\epsilon(y)| < N|x-y|^\beta,$$

где $\beta = \frac{\alpha-n+s}{s}$ и N зависит от M, n, s, α. Таким образом семейство функций f_ϵ при $\epsilon < \epsilon_0$ на K равностепенно непрерывно. Покажем, что функции f_ϵ при $\epsilon < \epsilon_0$ на K ограничены одним числом. Существует функция $\eta \in D$ такая, что её носитель лежит в G_2 и $\eta(x) = 1$ для $x \in G_1$ [3, с. 16]. Функция $f_\eta \in W_p^1(R^n)$. Доопределим $f(x) = 0$ вне области G. Для $\phi \in D$.

$$\int\limits_{R^n}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x_i} f + \eta\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\phi dx = \int\limits_G \left(\frac{\partial\eta}{\partial x_i} f + \eta\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\phi dx$$

$$= \int\limits_G \frac{\partial\eta}{\partial x_i} f\phi dx + \int\limits_G \eta\phi\frac{\partial f}{\partial x_i} dx =$$

$$\int\limits_G \frac{\partial\eta}{\partial x_i} f\phi dx - \int\limits_G \frac{\partial(\eta\phi)}{\partial x_i} dx = -\int\limits_G f\eta\frac{\partial\phi}{\partial x_i} dx \quad (6)$$

Из (6) следует, что обобщённая производная

$$\frac{\partial(\eta, f)}{\partial x_i} = \frac{\partial\eta}{\partial x_i} f + \eta\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (7)$$

Покажем, что для функции ηf справедлива оценка

$$I\left[\left|\frac{|\bigtriangledown \eta f|^n}{J(x,f)}\right|^s \|x-y\|^{-\alpha}\right] < M$$

для $\forall y \in K$. В самом деле из (7) следует, что

$$I\left[\left|\frac{|\bigtriangledown \eta f|^n}{J(x,\eta,f)}\right|^s ||x-y||^{-\alpha}\right] \leq I\left[\left|\frac{|\bigtriangledown \eta|^n}{J(x,\eta,f)} f\right|^s ||x-y||^{-\alpha}\right] +$$
$$I\left[\left|\frac{|\bigtriangledown f|^n}{J(x,\eta,f)}\right|^s ||x-y||^{-\alpha}\right] \leq$$
$$\leq I\left[\left|\frac{|\bigtriangledown \eta|^n}{J(x,\eta,f)} f\right|^s ||x-y||^{-\alpha}\right]_{y\in G_1} +$$
$$+ I\left[\left|\eta \frac{|\bigtriangledown f|^n}{J(x,\eta,f)}\right|^s ||x-y||^{-\alpha}\right]_{y\in G_2} \leq$$
$$\leq Ad^{\frac{-\alpha}{s}} + CM = M_1 \quad (8)$$

Здесь $A = \max \frac{\partial \eta}{\partial x_i}$ $x \in G_2$, и $C = \max \eta(x)$ $x \in G_2$, а $d-$ расстояние между границами G_1 и G_2. В работе исследуются отображения с s-усреднённой характеристикой. Приведены некоторые условия, когда эти свойства представляют интерес и могут найти приложение в теории многомерных квазиконформных отображений и их обобщений. Известно, что [4, с. 147], поэтому функция ηf_ϵ удовлетворяет условиям теоремы, и, применим условие Гёльдера и оценки (8) получаем

$$\left|\eta(x)\frac{|\bigtriangledown f_\epsilon|^n}{J(x,f)}\right| = \frac{1}{\omega_{n-1}}\int\limits_{R^n} \frac{|\bigtriangledown \eta f_\epsilon|^n}{J(x,f)}(x-y)\frac{y_i}{||y||^n} d\sigma_y \leq$$
$$\frac{1}{\omega_{n-1}}\int\limits_{G_2} \frac{|\bigtriangledown \eta f_\epsilon|^n}{J(x,f^{-1})}\frac{d\sigma_y}{||y-x||^{n-1}} \leq$$
$$\frac{1}{\omega_{n-1}}\left(\int\limits_{G_2}\left(\frac{|\bigtriangledown \eta f_\epsilon|^n}{J(x,f^{-1})}(y)\right)^p |y-x|^{-\alpha} d\sigma_y\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\left(\int\limits_{G_2} |y-x|^m d\sigma_y\right)^{\frac{p-1}{p}} \leq M_2 \quad (9)$$

Для $x \in K$ $\eta(x) \bigtriangledown f_\epsilon(x) = f_\epsilon(x)$ и $|f_\epsilon| \leq M_2$ равносильна. Таким образом на K семейство функций f_ϵ, $\epsilon < \epsilon_0$ равностепенно непрерывно, ограниченно, следовательно по т. Арцела из семейства можно выделить последовательность функций $|f_n(x)|$ равносильно сходящихся на K к некоторой непрерывной функций ψ таким образом функции f и ψ эквивалентны.

Литература

1. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.

2. *Малютина А. Н., Асанбеков У. К.* О модуле непрерывности отображений с s-усреднённой характеристикой // Вестн Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2019. № 59. С. 11–15.

3. *Владимиров В. С.* Обобщённые функции в математической физике. М., Наука, 1976.

4. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М., Мир, 1973.

О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ КОНСТАНТЕ НИКОЛЬСКОГО С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВЕСОМ ГЕГЕНБАУЭРА[1]

©2020 *И. А. Мартьянов*
(Тула; *martyanow.ivan@yandex.ru*)

Пусть $L^p_\alpha(-\pi,\pi]$ — комплексное пространство периодических функций с конечной относительно периодического веса Гегенбауэра нормой

$$\|f\|_{p,\alpha}=\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^p\,|\sin x|^{2\alpha+1}\,dx\right)^{1/p},\quad \alpha\geq -1/2,$$

$\mathcal{T}_n$ — подпространство тригонометрических полиномов порядка n с комплексными коэффициентами.

Через

$$\mathcal{C}_{p,\alpha}(n)=\sup_{T\in\mathcal{T}_n\setminus\{0\}}\frac{\|T\|_{\infty,\alpha}}{\|T\|_{p,\alpha}}$$

обозначим точную константу Никольского разных метрик. Задача нахождения $\mathcal{C}_{p,\alpha}(n)$ имеет долгую историю, особенно в безвесовом случае $\alpha=-1/2$. Однако даже в нем она вычислена только при $p=2$. Отметим результаты Я.Л. Геронимуса (1938), Л.В. Тайкова (1993), Д.В. Горбачева (2005), В.В. Арестова и М.В. Дейкаловой (2015), И.Е. Симонова и П.Ю. Глазыриной (2015), E. Levin и D.S. Lubinsky (2015), М.И. Ганзбурга и С.Ю. Тихонова (2017) и многих других.

Теорема. *Пусть* $1\leq p<\infty$, $\alpha\geq -1/2$. *Тогда*

$$\mathcal{C}_{p,\alpha}(n)=T_*(0),$$

где T_* *— экстремальный действительный чётный полином порядка* n, *для которого* $\|T_*\|_{p,\alpha}=1$.

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90152.

Кроме того, $\mathcal{C}_{p,\alpha}(n)$ *с точностью до положительной константы совпадает с соответствующей точной константой Никольского для алгебраических полиномов степени* n *в пространстве* L^p *на отрезке* $[-1,1]$ *с весом Гегенбауэра* $(1-x^2)^\alpha$.

Отметим в данном направлении результаты В.В. Арестова и М.В. Дейкаловой (2015), В.В. Арестова, А.Г. Бабенко, М.В. Дейкаловой и А. Хорват (2018), Д.В. Горбачева и Н.Н. Добровольского (2018).

Теорема сводит вычисление тригонометрической константы Никольского к константе для алгебраических полиномов. В последнем случае она может быть вычислена методами нелинейной оптимизации на основе доказанных В.В. Арестовым и М.В. Дейкаловой соотношений двойственности.

Для доказательства теоремы при $\alpha>-1/2$ применяется положительный оператор обобщённого сдвига

$$T^tf(x)=\frac{c_\alpha}{2}\int_0^\pi\big(f(\psi)(1+B)+f(-\psi)(1-B)\big)\sin^{2\alpha}\theta\,d\theta,$$

где $c_\alpha=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\alpha+1/2)}$,

$$\psi=\arccos(\cos x\cos t+\sin x\sin t\cos\theta),$$

$$B=\frac{\sin x\cos t-\cos x\sin t\cos\theta}{\sin\psi},\quad T^t1=1.$$

Он построен и изучен Д.В. Чертовой (2009). В частности, она доказала, что его норма в $L^p_\alpha(-\pi,\pi]$ равна единице. На чётных функциях T^t совпадает со сдвигами Лежандра ($\alpha=0$) и Гегенбауэра ($\alpha>-1/2$).

РЕЙТИНГ ОРФОГРАФИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ РЕСУРСОВ В СЕТИ «ИНТЕРНЕТ» (ДЕКАБРЬ-ЯНВАРЬ 2019/20)

©2020 *Е. А. Момот*
(Воронеж, ВГУ; *y-kate@ukr.net*)
©2020 *К. В. Шевелева*
(Воронеж, ВГУ; *ksyusha.shevelyova@yandex.ru*)
©2020 *Н. Н. Авдеев*
(Воронеж, ВГУ; *nickkolok@mail.ru*)

По мере роста роли интернета в жизни общества возрастает и обеспокоенность проблемами грамотности интернет-ресурсов, поскольку именно интернет оказывает значительное влияние на образование и самообразование современных школьников и студентов [1, 2]. В 2017 году впервые было проведено междисциплинарное исследование на стыке информатики, математики, педагогики и лингвистики, посвящённое изучению орфографической грамотности интернет-ресурсов, специализирующихся на математике. В продолжение исследований [3, 4] был проведён третий ежегодный мониторинг.

Математическая модель орфографической ошибки, используемая авторами, представляет пару (W_i, R_i), где W_i — регулярное выражение [6], а R_i — верное написание соответствующего фрагмента слова, целого слова или даже словосочетания. Например, моделью ошибочного написания слова «в общем» является пара из регулярного выражения «`/([^А-Яа-яЁёA-Za-z]|^|$)([вВ])[\s-]*о+[пб]щем([^А-Яа-яЁёA-Za-z]|^|$)/gm`» и строки «`в общем`» (с соответствующим регистром первой буквы). В эту модель укладываются такие неверные варианты написания, как, например, «вообщем» и «в-общем». Заметим, что сама строка R_i может удовлетворять регулярному выражению W_i; в таком

случае будет произведена тривиальная замена, т.е. строка останется неизменной. Ошибка считается найденной, только если в результате замены регулярного выражения W_i на строку R_i исходная строка изменилась. Такой подход позволяет объединять несколько вариантов неправильного написания в одну модель ошибки.

Ошибки в user-generated content (UGC), как правило, не исправляются; с авторскими монотекстами (АМТ) ситуация иная: разосланные авторами письма возымели эффект (см., напр., matematikalegko.ru в табл.), поэтому при построении рейтинга с 2018 года учитываются только АМТ.

Применимость данной методики построения рейтинга обосновывается в [5]. Говоря кратко, пусть функция $\nu(n)$ сопоставляет числу $n \in \mathbb{N}$ частоту ошибки, имеющей ранг n. Т.е. $\nu(1)$ — это частота самой «популярной» ошибки, $\nu(2)$ — частота следующей по количеству обнаружений и т.д. Тогда $\nu(n)$ хорошо (в смысле среднеквадратичного отклонения) аппроксимируется функцией вида

$$f(n) = a(x-b)^{-c}, \quad c \text{ близко к } 1,$$

причём аппроксимация тем точнее, чем больше объём корпуса. Этой закономерности, называемой обобщённым законом Ципфа [7], подчиняются также и ранговые распределения слов в частотном словаре языка (на достаточно большом корпусе). Таким образом, построенная нами модель описывает совокупность орфографических ошибок примерно так же хорошо, как обычный словарь описывает язык.

Список изучаемых сайтов был сформирован на основе из верхних строчек рейтинга LiveInternet в рубрике «Образование» и некоторых других известных сайтов, за исключением: сайтов, не относящихся к математике; UGC (комментариев, форумов, отзывов); сайтов-агрегаторов (например, studopedia.org); а также сайтов, на которых тексты по математике не удалось отделить от текстов по другим, не смежным дисциплинам.

Результаты приведены в таблице. N — общее количество выявленных ошибок, ν — количество ошибок на 1000 словоупотреблений, P — количество обработанных словоупотреблений. Звёздочкой (*) обозначены данные, которые приводятся для справок и в итоговых не учтены. Википедия была представлена категорией «Математика» и всеми вложенными подкатегориями.

В трёхлетней ретроспективе достаточно чётко прослеживается группа сайтов, объём корпуса текстов на которых достаточно стабилен (некоторые изменения могут быть вызваны, например, динамическими блоками «Рекомендуем также статьи: ...», попадающими в обработку, или компактными правками). Эти ресурсы неактивны в производстве контента, однако сохраняют высокую посещаемость (и, вероятно, рентабельность за счёт рекламы) благодаря накопленным материалам.

Отдельно прокомментируем ошибки на fipi.ru. Обе ошибки обнаружены программой в слове «тренинг», которое на сайте написано как «треннинг». Это слово входит в состав цитаты или наименования внешнего по отношению к ФИПИ объекта. Тем не менее, в отличие от цитат наподобие «и делай с ним что хошь!», авторы сочли такое написание ошибочным.

Заметим, что чувствительность программы к ошибкам неуклонно увеличивается. В общем случае это не может оказать решающего влияния на количество найденных ошибок в корпусе [5]; однако с учётом рассылаемых владельцам сайтов писем работа в этом направлении достаточно важна. Тем не менее, итоговое среднее количество ошибок на 1000 словоупотреблений не увеличилось по сравнению с прошлым годом, что не может не радовать.

Авторы снова планируют отправить владельцам сайтов письма с подробными отчётами и продолжать ежегодный мониторинг.

Исходный код программы опубликован на условиях лицензии GNU GPLv3 по адресу:
https://github.com/nickkolok/chas-correct

Ресурс	N, 2017	ν, 2017	N, 2018	ν, 2018	P, 2018	N, 2019	ν, 2019	P, 2019
algebraclass.ru	0	0	0	0	54047	0	0	55618
egetrener.ru	-	-	0	0	835394	0	0	835916
cleverstudents.ru	15	0,0391	0	0	388265	2	0,0049	406487
fipi.ru*	-	-	0	0	311967	2	0,0061	328675
mathprofi.ru	-	-	6	0,0109	549649	6	0,0101	595091
reshuege.ru	-	-	17	0,0121	1407188	19	0,0116	1640583
webmath.ru	-	-	33	0,0490	673005	26	0,0234	1113337
Википедия	-	-	287	0,0255	11264755	-	-	-
hijos.ru	8	0,0311	4	0,0183	219103	10	0,0276	362371
1cov-edu.ru	0	0	0	0	94353	4	0,0297	134905
ru.solverbook.com	0	0	26	0,0207	1254589	28	0,0435	643346
matematikalegko.ru	64	0,3708	21	0,0583	360274	34	0,0506	671518
ege-ok.ru	-	-	25	0,0639	391124	20	0,0570	350729
kpolyakov.spb.ru	-	-	20	0,1119	178719	12	0,0608	197398
studizba.com	-	-	37	0,0578	640068	59	0,0803	734375
raum.math.ru	-	-	4	0,0843	47480	10	0,0833	120120
ru.math.wikia.com	21	0,0961	23	0,1270	181140	54	0,0845	639220
egemaximum.ru	-	-	21	0,0474	442790	48	0,1069	449249
nuru.ru	1	0,0538	2	0,1077	18575	3	0,1618	18547
alexlarin.net	-	-	8	0,0861	92892	17	0,1745	97452
mathsolution.ru	-	-	106	0,6548	161892	29	0,1866	155397
ru.onlinemschool.com	21	0,0544	82	0,3674	223197	142	0,3096	458674
calcs.su	-	-	2	0,2125	9411	6	0,5502	10905
dxdy.ru (UGC)*	18455	1,1239	-	-	-	-	-	-
Итого	-	-	724	0,0995	19487910	546	0,0987	9846635

Литература

1. *Каменкова Н. Г.* Использование интернет-технологий при организации изучения курса «математика и информатика» // Герценовские чтения. Начальное образование. – 2010. – Т. 1. – С. 288-293.

2. *Сон Л. П.* Интернет-коммуникация и проблема грамотности индивида // Научно-информационный журнал Армия и общество – 2013. – № 4 (36). – С. 87-91.

3. *Авдеев Н. Н.* Программа анализа грамотности интернет-СМИ // Культура общения и её формирование, межвузовский сборник научных трудов. – 2016. – С. 81-83.

4. *Авдеев Н. Н., Шевелева К. В.* Анализ орфографической грамотности математических образовательных ресурсов в сети «Интернет» // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования – Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2017. – Вып. 7, Часть I – С. 7-8.

5. *Авдеев Н. Н., Шевелева К. В.* Применимость регулярного выражения как математической модели орфографической ошибки // Сборник Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» – Воронеж: Издательство «Научно-исследовательские публикации» – 2018. – С. 335-340.

6. *Гошко В.* Регулярные выражения и поиск текста в Perl //Системный администратор. – 2003. – №. 8. – С. 78-86.

7. *Маслов В. П., Маслова Т. В.* О законе Ципфа и ранговых распределениях в лингвистике и семиотике //Математические заметки. – 2006. – Т. 80. – №. 5. – С. 718-732.

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ БИФРУКАЦИЙ СЛОЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ В ИНТЕГРИРУЕМЫХ БИЛЛИАРДАХ В НЕВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ[1]

©2020 *В. А. Москвин*
(Москва; *aoshi.k68@gmail.com*)

Математический биллиард — динамическая система, описывающая движение без трения материальной точки внутри области с абсолютно упругим отражением от границы (угол падения равен углу отражения). В книге С.Л. Табачникова [1] дан обзор актуальных исследований биллиардов. Топология совместных поверхностей уровня интегралов описывается с помощью теории А.Т. Фоменко, которая в случае полных потоков изложена в книге Болсинова–Фоменко [2]. В докладе будет представлено исследование топологии фазового многообразия плоских биллиардов, потоки в которых не являются полными вследствие наличия невыпуклых углов на границе области. Как было показано В. Драгович и М. Раднович [4] почти для всех значений интеграла в таких биллиардах совместная поверхность уровня интегралов будет гомеоморфна сфере с ручками и проколами. В докладе будет представлено топологическое описание трёхмерных окрестностей двумерных комплексов, являющихся прообразами критических значения интеграла Λ.

Мы будем понимать под биллиардной областью Ω односвязную часть плоскости, ограниченную дугами софокусных квадрик из семейства:

$$(b-\lambda)x^2 + (a-\lambda)y^2 = (a-\lambda)(b-\lambda), \ \lambda \leq a.$$

[1]Исследование выполнено в рамках Программы Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-2554.2020.1).

Биллиард Ω не должен содержать фокусов. Также любой сегмент фокальной прямой, содержащийся в биллиарде Ω, либо лежит между фокусами, либо лежит вне фокусов. Такие биллиарды будем называть однородными.

Разрежем биллиард Ω следующим образом: если биллиард Ω не содержит сегментов фокальной прямой между фокусами, то проведём все эллипсы $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ на которых лежат вершины углов в $3\pi/2$, а если биллиард Ω не содержит сегментов фокальной прямой вне фокусов, то проведём все гиперболы $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ на которых лежат вершины не выпуклых углов. В результате биллиард Ω разобьётся на биллиарды $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_N$ без не выпуклых углов на границе области. Значения дополнительного интеграла $\Lambda = \lambda_i$ и $\Lambda = b$ будут особыми [4].

Определим 3-атомы для таких биллиардов. В этой работе они будут рассматриваться как CW-комплексы.

Определение 1. *Трёхмерным атомом (3-атомом) назовём трёхмерную окрестность $U \subset Q^3$ двумерного слоя G, задаваемую неравенством $c-\epsilon \leq \Lambda \leq c+\epsilon$ для достаточно малого ϵ, расслоённую на двумерные поверхности уровни функции Λ и рассматриваемую с точностью до послойной эквивалентности. ($c = b$ или $c = \lambda_i$ для некоторого i)*

Рассмотрим биллиард Ω и сегмент квадрики λ_i. Обозначим через ν число компонент связности внутри гиперболы (вне эллипса) λ_i, а через ξ — число компонент связности вне гиперболы (внутри эллипса) с параметром λ_i.

Теорема 1. *Рассмотрим однородный биллиард Ω с выбранным на нем разбиением $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_N$. Рассмотрим окрестность значения дополнительного интеграла $\lambda_i - \epsilon \leq \Lambda \leq \lambda_i + \epsilon$ и соответствующий 3-атом U_i. Тогда:*

1. Комплекс $U_i \cong \tilde{U}_i \cup (G_g \times I)$, где G_g — поверхность рода g с приклеенными к ней ν цилиндрами $S^1 \times I$ и $g = const$ при изменении интеграла Λ. Комплекс $\tilde{U}_i \in Q^3$ проектируется *при естественной проекции π в окрестность квадрики λ_i в биллиарде Ω;*

2. Комплекс $\tilde{U}_i \setminus T_{\lambda_i}|_{\Lambda<\lambda_i} \cong (C_1 \cup \ldots \cup C_{2\nu+2\xi}) \times I$, где T_{λ_i} — двумерный комплекс, построенный алгоритмически;

3. Комплекс $\tilde{U}_i|_{\Lambda \geq \lambda_i} \cong (C_1 \cup \ldots \cup C_{2\nu}) \times I$;

4. Трёхмерный комплекс $\tilde{U}_i \setminus T_{\lambda_i}|_{\Lambda<\lambda_i}$ приклеивается к двумерному комплексу T_{λ_i} послойно. Данная склейка описывается алгоритмом.

Теорема 2 описывает строение окрестности U особого слоя $\Lambda = b$.

Теорема 2. *Рассмотрим однородный биллиард Ω с выбранным на нем разбиением $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_N$. Рассмотрим окрестность значений дополнительного интеграла $b - \epsilon \leq \Lambda \leq b + \epsilon$ и соответствующий 3-атом U. Тогда:*

1. Комплекс $U \setminus (T_{\lambda_1} \cup \ldots \cup T_{\lambda_n}) \cong V_{\Sigma_1} \times I \cup \ldots \cup V_{\Sigma_N} \times I$, где объединение несвязно. Здесь T_{λ_i} — двумерные комплексы, построенные алгоритмически, а V_{Σ_j} — 2-атом, соответствующий 3-атому выпуклого биллиарда Σ_j, см. [3];

2. Двумерные комплексы $(T_{\lambda_1} \cup \ldots \cup T_{\lambda_n})$ приклеиваются к трёхмерному комплексу $U \setminus (T_{\lambda_1} \cup \ldots \cup T_{\lambda_n})$ послойно. Данная склейка описывается алгоритмом.

Литература

1. *Табачников С. Л.* Геометрия и бильярды.М.;Ижевск:НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2011.

2. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т. 1. Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 1999.

3. *Фокичева В. В.* Топологическая классификация бильярдов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик// матем. сб. 2015, 206, 10. 127–176.

4. *Dragovic V., Radnovic M.* Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards// Regullar Chaotic Dyn. РАН. 2009. 14. 479–494.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ РЕШЕТЧАТЫХ МОДЕЛЕЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

©2020 *Е. Ю. Московченко, Ю. П. Вирченко*
(Белгород; *virch@bsu.edu.ru*)

Изучается класс решётчатых моделей статистической механики классических систем с суммируемым парным потенциалом взаимодействия. Изучается система уравнений для частных распределений вероятностей гиббсовского точечного случайного поля. Доказана аналитическая зависимость решений этой системы от спектрального параметра z в области $\{z : \mathrm{Re} z \geq 0\}$ при достаточно больших значений параметра $T > 0$ в распределении Гиббса. Пусть $\Lambda = \{\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^3 : \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{3} n_j \mathbf{e}_j, n_j = 0 \div L - 1\}$ — последовательность множеств в $\mathbf{Z}^3$, где $\mathbf{e}_j$ — орты в $\mathbf{R}^3$. При $L \to \infty$ трансляцией $\Lambda \Rightarrow \Lambda - (L/2)\sum_{j=1}^{3} \mathbf{e}_j$ определён переход к пределу $\Lambda \to \mathbf{Z}^3$. Для каждого Λ вводится пространство случайных событий $\Omega(\Lambda)$, состоящее из класса всех дихотомических функций $\rho(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Lambda$ со значениями 0 и 1. На этом пространстве определён функционал

$$\mathsf{H}_\Lambda[\rho] = -\mu \sum_{\mathbf{x} \in \Lambda} \rho(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x} \in \Lambda, \mathbf{y} \in \mathbf{Z}^d, \mathbf{y} \neq \mathbf{x}} U(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathsf{P}_\Lambda \mathbf{y}), \quad (1)$$

где $\mu \in \mathbf{R}$ и функция $U(\mathbf{x})$ со значениями в $\mathbf{R}$ — центральносимметрична, $U(-\mathbf{x}) = U(\mathbf{x})$ и суммируема на $\mathbf{Z}^3$, $\|U\| \equiv \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^d} |U(\mathbf{x})| < \infty$, причём $U(0) = 0$. Здесь P_Λ — оператор проектирования, определяемый $\mathsf{P}_\Lambda \mathbf{x} = \mathbf{z} \in \Lambda$ для каждого вектора $\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^3$ на основе однозначного представления в виде $\mathbf{x} = \mathbf{z} + L \sum_{j=1}^{3} n_j \mathbf{e}_j$, $\langle n_1, n_2, n_3 \rangle \in \mathbf{Z}^3$.

На основе гамильтониана (1) вводится распределение вероятностей Гиббса на $\Omega(\Lambda)$.

$$\Pr\{\rho\} = Q_\Lambda^{-1}(z)\,\exp\Big(-\mathsf{H}_\Lambda[\rho]/T\Big),\quad T>0,$$

$$Q_\Lambda(z) = \sum_{\rho\in\,\Omega(\Lambda)} \exp\Big(-\mathsf{H}_\Lambda[\rho]/T\Big).$$

Набор p_Λ вероятностей $p_\Lambda(X,z) = \mathsf{E}\prod_{\mathbf{x}\in X}\rho(\mathbf{x})$, $X\subset\Lambda$. В пределе $\Lambda\to\mathbf{Z}^d$ он удовлетворяет системе уравнений

$$\mathsf{p}(z) = z(1+z)^{-1}\mathsf{e} + \mathsf{K}\mathsf{p}(z)\,,\quad z=e^{\mu/T}, \tag{2}$$

где $\mathsf{e} = \langle\delta_{1,|X|} : \emptyset\neq X\subset\Lambda\rangle$ и линейный оператор K, действующий в линейном банаховом пространстве $\mathcal{E}$ с нормой $\|\mathsf{p}\|_0 = \sup_{X\subset\mathbf{Z}^3;|X|<\infty}|p(X,z)|$, определяется формулой

$$\big(\mathsf{K}\mathsf{g}\big)(X) = \frac{zW(\mathbf{x};X)}{1+zW(\mathbf{x};X)}\Big[(1-\delta_{0,|X\setminus\{\mathbf{x}\}|})g(X\setminus\{\mathbf{x}\})$$

$$+\sum_{\emptyset\neq Y\subset\mathbf{Z}^d\setminus X} K(\mathbf{x};Y)\big[g(X\setminus\{\mathbf{x}\}\cup Y) - g(X\cup Y)\big]\Big], \tag{3}$$

$$K(\mathbf{x};Y) = \Big\{\prod_{\mathbf{y}\in Y}K(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\ \text{при } |Y|>0\,;\quad 1,\ \text{при } |Y|=0\,.\Big\},$$

$K(\mathbf{x}) = \exp(-U(\mathbf{x})/T)-1$, $\mathbf{x}\in\mathbf{Z}^d$, $W(\mathbf{x};X) = \exp\Big(-\sum_{\mathbf{y}\in X}U(\mathbf{x}-\mathbf{y})/T\Big)$.

Теорема 1. *Уравнение (2) с оператором (3), разрешимы однозначным образом в области* $\{z : \mathrm{Re}\,z\geq 0\}\subset\mathbf{C}$ *и их решения* $\mathsf{p} = \langle p(X,z); X\subset\mathbf{Z}^3\rangle$ *являются аналитическими функциями от* z *при* $\mathrm{Re}z>0$, *если* $T>\|U\|/|\ln\kappa_0|$, *где* κ_0 *— единственный корень полинома* $\kappa^4+4(\kappa-1)$ *на отрезке* $[0,1]$.

Литература

1. *Добрушин Р.Л.* Гиббсовские случайные поля для решётчатых систем с попарным взаимодействием // Функциональный анализ и его приложения.– 1968.– 4(1).– С.31-43.

О ЗАДАЧЕ ГАШЕНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ДВИЖУЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ

©2020 *Л. А. Муравей, А. М. Романенков*
(Москва; *l_muravey@mail.ru*; *romanaleks@gmail.com*)

1. Введение.

Особенностью задач гашения колебаний гиперболических систем является то, что в них оптимальный режим зависит не только от времени, но и от пространственных переменных. Поэтому для нахождения минимального времени гашения колебаний и соответствующего ему оптимального уравнения используется метод сведения этой задачи к так называемой тригонометрической проблеме моментов. Наиболее значимой работой в этом направлении является статья 1983 года Д. Лагнесса [1], в которой исследовалось, в частности, возможность гашения колебаний закреплённой струны:

$$\frac{1}{a^2}w_{tt} - w_{xx} + q\,(x)\,w = g\,(x,t)\,,\quad 0\leq x\leq l,\quad t>0 \tag{1}$$

Решение соответствующей смешанной задачи рассматривается как обобщённое, для которого определён интеграл энергии

$$E\,(t) = \int_0^l \left[w_t^2\,(x,t) + a^2\left(w_x^2\,(x,t) + q\,(x)\,w^2\,(x,t)\right)\right]dx, \tag{2}$$

который при $g\,(x,t)\equiv 0$, не зависит от t и равен значению $E(0)$.

Задача гашения колебаний заключается в нахождении минимального значения $T_0 > 0$, при котором для любых допустимых начальных возмущений, найдётся управляющая функция $g_0(x,t) \in L_2(0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T_0)$ (определяющая оптимальный режим), такая что:

$$E(T_0) = 0, \tag{3}$$

или, что тоже самое, при $g(x,t) = g_0(x,t)$ справедливо равенство:

$$w|_{t=T_0} = 0, \quad w_t|_{t=T_0} = 0 \tag{4}$$

2. Проблема моментов.

Из закона сохранения энергии вытекает, что решение смешанной задачи при $g(x,t) = 0$ представляет собой сумму так называемых «стоячих волн», которые находятся методом Фурье и имеют вид:

$$z_n(x,t) = (A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t) v_n(x), \tag{5}$$

здесь $v_n(x)$ — решения соответствующей спектральной задачи, отвечающие собственным числам λ_n. При этом функции $v_n(x)$ образуют ортонормированный базис, а для собственных значений справедливо асимптотическое разложение:

$$\omega_n = a\sqrt{\lambda_n} = \frac{a\pi n}{l} + c_n + 1n, \quad n \to \infty \tag{6}$$

Выполнение условий (4) для построенного методом разделения переменных решения смешанной задачи приводит нас к системе интегральных уравнений Фредгольма первого рода.

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_0^T u_n(t)\cos\omega_n t\, dt = -\beta_n, \\ &\textstyle\int_0^T u_n(t)\sin\omega_n t d\, t = \alpha_n\omega_n, \end{aligned} \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

которую принято называть тригонометрической проблемой моментов. Здесь $\alpha_n, \beta_n, u_n(t)$ — коэффициенты Фурье разложения начальных функций $w|_{t=0} = h_0(x)$, $w_t|_{t=0} = h_1(x)$ и

правой части уравнения (1) $g(x,t)$ по ортонормированному базису $\{v_n(x)\}$. Заметим, что из (6) вытекает существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\omega_n} = \frac{l}{\alpha\pi}$, поэтому из результатов Н. Левинсона [2] следует, что при

$$T_0 = \frac{2l}{\alpha} \tag{8}$$

система $(\cos\omega_n t, \sin\omega_n t)$ образует базис Рисса в $L_2(0, T_0)$. Следовательно, для неё существует биортогональная система в $L_2(0, T_0)$, что позволяет установить существование единственного решения $u_n^{(0)}(t)$, (7) а также найти оптимальное управление $g_0(x,t)$ в виде ряда Фурье

Отметим, что результаты Д. Лагнеса имеют важное значение, поскольку из них вытекает гарантированное время гашения колебаний; при этом Лагнесом было так же показано, что управляющую функцию можно использовать и в любой подобласти $[\gamma, \delta]$ отрезка $[0, l]$.

Дальнейшие работы различных авторов были посвящены приближенному решению задачи гашения колебаний и основаны на существенном сужении класса управляющих функций. При этом рассматривались струны и мембраны. Подробный обзор работ приводится в нашей монографии [3]. Кроме того, в [3] исследованы задачи гашения колебаний балок и пластин, описываемых гиперболическими по Петровскому уравнениями (в уравнение 1 входят производные четвёртого порядка по пространственным переменным). Показано, что в случае балки соответствующие собственные функции спектральной задачи почти ортогональны по Р. Беллману [4], откуда можно вывести асимптотическую разрешимость проблемы моментов. В случае же пластины показано, что двумерную тригонометрическую проблему моментов можно свести к одномерной в некотором подпространстве из $L_2\,(0,T)$. Отметим, что краткое изложение соответствующих результатов содержится в работе [5].

3. Движущаяся струна.

Целью нашей работы является решение задачи гашения поперечных колебаний продольно движущейся струны, возникающей в производстве бумажного полотна (в предположении, что полотно достаточно узкое). В монографии [6] была предложена следующая модель поперечных колебаний $w(x,t)$, связанных с движением бумажного полотна (см. рис. 1).

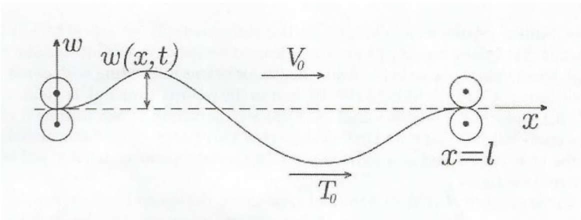


Рис. 1. Профиль движущегося бумажного полотна.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+2v_0\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}+\left(v_0^2-c^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0,\quad 0<x<l,\quad t>0. \tag{9}$$

При этом заданы граничные условия

$$w\,(0,t)=w\,(l,t)=0,\quad t>0 \tag{10}$$

и начальные возмущения:

$$w\,(x,0)=h_0\,(x)\,,\quad w_t\,(x,0)=h_1\,(x)\,,\quad x\in[0;l] \tag{11}$$

Для решения смешанной задачи справедлив аналогичный случаю закреплённой струны «закон сохранения энер-

гии»:

$$E\,(t)=\int_0^l\left[w_t^2\,(x,t)+\left(c^2-v_0^2\right)w_x^2\,(x,t)\right]dx\equiv E(0)=$$
$$=\int_0^l\left[h_1^2\,(x)+\left(c^2-v_0^2\right)\left(h_0'\,(x)\right)^2\right]dx, \tag{12}$$

Таким образом, кориолисово ускорение $2v_0w_{xt}$ не даёт вклада в энергию системы и в ней должно существовать решение в виде стоячих волн. Но из-за наличия члена $2v_0w_{xt}$ в (9) стоячие волны невозможно найти традиционным методом разделения переменных.

Мы будем использовать систему автомодельных решений $v_k\,(x,t)=\exp\left\{\pm\dfrac{ik\pi}{cl}\left[v_0^2-c^2\right]t-v_0x\right\}\sin\dfrac{k\pi x}{l}$, $k=1,2,\ldots$ задачи (9), (10). Из работ [7], [8], [9] при естественном предположении $v_0<c$ вытекает, что система $\{v_k\,(x,0)\}$ образует базис Рисса $(y_k\,(x)\,,z_k\,(x))$ в $L_2(-l,l)$.

Если управление $g\,(x,t)$ сосредоточено на произвольном отрезке $[\gamma,\delta]\subset[0,l]$, то в нашем случае вместо проблемы моментов (7) имеем проблему моментов

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^{T_0}\int_\gamma^\delta g_0\,(x,t)\cos\omega_n t dxdt=-\beta_n,\\ \displaystyle\int_0^{T_0}\int_\gamma^\delta g_0\,(x,t)\sin\omega_n t dxdt=a_n\omega_n,\end{cases}\quad n=1,2,\ldots, \tag{13}$$

где $\omega_n=\frac{\pi n\left(c^2-v_0^2\right)}{lc}$, $n=1,2,\ldots$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\omega_n}=\frac{lc}{\pi\left(c^2-v_0^2\right)} \tag{15}$$

а

$$T_0=\frac{2lc}{c^2-v_0^2} \tag{16}$$

Из результатов Левинсона вытекает, что тригонометрическая система в (13) образует базис Рисса в $L_2\,(0,T_0)$. Следовательно, для неё в $L_2\,(0,T_0)$ существует биортогональная система, причём искомое решение $g_0(x,t)$ системы (13) имеет вид

$$g_0\,(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n^2 \omega_n a_n y_n\,(x)\, \psi_n\,(t) - B_n^2 \beta_n z_n\,(x) \right) \chi_{[a,\beta]}\,(x)\,, \tag{17}$$

где $\chi_{[\gamma,\delta]}\,(x)$ — характеристическая функция отрезка $[\gamma,\delta]$,

$$A_n^2 = \left(\int_\gamma^\delta y_n^2\,(x)\,dx \right)^{-1}, \;\; B_n^2 = \left(\int_\gamma^\delta z_n^2\,(x)\,dx \right)^{-1}, \;\; n = 1,2,\ldots \tag{18}$$

Отметим, что найденное T_0 должно удовлетворять неравенству $T_0 v_0 \leq l$, которое выполняется при дополнительном ограничении на v_0 (иначе управление «выйдет» из отрезка $[0,l]$).

$$v_0 \leq \left(\sqrt{2} - 1 \right) c \tag{19}$$

Отметим также, что некоторые результаты были получены ранее в нашей работе [10].

4. Построение оптимального управления.

Будем считать, что управляющая функция $g(x,t)$ имеет вид

$$g\,(x,t) = \sum_{k=1}^{K} u_k(t) \chi_k(x), \tag{20}$$

где $0 < x_1 < \cdots < x_k < l$, а $\chi_k(x)$ — характеристическая функция отрезка $[x_k - \varepsilon, x_k + \varepsilon]$, при достаточно малом $\varepsilon > 0$, таком, что все указанные отрезки не пересекаются и принадлежат отрезку $[0,l]$.

Далее, определим минимизируемый функционал

$$\begin{gathered} J_g(t) = E(t) + \lambda \int_0^l g^2(x,t)dx = \\ = \int_0^l \left[w_t^2(x,t) + \left(c^2 - v_0^2\right) w_x^2\,(x,t) \right] dx + 2\lambda\varepsilon \sum_{k=1}^{K} u_k^2\,(t) \end{gathered} \tag{21}$$

Положим $2\lambda\varepsilon = \mu$ и будем считать функции $u_k(t)$ кусочно-постоянными: $u_k(t) = u_{kp}$, при $t_{p-1} < t < t_p$, $p = 1,2,\ldots,P$. Здесь P может принимать значения от 1 до N, где N — число слоёв по времени, используемых при численном решении задачи.

Таким образом, функционал J является функцией значений u_{kp} и для применения градиентного метода требуется знание частных производных $\frac{\partial J}{\partial u_{xp}}, k = \overline{1,K}, p = \overline{1,P}$. Численные расчёты, приведённые в работе [10], показывают достаточную эффективность такого подхода.

В ряде реальных случаев ограничения на параметры задачи не выполняются и поэтому вместо задачи гашения мы рассматриваем задачу демпфирования для любого отрезка $[0,T], T < T_0$, для которой устанавливаем необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума Л.С. Понтрягина, а именно:

если $u_k(t)$ оптимальное управление при ограничениях $0 \leq u_k(t) \leq U$, то при каждом $t \in [0,T]$ величина

$$\sum_{k=1}^{K} u_k(t) \int_{x_{k-1}}^{x_k} q\,(x,t)\,dx$$

достигает своего максимума по всем $u_k(t)$, где $q(x,t)$ — решение соответствующей сопряжённой системы.

В случае, когда управление зависит от t и от x, оптимальное управление в решении задачи демпфирования может быть найдено с помощью градиентных методов условной оптимизации.

Литература

1. *Lagness J.E.* Control of wave process with distributed controls supported on a subregion //SLAM Journ. Control and Optim. 1983.Vol. 1, №1. P. 68-85 https://doi.org/10.1137/0321004

2. *Levinson N.* Gap and density theorem //Amer. Math. Soc. Colog. Pull, vol. 26, 1940, ISBN: 978-0-8218-1026-2

3. *Муравей Л.А., Романенков А.М., Петров В.М.* «Оптимальное управление нелинейными процессами в задачах математической физики».2018, Изд. МАИ. ISBN 978-5-4316-0501-7

4. *Bellman R.* Almost orthogonal series // Amer. Math. Soc. Vol. 50, 1944

5. *Атамуратов А.Ж., Михайлов И.Е., Муравей Л.А.* Проблема моментов в задачах управления упругими динамическими системами // Мехатроника, Автоматизация, Управление. 2016. Т. 17 №9.

6. *Banichuk N., Jeronen J., Neittaanmaki P., Saksa T., Tuovinen T.* Mehanics of moving materials. 2014, Springer, 207 p. ISBN 978-3-319-01745-7

7. *Muravey L.A.* On the suppression on membrane oscillations // Summaries of IUTAM Symposium «Dynamical problems of rigid-elastic system». Moscow. 1990. P. 50-51

8. *Билалов Б.Т., Муравей Л.А.* О гашении колебаний больших механических систем // Труды международного симпозиума Intels-96. С.-Петербург. Ч.П. 1996 с. 246-254

9. *Билалов Б.Т.* О базисности системы $\{e^{i\alpha nx}\sin(nx)\}$ экспонент со сдвигом// ДАН РАН. 1995, т.345, №2. стр. 644-647

10. *Муравей Л.А., Романенков А.М., Петров В.М.* «О задаче поперечных колебаний предельно движущейся струны» // Вестник Мордовского Университета, 2018, т.28, №4. стр. 472-483

О КОЭРЦИТИВНОЙ ОЦЕНКЕ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

©2020 *Э. Мухамадиев, А. Н. Наимов*

(Вологда; *nan67@rambler.ru*; *emuhamadiev@rambler.ru*)

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L_\lambda x(t) \equiv x'(t) - A(t,\lambda)|x(t)|^{m-1}x(t)$$

в пространстве $C^1(0,\omega;R^n)$, где $\omega > 0$, $n, m > 1$, $A(t,\lambda)$ — квадратная матрица-функция, непрерывная по совокупности переменных $(t,\lambda) \in [0,\omega]\times[0,1]$ и ω-периодическая по t. Исследуем вопрос о коэрцитивной оценке вида

$$\|L_\lambda x\| + |x(0) - x(\omega)|^m \geq \sigma\|x\|^m \qquad (1)$$

при $\|x\| \geq M$, где положительные числа M и σ не зависят от $x(t)$ и λ.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если в любой точке $(t,\lambda) \in [0,\omega]\times[0,1]$ матрица $A(t,\lambda)$ не имеет чисто мнимых собственных значений, то верна оценка (1).*

Используя оценку (1) можно исследовать разрешимость периодической задачи

$$L_\lambda x(t) = f(t, x(t)), \quad 0 < t < \omega, \quad x(0) = x(\omega). \qquad (2)$$

Здесь $f : [0,\omega]\times R^n \mapsto R^n$ — непрерывное отображение, ω-периодическое по t и удовлетворяющее условию

$$\max_{0\leq t\leq\omega} |f(t,y)|\,|y|^{-m} \to 0 \quad \text{при} \quad |y| \to \infty. \qquad (3)$$

Из теоремы 1 вытекает, что для решений периодической задачи (2) имеет место априорная оценка

$$\|x\| < M_1,$$

где M_1 не зависит от x и λ. Следовательно, определено вращение $\gamma(\Phi_\lambda, S_r)$ вполне непрерывного векторного поля

$$\Phi_\lambda x \equiv x(t) - x(\omega) - \int_0^t (L_\lambda x(s) - f(s, x(s)))ds$$

на сферах $S_r = \{x : \|x\| = r\}$ радиуса $r \geq M_1$ (см., напр., [1]), при этом $\gamma(\Phi_\lambda, S_r)$ не зависит от λ и r. К тому же, $\gamma(\Phi_\lambda, S_r) = \gamma(\Psi_0, S_r)$, где

$$\Psi_0 x \equiv x(t) - x(\omega) - \int_0^t L_0 x(s)ds.$$

Векторное поле Ψ_0 нечётно, поэтому $\gamma(\Psi_0, S_r) \neq 0$ [1]. Отсюда, применяя принцип ненулевого вращения, получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие теоремы 1. Тогда задача (2) разрешима при любых $\lambda \in [0, 1]$ и f, удовлетворяющем условию (3).*

Литература

1. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука. 1975. 512 с.

НЕКОМПАКТНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ[1]

©2020 *С. С. Николаенко*
(Москва; *nikostas@mail.ru*)

Изучается задача топологической классификации 3-мерных бифуркаций (перестроек) лиувиллевых слоений, возникающих в интегрируемых гамильтоновых системах с двумя степенями свободы, ограниченных на неособые невырожденные изоэнергетические многообразия Q^3. Такие бифуркации были названы А.Т. Фоменко *3-атомами* (см. [1]). Как было показано А.Т. Фоменко [2], в случае компактного многообразия Q^3 в некоторой малой инвариантной окрестности бифуркационного слоя определено сохраняющее первые интегралы гамильтоново S^1-действие с тривиальными либо изоморфными группе $\mathbb{Z}_2$ стабилизаторами. Как следствие, каждый компактный 3-атом допускает структуру S^1-расслоения, а именно, известного в маломерной топологии расслоения Зейферта с особыми слоями типа $(2, 1)$ (см., например, [3]), базой которого является *2-атом* (описывающий бифуркации одномерных слоений, задаваемых функциями Морса на 2-мерных многообразиях). Отметим, что аналогичный результат получен Н.Т. Зунгом [4] в многомерном случае для вещественно-аналитических систем. Мы обобщаем теорему Фоменко на случай систем с некомпактными изоэнергетическими многообразиями Q^3, которые удовлетворяют следующим двум условиям:

1) гамильтоновы поля, порождаемые первыми интегралами системы, полны (т. е. естественный параметр на

[1]Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект №17-11-01303).

их интегральных траекториях определён на всей числовой прямой);

2) на бифуркационном слое хотя бы одна орбита гамильтонова $\mathbb{R}^2$-действия (определённого в силу предыдущего условия) является нестягиваемой (т. е. гомеоморфна окружности S^1 или цилиндру $S^1 \times \mathbb{R}$).

Таким образом, как и в компактном случае, задача классификации некомпактных 3-атомов (для систем, удовлетворяющих двум перечисленным условиям) сводится к задаче классификации некомпактных 2-атомов, полученной ранее в работе [5].

Литература

1. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том 1. Ижевск: изд. дом "Удмуртский университет", 1999. – 444 с.

2. *Фоменко А.Т.* Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1986. – Т. 50, № 6. – С. 1276–1307.

3. *Матвеев С.В., Фоменко А.Т.* Алгоритмические и компьютерные методы в трёхмерной топологии. М.: изд-во МГУ, 1991. – 304 с.

4. *Zung N.T.* A note on degenerate corank-one singularities of integrable Hamiltonian systems // Commentarii Mathematici Helvetici. – 2000. – Vol. 75, no. 2. – P. 271–283.

5. *Николаенко С.С.* Топологическая классификация гамильтоновых систем на двумерных некомпактных многообразиях // Матем. сборник (в печати).

ОБ ОДНОЙ ДРОБНОЙ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОУПРУГОЙ МОДЕЛИ[1]

©2020 *В. П. Орлов*

(Воронеж; *orlov_ vp@mail.ru*)

Устанавливается существование и единственность сильного решения начально-краевой задачи для системы уравнений движения нелинейно-вязкоупругой жидкости, являющейся дробным аналогом модели вязкоупругости Фойгта, в плоском случае.

В $Q = [0,T] \times \Omega$, где $\Omega \in R^2$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, рассматривается начально-краевая задача Z:

$$\partial v/\partial t + \sum_{i=1}^{n} v_i \partial v/\partial x_i -$$

$$\mu_0 \mathrm{Div}\, \mathcal{E}(v) - \mathrm{Div}\, \mu_1(S(v))\, \mathcal{E}(v) -$$

$$-\mu_2 \mathrm{Div} \int_0^t (t-s)^{-\alpha}\, \mathcal{E}(v)(s,x)\, ds =$$

$$f(t,x) + \mathrm{grad}\, p,\ (t,x) \in Q;$$

$$\mathrm{div}\, v = 0,\ (t,x) \in Q; \quad \int_\Omega p(t,x)\, dx = 0;\ t \in [0,T];$$

$$v(0,x) = v^0(x),\ x \in \Omega, \quad v(t,x) = 0,\ (t,x) \in [0,T] \times \partial\Omega.$$

Здесь $v(t,x) = (v_1(t,x), v_2(t,x))$ и $p(t,x)$ искомые векторная и скалярная функции, означающие скорость движения и давление среды, $f(t,x)$ — плотность внешних сил, $\mathcal{E}(v)$ — тензор скоростей деформаций, т.е. матрица с коэффициентами $\mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2}(\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i))$. Дивергенция $\mathrm{Div}\, \mathcal{E}(v)$ матрицы определяется как вектор с компонентами — дивергенциями строк, $S(v) = \sum_{i,j=1}^{2} (\partial v_i/\partial x_j)^2$, $0 < \alpha < 1$, $\mu_0 > 0$, $\mu_2 \geq 0$,

[1]Работа выполнена при финансовой Российского Научного Фонда (проект №19-11-00146).

$\mu_1(s)$ неотрицательная непрерывно дифференцируемая при $s \geq 0$ функция.

Гильбертовы пространства H и V определяются обычным образом (см., напр. известную монографию Темама). Обозначим через $\mathcal{P}$ ортопроектор Лерэ в $L_2(\Omega)^2$ на H.

Пусть

$$W = \{v: \ v \in L_2(0,T; W_2^2(\Omega)^2 \cap L_2(0,T;H) \cap$$

$$\overset{\circ}{W}{}_2^1 (\Omega))^2, \quad v' \in L_2^1(0,T;H)\}.$$

Запишем задачу Z в операторной форме. Определим в H оператор A формулой $Av = -\mathcal{P}\triangle v$ на $D(A) = H \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1 (\Omega)^2 \cap W_2^2(\Omega)^2$. Оператор A является положительно определённым самосопряжённым оператором.

Положим $K(v) = \sum_{i=1}^2 v_i \frac{\partial v}{\partial x_i}$ для $v \in V$ и введём операторы

$$B(v) = -\mathcal{P}\mathrm{Div}\,(\mu_1\,(S(v(t,x)))\,\mathcal{E}(v)(t,x));$$

$$C(v) = \int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha}\, Av(s,\cdot)\, ds.$$

Операторы B и C определены при п.в. t для функций $v \in W_2^{0,2}(Q)$.

Рассмотрим при $t \in [0,T]$ задачу ZP:

$$v' + \mathcal{P}K(v) + kv + \mu_0 Av + B(v) + \mu_2 C(v) = f, \ v(0) = v^0.$$

Определение. *Сильным решением задачи ZP называется функция $v \in W$, удовлетворяющая условию и при п.в. (t,x) уравнению ZP.*

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть $f \in L_2(0,T;H)$, $v^0 \in V$, а $\mu_1(s)$ такова, что*

$$\mu_1(s) + 2\mu_1'(s) \geq 0, s \geq 0; \quad s|\mu_1(s)| \leq M, \quad s \geq a,$$

где $a > 0$ — некоторая константа. Тогда задача ZP имеет сильное решение.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда сильное решение задачи ZP единственно.*

Для операторного уравнения определяется семейство аппроксимационных уравнений ZPA при $k \geq 0$:

$$v' + \exp(kt)\mathcal{P}K(v) + kv + \mu_0 Av + B_k(v) =$$

$$f + \mu_2 C_k(v), \, t \in [0,T], \quad v(0) = v^0.$$

Здесь

$$C_k(v) = \int\limits_0^t R_k(t-s)\, Av(s)\, ds,$$

$$B_k(v) = -\mathcal{P}\mathrm{Div}\,(\mu_1\,(\exp(2kt)S(v(t)))\,\mathcal{E}(v)(t))$$

$$R_k(t) = \exp(-kt)t^{-\alpha} \text{ при } t \in [0,T], \quad R_k(t) = 0 \text{ при } t \notin [0,T].$$

Задача ZPA получается формально умножением уравнения ZP на $\exp(-kt)$. Существование решений аппроксимационных уравнений ZPA устанавливается с помощью некоторого итерационного процесса. Решение основного операторного уравнения получается как слабый предел решений аппроксимационных уравнений. Затем устанавливается, что слабое решение является сильным.

Результаты получены совместно с В.Г. Звягиным.

Литература

1. *Звягин В.Г., Орлов В.П.* О сильных решениях дробной нелинейно-вязкоупругой модели типа Фойгта. *Известия ВУЗов. Математика.* No 12 (1919), с. 106-111.

2. *Орлов В.П., Соболевский П.Е.* О гладкости обобщенных решений уравнений движения почти ньютоновской жидкости, *Численные методы механики сплошной среды.* No 1, Т. 16 (1985), с. 107–119.

ОБ ОБОСНОВАНИИ ПРИБЛИЖЁННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

©2020 *Л. П. Петрова, И. Н. Прядко*
(Воронеж, ВГУ; *lpp1950@mail.ru*; *pryadko_irina@mail.ru*)

Здесь в качестве модели задачи о поиске минимума выпуклой дифференцируемой функции $f(x)$в пределах выпуклого замкнутого множества $Q \subset R^n$рассматривается дифференциальное включение

$$\dot{x} \in -\nabla f(x) - N_x \tag{1}$$

с *нормальным* конусом $N_x := \{n: \forall (z \in Q) [\langle z - x,\ n\rangle \le 0]\}$, построенным к Q в точке x. Система (1) эквивалентна следующему уравнению с разрывной правой частью

$$\dot{x} = Pr_{T_x}(-\nabla f(x)), \tag{2}$$

где T_x — касательный конус к Q в точке x(сопряжённый к N_x)

Если ввести новую неизвестную функцию $\sigma(t)$, которая связана с $x(t)$ соотношением $\dot{\sigma}(t) = -\nabla f(x(t))$, $\sigma(t_0) = 0$, то (2) запишется в виде $\dot{x} = \mathrm{Pr}_{T_x} \dot{\sigma}$. Обозначим через $U_{t_0}^t(\sigma_t)x_0$ оператор упора, соответствующий Q, который сопоставляет любой непрерывно дифференцируемой *входной* вектор-функции $\sigma(t)$ и начальному значению $x_0 = x(t_0)$ *выходной* функции функцию $x(t)$ — решение уравнения $\dot{x} = \mathrm{Pr}_{T_x} \dot{\sigma}$. В новых обозначениях (2) принимает вид системы дифференциальных уравнений с оператором упора $x(t) = U_{t_0}^t(\sigma_t)x_0$ и $\dot{\sigma}(t) = -\nabla f\left(U_{t_0}^t(\sigma_t)x_0\right)$, основные свойства которого впервые были изучены Красносельским М.А и Покровским А.В.[1].

Наряду с (1) рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = -\nabla (f(x) + M \cdot h(x)). \tag{3}$$

В этом виде могут быть представлены некоторые приближённые методы поиска точки минимума $f(x)$ в области Q. Например, система $\dot{x} = -\nabla f(x) - M \cdot (x - \mathrm{Pr}_Q(x))$, предназначенная для поиска приближённого значения точки минимума со штрафной функцией $-M \cdot (x - \mathrm{Pr}_Q(x))$ представима в виде (2) с функциями $h(x) = \frac{1}{2}\|x - \mathrm{Pr}_Q x\|^2$. А для многогранной области $Q = \{x: \langle x,\ n_k\rangle \le c_k,\ k = 1,\ 2, \ldots, m\}$ система $\dot{x} = -\nabla f(x) - M \cdot \sum_{k=1}^m \xi_k n_k$, $\xi_k = \max\{0,\ \langle x,\ n_k\rangle - c_k\}$ записывается в виде (2) с $h(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^m \xi_k^2$.

Введём следующие ограничения:

1) Q содержится в области определения функции f вместе с некоторой своей окрестностью $Q^r := \{x: \rho(x,\ Q) \le r\}$;

2) градиент $\nabla f(x)$ ограничен в области Q^r;

3) $h(x)$ — определена, дифференцируема и выпукла (нестрого) на множестве Q^r, а её градиент $\nabla h(x) \in N_{\mathrm{Pr}_Q(x)}$ и $h(x) = 0$ для всех $x \in Q$;

4) для любого сколь угодно малого $r > \varepsilon > 0$ найдётся число $\mu(\varepsilon) > 0$ такое, что $\langle \nabla h(x),\ x - \mathrm{Pr}_Q x\rangle \ge \mu(\varepsilon)\|x - \mathrm{Pr}_Q x\|^2$ для всех $x \in X = \{x \in R^n: \varepsilon \le \rho(x,\ Q) \le r\}$.

При этих ограничениях справедлива

Теорема: *Если градиент $\nabla f(x) \ne 0$ для всех $x \in Q$, то для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $M > 0$ и $T > 0$, что для решения $x(t)$ системы (2) с начальным значением $x(0) = x_0 \in X$ при всех $t \ge T$ выполнено неравенство $f(x(t)) < f_o$ и $\rho(x(t),\ Q) \le \varepsilon$, где f_o — значение минимума функции $f(x)$на множестве Q.*

Доказательство теоремы приведено в [2].

Литература

1. *Красносельский М.А. Покровский А.В.* Системы с гистерезисом. —М.:Наука, 1983. 272с.

2. *Петрова Л.П, Прядко И.Н., Макринова Д.Л., Гулимова Е.Н.* Системы с диодными нелинейностями в обосновании корректности некоторого класса приближённых методов решения задач выпуклого программирования // Системы управления и информационные технологии. 2019. № 2 (76). С. 7-11.

О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ [1]

©2020 *Г. Г. Петросян*

(Воронеж, ВГУИТ, ВГПУ; *garikpetrosyan@yandex.ru*)

В работе для полулинейного функционально-дифференциального включения в сепарабельном банаховом пространстве E следующего вида

$$^{C}D^{q}x(t) \in Ax(t) + F(t, x_t), \ t \in [0, T], \tag{1}$$

мы исследуем задачу существования интегральных решений удовлетворяющих периодическому краевому условию

$$x_0 = x_T. \tag{2}$$

Символом $^{C}D^{q}$ обозначается дробная производная Капуто порядка $q \in (0, 1)$, x_t — предыстория функции $x(t)$ до момента времени $t \in [0, T]$, то есть $x_t(s) = x(t + s), s \in [-h, 0], 0 < h < T$. A — линейный замкнутый оператор в E удовлетворяющий условию:

(A) $A : D(A) \subseteq E \to E$ порождает ограниченную C_0–полугруппу $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ линейных операторов в E.

Мы полагаем, что многозначное нелинейное отображение $F : [0, T] \times C([-h, 0]; E) \to Kv(E)$, где $Kv(E)$ — совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств E, подчиняется следующим условиям:

$(F1)$ для каждого $\xi \in C([-h, 0]; E)$ мультифункция $F(\cdot, \xi) : [0, T] \to Kv\,(E)$ допускает измеримое сечение;

$(F2)$ для п.в. $t \in [0, T]$ мультиоператор $F(t, \cdot) : E \to Kv\,(E)$ полунепрерывен сверху;

$(F3)$ существует функция $\alpha \in L^{\infty}_{+}([0, T])$ такая, что

$$\|F(t, x_t)\|_E \leq \alpha(t)(1 + \|x_t\|_{C([-h,0];E)}) \text{ для п.в. } t \in [0, T];$$

$(F4)$ существует функция $\mu \in L^{\infty}([0, T])$ такая, что для каждого ограниченого множества $\Delta \subset C([-h, 0]; E)$:

$$\chi(F(t, \Delta)) \leq \mu(t)\varphi(\Delta),$$

для п.в. $t \in [0, T]$, где $\varphi(\Delta) = \sup_{s\in[-h,0]} \chi(\Delta(s))$, χ мера некомпактности Хаусдорфа в E, $\Delta(s) = \{y(s) : y \in \Delta\}$.

Теорема 1. *При выполнении условий* (A), $(F1) - (F4)$, *и дополнительного условия*

$((A1))$ *полугруппа* U *экспоненциально убывающая, то есть*

$$\|U(t)\| \leq e^{-\eta t}, \quad t \geq 0,$$

для некоторого числа $\eta > 0$.

Если $\frac{k}{\eta} < 1$, *где* $k = \max\{\|\alpha\|_\infty, \|\mu\|_\infty\}$, *то задача (1)-(2) имеет решения.*

Литература

1. *Борисович Ю.Г.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский. - М.: Книжный дом «Либроком», 2011. - 224 С.

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-60011.

2. *Kamenskii M.* Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. — Berlin–New-York: de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, Walter de Gruyter, 2001. — 231 P.

3. *Kamenskii M.* Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space / M. Kamenskii, V. Obukhoskii, G. Petrosyan, J.-C. Yao // Applicable Analysis. - 2017. - Vol. 96. №4.- P. 571-591.

4. *Kamenskii M.* On approximate solutions for a class of semilinear fractional-order differential equations in Banach spaces / M.I. Kamenskii, V.V. Obukhoskii, G.G. Petrosyan, J.C. Yao // Fixed Point Theory and Applications. - 2017. - Vol. 28. №4. - P. 1-28.

5. *Kamenskii M.* Existence and Approximation of Solutions to Nonlocal Boundary Value Problems for Fractional Differential Inclusions / M.I. Kamenskii, V.V. Obukhoskii, G.G. Petrosyan, J.C. Yao // Fixed Point Theory and Applications. - 2019. - Vol. 30. №2.

6. *Kamenskii M.I.* The Semidiscretization method for differential inclusions of fractional order / M.I. Kamenskii, V.V. Obukhoskii, G.G. Petrosyan // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. - 2018. - Т. 23. №122. - С. 125-130.

7. *Афанасова М.С.* О краевой задаче для функционально-дифференциального включения дробного порядка с общим начальным условием в банаховом пространстве / М.С. Афанасова, Г.Г. Петросян // Известия вузов. Математика. – 2019 .- №9. – С. 3-15.

8. *Петросян Г.Г.* О формальном представлении решений дифференциальных уравнений дробного порядка / Г.Г. Петросян // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. - 2018. - Т. 23. №123. - С. 524-530.

9. *Петросян Г.Г.* Об одной задаче управляемости для дифференциального включения с дробной производной Капуто / Г.Г. Петросян, О.Ю. Королева // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. - 2018. - Т. 23. №124. - С. 679-684.

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ БИЛЛИАРДЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ. ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ[1]

©2020 *С. Е. Пустовойтов*
(Москва; *pustovoitovse1@mail.ru*)

Математическим биллиардом называется динамическая система, описывающая движение материальной точки внутри связной, компактной, замкнутой области с кусочно-гладкой границей. При попадании точки на границу её вектор скорости меняется согласно естественному закону отражения. Далее будем рассматривать плоский биллиард. Для описанной таким образом системы будет иметь место первый интеграл – полная энергия H. Если же у системы будет ещё один первый интеграл F, то можно рассмотреть слоение изоэнергетического многообразия $Q^3 = \{(x, y, \dot{x}, \dot{y}) : H(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = h\}$ поверхностями уровней интегралов $T^2_{h,f} = \{(x, y, \dot{x}, \dot{y}) : H(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = h, F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = f\}$. Для гладких интегрируемых гамильтоновых систем известно, что регулярными слоями $T^2_{h,f}$ являются торы (Теорема Лиувилля). Особыми слоями являются двумерные комплексы – атомы, описанные и классифицированные А.Т.Фоменко в [1]. Строго говоря, математический биллиард не является гладкой

[1]Исследование выполнено в рамках Программы Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-2554.2020.1)

системой. Однако во многих случаях можно показать, что приведённые теоремы и для подобных систем имеют место.

Рассмотрим плоский биллиард, помещённый в однородное магнитное поле с напряжённостью B, линии которого направленны перпендикулярно поверхности стола. Уравнения, описывающие движение единичного заряда, имеют вид

$$\ddot{x} = B\dot{y}$$

$$\ddot{y} = -B\dot{x}$$

Отметим, что эти уравнения задают движение по окружности произвольного радиуса с произвольным центром.

А.Е.Мироновым и М.Бялым в [2] было доказано, что в случае выпуклого односвязного биллиарда интегрируемость имеет место только в случае биллиарда в круге. В таком случае первые интегралы имеют вид

$$H = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (BA)^2$$

$$F = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} + \frac{k}{2}(x^2 + y^2) + k(x\dot{y} - y\dot{x}) = (BR)^2,$$

где A–радиус дуги траектории между ударами о стенку, R–радиус окружности, точки которой являются центрами дуг траекторий. Пример движения приведён на рисунке ниже.

Стоит отметить, что магнитный биллиард в кольце концентрических окружностей также будет интегрируем. Интегралы останутся теми же.

Теорема 1. *В случаях магнитного биллиарда в круге или кольце будет сохраняться теорема Лиувилля, а слоения изоэнергетических многообразий Q^3 могут быть описаны полными инвариантами Фоменко-Цишанга.*

В частности, был получен инвариант, который ранее не встречался для биллиардных систем, но имел место в динамике твёрдого тела.

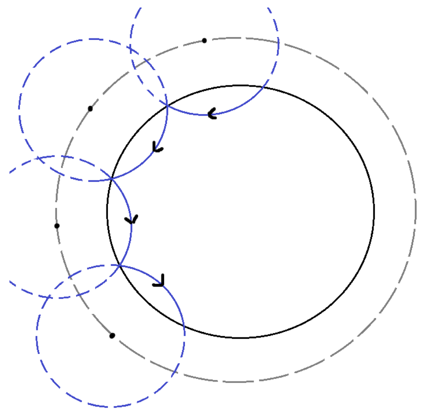


Рис. 1. Пример траектории

В докладе будут приведены бифуркационные диаграммы данных биллиардных систем, представлены все полные инварианты Фоменко-Цишанга, а также приведены динамические системы, Лиувиллево эквивалентные данным.

Литература

1. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том I. — Ижевск: РХД, 1999.

2. *M. Bialy, A. E. Mironov* “Algebraic non-integrability of magnetic billiards”, J. Phys. A, 49:45 (2016), 455101, 18 pp.

3. *Фокичева В.В.* Топологическая классификация биллиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик, Матем. сб., 206:10 (2015), 127-176.

4. *М. Бялый, А. Е. Миронов* Полиномиальная неинтегрируемость магнитных бильярдов на сфере и гиперболической плоскости, УМН, 2019, том 74, выпуск 2(446), 3–26

СТАБИЛИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ С ГИСТЕРЕЗИСНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ[1]

©2020 *О. О. Решетова, М. Е. Семенов, П. А. Мелешенко, А. М. Соловьев, С. В. Борзунов, А. В. Толкачев*
(Воронеж; *tribunskih1993@mail.ru*)

Введение

Моделирование прикладных задач в различных предметных областях, таких как: системы автоматического регулирования, теория твёрдого тела, описании различных экономических и биологических процессах, связано с изучением колебательных явлений. Задачи стабилизации и управления подобными системами, с практической точки зрения, являются одними из основных. Зачастую, эти задачи сводятся к системам дифференциальных уравнений, содержащим как функциональные нелинейности, так и нелинейности гистерезисной природы [1]. В настоящей работе проводится исследование ряда динамических систем с гистерезисными нелинейностям.

Гистерезисный демпфер, основанный на модели Боука–Вена

Рассмотрим механическую систему, находящуюся под действием вынуждающей периодической силы при наличии демпфирующего звена [2] (рис. 1). Механическая система состоит из цилиндра массой M, груза массой m, пружины с жёсткостью k и демпфирующего звена D, двигающийся без трения в горизонтальной плоскости. К цилиндру приложена вынуждающая сила $f(t)$ изменяющаяся по гармоническому закону.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 19-08-00158); Работа М.Е. Семенова и П.А. Мелешенко в части «Динамика системы ван дер Поля») поддержана РНФ (грант 19-11-0197).

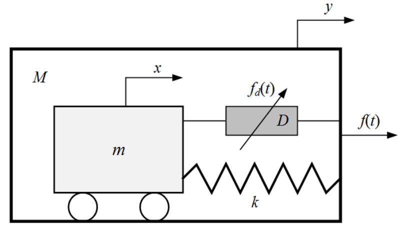


Рис. 1. *

Рис.1. Исследуемая механическая система

Пусть закон изменения силы $f(t)$, приложенной к цилиндру M:

$$f(t) = Y\omega^2 \sin(\omega t), \tag{1}$$

где Y – амплитуда, ω – частота воздействия.
Рассмотрим гистерезисный демпфер на основе феноменологической модели Боука-Вена[3]. Демпфирующая сила может быть представлена как:

$$\ddot{u} + \xi(k_b g + ku) = A\Omega^2 \sin(\Omega t), \xi = \frac{1}{\omega_0 \mu},$$
$$\dot{g}_\tau = \dot{u}_\tau \left(B - (\beta sign[g\dot{u}_\tau] + \gamma)|g|^p\right). \tag{2}$$

где Ω, μ, A, τ, ω_0, ξ - безразмерные величины. Проведём сравнительный анализ вязкого и гистерезисного демпферов. Сравнение указанных типов демпфирующих элементов наиболее репрезентативно может быть представлено в терминах передаточных функций, отражающих эффективность использования рассматриваемого демпфера в области резонанса системы и за её пределами.
Передаточная функция силы:

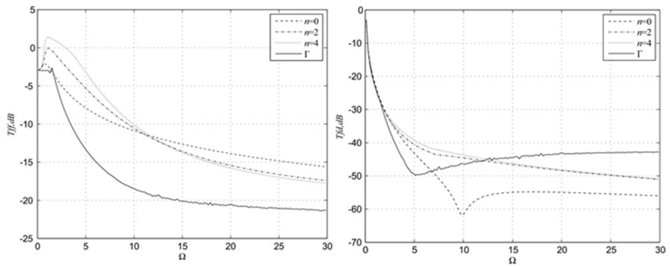


Рис. 2. *

Рис.2. Передаточные функции силы (слева) и «перемещение-сила» (справа) для гистерезисного (Г), линейного вязкого ($n = 0$) и нелинейного вязкого ($n > 0$) демпферов

$$T_{ff} = \frac{1}{Y\omega^2} max \left| m\omega_0^2 \frac{d^2x}{d\tau^2} \right| \tag{3}$$

Передаточная функция «перемещение-сила»:

$$T_{fd} = \frac{max|x(\tau)|}{Y\omega^2} \tag{4}$$

Как видно из результатов моделирования (рис.2), в случае использования гистерезисного демпфера на основе феноменологической модели Боука- Вена, возможно добиться высокой эффективности демпфирования как в области резонанса, так и за её пределами, по сравнению с использованием линейного или нелинейного вязкого демпферов.

Динамика гармонического осциллятора с гистерезисным внешним воздействием

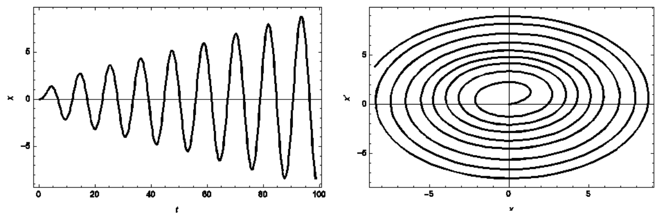


Рис. 3. *

Рис.3. Решение и фазовый портрет уравнения (5) с заданными начальными условиями

Рассмотрим систему, динамика которой описывается задачей Коши с начальными условиями $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = x_1$.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = R[\alpha, \beta, \omega_0], \tag{5}$$

где $R[\alpha, \beta, \omega_0]$ - оператор неидеального реле с инверсией пороговых чисел.
Теорема 1. *Пусть $x_0 \notin [\alpha, \beta]$. Тогда отвечающее ему решение не ограничено.*
Иными словами, если начальное значение таково, что гистерезисное звено, «срабатывает», то решение ему соответствующее не ограничено [4].
Замечание 1. *Очевидно, что решение будет осциллировать и при этом скорость роста амплитуды будет пропорциональна $\sqrt{t}$.*
Замечание 2. *Очевидно, что теорема остаётся верной и для других гистерезисных нелинейностей. Единственное требование к ним заключается в положительной площади петли.*

Динамика осциллятора ван дер Поля под воздействием гистерезисного управления

Система уравнений (6) описывает осциллятора ван дер Поля, под воздействием периодической внешней силы, а также гистерезисного управления формализованного при помощи модели Боука-Вена.

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = A\cos[\omega t] + \Phi_{BW}(x,t),$$

$$\Phi_{BW}(x,t) = \alpha x(t) + (1-\alpha)Dz(t), \qquad (6)$$

$$\dot{z}(t) = A_1\dot{x}(t) - \beta|\dot{x}(t)|\,|z(t)|^{n-1}z(t) - \gamma\dot{x}(t)|z(t)|^n.$$

Начальные и граничные условия определены аналогично с системой (5).

Проведя сравнительный анализ результатов численного моделирования системы (6) известными результатами для уравнения ван дер Поля без учёта гистерезисного блока, было установлено, что включение гистерезисного звена приводит к диссипации энергии и, как следствие, к изменению динамических характеристик рассматриваемой системы. Ниже приведены биффуркационные диаграммы, отражающие существенное различие в поведении систем. Подсчёт спектра показателей Ляпунова, с использованием стандартного подхода основанного на алгоритме Вольфа, подтвердил полученные результаты.

Заключение

В результате исследования колебательной системы с гистерезисным звеном удалось показать, что гистерезисный вибрационный демпфер основанный на феноменологической модели Боука-Вена имеет ряд важных преимуществ по сравнению с демпферами, построенными на основе вязкого трения.

Также в работе были исследованы резонансные свойства

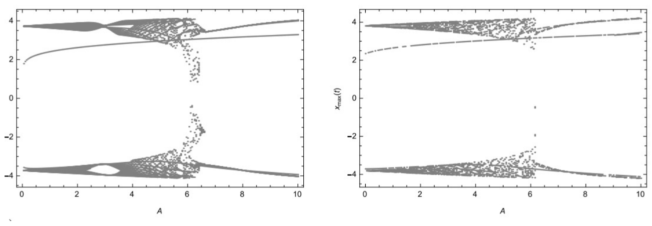


Рис. 4. *

Рис.4. Бифуркационные диаграммы в зависимости от амплитуды внешнего воздействия для системы без гистерезисного блока и системы (6) при значении параметров $\lambda = 3.4$, $\omega_0^2 = \pi$, $A = 2\pi$, $\omega = 0.7$

системы, в которой рассеивание энергии обусловлено наличием гистерезисного звена, а внешнее воздействие имеет резонансную частоту.

В ходе работы была установлена возможность управления хаотической динамикой осциллятора ван дер Поля с периодическим возмущением. На основе анализа численных результатов бифуркационных диаграмм и соответствующей динамики показателей Ляпунова установлена эффективность регуляризирующей роли гистерезисного звена.

Литература

1. *Семенов М.Е.* Динамика демпфирующего устройства на основе материала Ишлинского / М.Е. Семенов, М. Г. Матвеев, П.А. Мелешенко, А. М. Соловьёв // Мехатроника, автоматизация, управление. —2019. — № 20(2). — С. 106–113.

2. *Semenov M. E.* Nonlinear Damping: From Viscous to Hysteretic Dampers /M. E. Semenov, A. M. Solovyov, P. A.

Meleshenko et al. // Proceedings in Physics. —2018. — Vol. 199.

3. *Ikhouane F.* On the Hysteretic Bouc-Wen Model / F. Ikhouane, J. Rodellar // Nonlinear Dynamics. — 2005. — Vol. 42. — P. 63–78.

4. *Solovyov A. M.* Hysteretic nonlinearity and unbounded solutions in oscillating systems / A. M. Solovyov, M. E. Semenov, P. A. Meleshenko et al. // Procedia Engineering. —2017. — Vol. 201. — P. 578–583.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ АТЛАС ОДНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОЙ СИСТЕМЫ С ТРЕМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ[1]

©2020 *П. Е. Рябов, В. К. Каверина*
(Москва; *PERyabov@fa.ru*; *VKKaverina@fa.ru*)

В докладе представлены задачи и результаты исследования фазовой топологии интегрируемых систем с двумя и тремя степенями свободы из динамики твёрдого тела, допускающих представление Лакса. Основой таких исследований послужило понятие топологического атласа, введённое М. П. Харламовым в начале 2000-х гг. для неприводимых интегрируемых систем с тремя степенями свободы [1]. Топологический атлас включает аналитическое описание критических подсистем полного отображения момента, каждая из которых при фиксированных физических параметрах является почти гамильтоновой системой с меньшим числом степеней свободы; классификацию оснащённых изоэнергетических диаграмм Смейла с полным описанием регулярных торов Лиувилля и их бифуркаций; определение типов всех критических точек полного отображения момента и программы-конструктора построения топологических инвариантов. Как оказалось, к настоящему моменту локальное и полулокальное исследование критических подсистем является эффективным средством для конструирования грубых топологических инвариантов. Для интегрируемых гамильтоновых систем с n степенями свободы с полиномиальными или рациональными интегралами множество критических значений отображения момента $\mathcal{F}$ может быть записано в виде $P = 0$, где P — полином от фазовых переменных. Разложение его на неприводимые сомножители $P = \prod_j L_j$ приводит к определению критической подсистемы $\mathcal{M}_j$ как множества критических точек нулевого уровня некоторой функции L_j. Оказывается, критическая точка ранга k локально является точкой пересечения $n-k$ подобластей критических подсистем. Интегралы L_j этих подсистем порождают симплектические операторы $\mathcal{A}_{L_j}$, которые определяют тип критической точки. Бифуркации, которые возникают при пересечении поверхностей $\mathcal{F}(M_j)$ в точке $\mathcal{F}(x)$, порождают полулокальный тип критической точки. Такой подход приводит к аналитическому описанию топологических инвариантов исключительно в терминах первых интегралов. Для некоторых интегрируемых задач динамики твёрдого тела (волчок Ковалевской в двойном поле сил, интегрируемый случай Ковалевской-Соколова, интегрируемый случай Ковалевской-Яхья) удалось эффективно реализовать программу построения топологического атласа [2], [3], [4].

В докладе также представлены некоторые результаты построения топологического атласа интегрируемой системы с тремя степенями свободы на ко-алгебре Ли $e(3,2)^*$, которая описывает динамику двухполевого обобщённого гиростата при наличии двух силовых полей (случай интегрируемости Соколова-Цыганова) [5]. Это один из наиболее общих найденных на сегодня случаев интегрируемости гиростата в

[1]Работа первого автора поддержана Российским научным фондом (№ 19-71-30012).

двойном поле с условиями типа Ковалевской и гироскопическими силами с непостоянным гироскопическим моментом. В общем случае не удавалось даже выписать в обозримом виде дополнительные интегралы.

Речь идёт о следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{M}} &= \boldsymbol{M} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{M}} + \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\beta}}, \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{M}}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{M}} \end{aligned} \tag{1}$$

с гамильтонианом

$$\begin{gathered} H = M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2 + 2\lambda M_3 - 2\varepsilon_2(\alpha_1 + \beta_2) \\ +2\varepsilon_1(M_2\alpha_3 - M_3\alpha_2 + M_3\beta_1 - M_1\beta_3). \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь трёхмерные векторы $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ представляют собой проекции кинетического момента и двух силовых полей на оси, жёстко связанные с твёрдым телом; λ — параметр гиростатического момента, направленного вдоль оси динамической симметрии; ε_1 и ε_2 — параметры деформации. Система с таким гамильтонианом, существенно зависящими от $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$, не допускает непрерывной группы симметрии, и поэтому неприводима глобально к семейству систем с двумя степенями свободы.

Соответствующая скобка Ли–Пуассона задаётся формулами

$$\begin{aligned} &\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk}M_k, \{M_i, \alpha_j\} = \varepsilon_{ijk}\alpha_k, \\ &\{M_i, \beta_j\} = \varepsilon_{ijk}\beta_k, \{\alpha_i, \alpha_j\} = 0, \\ &\{\alpha_i, \beta_j\} = 0, \{\beta_i, \beta_j\} = 0, \\ &\varepsilon_{ijk} = \tfrac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i), 1 \leqslant i, j, k \leqslant 3. \end{aligned} \tag{3}$$

Функциями Казимира являются выражения $\boldsymbol{\alpha}^2$, $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\beta}^2$.

Относительно скобки Ли–Пуассона, заданной соотношениями (3), систему (1) можно представить в гамильтоновом виде

$$\dot{x} = \{H, x\},$$

где через x обозначена любая из координат.

Фазовое пространство $\mathcal{P}$ системы уравнений (1) задаётся общим уровнем функций Казимира

$$\boldsymbol{\alpha}^2 = a^2, \quad \boldsymbol{\beta}^2 = b^2, \quad \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = c, \quad (0 < b < a, |c| < ab).$$

Для гамильтониана (2) необходимые для интегрируемости по Лиувиллю два дополнительных интеграла K и G имеют следующий явный вид [6]:

$$\begin{aligned} K = {} & Z_1^2 + Z_2^2 - \lambda[(M_3 + \lambda)(M_1^2 + M_2^2) + 2\varepsilon_2(\alpha_3 M_1 + \beta_3 M_2)] \\ & +\lambda\varepsilon_1^2(\boldsymbol{\alpha}^2 + \boldsymbol{\beta}^2)M_3 + \\ & +2\lambda\varepsilon_1[\alpha_2 M_1^2 - \beta_1 M_2^2 - (\alpha_1 - \beta_2)M_1M_2] - 2\lambda\varepsilon_1^2\omega_\gamma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G = {} & \omega_\alpha^2 + \omega_\beta^2 + 2(M_3 + \lambda)\omega_\gamma - 2\varepsilon_2(\boldsymbol{\alpha}^2\beta_2 + \boldsymbol{\beta}^2\alpha_1) + \\ & +2\varepsilon_1[\boldsymbol{\beta}^2(M_2\alpha_3 - M_3\alpha_2) - \boldsymbol{\alpha}^2(M_1\beta_3 - M_3\beta_1)] \\ & +2(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta})[\varepsilon_2(\alpha_2 + \beta_1) + \varepsilon_1(\alpha_3 M_1 - \alpha_1 M_3 + \beta_2 M_3 - \beta_3 M_2)], \end{aligned}$$

где

$$Z_1 = \frac{1}{2}(M_1^2 - M_2^2) + \varepsilon_2(\alpha_1 - \beta_2) +$$
$$+\varepsilon_1[M_3(\alpha_2 + \beta_1) - M_2\alpha_3 - M_1\beta_3] + \frac{1}{2}\varepsilon_1^2(\boldsymbol{\beta}^2 - \boldsymbol{\alpha}^2),$$
$$Z_2 = M_1M_2 + \varepsilon_2(\alpha_2 + \beta_1) -$$
$$-\varepsilon_1[M_3(\alpha_1 - \beta_2) + \beta_3M_2 - \alpha_3M_1] - \varepsilon_1^2(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}),$$
$$\omega_\alpha = M_1\alpha_1 + M_2\alpha_2 + M_3\alpha_3,$$
$$\omega_\beta = M_1\beta_1 + M_2\beta_2 + M_3\beta_3,$$
$$\omega_\gamma = M_1(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) +$$
$$+M_2(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) + M_3(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1).$$

В докладе предложен подход к описанию фазовой топологии такой системы. В явном виде описываются некоторые критические подсистемы с указанием бифуркаций торов Лиувиля [6], [7], [8], а также некоторые оснащённые изоэнергетические диаграммы. На сегодняшний день для указанной системы определены порядка 150 оснащённых изоэнергетических диаграмм полного отображения момента с указанием всех камер, семейств регулярных 3-мерных торов и их 4-мерных бифуркаций.

Литература

1. *Kharlamov M.P.* Bifurcation diagrams of the Kowalevski top in two constant fields // Regular and Chaotic Dynamics. 2005. Vol. 10, № 4. P. 381–398.

2. *Kharlamov M.P., Ryabov P.E.* Topological atlas of the Kovallevskaya top in a double field // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2017. Vol. 223, №. 6. P. 775–809.

3. *Kharlamov M.P., Ryabov P.E., Savushkin A.Y.* Topological Atlas of the Kowalevski-Sokolov // Regular and Chaotic Dynamics. 2016. Vol. 21, №. 1. P. 24–65.

4. *Kharlamov M.P., Ryabov P.E., Kharlamova I.I.* Topological Atlas of the Kovalevskaya-Yehia Gyrostat // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2017. Vol. 227, №. 3. P. 241–386.

5. *Sokolov V.V., Tsiganov A.V.* Lax Pairs for the Deformed Kowalevski and Goryachev-Chaplygin Tops // Theoretical and Mathematical Physics. 2002. Vol. 131, №. 1. P. 543–549.

6. *Ryabov P.E.* Phase topology of one irreducible integrable problem in the dynamics of a rigid body // Theoretical and Mathematical Physics. 2013. Vol. 176, №. 2. P. 1000–1015.

7. *Ryabov P.E.* New invariant relations for the generalized two-field gyrostat // Journal of Geometry and Physics. 2015. Vol. 87. P. 415–421.

8. *Sokolov S.V.* New invariant relations for one critical subsystem of a generalized two-field gyrostat // Doklady Physics. 2017. Vol. 62, №. 12. P. 567–570.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

©2020 *К. Б. Сабитов*
(Стерлитамак; *sabitov_fmf@mail.ru*)

Исследование вопросов неустойчивых колебаний (резонансов колебаний в жидкости в тонкостенных баках ракет с собственными колебаниями) тесно связано с задачей Дирихле для волнового уравнения. Эта задача изучалась многими математиками (см. [1 – 3]).

Если задача Дирихле для одномерного волнового уравнения в прямоугольной области изучена достаточно полно [4], [5, с. 112–118], то эта задача для многомерного волнового уравнения практически не исследована. Только работы [6, 7] посвящены задаче Дирихле для трёхмерного волнового уравнения с ненулевой правой частью и однородными граничными условиями в области Ω, когда Ω — эллипсоид, цилиндр с образующими, параллельными оси t, и параллелепипед, где установлены критерий единственности и существование решения задачи в пространстве Соболева $W_2^1(\Omega)$ при определённых условиях на правую часть, связанных сходимостью числовых рядов. При этом возникающие малые знаменатели не изучены.

В данной работе в классе регулярных решений гиперболических уравнений высокого порядка установлен критерий единственности решения задачи Дирихле и само решение построено в явном виде как сумма ряда Фурье. При обосновании сходимости ряда возникает проблема малых знаменателей от многих переменных более сложной структуры, чем в ранее известных работах [4, 8, 9]. В связи с чем установлены оценки об отделённости от нуля малых знаменателей, на основании которых доказана сходимость ряда в классе регулярных решений при некоторых условиях относительно граничных функций.

1.Задача Дирихле для двумерного уравнения гиперболического типа высокого порядка

Рассмотрим уравнение в частных производных

$$Lu = \frac{\partial^{2p} u}{\partial t^{2p}} - \frac{\partial^{2p} u}{\partial x^{2p}} = f(x,t) \tag{1.1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t)|\ 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$, где l, T — заданные положительные числа, $p \in N$, и поставим следующую первую граничную задачу.

Задача Дирихле. *Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u \in C^{2p-1}(\overline{D}) \cap C^{2p}(D), \tag{1.2}$$

$$Lu(x,t) \equiv f(x,t), \quad (x,t) \in D, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}\Big|_{x=0} = \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}\Big|_{x=l} = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}}\Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \le x \le l, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}}\Big|_{t=T} = 0, \quad 0 \le x \le l, \quad k = \overline{0, p-1}. \tag{1.6}$$

Теорема 1.1. *Если существует решение задачи* (1.2) – (1.6), *то оно единственно только тогда, когда отношение сторон $\alpha = T/l$ прямоугольника D является иррациональным числом.*

Решение задачи (1.2) – (1.6) строится в виде суммы двойного ряда

$$u(x,t) = \frac{2}{\sqrt{lT}} \sum_{m,n=1}^{+\infty} u_{mn} \sin\frac{\pi m}{l} x \sin\frac{\pi n}{T} t. \tag{1.7}$$

Теорема 1.2. *Если число $\alpha > 0$ является иррациональным алгебраическим числом степени $n \ge 2$ и функция $f(x,t) \in C^{2p+5}(\overline{D})$,*

$$f_x^{(i)}(0,t) = f_x^{(i)}(l,t) = \\ = \begin{cases} 0, & i = 0,2,...,p+1, \ \ p+3 - \textit{чётное}; \\ 0, & i = 0,2,...,p+2, \ \ p+3 - \textit{нечётное}, \end{cases}$$

$$f_t^{(j)}(x,0) = f_t^{(j)}(x,T) = \\ = \begin{cases} 0, & j = 0,2,...,p+1, \ \ p+2 - \textit{нечётное}; \\ 0, & j = 0,2,...,p, \ \ p+2 - \textit{чётное}, \end{cases}$$

то существует единственное решение задачи (1.2)–(1.6), которое определяется рядом (1.7).

2.Задача Дирихле для трёхмерного уравнения

гиперболического типа высокого порядка и связь с проблемой Ферма

Далее для трёхмерного аналога уравнения (1.1), т.е. для уравнения вида

$$Lu = \frac{\partial^{2p} u}{\partial t^{2p}} - \frac{\partial^{2p} u}{\partial x^{2p}} - \frac{\partial^{2p} u}{\partial y^{2p}} = f(x,y,t), \tag{2.1}$$

в прямоугольном параллелепипеде $Q = \{(x,y,t) |\ (x,y) \in D, t \in (0,T)\}$, где $D = \{(x,y) |\ 0 < x < l,\ 0 < y < q\}$, l, q, T — заданные положительные числа, $f(x,y,t)$ — заданная в Q функция, $p \in N$, исследуется следующая

Задача Дирихле. *Найти в области Q функцию $u(x,y,t)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u \in C^{2p-1}(\overline{Q}) \cap C^{2p}(Q), \tag{2.2}$$

$$Lu(x,y,t) \equiv f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}\Big|_{x=0} = \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}\Big|_{x=l} = \frac{\partial^{2k} u}{\partial y^{2k}}\Big|_{y=0} = \frac{\partial^{2k} u}{\partial y^{2k}}\Big|_{y=q} = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}}\Big|_{t=0} = \frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}}\Big|_{t=T} = 0, \quad (x,y) \in \overline{D}, \quad k = \overline{0, p-1}. \tag{2.5}$$

Здесь установлен следующий результат.

Теорема 2.1. *Если существует решение задачи* (2.1) – (2.5)*, то оно единственно только тогда, когда уравнение*

$$\left(\frac{m}{l}\right)^{2p} + \left(\frac{n}{q}\right)^{2p} = \left(\frac{k}{T}\right)^{2p}, \quad m,n,k \in N, \tag{2.6}$$

не разрешимо во множестве натуральных чисел.

Если $l = q = T$, т.е. Q является кубом, то (2.6) переходит в известное уравнение Ферма

$$m^{2p} + n^{2p} = k^{2p}. \tag{2.7}$$

Если $q = l \neq T$, $\frac{l}{T} \in Q$ или $q = T \neq l$, $\frac{T}{l} \in Q$, то уравнение (2.6) также сводится к уравнению типа (2.7). Следовательно, в этих случаях в силу полученного результата единственность решения задачи Дирихле для уравнения (2.1) при любом натуральном p равносильна великой проблеме Ферма.

Решение задачи (2.1) – (2.5) строится в виде суммы тройного ряда

$$u(x,y,t) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{lqT}} \sum_{m,n,k=1}^{+\infty} u_{mnk} \sin\frac{\pi m}{l} x \sin\frac{\pi n}{q} y \sin\frac{\pi k}{T} t,$$

$$u_{mnk} = \frac{1}{\pi^2} \frac{(-1)^p f_{mnk}}{(k/T)^{2p} - (m/l)^{2p} - (n/q)^{2p}},$$

$$f_{mnk} = \int\limits_Q f(x,y,t) \sin\frac{\pi m}{l} x \sin\frac{\pi n}{q} y \sin\frac{\pi k}{T} t\, dxdydt.$$

Литература

1. *Соболев С. Л.* Пример корректной краевой задачи для уравнения колебания струны с данными на всей границе // ДАН СССР. 1956. Т. 109. № 4. С. 707–709.

2. *Арнольд В. И.* Математическое понимание природы. М.: Изд-во МЦНМО, 2010. 144 с.

3. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели. I // Известия АН СССР. Серия математическая. 1961. № 25. С. 21–86

4. *Сабитов К. Б.* Задача Дирихле для уравнений с частными производными // Матем. заметки. 2015. Т. 97. № 2. С. 262–276.

5. *Сабитов К. Б.* Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2013. 352 с.

6. *Денчев Р.* О спектре одного оператора // Докл. АН СССР. 1959. Т. 126. № 2. С. 259–262.

7. *Денчев Р.* О задаче Дирихле для волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127. № 3. С. 501–504.

8. *Сабитова Ю. К.* Задача Дирихле для телеграфного уравнения в прямоугольной области // Изв. вузов. Матем. 2017. № 12. С. 46–56.

9. *Сабитова Ю. К.* Задача Дирихле для уравнения гиперболического типа со степенным вырождением в прямоугольной области // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 2. С. 228–237.

ЗАДАЧА КЕЛДЫША ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ ВЫРОЖДЕНИЕМ[1]

©2020 *Ю. К. Сабитова*

(Стерлитамак; *sabitovauk@rambler.ru*)

Для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа

$$Lu = u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)\, y\, u_{yy} + au_y - b^2 u = 0 \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y)|\ 0 < x < l, -\alpha < y < \beta\}$, где $l > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $a > 1$, b — заданные действительные числа, поставим следующую задачу.

Задача Келдыша. *Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям*:

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C_x^1(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{2}$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-; \tag{3}$$

$$u(0, y) = u(l, y) = 0, \qquad -\alpha \le y \le \beta; \tag{4}$$

$$u(x, \beta) = f(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{5}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 183100111 мол_а).

где $D_- = D \cap \{y < 0\}$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $f(x)$ − заданная достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условию $f(0) = f(l) = 0$.

М.В. Келдыш [1] впервые исследовал более общее эллиптическое уравнение, чем уравнение (1) при $y > 0$, второго порядка от двух переменных с характеристическим вырождением. Он показал, что корректность первой граничной задачи существенным образом зависит от показателя степени вырождения и коэффициента при младшей производной u_y.

Опираясь на эту работу, И.Л. Кароль [2] исследовал задачу Трикоми для уравнения смешанного типа (1) при $b = 0$ в области G, где G — область плоскости XOY, ограниченная простой жордановой кривой Γ, лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $O(0, 0)$ и $A(1, 0)$, характеристиками OC и AC уравнения, расположенными в полуплоскости $y < 0$. И.Л. Кароль доказал, что характер краевых задач, которые могут быть поставлены для уравнения (1) в области G, в отличие от уравнений с нехарактеристическим вырождением, существенно зависит от коэффициента a и класса решений уравнения (1). Например, классическая задача Трикоми в случае $a < 0$ недоопределена, при $a > 0$ — переопределена.

В данной статье опираясь на работы [3 – 8] решена задача (2) – (5) в прямоугольной области для уравнения (1). Решение построено в виде суммы ряда. Доказаны теоремы единственности и существования решения этой задачи.

Решение задачи (2) – (5) построено в виде суммы ряда

$$u(x, y) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y) \sin \frac{\pi k}{l} x. \tag{6}$$

В формуле (6) функции $u_k(y)$ определены формулой

$$u_k(y)=\begin{cases} f_k\left(\dfrac{y}{\beta}\right)^{\frac{1-a}{2}}\dfrac{I_{a-1}(p_k y^{\frac{1}{2}})}{I_{a-1}(p_k\beta^{\frac{1}{2}})}, & y\geq 0,\\ f_k\left(\dfrac{-y}{\beta}\right)^{\frac{1-a}{2}}\dfrac{J_{a-1}(p_k(-y)^{\frac{1}{2}})}{I_{a-1}(p_k\beta^{\frac{1}{2}})}, & y\leq 0,\end{cases}$$

где $f_k = \sqrt{\dfrac{2}{l}}\int\limits_0^l f(x)\sin\lambda_k x dx$, $p_k = 2\sqrt{b^2+\lambda_k^2}$, $I_{a-1}(p_k y^{\frac{1}{2}})$ — модифицированная функция Бесселя первого рода, $J_{a-1}(p_k(-y)^{\frac{1}{2}})$ — функция Бесселя первого рода.

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Если существует решение задачи* (2) – (5), *то оно единственно.*

Теорема 2. *Если функция* $f(x)\in C^3[0,l]$ *и выполнены условия* $f(0)=f(l)=0$, $f''(0)=f''(l)=0$, *то существует единственное решение задачи* (2) – (5) *и это решение определяется рядом* (6).

Если вместо условия (5) задать граничное условие на нижнем основании прямоугольника

$$u(x,-\alpha)=g(x),\quad 0\leq x\leq l,$$

тогда функции $u_k(y)$ в формуле (6) будут иметь вид

$$u_k(y)=\begin{cases} -g_k\left(\dfrac{y}{\alpha}\right)^{\frac{1-a}{2}}\dfrac{I_{a-1}(p_k y^{\frac{1}{2}})}{J_{a-1}(p_k\alpha^{\frac{1}{2}})}, & y\geq 0,\\ g_k\left(\dfrac{-y}{\alpha}\right)^{\frac{1-a}{2}}\dfrac{J_{a-1}(p_k(-y)^{\frac{1}{2}})}{J_{a-1}(p_k\alpha^{\frac{1}{2}})}, & y\leq 0,\end{cases}$$

где

$$g_k=\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l g(x)\sin\lambda_k x dx.$$

Из данной формулы видно, что функции $u_k(y)\to\infty$ при $k\to\infty$ и фиксированных $y>0$. Следовательно, показать равномерную сходимость ряда (6) не удастся.

Литература

1. *Келдыш М.В.* О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // ДАН. – 1951. – Т.77. – №2. – С. 181 – 184.

2. *Кароль И.Л.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа второго рода // ДАН. – 1953. – Т.88. – №2. – С. 197 – 200.

3. *Сабитов К.Б.* Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // Докл. РАН. – 2007. – Т. 413. – № 1. – С. 23 – 26.

4. *Сабитов К.Б. Сулейманова А.Х.* Задача Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода в прямоугольной области // Изв. вузов. Матем. 2007. № 4. С. 45–53.

5. *Сабитов К.Б. Сулейманова А.Х.* Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением в прямоугольной области // Изв. вузов. Матем. 2009. № 11. С. 43–52.

6. *Хайруллин Р.С.* О существовании решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода // Дифференц. уравнения. – 2017. – Т. 53. – № 5. – С. 684 – 692.

7. *Сабитова Ю.К.* Критерий единственности решения нелокальной задачи для вырождающегося уравнения смешанного типа в прямоугольной области // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т.46. – № 8. – С. 1205 – 1208.

8. *Сабитова Ю.К.* Краевая задача с нелокальным интегральным условием для уравнений смешанного типа с вырождением на переходной линии // Матем. заметки. – 2015. – Т.98. – Вып. 3. – С. 393 – 406.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ С ПРИСОЕДИНЁННЫМ ГРУЗОМ[1]

©2020 *А. А. Самсонов*, *П. С. Соловьёв*, *С. И. Соловьёв*, *Д. М. Коростелева*
(Казань; *anton.samsonov.kpfu@mail.ru*)

Исследуется обыкновенная дифференциальная задача на собственные значения второго порядка, описывающая продольные собственные колебания упругого стержня с присоединённым к торцу грузом. Задача имеет возрастающую последовательность положительных простых собственных значений с предельной точкой на бесконечности. Последовательности собственных значений соответствует полная ортонормированная система собственных функций. В данной работе изучаются асимптотические свойства собственных значений и собственных функций при неограниченном увеличении массы присоединённого груза. Исходная дифференциальная задача на собственные значения аппроксимируется сеточной схемой метода конечных элементов произвольного порядка с численным интегрированием на неравномерной сетке. Устанавливаются оценки погрешности приближённых собственных значений и собственных функций в зависимости от шага сетки. Полученные результаты развивают и обобщают результаты работ [1–3]. Выводы работы могут быть перенесены на случаи более сложных и важных прикладных задач расчёта собственных колебаний балок, пластин и оболочек с присоединёнными грузами.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта № 18-41-160029.

Литература

1. *Соловьёв С.И.* Нелинейные задачи на собственные значения. Приближённые методы. Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2011. 256 с.

2. *Соловьёв С.И.* Аппроксимация нелинейных спектральных задач в гильбертовом пространстве // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, № 7. С. 937–950.

3. *Соловьёв С.И.* Собственные колебания стержня с упруго присоединённым грузом // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 3. С. 418–432.

О ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ КРАСНОСЕЛЬСКОГО–МАННА[1]

©2020 *В. В. Семёнов*
(Киев; *semenov.volodya@gmail.com*)

Построение и исследование приближенных методов метрической теории неподвижных точек – интересная, имеющая много приложений и активно развивающаяся область нелинейного анализа.

Классические теоремы Брауэра, Шаудера и Какутани о неподвижной точке имеют неконструктивный характер. Но для более узких классов операторов существует развитая алгоритмика аппроксимации неподвижных точек. Одним из таких классов является класс нерастягивающих операторов. Хорошее введение в их теорию с описанием основных методов содержится в [1] (см. также книгу [2]).

Ещё в 1955 г. М.А. Красносельский [3] (близкие идеи были высказаны в работе W.R. Mann [4]) предложил для поиска неподвижных точек действующего в банаховом пространстве нерастягивающего оператора T процесс

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке МОНУ (проект 0219U008403) и НАНУ (проект 0119U101608).

$$x_{n+1} = \frac{x_n + Tx_n}{2}. \qquad (1)$$

В [3] также доказана сильная сходимость (1) для компактных нерастягивающих операторов T, действующих в равномерно выпуклых банаховых пространствах.

Классические работы [3, 4] положили начало большому количеству исследований по сходимости метода Красносельского–Манна, т.е. процесса вида

$$x_{n+1} = x_n + \lambda_n(Tx_n - x_n), \qquad (2)$$

где $\lambda_n \in (0,1]$ (см. [1]). А в статье [5] для нерастягивающих операторов в гильбертовом пространстве H был предложен и изучен непрерывный аналог метода (2)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \lambda(t)\left(Tx(t) - x(t)\right), \\ x(0) = x_0 \in H, \end{cases} \qquad (3)$$

где $\lambda : [0,+\infty) \to (0,1]$. В частности, при определённых условиях доказана слабая сходимость при $t \to +\infty$ решения (3) к неподвижной точке T. Регуляризованный по Тихонову вариант динамики (3) изучен в [6].

Мы отталкиваемся от упомянутых работ [5, 6]. Пусть $T : H \to H$ — нерастягивающий оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, причём $F(T) \neq \emptyset$. В лекции мы рассмотрим асимптотическое поведение траекторий динамических систем

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \lambda(t)\left(Tx(t) - x(t)\right) - \varepsilon(t)Ax(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \qquad (4)$$

где $x_0 \in H$, оператор $A : H \to H$ сильно монотонный и липшицевый, а функции $\lambda : [0,+\infty) \to (0,1]$, $\varepsilon : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ удовлетворяют определённым условиям. Доказана

сильная сходимость $x(t)$ (при $t \to +\infty$) к решению вариационного неравенства

$$x \in F(T) : \ (Ax, y - x) \geq 0 \ \ \forall y \in F(T).$$

Также рассмотрим распределённый вариант динамики (4) и конкретные методы, порождаемые при применении (4) к задачам математического программирования, игровым задачам и вариационным неравенствам. Например, с задачей

$$f(x) \to \min, \ \ x \in \operatorname{argmin} g, \qquad (5)$$

где функция g выпукла и полунепрерывна снизу, а функция f сильно выпукла и имеет липшицев градиент, можно связать динамическую систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \left(\operatorname{prox}_g x(t) - x(t)\right) - \frac{1}{\sqrt{t+1}} \nabla f(x(t)), \\ x(0) = x_0 \in H, \end{cases}$$

где

$$\operatorname{prox}_g x = \operatorname{argmin}_{y \in H} \left\{ g(y) + \frac{1}{2}\left\|y - x\right\|^2 \right\}.$$

Если $\operatorname{argmin} g \neq \emptyset$, то $x(t)$ при $t \to +\infty$ сильно сходится к решению (5).

Литература

1. *Bauschke H.H., Combettes P.L.* Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. NY: Springer, 2011. 408 p.

2. *Васин В.В., Еремин И.И.* Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. 200 с.

3. *Красносельский М.А.* Два замечания о методе последовательных приближений. УМН. 1955. Том 10. Выпуск 1. С. 123–127.

4. *Mann W.R.* Mean value methods in iteration. Proc. Amer. Math. Soc. 1953. Vol. 4 P. 506–510.

5. *Bot R.I., Csetnek E.R.* A dynamical system associated with the fixed points set of a nonexpansive operator. Journal of Dynamics and Differential Equations. 2017. Vol. 29. Iss. 1. P. 155–168.

6. *Vilches P., Perez-Aros E.* Tikhonov regularization of dynamical systems associated with nonexpansive operators defined in closed and convex sets. arXiv. 1904.05718. 2019.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ[1]

©2020 *С. Н. Сидоров*
(Стерлитамак; *stsid@mail.ru*)

Рассмотрим уравнение

$$Lu = F(x,t), \tag{1}$$

здесь

$$Lu = \begin{cases} t^n u_{xx} - u_t - bt^n u, \\ (-t)^m u_{xx} - u_{tt} - b(-t)^m u, \end{cases}$$

$$F(x,t) = \begin{cases} f_1(x)g_1(t), & t > 0, \\ f_2(x)g_2(t), & t < 0, \end{cases}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t)|\, 0 < x < l, -\alpha < t < \beta\}$, где $n > 0$, $m > 0$, $l > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ — заданные действительные числа, и b — заданное любое действительное число, и поставим следующие задачи.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ-Перспектива (№ 19-31-60016).

Задача 1. *Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C_t^1(D) \cap C_x^1(\overline{D}) \cap C_x^2(D_+) \cap C^2(D_-); \tag{2}$$

$$Lu(x,t) \equiv F(x,t), \quad (x,t) \in D_+ \cup D_-; \tag{3}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad -\alpha \le t \le \beta; \tag{4}$$

$$u(x,-\alpha) = 0, \quad 0 \le x \le l, \tag{5}$$

где $F(x,t)$ — заданная достаточно гладкая функция, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$.

Задача 2. *Найти функции $u(x,t)$ и $g_1(t)$, удовлетворяющие условиям* (2) – (5) *и*

$$g_1(t) \in C[0,\beta]; \tag{6}$$

$$u(x_0,t) = h_1(t), \quad 0 < x_0 < l, \quad 0 \le t \le \beta, \tag{7}$$

где $f_i(x)$, $i = 1,2$, $g_2(t)$, $h_1(t)$ — заданные функции, x_0 — заданная точка из интервала $(0,l)$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$.

Задача 3. *Найти функции $u(x,t)$ и $g_2(t)$, удовлетворяющие условиям* (2) – (5) *и*

$$g_2(t) \in C[-\alpha,0], \tag{8}$$

$$u(x_0,t) = h_2(t), \quad 0 < x_0 < l, \quad -\alpha \le t \le 0, \tag{9}$$

где $f_i(x)$, $i = 1,2$, $g_1(t)$, $h_2(t)$ — известные функции.

Задача 4. *Найти функции $u(x,t)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$, удовлетворяющие условиям* (1.2) – (1.9)*, здесь $f_i(x)$, $h_i(t)$, $i = 1,2$, – заданные функции.*

Отметим, что ранее задачи 1 – 4 впервые поставлены и изучены в работах [1, с. 228–238], [2] для уравнения (1) при $n = m = 0$. Начально-граничная задача (1.2) – (1.5) для уравнения (1) изучена в работах [3 – 5], когда $n = 0$, $m > 0$;

$n > 0$, $m = 0$ и $n > 0$, $m > 0$. В работе [6] изучены обратные задачи для уравнения (1) при $n = 0$, $m > 0$, по отысканию функций $u(x,t)$ и $f_i(x)$, когда $g_i(t) \equiv 1$. В статьях [7, 8] рассмотрены задачи 1 – 4 для уравнения (1), когда $n > 0$, $m = 0$ и $n = 0$, $m > 0$ соответственно.

В данной работе изучены обратные задачи 2 – 4 по отысканию сомножителей правой части уравнения смешанного параболо-гиперболического типа со степенным вырождением на линии изменения типа, исследование которых проводится на основе решения прямой начально-граничной задачи 1, изученной в работах [3 – 5]. Решение обратных задач 2 – 4 эквивалентно редуцировано к разрешимости нагруженных интегральных уравнений. Используя теорию интегральных уравнений доказаны соответствующие теоремы единственности и существования решений поставленных обратных задач и указаны явные формулы решения.

Литература

1. *Сабитов К. Б.* Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. М.: Наука, 2016. 272 с.

2. *Сабитов К. Б.* Начально-граничная и обратные задачи для неоднородного уравнения смешанного параболо-гиперболического уравнения // Матем. заметки. 2017. Т. 102. Вып. 3. С. 415–435.

3. *Сабитов К. Б., Сидоров С. Н.* Об одной нелокальной задаче для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения // Диф. уравнения. 2014. Т. 50, № 3. С. 356–365.

4. *Сабитов К. Б., Сидоров С. Н.* Начально-граничная задача для неоднородных вырождающихся уравнений смешанного параболо-гиперболического типа // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. Тем. обз. 2017. Т. 137. С. 26–60.

5. *Sabitov K. B., Sidorov S. N.* Initial-Boundary-Value Problem for Inhomogeneous Degenerate Equations of Mixed Parabolic-Hyperbolic Type // Journal of Mathematical Sciences. 2019. V. 236. Issue 6. P. 603–640.

6. *Сабитов К. Б., Сидоров С. Н.* Обратная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием // Известия Вузов. Математика. 2015. № 1. С. 46–59.

7. *Сидоров С. Н.* Обратные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с вырождающейся параболической частью // Сиб. электрон. матем. изв. 2019. Т. 16. С. 144–157.

8. *Сидоров С. Н.* Обратные задачи для вырождающегося смешанного параболо-гиперболического уравнения по нахождению сомножителей правых частей, зависящих от времени // Уфимский матем. журнал. 2019. Т. 11. № 1. С. 72–86.

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНОЙ ПО КАПУТО В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

©2020 *М. Н. Силаева, Алкади Хамса Мохамад*
(Воронеж; *marinanebolsina@yandex.ru*)

В [6] для уравнения

$$\frac{\partial^\alpha u(t,x)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, 0 < \alpha < 1, t > 0, x \in (-\infty, \infty),$$

где

$$\frac{\partial^\alpha u(t,x)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \frac{\partial u(s,x)}{\partial s} ds-$$

производная в смысле Капуто по переменной t, рассматривается задача Коши с условиями

$$u(0,x,\alpha) = g(x),$$

$$u(t, \pm\infty, \alpha) = 0,$$

и приводится решение этой задачи в виде

$$u(t, x, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, \xi, \alpha) g(x - \xi) d\xi$$

с указанием функции Грина $G(t, \xi, \alpha)$.

Однако, корректная разрешимость этой задачи, с точки зрения устойчивости решения к погрешностям, в [6] не обсуждается.

Решению этой проблемы для общего случая дифференциальных уравнений в банаховом пространстве посвящена настоящая заметка.

В банаховом пространстве E с нормой $\|\cdot\|_E = \|\cdot\|$ рассматривается уравнение

$$\frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha} = Au(t), t \geq 0, \tag{1}$$

где A-линейный замкнутый оператор с областью определения $D(A) \subset E$ и областью значений $R(A)$,

$$\frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} u'(s) ds- \tag{2}$$

производная по Капуто порядка $0 < \alpha < 1$.

Определение 1. *Решением уравнения (1) называется вектор-функция $u(t)$ со значениями в $D(A)$, для которой определена производная (2) и, удовлетворяющая уравнению (1).*

Определение 2. *Решение уравнения (1) удовлетворяющее условию*

$$u(0) = u_0 \in D(A) \tag{3}$$

будем называть решением задачи Коши (1)-(2).

Определение 3. *Задачу (1)-(2) будем называть равномерно корректной, если для её решений выполняется оценка*

$$\|u(t)\|_E \leq M \|u_0\|_E, \tag{4}$$

где константа M от t и u_0 не зависит.

Теорема *Если оператор A является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы линейных преобразований $U(t, A)$, то задача Коши (1)–(3) равномерно корректна и её решение имеет вид*

$$u(t) = \int_0^{\infty} I_t^{(1-\alpha)}(h_\alpha(t, \xi)) U(\xi, A) u_0 d\xi,$$

где $I^{(1-\alpha)} f(t)$ — дробный интеграл Римана–Лиувилля, $h_\alpha(t, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{tp - \xi p^\alpha} dp$ — функция Иосиды и справедлива оценка (4).

Литература

1. *Иосида К.* Функциональный анализ : [учебник] / К. Иосида ; пер. с англ. В.М. Волосова.— М. : Мир, 1967 .— 624 с.

2. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве/С.Г. Крейн.– М.: Наука, 1967.–464 с.

3. *Костин В.А.* Элементарные полугруппы преобразований и их производящие уравнения / В.А. Костин, А.В. Костин, Д.В. Костин // Доклады Академии Наук.— Москва, 2014 .— Т. 455, № 2. - С. 142-146

4. *Костин А.В.* О корректной разрешимости задач без начальных условий для некоторых сингулярных уравнений / А. В. Костин, Д. В. Костин, М. Н. Небольсина // Вестник Воронежского государственного университета. Серия Физика. Математика.— Воронеж, 2018 .— № 1. - С. 87-93

5. *Самко С.Г.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев.— Минск : Наука и техника, 1987 .— 687 с.

6. *Майнарди Ф.* Временное уравнение дробной диффузионно-волновой функции /Майнарди Ф. // Радиофизика и квантовая электроника. Выпуск 38, №1-2, 1995.-С.20-36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ГИБРИДНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ (ЛГФДСП)[1]

©2020 *П. М. Симонов*
(Пермь; *simpm@mail.ru*)

Постановка задачи: одно уравнение — линейное разностное, определённое в дискретном множестве точек (линейное разностное уравнение с последействием (ЛРУП)), а другое — линейное функционально-дифференциальное уравнение с последействием (ЛФДУП) на полуоси.

Исследование продолжает работы [1–7].

Обозначим через $y = \{y(-1), y(0), y(1), ..., y(N), \dots\}$ бесконечную матрицу со столбцами $y(-1), y(0), y(1), ..., y(N), \dots$ размерами n, а через $g = \{g(0), g(1), ..., g(N), \dots\}$ бесконечную матрицу со столбцами $g(0), g(1), ..., g(N), \dots$ размерами n.

Каждой бесконечной матрице $y = \{y(-1), y(0), y(1), ..., y(N), \dots\}$ можно сопоставить вектор-функцию $y(t) = y(-1)\chi_{[-1,0)}(t)+y(0)\chi_{[0,1)}(t)+y(1)\chi_{[1,2)}(t)+...+y(N)\chi_{[N,N+1)}(t)+\dots$

Аналогично, каждой бесконечной матрице $g = \{g(0), g(1), ..., g(N), \dots\}$ можно сопоставить вектор-функцию

$$g(t) = g(0)\chi_{[0,1)}(t) + g(1)\chi_{[1,2)}(t) + ... + g(N)\chi_{[N,N+1)}(t) + \dots$$

Символом $y(t) = y[t]$ обозначим вектор-функцию $y(t) = y([t])$, $t \in [-1, \infty)$. Символом $g[t]$ обозначим вектор-функцию $g(t) = g([t])$, $t \in [0, \infty)$.

Множество таких вектор-функций $y[\cdot]$ обозначим символом ℓ_0. Множество таких вектор-функций $g[\cdot]$ обозначим символом ℓ. Обозначим $(\Delta y)(t) = y(t)-y(t-1) = y[t]-y[t-1]$ при $t \geq 1$, $(\Delta y)(t) = y(t) = y[t] = y(0)$ при $t \in [0, 1)$

Запишем ЛГФДСП в виде

$$\mathcal{L}_{11}x + \mathcal{L}_{12}y = \dot{x} - F_{11}x - F_{12}y = f,$$

$$\mathcal{L}_{21}x + \mathcal{L}_{22}y = \Delta y - F_{21}x - F_{22}y = g. \qquad (1)$$

Здесь и ниже R^n — пространство векторов $\alpha = \{\alpha^1, ..., \alpha^n\}$ с действительными компонентами и с нормой $\|\alpha\|_{R^n}$. Пусть пространство L локально суммируемых $f : [0, \infty) \to R^n$ с полунормами $\|f\|_{L[0,T]} = \int_0^T \|f(t)\|_{R^n}\,dt$ для всех $T > 0$. Пространство D локально абсолютно непрерывных функций $x : [0, \infty) \to R^n$ с полунормами $\|x\|_{D[0,T]} = \|\dot{x}\|_{L[0,T]} + \|x(0)\|_{R^n}$ для всех $T > 0$. L_∞ — банахово пространство (классов эквивалентности) измеримых и ограниченных в существенном функций $z : [0, \infty) \to R^n$ с нормой $\|z\|_{L_\infty} = \operatorname{vrai}\sup\limits_{t\geq 0} \|z(t)\|_{R^n}$.

Пусть пространство ℓ вектор-функций

$$g(t) = g(0)\chi_{[0,1)}(t) + g(1)\chi_{[1,2)}(t) + ... + g(N)\chi_{[N,N+1)}(t) + \dots$$

с полунормами $\|g\|_{\ell_T} = \sum\limits_{i=0}^{T} \|g_i\|_{R^n}$ для всех $T \geq 0$.

Пространство ℓ_0 вектор-функций $y(t) = y(-1)\chi_{[-1,0)}(t) + y(0)\chi_{[0,1)}(t) + y(1)\chi_{[1,2)}(t)+ ... + y(N)\chi_{[N,N+1)}(t) + \dots$ с полунормами $\|y\|_{\ell_{0T}} = \sum\limits_{i=-1}^{T} \|y_i\|_{R^n}$ для всех $T \geq -1$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00332 А).

Операторы $\mathcal{L}_{11}, F_{11} : D \to L$, $\mathcal{L}_{12}, F_{12} : \ell_0 \to L$, $\mathcal{L}_{21}, F_{21} : D \to \ell$, $\mathcal{L}_{22}, F_{22} : \ell_0 \to \ell$ предполагаются линейными непрерывными и вольтерровыми.

Пусть модельное уравнений $\mathcal{L}_{11}x = z$ и банахово пространство B с элементами из пространства L ($B \subset L$ и это вложение непрерывно) выбраны так, что решения этого решения этого уравнения обладают интересующими нас асимптотическими свойствами. Пространство $D(\mathcal{L}_{11}, B)$, порождаемое модельным уравнением, будет состоять из решений вида

$$x(t) = (\mathcal{C}_{11}z)(t) + (\mathcal{X}_{11}\alpha)(t) = \int\limits_0^t C_{11}(t,s)z(s)\,ds + X_{11}(t)\alpha$$

$(\alpha \in R^n, \quad z \in B)$.

Норму в пространстве $D(\mathcal{L}_{11}, B)$ можно ввести равенством $\|x\|_{D(\mathcal{L}_{11},B)} = \|\mathcal{L}_{11}x\|_B + \|x(0)\|_{R^n}$.

Предположим, что оператор $\mathcal{C}_{11}$ непрерывно действует из пространства B в пространство B, и оператор $\mathcal{X}_{11}$ действует из пространства R^n в пространство B. Это условие эквивалентно тому, что пространство $D(\mathcal{L}_{11}, B)$ линейно изоморфно пространству С.Л.Соболева $W_B^{(1)}[0,\infty)$ с обычной нормой $\|x\|_{W_B^{(1)}[0,\infty)} = \|\dot{x}\|_B + \|x\|_B$.

Дальше будем это пространство обозначать как W_B. При этом, $W_B \subset D$, и это вложение непрерывно.

Уравнение $\mathcal{L}_{11}x = z$ с оператором $\mathcal{L}_{11} : W_B \to B$ W_B-устойчиво тогда и только тогда, если оно сильно B-устойчиво. Уравнение $\mathcal{L}_{11}x = z$ сильно B-устойчиво, если для любого $z \in B$ каждое решение x этого уравнения обладает свойством: $x \in B$ и $\dot{x} \in B$.

1.Сведение к ЛФДУП

Предположим, что общее решение уравнения $\mathcal{L}_{22}y = g$ для $g \in \ell$ принадлежит пространству ℓ_0 и представляется формулой Коши: $y[t] = Y_{22}[t]y(-1) + \sum\limits_{s=0}^{t} C_{22}[t,s]\,g[s]$.

Поставим задачу: пусть $g \in M \subset \ell$, где M — банахово пространство, и тогда будет $y \in M_0 \subset \ell_0$, где M_0 — банахово пространство, причём M_0 изоморфно M.

Обозначим $(\mathcal{C}_{22}g)[t] = \sum\limits_{s=0}^{t} C_{22}[t,s]\,g[s]$, $(\mathcal{Y}_{22}\ \ y(-1))[t] = Y_{22}[t]y(-1)$.

Тогда каждое решение y второго уравнение в (1) имеет вид: $y = -\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21}x + Y_{22}y(-1) + \mathcal{C}_{22}g$.

Подставим в первое уравнения в (1):

$$\mathcal{L}_{11}x + \mathcal{L}_{12}y = \mathcal{L}_{11}x - \mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21}x + \mathcal{L}_{12}Y_{22}y(-1) + \mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}g = f,$$

$$\mathcal{L}_{11}x - \mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21}x = f_1 = f - \mathcal{L}_{12}Y_{22}y(-1) - \mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}g.$$

Введём обозначение $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_{11} - \mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21}$, тогда первое уравнения в (1) примет вид $\mathcal{L}_1 x = f_1$.

Предположим, что вольтерров оператор $\mathcal{L}_1 : W_B^0 \to B$ вольтеррово обратим, где $W_B^0 = \{x \in W_B : x(0) = 0\}$, то есть, когда задача для уравнения $\mathcal{L}_1 x = f_1$ обладает свойством: при любом $f_1 \in B$ её решения $x \in W_B$. Таким образом, мы решили задачу, когда для уравнения (1) при любом $\{f,g\} \in B \times M$ её решения $\{x,y\} \in W_B \times M_0$.

2.Сведение к ЛРУП

Для уравнения (1) будем пользоваться такими обозначениями, которые приняты в пункте 1.

Предположим, что общее решение уравнения $\mathcal{L}_{11}x = f$ для $f \in B$ (B непрерывно вложено в L) принадлежит пространству W_B и представляется формулой Коши $x = X_{11}x(0) + \mathcal{C}_{11}f$.

Из первого уравнения в (1) найдём $x : x = -\mathcal{C}_{11}\mathcal{L}_{12}y + X_{11}x(0) + \mathcal{C}_{11}f$.

Подставим во второе уравнения в (1):

$$\mathcal{L}_{21}x+\mathcal{L}_{22}y = -\mathcal{L}_{21}\mathcal{C}_{11}\mathcal{L}_{12}y+\mathcal{L}_{21}X_{11}x(0)+\mathcal{L}_{21}\mathcal{C}_{11}f+\mathcal{L}_{22}y = g,$$

$$-\mathcal{L}_{21}\mathcal{C}_{11}\mathcal{L}_{12}y + \mathcal{L}_{22}y = g_1 = g - \mathcal{L}_{21}X_{11}x(0) - \mathcal{L}_{21}\mathcal{C}_{11}f.$$

Введём обозначение $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{22}-\mathcal{L}_{21}\mathcal{C}_{11}\mathcal{L}_{12}$, тогда второе уравнения в (1) примем вид $\mathcal{L}_2 y = g_1$.

Предположим, что вольтерров оператор $\mathcal{L}_2 : M_0 \to M$ вольтеррово обратим, то есть, когда задача для уравнения $\mathcal{L}_2 y = g_1$ при любом $g_1 \in M$ её решения $y \in M_0$. Таким образом, мы решили задачу, когда для уравнения (1) при любом $\{f, g\} \in B \times M$ её решения $\{x, y\} \in W_B \times M_0$.

3.Достаточное условие устойчивости

Рассмотрим **пример**. Пусть линейные оператора определены равенствами:

$\mathcal{L}_{11}\{x_1, x_2\}_1 = \dot{x}_1 + a_{11}x_{1\tau_{11}} + a_{12}x_{2\tau_{12}}$,
$\mathcal{L}_{12}\{y_1, y_2\}_1 = b_{11}y_{1\delta_{11}} + b_{12}y_{2\delta_{12}}$,
$\mathcal{L}_{11}\{x_1, x_2\}_2 = \dot{x}_2 + a_{21}x_{1\tau_{21}} + a_{22}x_{2\tau_{22}}$,
$\mathcal{L}_{12}\{y_1, y_2\}_2 = b_{21}y_{1\delta_{21}} + b_{22}y_{2\delta_{22}}$,
$\mathcal{L}_{21}\{x_1, x_2\}_1 = c_{11}x_{1\rho_{11}} + c_{12}x_{2\rho_{12}}$,
$\mathcal{L}_{22}\{y_1, y_2\}_1 = x_1 - d_{11}x_{1\theta_{11}} - d_{12}x_{2\theta_{12}}$,
$\mathcal{L}_{21}\{x_1, x_2\}_2 = c_{21}x_{1\rho_{21}} + c_{22}x_{2\rho_{22}}$,
$\mathcal{L}_{22}\{y_1, y_2\}_2 = x_2 - d_{21}x_{1\theta_{21}} - d_{22}x_{2\theta_{22}}$,

где $x_{1\tau_{11}}(t) = x_1(t - \tau_{11})$, если $t \geq 0$, $x_{1\tau_{11}}(t) = 0$, если $t < 0$. Аналогичные определения верны для остальных суперпозиций.

Обозначим:

$$\ell_{\infty 0} = \{y \in \ell_0 :\ \|y\|_{\ell_{\infty 0}} = \sup_{k=-1,0,1,\cdots} |y(k)| < +\infty\},$$

$$\ell_{\infty} = \{g \in \ell :\ \|g\|_{\ell_{\infty}} = \sup_{k=0,1,\cdots} |g(k)| < +\infty\}.$$

Будем изучать вопрос, когда для нашего уравнения при любом $\{f, g\} \in L_\infty \times \ell_\infty$ его решения $\{x, y\} \in W_B \times \ell_{0\infty}$. Для этого надо найти вольтерровую обратимость оператора $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_{11}-\mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21} : W^0_{L_\infty} \to L_\infty$. Или, для этого надо найти вольтерровую обратимость оператора $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{22} - \mathcal{L}_{21}\mathcal{C}_{11}\mathcal{L}_{12} : \ell^0_{0\infty} \to \ell_\infty$.

Для этого оценить норму $\|\mathcal{C}_{11}\mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21}\|_{W_{L_\infty}\to W_{L_\infty}}$ или норму $\|\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21}\mathcal{C}_{11}\mathcal{L}_{12}\|_{\ell_{0\infty}\to\ell_{0\infty}}$.

Оценим нормы: $\|\mathcal{L}_{21}\|_{W_{L_\infty}\to\ell_\infty}$, $\|\mathcal{C}_{22}\|_{\ell_\infty\to\ell_{0\infty}}$, $\|\mathcal{L}_{12}\|_{\ell_{0\infty}\to L_\infty}$, $\|\mathcal{C}_{11}\|_{L_\infty\to W_{L_\infty}}$.

Справедливы оценки норм:

$$\|\mathcal{L}_{21}\|_{W_{L_\infty}\to\ell_\infty} \leq \left\| \begin{matrix} |c_{11}| & |c_{12}| \\ |c_{21}| & |c_{22}| \end{matrix} \right\|_{R^n},$$

$$\|\mathcal{C}_{22}\|_{\ell_\infty\to\ell_{0\infty}} \leq \left\| \begin{matrix} \frac{1}{1-d_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-d_{11}} \end{matrix} \right\|_{R^n},$$

$$\|\mathcal{L}_{12}\|_{\ell_{0\infty}\to L_\infty} \leq \left\| \begin{matrix} |b_{11}| & |b_{12}| \\ |b_{21}| & |b_{22}| \end{matrix} \right\|_{R^n},$$

$$\|\mathcal{C}_{11}\|_{L_\infty\to W_{L_\infty}} \leq \left\| \begin{matrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{matrix} \right\|_{R^n}.$$

Здесь, для простоты взяли $d_{12} = 0$ и $d_{21} = 0$, $|d_{11}| < 1$ и $|d_{22}| < 1$. Обозначили $\sigma_{ij} = \sup\limits_{t\geq 0} \int\limits_0^t |C_{11ij}(t, s)|\, ds < \infty$, $i, j = 1, 2$.

Для нашего уравнения при любом $\{f, g\} \in L_\infty \times \ell_\infty$ его решения $\{x, y\} \in W_B \times \ell_{0\infty}$, если выполнено неравенство

$$\left\| \begin{matrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{matrix} \right\|_{R^n} \times \left\| \begin{matrix} |b_{11}| & |b_{12}| \\ |b_{21}| & |b_{22}| \end{matrix} \right\|_{R^n} \times$$

$$\left\| \begin{matrix} \frac{1}{1-d_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-d_{11}} \end{matrix} \right\|_{R^n} \times \left\| \begin{matrix} |c_{11}| & |c_{12}| \\ |c_{21}| & |c_{22}| \end{matrix} \right\|_{R^n} < 1.$$

Литература

1. *Ларионов А.С., Симонов П.М.* Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП) // Вестник РАЕН. Темат. номер "Дифференциальные уравнения". 2013. Т. 13, № 4. С. 34–37.

2. *Симонов П.М.* Устойчивость линейных гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ЛГФДСП) // Вестник Тамбовского ун-та. Серия: Естест. и техн. науки. 2013. Т. 18, вып. 5. С. 2670–2672.

3. *Ларионов А.С., Симонов П.М.* Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП). II. // Вестник РАЕН. Темат. номер "Дифференциальные уравнения". 2014. Т. 14, № 5. С. 38–45.

4. *Ларионов А.С., Симонов П.М.* Устойчивость линейных гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием // Динамика систем и процессы управления: Труды международной конференции, посв. 90-летию со дня рождения акад. Н.Н. Красовского. Екатеринбург, Россия, 15–20 сентября 2014 г. Изд-во УМЦ УПИ, 2015. С. 243–250.

5. *Симонов П.М.* К вопросу об устойчивости линейных гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ЛГФДСП) // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естест. и техн. науки. 2015. Т. 20, вып. 5. С. 1428–1436.

6. *Симонов П.М.* Об устойчивости линейных гибридных функционально-дифференциальных систем // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. Ижевск: Изд-во УдГУ, 2015. Вып. 2 (46). С. 184–192.

7. *Андрианов Д.Л., Арбузов В.О., Ивлиев С.В., Максимов В.П., Симонов П.М.* Динамические модели экономики: теория, приложения, программная реализация // Вестник Пермского университета. Серия: "Экономика" = Perm University Herald. Economy. 2015. № 4 (27). С. 8–32.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ БИЛЛИАРДОВ, ОГРАНИЧЕННЫХ ДУГАМИ СОФОКУСНЫХ КВАДРИК НА ПЛОСКОСТИ МИНКОВСКОГО, В ПОЛЕ С ГУКОВСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ[1]

©2020 *А. И. Скворцов*
(Москва; *anton.skvortsov.1996@yandex.ru*)

Математический биллиард - это движение материальной точки на плоскости в области, ограниченной кусочно-гладкой кривой. Многочисленные результаты в области исследования теории биллиардов были получены в работах В.В. Ведюшкиной и А.Т. Фоменко [2, 3, 4].

В настоящей работе рассматриваются биллиарды, ограниченные дугами софокусных квадрик на плоскости Минковского, в поле с гуковским потенциалом. В частности, в ходе исследований было получено доказательство интегрируемости по Лиувиллю систем такого рода. Также проводится исследование топологии возникающих в данной задаче слоений Лиувилля [1].

В данном случае семейство софокусных квадрик задаётся следующим уравнением:

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} = 1,$$

где $a > b > 0$, λ — параметр квадрики. Отметим также, что при $-b < \lambda < a$ квадрика является эллипсом, при $\lambda < -b$

[1]Исследование выполнено в рамках Программы Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-2554.2020.1).

квадрика является гиперболой с действительной осью Ox, а при $\lambda > a$ квадрика является гиперболой с действительной осью Oy. Далее в систему добавляется гуковский потенциал с коэффициентом k, действующий на материальную точку.

Рассмотрим фазовое пространство $M^4 = \{x, y, \dot{x}, \dot{y}\}$, где (x, y) — декартовы координаты материальной точки в биллиарде, $(\dot{x}, \dot{y})$ — соответствующие координаты вектора скорости. При отражении точки от границы биллиарда вектора скорости до и после соответствующего отражения отождествляются по стандартному закону. Далее введём на многообразии M^4 симплектическую структуру ω, заданную следующей матрицей $\Omega = (\omega_{ij})$:

$$(\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Также определим стандартную скобку Пуассона.

Теорема 1. *Биллиард, ограниченный дугами софокусных квадрик на плоскости Минковского, в поле с гуковским потенциалом является интегрируемым по Лиувиллю. Интегралами являются следующие функции:*

$$H = \frac{k(x^2 - y^2)}{2} + \frac{\dot{x}^2 - \dot{y}^2}{2},$$

$$G = \frac{\dot{x}^2}{a} + \frac{\dot{y}^2}{b} - \frac{(x\dot{y} - \dot{x}y)^2}{ab} - k(1 - \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b}).$$

При этом симпликтическая структура задаётся вышеуказанной матрицей (ω_{ij}).

Для дальнейшего анализа целесообразно перейти к эллиптическим координатам. В таких координатах интеграл

H запишется в следующем виде:

$$H = \frac{k}{2}(a - b) - \frac{k}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) + \\ + \frac{2(a - \lambda_1)(b + \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}\mu_1^2 + \frac{2(a - \lambda_2)(b + \lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1}\mu_2^2,$$

где μ_1, μ_2 — сопряжённые импульсы.

Также благодаря методу, описанному В.В. Козловым в [5], был найден дополняющий его интеграл F:

$$F = 2(a - \lambda_1)(b + \lambda_1)\mu_1^2 - \frac{k\lambda_1^2}{2} - H\lambda_1.$$

Теорема 2. *Дополняющий интеграл F также может иметь следующий вид:*

$$F = 2(a - \lambda_2)(b + \lambda_2)\mu_2^2 - \frac{k\lambda_2^2}{2} - H\lambda_2.$$

Далее проводится анализ образа отображения момента.

В ходе данной работы также были построены бифуркационные диаграммы, были получены соответствующие молекулы.

Литература

1. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том I. — Ижевск: РХД, 1999.

2. *Фокичева В.В., Фоменко А.Т.* «Интегрируемые биллиарды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твёрдого тела». Доклады РАН, серия: математика, **465**, №2, 2015, 150-153.

3. *Fokicheva V.V., Fomenko A.T.* «Billiard Systems as the Models for the Rigid Body Dynamics». *Studies in Systems,*

Decision and Control, Advances in Dynamical Systems and Control, **69**, 13–32.

4. *Ведюшкина (Фокичева) В.В., Фоменко А.Т.* «Интегрируемые топологические биллиарды и эквивалентные динамические системы». Известия РАН, серия: математика, **81**, №4, 2017, 20-67.

5. *Козлов В.В.* Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде. //Прикладная математика и механика, том 59, вып. 1 1995.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМОГО УРАВНЕНИЯ ПФАФФА

©2020 *Г. К. Соколова*
(Иркутск; *98gal@mail.ru*)

Заметка посвящена изучению проблемы существования периодических решений уравнения Пфаффа и построению множества периодов этого решения. Рассмотрим уравнение

$$f_1(\bar{r})dx_1 + f_2(\bar{r})dx_2 + \ldots + f_n(\bar{r})dx_n = 0, \qquad (1)$$

где функции $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, непрерывны и имеют непрерывные частные производные по совокупности переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Известно, что, если уравнение (1) удовлетворяет условиям *полной интегрируемости*

$$\partial_{x_j} f_i(\bar{r}) = \partial_{x_i} f_j(\bar{r}), \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (2)$$

то оно является уравнением в полных дифференциалах, и его общий интеграл имеет вид

$$u(\bar{r}) = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^{x_i} f_i(0, 0, \ldots, t, x_{i+1}, \ldots, x_n)dt + C. \qquad (3)$$

Определение. *Функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ будем называть периодической с периодом $\bar{T}$, если существует ненулевой*

вектор $\bar{T} \in \mathbb{R}^n$ такой, что для всех $\bar{r} \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство $f(\bar{r}+\bar{T}) = f(\bar{r})$. Период $\bar{T}_0$, наименьшего модуля, сонаправленный с вектором $\bar{T}$, назовём основным периодом функции f в данном направлении $\bar{\mathcal{T}}$, где $\bar{T} = |\bar{T}| \cdot \bar{\mathcal{T}}$.

В статье [1] показано, что неособенной линейной заменой аргумента $\bar{r} \in \mathbb{R}^n$ периодическую функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ с решёткой периодов, порождённой векторами $\bar{T}_1, \bar{T}_2, \ldots, \bar{T}_m$, можно преобразовать к периодической функции по любым m переменным с основными периодами $|\bar{T}_1|, |\bar{T}_2|, \ldots, |\bar{T}_m|$. Т. е. всякую периодическую функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ можно считать периодической по первым m переменным.

Предположим, что общим интегралом (3) уравнения (1) является периодическая по всем переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$ функция $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. В этом случае, с учётом условия (2), функции $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ также являются периодическими, а множествами P_{f_i} их периодов— решётки, порождённые векторами $\bar{T}_{i1}, \bar{T}_{i2}, \ldots, \bar{T}_{in}$ и имеющие непустое пересечение. Здесь и далее $\bar{T}_{ij} = T_{ij}\bar{\mathrm{e}}_j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, система векторов $\{\bar{\mathrm{e}}_j\}_{j=1}^n$ задаёт классический базис Гамеля в $\mathbb{R}^n$.

Ранее проблема существования периодических решений уравнения (1) в условиях (2) его полной интегрируемости изучалась в статье [2], где доказан критерий периодичности общего интеграла (3) с периодом $\bar{T} = T_1\bar{\mathrm{e}}_1 + T_2\bar{\mathrm{e}}_2 + \ldots + T_n\bar{\mathrm{e}}_n$. В данной работе сформулирован критерий периодичности общего интеграла по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и указано множество периодов. Приведём некоторые вспомогательные утверждения, доказанные в [3].

Теорема 1. *Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна по переменной x_i и T_i-периодическая по этой переменной, тогда справедливо равенство*

$$\int\limits_0^{x_i} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, \ldots, x_n)dt = S_{T_i}[f]x_i + \varepsilon_i(\bar{r}), \qquad (4)$$

где $S_{T_i}[f] = \frac{1}{T_i}\int\limits_0^{T_i} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, \ldots, x_n)dt$ *означает среднее значение функции* f *по переменной* x_i *на отрезке* $[0, T_i]$, *функция* $\varepsilon_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — T_i*-периодическая по переменной* x_i.

Заметим, что если функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна по переменной x_i, то $\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет непрерывную частную производную по этой переменной и удовлетворяет равенству $\partial_{x_i}\varepsilon = f(\bar{r}) - S_{T_i}[f]$, с условием $\varepsilon(\bar{r})|_{x_i=0} = 0$. Однозначная разрешимость данной задачи гарантирует единственность представления (4). Функция $\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ наследует основной период функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ по переменной x_i. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть функции* $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *непрерывны и имеют непрерывные частные производные* $\partial_{x_j} f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *первого порядка такие, что выполнено условие (2); пусть также функции* $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *являются периодическими с решётками периодов* P_{f_i}, *которые порождены векторами вида* $\bar{T}_{ij} = T_{ij}\bar{\mathrm{e}}_j$, *где* $i, j = 1, 2, \ldots, n$. *Тогда для того, чтобы общий интеграл (3) уравнения Пфаффа (1) был функцией, периодической по переменным* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathrm{P}_{f_1} \cap \mathrm{P}_{f_2} \cap \ldots \cap \mathrm{P}_{f_n} \neq \varnothing$, *и для всех* $i = 1, 2, \ldots, n$ *выполнялись равенства*

$$\int\limits_0^{T_i} f_i(0, \ldots, 0, t, x_{i+1}, \ldots, x_n)dt = 0.$$

При этом множеством периодов этой функции является $\mathrm{P}_u = \mathrm{P}_{f_1} \cap \mathrm{P}_{f_2} \cap \ldots \cap \mathrm{P}_{f_n}$.

Литература

1. *Orlov S. S., Sokolova G. K.* Periodic function of several real variables // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2018. Т. 25, № 1. С. 50–51.

2. *Тажимуратов И.* О периодических решениях одной системы уравнений в частных производных первого порядка. Математические заметки. 1981. Т. 30, № 3. С. 363–369.

3. *Соколова Г. К.* Периодические функции нескольких переменных: элементы теории и приложения // Сборник трудов XVI Междунар. конф. студентов, аспирантов и молодых учёных «Перспективы развития фундаментальных наук». В 7 томах. Том 3. Математика. Томск: Изд-во ТПУ, 2019. С. 28–30.

О БИФУРКАЦИЯХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ КАПИЛЛЯРНОСТИ

©2020 *Л. В. Стенюхин*
(Воронеж; *stenyuhin@mail.ru*)

Рассмотрим основной энергетический функционал задачи

$$E(u) = \int\limits_\Omega \sqrt{EG - F^2}\, dx + \frac{1}{\sigma}\int\limits_\Omega \Upsilon\rho u\, dx + \lambda\int\limits_\Omega u\, dx. \qquad (1)$$

Его первое слагаемое является функционалом площади. Пусть u_0 — экстремаль (1). Близкие к u_0 поверхности будем задавать в системе координат нормального расслоения к u_0. Это приведёт к одному скалярному уравнению для близкой поверхности:

$$\left(\frac{\delta S}{\delta u}(u_0 + \eta\bar{n}), \bar{n}\right) = 0,$$

или

$$\frac{\delta S}{\delta \eta}(\eta) = 0, \qquad (2)$$

где $\frac{\delta S}{\delta u}$ — функциональная производная функционала площади, $\bar{n}$ — нормаль к поверхности u_0. Из уравнения (2) определяется нормальная координата $\eta = \eta(x, y)$.

Теорема 1. *Функционал площади близких к u_0 поверхностей $S(\eta)$ и его оператор Эйлера $\frac{\delta S}{\delta \eta}(\eta)$ имеет следующую аналитическую структуру*

$$S(\eta) = \int\limits_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, dxdy, \qquad (3)$$

$$\frac{\delta S}{\delta u}(\eta) = E^3 (EG - F^2)^{-\frac{3}{2}} (A\eta_{xx} - 2B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + G). \qquad (4)$$

Здесь E, G, F — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности,

$$A = \sum_{p=1}^{6} a_{ijk}\eta_x^i \eta_x^j \eta^k + 1, \;\; B = \sum_{p=1}^{6} b_{ijk}\eta_x^i \eta_y^j \eta^k,$$

$$C = \sum_{p=1}^{6} c_{ijk}\eta_y^i \eta_y^j \eta^k + 1, \;\; G = \sum_{p=2}^{7} g_{ijk}\eta_x^i \eta_y^j \eta^k + g\eta,$$

где i, j, k — целые неотрицательные числа, $p = i + j + k$. Все коэффициенты $a_{ijk}, b_{ijk}, c_{ijk}, g_{ijk}, g$ являются аналитическими функциями и находятся по формулам, подобным следующей

$$g = (\bar{n}, \bar{n}_{xx} + \bar{n}_{yy}) + \frac{4}{E}\left[(\bar{n}, u_{xx})^2 + (\bar{n}, u_{yy})^2\right]. \qquad (5)$$

Линейная часть оператора $A\eta_{xx} - 2B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + G$ равна

$$\Delta\eta + g\eta, \qquad (6)$$

где Δ — лапласиан.

Линейная часть первой вариации равна

$$L\eta = E^3 (EG - F^2)^{-\frac{3}{2}} (\Delta\eta + g\eta) + (\frac{\Upsilon\rho}{\sigma} + \lambda)\eta,$$

где g определена равенством (5). Соотношение $\frac{\Upsilon\rho}{\sigma}$ определяет число Бонда, $B = \frac{\Upsilon\rho}{\sigma}$. Поэтому линеаризованная задача имеет вид

$$\begin{cases} \Delta\eta + (g + E^{-3}(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}(B + \lambda))\eta - 0, \\ \eta \Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Линейный оператор (7) действует из $W_2^2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ и самосопряжён в $\mathring{W}_2^2(\Omega)$ относительно скалярного произведения в $L_2(\Omega)$.

Пусть поверхность капли $u(x, y) = (u_1(x, y), u_2(x, y), u_3(x, y))$ задана в конформных координатах, $E = G, F = 0$. Тогда функция $u(x, y)$ удовлетворяет условиям $u_x^2 = u_y^2$, $u_x u_y = 0$. В этом случае функционал энергии имеет вид

$$E(u) = \int\limits_{\Omega} \frac{E + G}{2}\, dx + \int\limits_{\Omega} Bu\, dx + \lambda \int\limits_{\Omega} u\, dx. \qquad (8)$$

Первая вариация функционала равна

$$\frac{\delta E}{\delta u}(\eta) = \Delta\eta + (B + \lambda)\eta.$$

Получаем задачу

$$\begin{cases} \Delta\eta + (B + \lambda)\eta - 0, \\ \eta \Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \qquad (9)$$

Теорема 2. *Собственные значения оператора $\Delta + B + \lambda$ задачи (9) являются $\tilde{\lambda}_n = \lambda_n + B + \lambda$, где λ_n — собственные значения оператора Δ с нулевым граничным условием.*

Литература

1. *Стенюхин Л.В.* Бифуркационный анализ задачи капиллярности с круговой симметрией // Вестник

Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. Том 7, №3, 2014. С. 77 – 83.

ГЁЛЬДЕРОВСКАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ И НЕРАВЕНСТВО ХАРНАКА ДЛЯ МНОГОФАЗНОГО $p(x)$-ЛАПЛАСИАНА[1]

©2020 *М. Д. Сурначёв*
(125047, Москва, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН; *peitsche@yandex.ru*)

В единичном круге $D \subset \mathbb{R}^2$ с центром в начале координат рассмотрим уравнение

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = 0. \qquad (1)$$

Предполагается, что этот круг разделён лучами, выходящими из начала координат, на N упорядоченных против часовой стрелки угловых секторов $A_1, \ldots, A_N$, в каждом из которых показатель p принимает постоянное значение:

$$p(x) = p_k, \quad x \in A_k, \quad k = 1, \ldots, N, \qquad (2)$$

причём

$$1 < p_1 \le p_2 \le \ldots \le p_N < \infty. \qquad (3)$$

Целью данной работы является доказательство гёльдеровской непрерывности решений уравнения (1), которая устанавливается с помощью подходящего неравенства Харнака для неотрицательных решений данного уравнения.

Для определения решения уравнения (1) введём класс функций

$$W(D) = \{u \in W^{1,1}(D) \,:\, |\nabla u|^{p(x)} \in L^1(D)\},$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 19-01-00184-а.

где $W^{1,1}(D)$ — соболевское пространство функций, суммируемых в D вместе с обобщёнными производными первого порядка. Последовательность $u_j \in W(D)$ сходится в $W(D)$ к функции $u \in W(D)$, если $u_j \to u$ в $L^1(D)$ и

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_D |\nabla u - \nabla u_j|^{p(x)}\, dx = 0.$$

Известно [1], что для показателя, заданного соотношениями (2) и (3), гладкие функции плотны в $W(D)$ — для любой функции $u \in W(D)$ найдётся последовательность $u_j \in C^\infty(D) \cap W(D)$ такая, что $u_j \to u$ в $W(D)$.

Под решением уравнения (1) понимается функция $u \in W(D)$, для которой интегральное тождество

$$\int\limits_D |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi\, dx = 0 \qquad (4)$$

выполнено для любой пробной функции $\varphi \in C_0^\infty(D)$.

Для формулировки результата обозначим через B_R открытый круг радиуса R с центром в начале координат, а через A_0 — угловой сектор с вершиной в начале координат, с той же биссектрисой, что и угол A_N, и в два раза меньшего раствора. Ниже Q_R обозначает пересечение сектора A_0 с кольцом $B_R \setminus B_{R/2}$.

Установлен следующий результат.

Теорема 1. *Если показатель $p(x)$ определён соотношениями (2) и (3), то при $R < 1/4$ для неотрицательного решения уравнения (1) в D имеет место неравенство*

$$\sup_{Q_R} u \le C \inf_{B_R}(u + R),$$

где постоянная C зависит только от $p_1, p_2, \ldots, p_N$.

Из теоремы 1 вытекает гёльдеровская непрерывность решений рассматриваемого уравнения.

Теорема 2. *Если показатель $p(x)$ определён соотношениями (2) и (3), то решения уравнения (1) непрерывны по Гёльдеру в D.*

Отметим, что до настоящего времени исследовался в основном случай регулярного показателя $p(x)$, удовлетворяющего логарифмическому условию В.В. Жикова [2]. Рассматривался и случай двухфазного показателя (см. [4], [5], [6]), когда границей раздела двух фаз, в каждой из которых показатель регулярен, служит гиперплоскость.

Обратимся к ситуации классического примера В.В. Жикова [3], когда единичный с центром в начале координат разделён на четыре сектора A_1–A_4 пересечением с квадрантами. В первом и третьем квадрантах показатель p принимает постоянное значение меньше 2, а во втором и третьем квадрантах — больше 2. В обозначениях настоящей работы $N = 4$,

$$\begin{gathered} A_k = \{0 < r < 1,\ \pi(k-1)/2 < \varphi < \pi k/2\}, \\ p_3 = p_1 < 2, \quad p_4 = p_2 > 2. \end{gathered} \tag{5}$$

В этом случае множество гладких функций не является плотным в $W(D)$ и ниже $H(D)$ означает замыкание множества гладких функций в смысле сходимости в $W(D)$. При этом возникает два типа решений (см. [2,3]) — W-решения, принадлежащие пространству $W(D)$, для которых интегральное тождество (4) выполнено для всех пробных функций $\varphi \in W(D)$ с компактным носителем в D, и H-решения, принадлежащие пространству $H(D)$, для которых интегральное тождество (4) выполнено для всех $\varphi \in C_0^\infty(D)$. Известно [2,3], что для показателя p, определённого (5) все W-решения, не являющиеся H-решениями, разрывны в начале координат.

Теорема 3. *Для показателя, определённого (5), все H-решения уравнения (1) непрерывны по Гёльдеру в D.*

Литература

1. *Fan X., Wang S., Zhao D.* Density of $C^\infty(\Omega)$ in $W^{1,p(x)}(\Omega)$ with discontinuous exponent $p(x)$ // Math. Nachr. 2006. V. 279. № 1–2. P. 142–149.
2. *Zhikov V.V.* On Lavrentiev's Phenomenon // Russian J. Math. Phys. 1994. V. 3. № 2. P. 249–269.
3. *Жиков В.В.* Усреднение нелинейных функционалов вариационного исчисления и теории упругости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50. № 4, С. 675–711.
4. *Acerbi E., Fusco N.* A transmission problem in the calculus of variations // Calc. Var. Partial Differ. Equ. 1994. V. 2. № 1. P. 1–16.
5. *Алхутов Ю.А.* О гёльдеровой непрерывности $p(x)$-гармонических функций // Матем. сб. 2005. Т. 196. № 2. С. 3–28.
6. *Алхутов Ю.А., Сурначёв М.Д.* О неравенстве Харнака для $p(x)$-лапласиана с двухфазным показателем $p(x)$ // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 2019. Вып. 32. С. 8–56.

О ЛИНЕАРИЗАТОРЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПУЧКОВ

©2020 *Л. И. Сухочева*
(Воронеж; *l.suhocheva@yandex.ru*)

Объектом нашего рассмотрения являются квадратичные операторные пучки:

$$L = \lambda^2 I + \lambda B + C. \tag{1}$$

Один из подходов изучения спектральных свойств операторных пучков состоит в том, чтобы поставить пучку L

в соответствие оператор X, такой что существует взаимно-однозначное соответствие между спектром пучка L и спектром оператора X и по жордановым цепочкам оператора X можно построить жордановы цепочки пучка L и наоборот. В этом случае говорят, что оператор X является линеаризатором пучка L.

М.Г. Крейн и Г. Лангер были одними из первых, кто предложил изучать спектральные свойства квадратичных операторных пучков вида (1), где B — ограниченный самосопряжённый оператор, C — положительный компактный оператор в гильбертовом пространстве H, используя ассоциированный оператор $X = \left(\begin{smallmatrix} 0 & C^{1/2} \\ -C^{1/2} & -B \end{smallmatrix}\right)$.

Пусть пучок (1) является гиперболическим, т.е. $(Bf, f)^2 - 4(If, f)(Cf, f) > 0$ (для всех $f \neq 0$). Тогда существует $\alpha > 0$, такое что оператор $X + \alpha I$ является равномерно положительным в пространстве Крейна $\tilde{H} = H_+ \oplus H_-$, $H_+ = \left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $H_- = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ y \end{smallmatrix}\right)$, $[.,.] = (J.,.)$, $J = \left(\begin{smallmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{smallmatrix}\right)$. Обозначим $X + I = A$.

Теорема. *Пусть A — произвольный равномерно положительный оператор в пространстве Крейна $\tilde{H} = H_+ \oplus H_-$, тогда существует $\alpha > 0$, такое что оператор $A - \alpha I$ будет подобен линеаризатору некоторого гиперболического пучка тогда и только тогда, когда $\dim H_+ = \dim H_-$. В этом случае $\alpha > \max\{\lambda | \lambda \in \sigma(A)\}$.*

КЛАССИФИКАЦИЯ ЧАСТИЧНО СИММЕТРИЧНЫХ АТОМОВ[1]

©2020 *В. А. Трифонова*
(Москва; *trifonovaviktoriya2012@yandex.ru*)

Понятие атома для целей гамильтоновой и симплектической геометрии и топологии было введено А.Т. Фоменко и использовалось для лиувиллевой классификации интегрируемых гамильтоновых систем.

Симметрии атомов отражают дискретные симметрии соответствующих динамических систем, так что для анализа важной является задача описания классов атомов, обладающих заданной группой симметрии. Ранее был получен ряд классификационных результатов, в которых входит описание максимально симметричных атомов, имеющих максимально возможный набор симметрий. Задача классификации максимально симметричных атомов является довольно сложной и может быть решена только для отдельных семейств атомов (атомы малой сложности, атомы малого рода), либо атомов, обладающих некоторым специальным свойством.

В настоящей работе рассматриваются высотные атомы с группой симметрий, транзитивной на кольцах одного цвета (белого). Для таких атомов удалось получить полное описание: предъявлено 22 бесконечные серии.

Пусть M^2 — гладкое компактное двумерное многообразие, $f : M^2 \to \mathbb{R}$ — функция Морса на M^2 и $\{x \in M^2 \colon f(x) = k\}$, $k \in \mathbb{R}$, - её особый уровень. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что $f^{-1}([k - \varepsilon, k + \varepsilon])$ не содержит особых точек, кроме лежащих на особом уровне $\{f = k\}$.

[1]Исследование выполнено в рамках Программы Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-2554.2020.1).

Определение. *Атомом* называется пара

$$(f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon]), f^{-1}(k))$$

с указанием вложения графа $f^{-1}(k)$ в поверхность $f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon])$, где граф $f^{-1}(k)$ предполагается конечным и связным. Если на поверхности $f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon])$ фиксирована ориентация, то соответствующий атом называется *ориентированным.* Граф $f^{-1}(k)$ называется остовом атома. Два атома (соответственно ориентированных атома) считаются *изоморфными*, если существует гомеоморфизм пар, который переводит поверхность в поверхность (сохраняя ориентацию, если поверхность ориентирована), остов в остов, а функцию переводит в функцию. Будем говорить, что атом $(f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon]), f^{-1}(k))$ *порождён* функцией f.

Определение. Назовём атом, порождённый функцией f, *высотным*, если существует такое вложение $g\colon f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon]) \to \mathbb{R}^3$, что $f(p) = z(g(p))$ для каждой точки $p \in f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon])$, где z — стандартная координата в пространстве $\mathbb{R}^3$, т.е. z — функция высоты на $g(f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon]))$.

Определение. Эквивалентным образом атом можно задать как «оснащённую пару» $(P^2, K)^{\#}$, где P^2 — компактная поверхность с краем, K — непустой конечный связный граф, вложенный в P^2 и имеющий вершины степени 4, причём множество $P^2 \setminus K$ является несвязным объединением колец $S^1 \times (0,1]$, $S^1 \times \{1\} \subset \partial P^2$, и множество колец разбито на два подмножества (белые и чёрные кольца) таким образом, что к каждому ребру графа K примыкают ровно одно белое кольцо и ровно одно чёрное кольцо. Указанное разбиение колец на белые и чёрные называется *оснащением* пары (P^2, K), и оснащённая пара обозначается через $(P^2, K)^{\#}$. Две оснащённые пары считаются *изоморфными*, если существует гомеоморфизм пар, сохраняющий ориентацию поверхностей и раскраску колец.

Далее под атомом будем понимать оснащённую пару $(P^2, K)^{\#}$ с фиксированной ориентацией на поверхности P^2.

Атом может быть определён также как f-граф, что в свою очередь даёт нам возможность работать с атомами как с комбинаторными объектами.

Определение. Конечный связный граф G, некоторые ребра которого ориентированы, назовём *f-графом*, если все его вершины имеют степень 3, причём к каждой его вершине примыкают ровно два ориентированных полуребра, из которых одно входит в вершину, а другое выходит из неё. Отметим, что вершина может быть началом и концом одного и того же ориентированного ребра. Каждое неориентированное ребро в f-графе, концы которого лежат на одном ориентированном цикле, будем называть *хордой*.

Определение. *Симметрией атома* называется изоморфизм атома на себя, рассматриваемый с точностью до изотопии. Будем говорить, что высотный атом является *частично симметричным*, если для любых двух колец белого цвета u, v указанного оснащения найдётся симметрия атома ϕ, такая, что $\phi(u) = v$.

Обозначим через P множество, состоящее из следующих графов: одна вершина, одно ребро, простой цикл, сети правильных призм и антипризм, Платоновых и Архимедовых тел (исключая ромбоусеченный икосододекаэдр и усечённый кубоктаэдр).

Оказывается, что любой частично симметричный атом изоморфен ровно одному из атомов, чьи f-графы получаются из графов множества P заменой вершины графа на ориентированный цикл и добавлением кратных неориентированных рёбер и хорд «особым образом».

Литература

1. *Болсинов А. В., Фоменко А. Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы, т. 1, // Ижевск: Изд. дом «Удмуртский университет» 444 с., (1999).

2. *Herbert Fleischner, Wilfried Inrih.* Transitive planar graphs, Mathematica slovaca, 1979, Vol.29

ДЕЙСТВИЕ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ МАТРИЧНОГО ОПЕРАТОРА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ[1]

©2020 *Н. И. Трусова*
(Липецк; *trusova.nat@gmail.com*)

Рассмотрим матричный оператор $A = (A_{ij})_{i,j=1}^n$, где операторы $A_{ij}\ \ (i,j=1,...,n)$ с частными интегралами определяются равенствами

$$A_{ij} = C_{ij} + L_{ij} + M_{ij} + N_{ij}, \quad i,j = 1,...,n,$$

а операторы $C_{ij}, L_{ij}, M_{ij}, N_{ij}$ задаются следующим образом

$$(C_{ij}x_j)(t,s) = c_{ij}(t,s)x_j(t,s),$$

$$(L_{ij}x_j)(t,s) = \int\limits_T l_{ij}(t,s,\tau)x_j(\tau,s)d\tau,$$

$$(M_{ij}x_j)(t,s) = \int\limits_S m_{ij}(t,s,\sigma)x_j(t,\sigma)d\sigma,$$

$$(N_{ij}x_j)(t,s) = \int\int\limits_D n_{ij}(t,s,\tau,\sigma)x_j(\tau,\sigma)d\tau d\sigma,$$

[1]Работа поддержана РФФИ (проект № 19-41-480002).

где $T=[a,b]$, $S=[c,d]$, $t,\tau\in T$, $s,\sigma\in S$, $D=T\times S$, c_{ij}, l_{ij}, m_{ij} и $n_{ij}\ \ (i,j=1,...,n)$ — вещественные функции.

Пусть $C(D)$ — пространство непрерывных на D функций с супремум нормой, где $x_j\in C(D)$ $(j=1,\dots,n)$ и $S(D)$ — пространство измеримых и почти всюду конечных на D функций со значениями в R.

Отметим, что $C(D)$ — банахово пространство, а $S(D)$ — полное метрическое пространство, сходимость в котором совпадает со сходимостью по мере. Имеет место непрерывное вложение $C(D)\subset S(D)$. Справедлива

Теорема 1. *Для того, чтобы оператор A действовал в $C(D)$, необходимо и достаточно, чтобы операторы A_{ij} $(i,j=1,...,n)$ действовали в $C(D)$. При этом оператор A является непрерывным.*

Для операторов с частными интегралами справедлив аналог теоремы С. Банаха о непрерывности интегрального оператора.

Теорема 2. *Если оператор A действует из $C(D)$ в $C(D)$, то он непрерывен.*

Рассмотрим достаточные условия действия оператора A в $C(D)$. Эти условия являются и условиями непрерывности оператора A в $C(D)$ в силу теоремы 2.

Определённая на $D\times\Omega$, где $\Omega\in\{[a,b],[c,d],D\}$, измеримая функция $a(t,s,\omega)$ называется L_1–непрерывной, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что при $|t-t'|<\delta, |s-s'|<\delta$ справедливо равенсто

$$\int\limits_\Omega |a(t,s,\omega)-a(t',s',\omega)|d\omega<\varepsilon$$

и L_1–ограниченной, если найдётся такое число B, что для любой точки $(t,s)\in D$

$$\int\limits_\Omega |a(t,s,\omega)|d\omega\le B.$$

Теорема 3. *Пусть функции* l_{ij}, m_{ij}, n_{ij} L_1*–непрерывны и* L_1*–ограничены. Тогда оператор* A *действует в* $C(D)$ *и непрерывен.*

Литература

1. *Калитвин А.С.* Линейные операторы с частными интегралами. Воронеж: ЦЧКИ, 2000. 252 с.

2. *Калитвин А.С., Фролова Е.В.* Линейные уравнения с частными интегралами. С-теория. Липецк: ООО «Оперативная полиграфия», 2015. — 195 с.

МАРК АЛЕКСАНДРОВИЧ КРАСНОСЕЛЬСКИЙ— ВЫДАЮЩИЙСЯ ПРОФЕССОР И ЛЮБИМЫЙ ПЕДАГОГ

©2020 *О. Ф. Ускова*

(Воронеж; *sunny.uskova@list.ru*)

Знаменитому учёному и педагогу, профессору Красносельскому Марку Александровичу принадлежат многочисленные работы в различных областях математики:

- теории функций вещественных переменных;
- теории дифференциальных уравнений;
- теории интегральных уравнений;
- функциональному анализу;
- топологии;
- численным методам;
- приближенным методам.

Марк Александрович родился на Украине 27 апреля 1920 года в Староконстантиновке Хмельницкой области. В 1942

году он успешно окончил Объединённый украинский университет, в 1951 защитил докторскую диссертацию физико-математических наук. В Воронежском государственном университете М.А. Красносельский плодотворно работал с 1952 по 1969 год заведующим кафедрой функционального анализа математико-механического факультета, где успешно руководил защитой кандидатских диссертаций своих аспирантов. Вместе с профессорами ВГУ В. И. Соболевым и С. Г. Крейном Марк Александрович создал ставшую хорошо известной не только в нашей стране, но и за рубежом, школу функционального анализа [1].

До настоящего времени пользуются популярностью монографии и учебники М.А. Красносельского, изданные в центральных издательствах:

- «Приближенное решение операторных уравнений» (Москва, 1969, совместно с Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко, Я.Б. Рутицким, В.Я. Стеценко);
- «Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений» (Москва, 1956);
- «Выпуклые функции и пространства Орлича» (Москва, 1958, совместно с Я.Б. Рутицким);
- «Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений» (Москва, 1965);
- «Положительные решения операторных уравнений» (Москва, 1962);
- «Векторные поля на плоскости» (Москва, 1963, совместно с коллективом авторов);
- «Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций» (Москва, 1966, совместно с коллективом авторов).

Марк Александрович лично в моей жизни сыграл важную, никем не превзойдённую, роль. Моя первая встреча с Красносельским М.А. состоялась в сентябре 1957 года, когда он начал читать лекции по математическому анализу для студентов 2 курса физико-математического факультета Воронежского государственного педагогического института, где я училась. Его лекции стали для нас образцом лекций по математическим дисциплинам, эталоном тщательной подготовленности, доступности, идейной ясности. Марк Александрович проводил в течение года консультации один раз в неделю и коллоквиумы 2-3 раза в семестр. Благодаря такой организации учебного процесса существенно повысилась успеваемость, ответственность и интерес студентов к математическому анализу.

Марк Александрович был для нас яркой личностью, талантливым организатором и очень заботливым человеком, не раз выручавшим своих студентов. Он несколько раз посещал студенческие вечера и обратил внимание, что его студентки не умеют танцевать вальс. Чтобы помочь таким студенткам, Красносельский М.А. договорился с директором Воронежского музыкального театра и нам выделили (бесплатного для нас) тренера, который приезжал в techинститут еженедельно в течение двух месяцев и мы стали танцевать на студенческих вечерах.

Марк Александрович всегда интересовался жизнью своих учеников, помогал решать возникшие проблемы. Он способствовал переводу студентов нашей группы после окончания 2 курса techинститута на математико-механический факультет ВГУ. Чтобы перевести нас не на второй курс (с потерей года обучения), а на третий, Марк Александрович организовал наше обучение в течение июня-августа 1958 года, когда нам читались лекции, проводились практические занятия, зачёты, экзамены.

Марк Александрович Красносельский был нашим настоящим кумиром. Он один из тех преподавателей, с которыми любой студент мог быть самим собой. В течение всех лет обучения мы чувствовали его поддержку. Он разрешал любому студенту нашей группы заниматься в своей профессорской домашней библиотеке, а после окончания Первомайской демонстрации приглашал к себе домой на чай. Несколько раз Марк Александрович вместе со своими аспирантами приходил на встречи вузовских баскетбольных команд. В составе сборной ВГУ по баскетболу я тогда играла и хорошо помню, когда он наградил нашу команду за победу большим тортом.

Только благодаря Красносельскому М.А. студенты нашей группы проходили в 1960 году производственную практику в Московском государственном университете, когда в ВГУ не было современной вычислительной техники.

Литература

1. *Ускова О.Ф.* Учитель в науке и жизни. Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования. Материалы второй международной молодёжной научной школы «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы». Воронеж: Научная книга, 2018, № 8. - 364 с. С. 324–325.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ НА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЯХ ПЕРВОКУРСНИКОВ ПО ИНФОРМАТИКЕ И ПРОГРАММИРОВАНИЮ

©2020 *О. Ф. Ускова*
(Воронеж; *sunny.uskova@list.ru*)

Роль информационных технологий практически во всех сферах профессиональной деятельности способствует повышению значимости курса «Информатика и программирование», изучение которого начинается на первом курсе факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета (ПММ ВГУ).

Изучение информатики и программирования первокурсниками факультета ПММ ВГУ начинается со структурного программирования на языке C++. Для методической поддержки практических и лабораторных занятий на кафедре математического обеспечения факультета ПММ разработан задачник-практикум [1]. Основная цель этого учебного пособия — придать курсу программирования научно-обоснованный базис, сформировать на его основе определённую культуру разработки программ, структурировать соответствующим образом учебный процесс. Задачник- практикум состоит из 12 глав, каждая из которых содержит несколько разделов: контрольные вопросы, задачи с решениями, тренировочные задания, указания к решению, задания для самостоятельного решения.

Учитывая особенности специальностей, по которым на факультете ПММ обучаются студенты, достаточное количество заданий задачника-практикума [1] содержат математические алгоритмы.

Приведём несколько примеров таких заданий для первого семестра студентов 1 курса.

1. Вычислите приближенное значение $\int x^2\,dx$ на отрезке $[a,b]$, используя формулу прямоугольников, если известно, что отрезок $[a,b]$ разбит на n частей.

2. Пусть даны координаты трёх точек на плоскости. Если они могут быть вершинами треугольника, определите его вид (прямоугольный, тупоугольный, остроугольный). Вычислите длины его высот и напечатайте их в порядке убывания.

3. При некоторых заданных x, N и E, определяемых вводом, вычислите

а) сумму N слагаемых заданного вида;

б) сумму тех слагаемых, которые по абсолютной величине больше E. Вычисление второй суммы выполните для двух значений E, отличающихся на порядок, при этом определите количество слагаемых, включённых в сумму, вычисляемую для каждого значения E. Сравните результаты со значением функции, для которой данная сумма определяет приближенное значение при x, лежащем в интервале $(-R,R)$, вычисленным с помощью встроенных функций компилятора.

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots,$$

если $R=\infty$.

4. Составить программу нахождения корня $x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-2.5=0$ методом деления отрезка $[0.4,1]$ пополам с точностью $E=10^{-5}$.

5. Для заданных чисел a и p вычислить $x=\sqrt[p]{a}$ по рекуррентному соотношению (формула Ньютона)

$$x_{n+1} = \frac{1}{p}[(p-1)x_n + a/x_n^{p-1}]; \quad x_0 = a.$$

Сколько итераций надо выполнить, чтобы для заданной погрешности E выполнялось соотношение $|x_{n+1}-x_n| < E$?

Решая подобные задачи, первокурсники должны овладеть навыками проектирования действий, направленных на решение какой-либо проблемы или на достижение какой-либо цели — основными этапами решения задач с помощью ЭВМ.

Заметим в заключение, что в нашей стране в 1951 году в числе первых разработчиков (с С.А. Авраменко и С.А. Богомолец) прикладной компьютерной программы для решения дифференциальной краевой задачи второго порядка

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0,$$

был математик с мировым именем Селим Григорьевич Крейн [2]. В 60–70-е годы прошлого века С.Г. Крейн, заслуженный деятель науки, лауреат Государственной премии Украины плодотворно работал в Воронежском государственном университете заведующим кафедрой уравнений в частных производных, воспитал несколько поколений математиков-профессионалов. С.Г. Крейн был руководителем моей дипломной работы, одной из первых в ВГУ дипломных работ по программированию.

Литература

1. *Ускова О.Ф., Каплиева Н.А., Горбенко О.Д.* Начала структурного программирования на языке С++: задачник-практикум. Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2019. - 261 с.

2. *Ускова О.Ф., Каплиева Н.А., Горбенко О.Д.* Российской информатике 70 лет. Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сборник трудов Международной научной конференции. Воронеж: Научно-исследовательские публикации, 2018. - 1672 с. С. 1416–1418.

МЕТОД ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ЗАДАЧЕ О ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ ТЯЖЕЛЫХ СТЕРЖНЕЙ

©2020 *Н. Б. Ускова, А. Н. Шелковой*
(Воронеж; *nat-uskova@mail.ru*; *shelkovoj.aleksandr@mail.ru*)

Пусть $L_2[0,1]$ — гильбертово пространство комплексных измеримых (классов) функций, суммируемых с квадратом модуля со скалярным произведением вида

$$(x, y) = \int_0^1 x(\tau)\overline{y(\tau)}d\tau.$$

Через $W_2^2[0,1]$ обозначим пространство Соболева

$$\{x \in L_2[0,1] : x' \text{ абсолютно непрерывна}, \ x'' \in L_2[0,1]\}.$$

В диссертации [1] рассматривались спектральные свойства интегро-дифференциального оператора

$$\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset L_2[0,1] \to L_2[0,1],$$

порождаемого интегро-дифференциальным выражением вида

$$(\mathcal{L}x)(t) = -\ddot{x}(t) - [\dot{x}(0)a_0(t) - \dot{x}(1)a_1(t)] - \int_0^1 K(t,s)x(s)ds \quad (1)$$

с вырожденным ядром $K(t,s) = \sum_{i=1}^{k} p_i(t)q_i(s), \ p_i, q_i \in L_2[0,1]$, с областью определения $D(\mathcal{L}) = \{x \in W_2^2[0,1], \ x(0) = x(1) = 0\}$ и краевыми условиями $x(0) = x(1) = 0$. Методом исследования является метод подобных операторов, развиваемый в работах Баскакова А.Г. (см. [2]) и используемый в спектральном анализе дифференциальных операторов [3-6] и смежных вопросах [7]. Одним из примеров, где возникают операторы типа (1), является задача о продольном изгибе тяжёлых стержней (см. [8]). Определение критической нагрузки P при продольном изгибе шарнирно опёртого с обоих концов, вертикально расположенного стержня длины l постоянного сечения при учёте его собственного веса приводит к задаче на собственные значения

$$y^{IV} - \varepsilon(xy')' = -\lambda y'',\ y(0) = y''(0) = y(l) = y''(l) = 0. \quad (2)$$

В пространстве $L_2[0, l]$ введём оператор $Ay = y''$ с областью определения $D(A)$, определяемой краевыми условиями $y(0) = y(l) = 0$, тогда $A^2y = y^{IV}$. Дифференциальное уравнение в задаче (2) приобретёт вид: $A^2y - \varepsilon(xy')' = -\lambda Ay$. Применив к обеим частям оператор A^{-1}, получим краевую задачу $Ay - \varepsilon A^{-1}xAy - \varepsilon A^{-1}xAy' = -\lambda y,\ y(0) = y(l) = 0$. Оператор A^{-1} имеет вид: $(A^{-1}y)(x) = \int\limits_0^l K(x, s)y(s)ds$, где $K(x, s) = G(x, s)$ — функция Грина для краевой задачи $y'' = 0,\ y(0) = y(l) = 0$. Известно, (см., например, [9]), что в данном случае $G(x, s) = x(s - l)/l$, если $0 \leq s < x$, и $G(x, s) = s(x - l)/l$, если $x \leq s \leq l$. Непосредственные вычисления приводят исходное дифференциальное уравнение в задаче (5) к операторному уравнению $Ly = -\lambda y$, где

$$(Ly)(x) = y''(x) + \varepsilon xy(x) - \varepsilon l(x - l)y'(l) +$$

$$+\varepsilon \left(\int\limits_x^l y(s)ds - x \int\limits_0^l y(s)ds \right) /l.$$

К данному оператору применим метод подобных операторов, то есть оператор L можно представить в виде $A - B$,

где $Ay)(x) = y''(x)$ — невозмущённый оператор, а

$$(By)(x) = \varepsilon \left(l(x - l)y'(l) - xy - \frac{1}{l} \left(\int\limits_x^l y(s)ds - x \int\limits_0^l y(s)ds \right) \right)$$

есть возмущение.

Литература

1. *Шелковой А.Н.* Спектральный анализ дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями: дисс. канд. физ.-мат. наук. Воронеж, 2004. 144 с.

2. *Баскаков А.Г.* Гармонический анализ линейных операторов. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1987. 165 с.

3. *Шелковой А.Н.* Оценки собственных значений и собственных функций одного дифференциального оператора с нелокальными краевыми условиями // Вестник факультета прикладной математики и механики. - 2000. - Вып. 2. - С. 226-235.

4. *Шелковой А.Н.* Метод подобных операторов в исследовании интегро-дифференциальных операторов с квадратично суммируемым ядром // Вопросы науки. - 2016. - Т. 2. - С. 68-80.

5. *Шелковой А.Н.* Спектральные свойства дифференциальных операторов, определяемых нелокальными краевыми условиями // Вопросы науки. - 2016. - Т. 3. - С. 83-90.

6. *Шелковой А.Н.* Спектральные свойства дифференциального оператора второго порядка, определяемого нелокальными краевыми условиями // Математическая физика и компьютерное моделирование. - 2018. - Т. 21. - № 3. - С. 18-33.

7. *Ускова Н.Б., Шелковой А.Н.* Об одной задаче о продольном изгибе тяжёлых стержней // Физико-математическое моделирование систем: материалы XVIII Междунар. семинара. - 2018. - Ч. 2. - С. 159-164.

8. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). М.: Наука, 1968. 504 с.

9. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. СПб.: Лань, 2003. 576 с.

ОБОБЩЕННЫЕ ГРУППЫ КОС И ИНВАРИАНТЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ[1]

©2020 *Д. А. Федосеев*
(Москва; *denfedex@yandex.ru*)

Классическая группа кос — один из давно изучаемых и хорошо известных объектов маломерной топологии, наряду с классическими узлами. Существуют различные обобщения групп кос (например, виртуальные косы, которые точнее было бы называть “косами с виртуальными перекрёстками”, свободные косы). Изучаются так же и некоторые важные частные случаи групп кос (самым ярким из них является группа *крашеных кос*, то есть кос, которым отвечает тождественная подстановка).

Особый интерес косы представляют, поскольку тесно связаны с динамическими системами движения набора из n точек по двумерной плоскости. В частности, сама группа двумерных кос рассматриваться как фундаментальная группа пространства конфигураций из n различных точек. При этом образующие группы — перекрёстки нитей — отвечают моментам времени, в которые у пары точек совпадают координаты по оси OY.

Естественным образом возникла идея обобщить изучаемые системы в следующем смысле: рассматривать движение объектов по некоторому конфигурационному пространству, причём потребовать, чтобы все “вырождения” системы (то есть моменты времени, в которые изучаемые объекты были не в общем положении) удовлетворяли бы некоторому “хорошему” свойству коразмерности 1, зависящему от $k < n$ точек. В этих терминах классические косы отвечали бы свойству коразмерности 1, зависящему от двух точек: “$y-$координаты двух точек совпали”.

Данная идея оказалась плодотворной и привела к построению В.О. Мантуровым теории *обобщённых свободных* $k-$*кос* или, иначе, *теории групп* G_n^k [1].

Более точно, группа свободных $k-$кос определяется следующим образом. Рассмотрим множество $\bar{n} = \{1, \ldots, n\}$. Образующие группы G_n^k находятся во взаимно-однозначном соответствии с неупорядоченными $k-$элементными подмножествами множества $\bar{n}$. Обозначим их через a_m, где m — неупорядоченный $k-$мультииндекс, то есть $m \subset \bar{n}$, $|m| = k$.

Группа G_n^k получается из свободной группы, порождённой образующими a_m, факторизацией по следующим соотношениям:

1) $a_m a_{m'} = a_{m'} a_m$ для любых мультииндексов m, m', для которых $Card(m \cap m') < k - 1$ (соотношение *дальней коммутативности*);

2) $a_m^2 = 1$ для всех мультииндексов m;

3) для каждого $(k+1)$-элементного набора U индексов $u_1, \ldots, u_{k+1} \in \{1, \ldots, n\}$ рассмотрим $k+1$ множество $m^j = U \setminus \{u_j\}, j = 1, \ldots, k+1$. С каждым набором U сопоставим *тетраэдральное* соотношение
$$a_{m^1} \cdot a_{m^2} \cdots a_{m^{k+1}} = a_{m^{k+1}} \cdots a_{m^2} \cdot a_{m^1}.$$

Само построение группы G_n^k приводит к следующему принципу:

[1]Исследование выполнено в рамках Программы Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-2554.2020.1).

если динамическая система движения n точек удовлетворяет некоторому хорошему свойству коразмерности 1, зависящему от k точек, данная система обладает инвариантами со значениями в группе G_n^k.

Разумеется, мало построить инварианты некоторой динамики. Важно, чтобы эти инварианты можно было посчитать и различить между собой. Эти вопросы в случае групп G_n^k в настоящее время активно изучаются. В частности, следующие результаты были получены автором совместно с В.О. Мантуровым и А.Б Карповым [2, 3]:

Теорема 1. *Для группы G_4^3 алгоритмически разрешимы проблемы равенства и сопряжённости.*

Теорема 2. *Для группы G_5^4 алгоритмически разрешима проблема равенства.*

Аналогичные теоремы для случая групп G_{k+1}^k для $k > 4$ в настоящее время не доказаны, хотя у авторов есть основания полагать, что они справедливы. Продвижения в этом вопросе были бы крайне важны для теории инвариантов динамических систем описанного типа.

Литература

1. *V. O. Manturov*, Non–Reidemeister knot theory and its applications in dynamical systems, geometry and topology, https://arxiv.org/abs/1501.05208

2. *D.A. Fedoseev, A.B. Karpov, V.O. Manturov*, Word and Conjugacy Problems in Groups G_{k+1}^k; https://arxiv.org /abs/1906.04916; accepted for publishing by Lobachevskii Journal of Mathematics.

3. *Vassily O. Manturov, Denis A. Fedoseev, Seongjeong Kim, Igor M. Nikonov*, On Groups G_n^k and Γ_n^k: A Study of Manifolds, Dynamics, and Invariants, submitted to Bulletin of Mathematical Sciences, https://arxiv.org/abs/1905.08049

НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ И СОВПАДЕНИЯ В УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВАХ И МЕТРИЧЕСКИЕ СЛЕДСТВИЯ

©2020 *Т. Н. Фоменко*

(Москва, ВГУ; *tn-fomenko@yandex.ru*)

Доклад основан на некоторых результатах работы [2]. Рассматривается проблема существования неподвижных точек отображений упорядоченного множества.

Яхимский (J.Jachymski) в 1997 доказал следующее обобщение известной теоремы Цермело о неподвижой точке.

Теорема 1 (Яхимский, см. [1]). *Пусть $(X, \preceq)$ — частично упорядоченное множество, $f : X \to X$ — регрессивное отображение, то есть $f(x) \preceq x, \forall x \in X$. Пусть для каждой цепи в X задана некоторая её нижняя граница. Тогда отображение f имеет неподвижную точку.*

В [2] получен следующий результат, обобщающий эту теорему Яхимского.

Теорема 2 [2]. *Пусть $(X, \preceq)$ — упорядоченное множество, $f : X \to X$ — отображение, и для некоторой точки $x_0 \in X$ существует хотя бы одна цепь $C \subseteq F(T_X(x_0))$, где $T_X(x_0) := \{x \in X : x \preceq_{d\varphi} x_0\}$, удовлетворяющая условиям: (1) $f(x) \preceq x, \forall x \in C$; (2) если $u, v \in C, u \prec v$, то $u \preceq f(v)$. Пусть, кроме того, для каждой цепи C, удовлетворяющей условиям (1)-(2), существует такая нижняя граница w, что $f(w) \preceq f(x), x \in C$, и $f(w) \preceq w$. Причём, если $f(w) \prec w$, то $f(f(w)) \preceq f(w)$. Тогда множество $Fix(f)$ неподвижных точек отображения f непусто.*

Отметим, что в условиях Теоремы 2 можно утверждать также наличие минимального элемента в множестве $Fix(f)$.

Пусть (X, d) — метрическое пространство, и заданы функционал $\varphi : X \to R$ и отображение $f : X \to X$. Обозначим $T_X^{d\varphi}(x_0) := \{y \in X | y \preceq_{d\varphi} x\}$, где $y \preceq_{d\varphi} x$ означает, что $d(y, x) \leq \varphi(x) - \varphi(y)$. Этот способ упорядочения метрического пространства предложен в работе Брондстеда [3].

Следующая теорема является метрическим аналогом Теоремы 2.

Теорема 3 [2]. *Пусть (X, d) — метрическое пространство, задан функционал $\varphi : X \to R$ и отображение $f : X \to X$. Пусть для некоторой точки $x_0 \in X$ в упорядоченном множестве $(X, \preceq_{d\varphi})$ существует хотя бы одна цепь $C \subseteq f(T_X^{d\varphi}(x_0))$, удовлетворяющая условиям: (1) $f(x) \preceq_{d\varphi} x, \forall x \in C$; (2) если $u, v \in C$, и $u \prec_{d\varphi} v$, то $u \preceq_{d\varphi} f(v)$. Пусть, кроме того, для каждой цепи C, удовлетворяющей условиям (1)-(2), существует такая нижняя граница w, что $f(w) \preceq_{d\varphi} f(x), x \in C$, $f(w) \preceq_{d\varphi} w$. Причём, если $f(w) \prec_{d\varphi} w$, то $f(f(w)) \preceq_{d\varphi} f(w)$. Тогда множество $Fix(f)$ неподвижных точек отображения f непусто.*

В [2] показано, что из Теоремы 3 следует известная теорема о неподвижной точке Каристи (Caristi).

Отметим, что в Теореме 3 можно утверждать даже больше, а именно, что в множестве $Fix(f)$ имеется минимальная точка (относительно порядка $\preceq_{d\varphi}$), то есть такая точка $a \in Fix(f)$, что для любой точки $b \in Fix(f)$ выполнено условие

$$\left[\begin{array}{l} d(a,b) > |\varphi(a) - \varphi(b)|; \\ \quad d(a,b) \leq \varphi(b) - \varphi(a). \end{array}\right.$$

Кроме того, доказана более общая теорема о существовании неподвижных точек многозначного отображения упорядоченного множества в себя, получено следствие из неё для метрических пространств (с помощью упорядочения метрического пространства методом Брондстеда). Это следствие представляет обобщение теоремы 3 (а значит, и теоремы Каристи) на случай многозначного отображения метрического пространства в себя.

Следует отметить, что теорема Каристи не вытекает из метрических аналогов предыдущих совместных результатов автора и Д.А.Подоприхина, поскольку в ней отсутствует требование изотонности отображения f относительно порядка Брондстеда, определяемого заданным функционалом φ и метрикой d.

С использованием упорядочения Брондстеда исследуются также проблемы существования совпадений многозначных отображений метрических пространств.

Литература

1. *Kirk W.A. and Sims B. (eds.)* Handbook of metric fixed point theory. *Springer Science & Business Media*, 2001.

2. *Фоменко Т.Н.* Неподвижные точки и совпадения семейств отображений упорядоченных множеств и некоторые метрические следствия. *Известия РАН. Серия математическая*, 2019, **83**, № 1, 168-191.

3. *Brøndsted A.* On a lemma of Bishop and Phelps. *Pacific J. Math.*, 1974, **55**, 335–341.

УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА-ФРЕДГОЛЬМА СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ЭВОЛЮЦИОННОГО ТИПА[1]

©2020 *Е. В. Фролова*
(Липецк; *lsnn48@mail.ru*)

Контактные задачи теории упругости при учёте износа шероховатых поверхностей взаимодействующих тел, а также ряд смешанных задач для многослойных вязкоупругих оснований, когда относительная толщина и относительная

[1]Работа поддержана РФФИ (проект №19-41-480002).

жёсткость верхнего слоя достаточны малы, приводятся к исследованию интегрального уравнения Вольтерра–Фредгольма с частными интегралами

$$\lambda x(t,s) + (Kx)(t,s) + (Nx)(t,s) = g(t,s). \tag{1}$$

В статье рассматривается уравнение (1) для случая

$$(Kx)(t,s) \equiv (Lx)(t,s) + (Mx)(t,s) =$$

$$= \int_0^t l(t,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_{-1}^1 m(s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma,$$

$$(Nx)(t,s) = \int_0^t \int_{-1}^1 n(t,\tau)m(s-\sigma)x(\tau,\sigma)d\sigma d\tau,$$

где $\lambda > 0$ — безразмерный параметр, имеющий механический смысл, функция $g(t,s)$ имеет вид $g(t,s) = g_1(t) + sg_2(t) + f(s)$, $g_1, g_2 \in C([0,a])$, а f — заданная функция из $L^2([-1;1])$, причём ядро $l(t,\tau)$ — непрерывная функция, ядро $m(s,\sigma)$ таково, что оператор M действует из $L^2([-1,1])$ в $C([-1,1])$, а в $L^2([-1,1])$ является самосопряжённым компактным оператором, $n(t,\tau) = l(t,\tau)$ — непрерывная функция.

При сделанных предположениях оператор $L\bar{\otimes}I$ имеет равный нулю спектральный радиус, т.е. $r(L\bar{\otimes}I) = r(L) = 0$ и $\sigma(L\bar{\otimes}I) = \{0\}$. Кроме того, $\sigma(M)$ состоит из нуля и не более чем счётного множества собственных чисел, т.е. M — оператор с чисто точечным спектром, причём все собственные функции оператора M непрерывны.

Рассмотрим некоторые свойства точечного спектра оператора $K+N$, структуру его собственных функций, а также условия разрешимости уравнения (1) в случае, когда $\lambda \neq 0$ совпадает с одним из собственных чисел оператора $K+N$.

Оператор $K+N$ можно записать в виде $K+N = L\bar{\otimes}I + I\bar{\otimes}M + L\bar{\otimes}M$. Известно, что $\sigma(K+N) = \sigma(M)$. Так как

$\sigma(L) = \{0\}$, то если $\sigma_p(L)$ не пуст, имеем: $\sigma_p(K) = \sigma_p(M)$ и $\sigma_p(N) = \sigma_p(L) = \{0\}$.

Так как $\sigma(K+N) = \sigma(M)$, то спектр оператора $K+N$ состоит из нуля и не более чем счётного числа собственных чисел. Если теперь $0 \in \sigma_p(M)$, то $0 \in \sigma_p(K+N)$, если $0 \notin \sigma_p(M)$, то $0 \notin \sigma_p(K+N)$. Таким образом, $\sigma_p(K+N) = \sigma_p(M)$. Поэтому справедлива

Теорема 1. *Пусть $l(t,\tau)$ — непрерывная функция, $n(t,\tau) = l(t,\tau)$ и оператор M действует из $L^2([-1,1])$ в $C([-1,1])$ и в $L^2([-1,1])$ является компактным самосопряжённым оператором и пусть $\sigma_p(L)$ в $C([0,a])$ не пуст. Тогда не пуст точечный спектр оператора $K+N$ в $C(D)$ и $\sigma_p(K+N) = \sigma_p(M)$.*

Пусть, далее, $\sigma_p(L)$ не пуст. Тогда для любого $\lambda_i \neq 0$ и $\lambda_i \in \sigma_p(K+N)$ $(i = 1,2,\ldots)$ $\lambda_i = \beta_i$, где $\beta_i \in \sigma_p(M)$ $(i = 1,2,\ldots)$ и верна

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Собственные функции оператора $K+N$, соответствующие собственному числу $\lambda_p = \beta_p \neq 0$, $\beta_p \neq -1$, находятся в множестве $X(\lambda_p) \cap C(D)$, где $X(\lambda_p)$ — подпространство, образованное линейными комбинациями функций $\varphi(t)\psi(s)$, где $\varphi \in KerL$, $\psi \in Ker(\lambda_p I - M)$, а собственные функции оператора $K+N$, соответствующие собственному числу $\lambda_p = \beta_p = -1$ находятся в множестве $X(\lambda_p)$, где $X(\lambda_p)$ — подпространство, порождаемое линейными комбинациями функций $\varphi(t)\psi(s)$, где $\varphi \in C([0,a])\backslash\{0\}$, $\psi \in Ker(\lambda_p I - M)$.*

Рассмотрим условия разрешимости уравнения (1) в случае, когда $\lambda \neq 0$ попадает в точечный спектр оператора $K+N$. Используя представление $x^0(t,s) = \sum_{i,j=1}^\infty x_{ij}\varphi_i(t)\psi_j(s)$ элементов пространства $L^2(D)$, где x_{ij} — коэффициенты Фурье, а x^0 — собственная функция оператора K, соответствующая собственному числу β_p, получим

$$(\lambda-\beta_j)\sum_{i=1}^{\infty}x_{ij}\varphi_i(t)-(1+\beta_j)\int_0^t l(t,\tau)\sum_{i=1}^{\infty}x_{ij}\varphi_i(\tau)\,d\tau=$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}f_{ij}\varphi_i(t).$$

Используя равенства $f(t,s)=\sum_{i,j=1}^{\infty}f_{ij}\varphi_i(t)\psi_j(s)$, где f_{ij} — коэффициенты Фурье функции $f(t,s)$, $f_j(t)=\sum_{i=1}^{\infty}f_{ij}\varphi_i(t)$ и вводя обозначения $y_j(t)=\sum_{i=1}^{\infty}x_{ij}\varphi_i(t)$, получим

$$(\lambda-\beta_j)y_j(t)-(1+\beta_j)\int_0^t l(t,\tau)y_j(\tau)\,d\tau=f_j(t)\ (j=1,2,\ldots). \tag{2}$$

Пусть $\lambda\neq 0$ совпадает с собственным числом λ_p кратности n. Тогда все уравнения, для которых $j\notin\{p,p+1,\ldots,p+n\}$ однозначно разрешимы для любых $f_j(t)\in C([0,a])$. Следовательно, система (2) и уравнение (1) имеют решения точно в случае, когда разрешимы уравнения

$$(1+\beta_j)\int_0^t l(t,\tau)y(\tau)\,d\tau=f_j(t),\quad (j=p,p+1,\ldots,p+n). \tag{3}$$

Таким образом, доказана

Теорема 3. *Пусть l, m, n удовлетворяют условиям теоремы 1 и $\lambda\neq 0$ совпадает с собственным числом $\lambda_p=\beta_p$ кратности n. Тогда уравнение (1) разрешимо тогда, когда разрешимы уравнения (3).*

ИНТЕГРАЛЫ ОТ ЦЕЛЫХ, МЕРОМОРФНЫХ И СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПО ЛУЧУ[1]

©2020 *Б. Н. Хабибуллин*
(Уфа; *khabib-bulat@mail.ru*)

В теории роста целых и мероморфных функций f на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ нередко возникала необходимость в оценках интегралов с подынтегральным выражением

$$\mathsf{M}_{\ln^+|f|}(r),\quad \text{где } \mathsf{M}_u(r):=\sup_{|z|=r}u(z),\ u^+:=\max\{0.u\},$$

возможно, дополненным некоторой весовой функцией-множителем. Такие оценки относительно множества интегрирования можно отнести к одному из следующих двух типов: по интервалам или дугам на луче или окружности или же по малым подмножествам на таких интервалах или дугах. Среди исходных результатов первого типа —

Теорема Р. Неванлинны ([1], [2; гл. 1, теорема 7.2]). *Для мероморфной функции f на $\mathbb{C}$ с характеристикой Неванлинны T_f и для числа $k>1$ справедливо неравенство*

$$\frac{1}{r}\int_1^r\mathsf{M}_{\ln^+|f|}(t)\mathrm{d}t\le C(k)T_f(kr,f),\quad r\ge 1,$$

где число $C(k)>1$ зависит только от k.

Истоки второго типа оценок — лемма Эдрея–Фукса о малых дугах [3; **2**, лемма III, **9**], [2; гл. 1, теоремы 7.3, 7.4], а также приведённая в [4] без доказательства

Лемма Гришина – Содина о малых интервалах([4; лемма 3.1]). *Пусть в условиях Теоремы Р. Неванлинны λ — линейная мера Лебега на вещественной оси $\mathbb{R}$ и $E\subset[1,r]\subset$*

[1]Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00002).

$\mathbb{R}$ — *λ-измеримое подмножество. Тогда*

$$\frac{1}{r}\int_E \mathsf{M}_{\ln^+|f|}(t)\mathrm{d}t \le A\frac{k}{k-1}\Big(\frac{\lambda(E)}{r}\ln\frac{2r}{\lambda(E)}\Big)T_f(kr),$$

где A — абсолютная постоянная.

Версия леммы Гришина–Содина о малых интервалах для *субгармонических функций конечного порядка* —

Теорема Гришина–Малютиной о малых интервалах ([5; теорема 8]). *Пусть $v \not\equiv -\infty$ — субгармоническая функция уточнённого порядка ρ и $E \subset [1,R]$ — λ-измеримое множество. Тогда для некоторого числа M, не зависящего от r, θ, E, имеет место неравенство*

$$\int_E \big|v(te^{i\theta})\big|\mathrm{d}t \le M\frac{\lambda(E)}{r}\ln\frac{4r}{\lambda(E)}\, r^{\rho(r)+1}.$$

Для λ-измеримого множества $E \subset \mathbb{R}$ и $p \in [1,+\infty]$ через $L^p(E)$ обозначаем L^p*-пространство* функций $f\colon E \to \mathbb{R}$ с нормой $\|f\|_{L^p(E)} := \Big(\int_E |f|^p\,\mathrm{d}\lambda\Big)^{1/p}$ при $p < +\infty$ и с нормой *существенная верхняя грань* $\operatorname{ess\,sup}\limits_E |f|$ на E при $p = +\infty$.

Существенное обобщение и развитие Теоремы Гришина–Малютиной о малых интервалах уже при $p = +\infty$ —

Теорема о малых интервалах с весом. *При любом значении $p \in (1,+\infty]$ и при значении q, определяемом из равенства $1/p + 1/q = 1$, для любого числа $k > 1$ существует такое число $A_p(k) \ge 1$, что для любого числа $R > 0$, для любого λ-измеримого множества $E \subset [0,R]$, для любой функции $g \in L^p(E)$ и для любой субгармонической функции v со значением $v(0) \ge 0$ имеет место неравенство*

$$\int_E \mathsf{M}_{|v|} g\,\mathrm{d}\lambda \le A_p(k)\mathsf{M}_v(kR)\|g\|_{L^p(E)}\big(\lambda(E)\big)^{1/q}\ln\frac{e^qR}{\lambda(E)}.$$

Из Теоремы о малых интервалах с весом уже при $p = +\infty$, $g \equiv 1$ и $v := \ln|f|$ из известных вариантов определения характеристики Неванлинны и её взаимосвязей с другими характеристиками роста мероморфных функций легко получаются Теорема Р. Неванлинны и Лемма Гришина – Содина о малых интервалах. Более того, равномерный характер оценки в ней позволяет получить многомерные версии Теоремы о малых интервалах с весом для разностей плюрисубгармонических функций в $\mathbb{C}^n$ и для мероморфных функций в $\mathbb{C}^n$.

Версия Теоремы о малых интервалах с весом для случая $p = +\infty$ направлена в печать [6]. Её варианты с $p \in (1,+\infty]$ и с применениями к плюрисубгармоническим и мероморфным функциям в $\mathbb{C}^n$, а также к разностям субгармонических функций в $\mathbb{R}^n$ готовятся для отправки в печать.

Литература

1. *Nevanlinna R.* Le théoremè de Picard – Borel et la théorie des fonctions méromorphes Paris: Gauthier-Villars, 1929, Pp. 171.

2. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М.: Наука, 1970, 591 с.

3. *Edrei A., Fuchs W. H. J.* Bounds for number of deficient values of certain classes of meromorphic functions // Proc. London Math. Soc. 1962, V. 12, P. 315–344 .

4. *Гришин А. Ф., Содин М. Л.* Рост по лучу, распределение корней по аргументам целой функции конечного порядка и одна теорема единственности // Респ. сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», Харьков: Вища школа, 1988, вып. 50, С. 47–61.

5. Гришин А. Ф., Малютина Т. И., Новые формулы для индикаторов субгармонических функций // Матем. физ., анал., геом. 2005, Т. 12, вып. 1, С. 25–72.

6. *Габдрахманова Л. А., Хабибуллин Б. Н.* Одна теорема о малых интервалах для субгармонических функций // Известия вузов. Математика, 2020 (направлено в печать).

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГРУБЫХ МОЛЕКУЛ, СОСТОЯЩИХ ИЗ АТОМОВ БЕЗ ЗВЁЗДОЧЕК, ИНТЕГРИРУЕМЫМИИ БИЛЛИАРДАМИ[1]

©2020 *И. С. Харчева*
(Москва; *irina.harcheva1@yandex.ru*)

Определение 1. Рассмотрим некоторую компактную область Ω в плоскости с кусочно-гладкой границей и углами излома $\pi/2$. Пусть материальная точка движется по прямой с постоянной скоростью внутри этой области Ω и отражается о гладкую часть границы $\partial\Omega$ без потери скорости и естественным образом: угол падения равен углу отражения. В остальных случаях движение этой материальной точки определяется по непрерывности. Тогда *биллиардом* в области Ω называется динамическая система, описываемая движением этой материальной точки.

Эта динамика задаёт гамильтонову систему на кокасательном расслоении к области Ω. У динамической системы биллиарда есть один первый интеграл — гамильтониан, равный половине квадрата модуля вектора скорости. Значит, биллиард является гамильтоновой динамической системой с двумя степенями свободы. Из теории гамильтоновых систем следует, что для интегрируемости биллиарда необходим ещё один первый интеграл. В общем случае, для произвольной области Ω его может не существовать. Но если подобрать

[1]Исследование выполнено в рамках Программы Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-2554.2020.1).

“хорошую” область Ω, то можно найти функцию, которая будет первым интегралом.

Важным классом интегрируемых биллиардов является биллиард в области Ω, ограниченной дугами софокусных эллипсов и гипербол. Оказывается, в таком биллиарде вектор скорости материальной точки на протяжении всей траектории будет направлен по касательной к каустике – фиксированной квадрике, софокусной с семейством. Поэтому у такой системы появляется ещё один интеграл, независимый с предыдущим – параметр квадрики Λ. Это означает, что динамическая система биллиарда в такой области будет интегрируема по Лиувиллю. Её интегрируемость была показана в работе В. В. Козлова, Д. В. Трещёва [1].

Расширим постановку биллиардной задачи. Пусть дано n областей $\Omega_1, ..., \Omega_n$ с кусочно-гладкой границей. Пусть граница этих областей содержит одну и ту же кривую l. Припишем к этой дуге перестановку σ из n элементов. Тогда можно определить более сложный биллиард в объединении областей $\cup_{i=1}^{n}\Omega_i$ следующим образом: материальная точка отражается обычным образом от границ, отличных от l, и переходит с одной области на другую по перестановке σ, достигая кривой l. Заметим, что общих граничных кривых у областей может быть несколько: $l_1, l_2, ..., l_k$. Ко всем им можно приписать перестановки $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k$ и рассмотреть биллиард, в котором материальная точка будет переходить с листа на лист на дугах $l_1, l_2, ..., l_k$ по перестановкам $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k$ соответственно. Такие биллиарды будем называть *биллиардными книжками*, а области Ω_i, из которых состоит биллиардная книжка – *листами.* В частном случае, когда $n = 2$ такие биллиарды называются топологическими. Топологические биллиарды были полностью классифицированы в работе В.В. Фокичевой [2]. В этой работе было обнаружено, что многие известные и важные интегрируемые системы с двумя степенями свободы моделируются топологическими биллиардами с точностью до лиувиллевой эквивалентности. То есть их инварианты Фоменко-Цишанга (см. [3]) совпадают. В связи с этим А.Т. Фоменко предложил следующую гипотезу:

Гипотеза. (А.Т. Фоменко) *Биллиардными книжками можно моделировать:*

Гипотеза A. все 3-атомы;

Гипотеза B. все грубые молекулы;

Гипотеза C. все меченые молекулы.

Теорема 1. (Ведюшкина-Харчева) *Гипотеза Фоменко A верна, а именно, для любого 3-атома (со звёздочками или без) алгоритмически строится биллиардная книжка, такая что в её изоэнергетической поверхности слоение Лиувилля прообраза окрестности особого значения интеграла Λ, отвечающего траекториям, направленным к или от одного из фокусов, послойно гомеоморфно данному атому.*

Теорема 2. (Ведюшкина-Харчева) *Любая грубая молекула, состоящая из атомов без звёздочек, моделируется биллиардными книжками. Более точно: по любой грубой молекуле, состоящей из атомов без звёздочек, алгоритмически строится биллиардная книжка с каноническим квадратичным интегралом Λ, отвечающим параметру каустики, такая, что грубая молекула, соответствующая этой системе, изоморфна заданной изначально грубой молекуле.*

Литература

1. *Козлов В. В., Трещёв Д.В.* Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991. 408 с.

2. *Фокичева В. В.* Топологическая классификация биллиардов в локально-плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик. Математический сборник. — 2015. — Т. 206, № 10. С. 127–176.

3. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация, т. 1. Ижевск НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 1999.

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ СРЕДНИХ НЕЧЁТКО-СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

©2020 *В. Л. Хацкевич*

(Воронеж; *vlkhats@mail.ru*)

Объектом настоящего исследования являются нечёткослучайные величины. Нечёткие множества как предмет рассмотрения введены в пионерской работе Заде [1]. С этого момента и по настоящее время они активно исследуются и находят важное приложение в различных прикладных областях (финансовая математика, теория принятия решений, мягкие вычисления и др.). В частности, много работ посвящено изучению нечётко-случайных величин, т.е. случайных величин, множествами значений которых являются нечёткие числа. Из последних работ укажем работы [2] и [3]. В литературе рассматриваются различные определения нечёткослучайных чисел и нечётко-случайных величин. Ниже мы используем терминологию, принятую в работах [2] и [3].

Как известно, математическое ожидание EX случайной величины X минимизирует среднеквадратическое отклонение $E(X-a)^2$ по всем действительным $a \in R$, т.е.

$$E(X - E(X))^2 \leq E(X-a)^2 \quad (\forall a \in R). \tag{1}$$

В данной работе рассматриваются нечётко-случайные величины $\tilde{X}$, для которых областью J возможных значений являются нечёткие числа. Устанавливаются экстремальные свойства вида (1). Кроме того, рассматриваются оптимальные линейные регрессии нечётко-случайных величин. В литературе рассматриваются различные аспекты нечётких линейных регрессий. Мы рассматриваем случай чётких (числовых) коэффициентов (ср. [4], [5]). На этом пути получен результат об оптимальной в среднеквадратичном нечёткой регрессии. Установлено, что оптимальная регрессия обладает максимальной корреляцией с прогнозируемой нечётко-случайной величиной. Приведём необходимые термины и обозначения.

Множество $\tilde{z} \subseteq R^2$, лежащее в полосе $0 \leq \eta \leq 1$, называется нечётким числом, если существуют монотонные, непрерывные слева функции $z^L : [0,1] \to R$ и $z^R : [0,1] \to R$, где z^L не убывает, z^R не возрастает, причём $z^L(1) \leq z^R(1)$ такие, что для любого $\eta_0 \in [0,1]$ пересечение множества $\tilde{z}$ с прямой $\eta = \eta_0$ представляет собой множество

$$\{(\xi, \eta) : z^L(\eta_0) \leq \xi \leq z^R(\eta_0), \eta = \eta_0\}.$$

Функции $z^L(\eta)$ и $z^R(\eta)$ называются, соответственно, левым и правым индексом нечёткого числа $\tilde{z}$.

Пусть (Ω, Σ, P) — вероятностное пространство, где Ω — множество элементарных событий, Σ- σ-алгебра, состоящая из подмножеств множества Ω, P — вероятностная мера.

Измеримое отображение $\tilde{X} : \Omega \to J$ называется нечёткослучайной величиной, если при любом $\omega \in \Omega$ множество $\tilde{X}(\omega)$ является нечётким числом.

Индексы нечёткого числа $\tilde{X}(\omega)$ будем обозначать $X^L(\omega, \eta)$ и $X^R(\omega, \eta)$. Функции $X^L(\omega, \eta)$ и $X^R(\omega, \eta)$ называются, соответственно, левым индексом и правым индексом нечётко-случайной величины $\tilde{X}(\omega)$.

Скалярным произведением $\left\langle \tilde{X}, \tilde{Y} \right\rangle_\omega$ нечётко-случайных величин $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ называется величина

$$\left\langle \tilde{X}, \tilde{Y} \right\rangle_\omega = 0.25 \int\limits_0^1 \int\limits_\Omega (X^L(\omega, \eta) +$$

$$+ X^R(\omega, \eta))(Y^L(\omega, \eta) + Y^R(\omega, \eta)) dP d\eta,$$

а полунормой $\|\tilde{X}\|_\omega = \left\langle \tilde{X}, \tilde{Y} \right\rangle_\omega^{1/2}$.

Положим

$$x^L(\eta) = \int\limits_\Omega \tilde{X}^L(\omega, \eta) dP, \quad x^R(\eta) = \int\limits_\Omega \tilde{X}^R(\omega, \eta) dP. \qquad (2)$$

Нечётким ожиданием нечётко-случайной величины $\tilde{X}$ называется нечёткое число $\tilde{x}$ с левым индексом $x^L(\eta)$ и правым индексом $x^R(\eta)$, определяемыми формулами (2). Ожиданием $E(\tilde{X})$ нечётко-случайной величины $\tilde{X}$ называется число, определяемое формулой

$$E\tilde{X} = 0.5 \int\limits_0^1 \int\limits_\Omega (X^L(\omega, \eta) + X^R(\omega, \eta)) dP d\eta.$$

Ковариацией $Cov(\tilde{X}, \tilde{Y})$ нечётко-случайных величин $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ называется выражение

$$Cov(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0.25 \int\limits_0^1 \int\limits_\Omega (X^L(\omega, \eta) + X^R(\omega, \eta) - x^L(\omega, \eta) -$$

$$- x^R(\omega, \eta))(Y^L(\omega, \eta) + Y^R(\omega, \eta) - y^L(\omega, \eta) - y^R(\omega, \eta)) dP d\eta,$$

где $x^L(\omega,\eta)$ и $x^R(\omega,\eta)$ определяются формулами (2) и аналогично $y^L(\omega,\eta)$ и $y^R(\omega,\eta)$.

Дисперсией $Var(\tilde{X})$ нечётко-случайной величины $\tilde{X}$ называется $Cov(\tilde{X},\tilde{X})$.

Теорема 1. *Для заданной нечётко-случайной величины $\tilde{X}(\omega)$ минимум выражения $\|\tilde{X}-a\|_\omega$ по всем действительным числам а достигается при $a_0 = E(\tilde{X})$, т.е.*

$$||\tilde{X} - E(\tilde{X})||_\omega \le ||\tilde{X} - a||_\omega \quad (\forall a \in R). \tag{3}$$

Теорема 2. *Для заданной нечётко-случайной величины $\tilde{X}$ минимум выражения $\|\tilde{X}-\tilde{a}\|_\omega$ по всем нечётким числам $\tilde{a}$ достигается при $\tilde{a}_0 = \tilde{x}$ нечётком ожидании случайной величины $\tilde{X}$, т.е.*

$$||\tilde{X} - \tilde{x}||_\omega \le ||\tilde{X} - \tilde{a})||_\omega \quad (\forall \tilde{a} \in J). \tag{4}$$

Формулы (3), (4) обобщают свойство (1).

Рассмотрим прогнозируемую нечётко-случайную величину $\tilde{Y}$ и попарно независимые прогнозирующие нечётко-случайные величины $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, ..., \tilde{X}_n$. Исследуем вопрос об аппроксимации случайной величины $\tilde{Y}$ линейными комбинациями вида $\tilde{a} + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \tilde{X}_i$, где α_i — вещественные числа, а $\tilde{a}$ — нечёткое число. Точнее, задача состоит в подборе вещественных коэффициентов α_i и нечёткого числа $\tilde{a}$ так, чтобы ошибка $\|\tilde{Y} - \tilde{a} - \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \tilde{X}_i\|_\omega^2$ была минимальной.

В дальнейшем будем предполагать выполненными условия:

1) рассматриваемые нечётко-случайные величины $\tilde{Y}$ и $\tilde{X}_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ имеют ограниченные по абсолютной величине индексы.

2) все нечёткие ожидания нечётко-случайных величин $\tilde{Y}$ и $\tilde{X}_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ совпадают. $\tilde{y} = \tilde{x}_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

Теорема 3. *Пусть для заданной нечётко-случайной величины $\tilde{Y}$ и системы попарно независимых нечётко-случайных величин $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, ..., \tilde{X}_n$ выполнены условия 1) и 2). Тогда оптимальной в среднеквадратичном смысле линейной несмещённой оценкой нечётко-случайной величины $\tilde{Y}$ по системе $X_1, X_2, ..., X_n$ вида $\tilde{y} + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(\tilde{X}_i - \tilde{y})$ является оценка*

$$\hat{Y} = \tilde{y} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{Var(\tilde{X}_i)}} Cov(\tilde{Y}_i, \tilde{X}_i)(\tilde{X}_i - \tilde{y}), \tag{5}$$

где $\tilde{y}$ — общее нечёткое ожидание нечётко-случайных величин $\tilde{Y}$ и $\tilde{X}_i$. На $\hat{Y}$ достигается минимум выражения $\|\tilde{Y} - \tilde{y} - \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(\tilde{X}_i - \tilde{y})\|_\omega^2$ по всем действительным α_i.

Определим коэффициент корреляции между нечётко-случайными величинами $\tilde{Y}$ $\tilde{Z}$ равенством

$$\rho[\tilde{X}, \tilde{Z}] = \frac{Cov(\tilde{X}, \tilde{Z})}{\sigma(\tilde{Y})\sigma(\tilde{Z})},$$

где $\sigma^2(\tilde{Y}) = Var(\tilde{Y})$, $\sigma^2(\tilde{Z}) = Var(\tilde{Z})$.

Теорема 4. *Оценка $\hat{Y}$, определяемая формулой (5), обладает наибольшим коэффициентом корреляции с $\tilde{Y}$ по сравнению с другими оценками вида $\tilde{W}_n = \tilde{y} + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(\tilde{X}_i - \tilde{y})$ с произвольными вещественными коэффициентами α_i. Т.е. для коэффициентов корреляции выполнено неравенство* $\rho[\tilde{W}_n, \tilde{Y}] \ge \rho[\hat{Y}, \tilde{Y}]$.

Литература

1. *Zadeh L.A.* Fuzzy sets. Information and Control, 1965, 8, p. 338 - 353

2. *Feng Y,. Hu. L., Shu H.* The variance and covariance of fuzzy random variables. Fuzzy Systems, 2001, 120, p. 487-497

3. *Шведов А.С.* Оценивание средних и ковариаций нечётко-случайных величин. Прикладная эконометрика, 2016, т. 42. с. 121-138

4. *Bargelia A., Pedrycz W., Nakashima T.* Multiple Regression with Fuzzy Data, Fuzzy Sets and Systems, 2007, pp. 2169 - 2188

5. *Colubi A.* Statistical inference about the means of fuzzy random variables: Applications to the analysis of fuzzy-and real-valued data. Fuzzy Sets and sytems, 2009, 344-356

НЕПРЕРЫВНАЯ ВЫБОРКА ИЗ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ЧЕБЫШЕВСКОГО ПРОЕКТОРА В $C(Q)$[1]

©2020 *И. Г. Царьков*

(Москва; *tsar@mech.math.msu.su*)

Путь $p : [0,1] \to X$ (непрерывное отображение) в линейном нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$ называется монотонным, если для любого функционала $x^* \in \operatorname{extr} S^*$ функция $x^*(p(t))$ является монотонной. Геометрически это означает, что поверхности уровня этого функционала (т.е. соответствующие гиперплоскости) этот путь пересекает один раз или по следу некоторого его подпути. Множество M называется монотонно линейно связным, если любые две точки этого множества можно соединить монотонным путём, след которого лежит в M. В пространстве X для непустого множества $V \subset X$ и непустого ограниченного множества $M \subset X$ через $r_V(M)$ обозначим относительный чебышевский радиус, т.е. величину $\inf\{r \geqslant 0 \mid M \subset B(x,r), x \in V\}$. Через $Z_V^\varepsilon(M)$ обозначим множество почти чебышевских центров: $\{x \in V \mid M \subset B(x, r_V(M)+\varepsilon)\}$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00332-а.

Теорема 1. *Пусть X — линейное нормированное пространство, $V \subset X$ — монотонно линейное связное ограниченно компактное непустое множество. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная выборка из отображения $Z_V^\varepsilon(\cdot)$.*

А.Р. Алимов [1], [2] доказал, что в пространстве c_0 всякое солнце является монотонно линейно связным. Также им доказано [2], что в $C(Q)$ (Q — метрический компакт) всякое строгое солнце является монотонно линейно связным.

Следствие 1. *Пусть $X = C(Q)$ (Q — метрический компакт), $V \subset X$ — ограниченно компактное строгое солнце. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная выборка из отображения $Z_V^\varepsilon(\cdot)$.*

Аналогичный результат верен для случая пространства c_0.

Литература

1. *Алимов А.Р.* Связность солнц в пространстве c_0 // Изв. РАН. Сер. матем. — 2005. — Т. 69, № 4. — С. 3–18.

2. *Алимов А.Р.* Монотонная линейная связность чебышёвских множеств в пространстве $C(Q)$ // Матем. сб. — 2006. — Т. 197, № 9. — С. 3–18.

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ

©2020 *М. В. Шамолин*

(Москва; *shamolin@rambler.ru*, *shamolin.maxim@gmail.com*)

Дать общее определение динамической системы с диссипацией довольно затруднительно. В каждом конкретном случае иногда это может быть сделано: вносимые в систему определённые коэффициенты в уравнениях указывают в одних областях фазового пространства на рассеяние энергии, а в других областях — на её подкачку. Последнее приводит к потере известных первых интегралов (законов сохранения), являющимися гладкими функциями [1–3].

Как только в системе обнаруживаются притягивающие или отталкивающие предельные множества, необходимо забыть о полном наборе даже непрерывных во всем фазовом пространстве первых интегралов.

Показана интегрируемость некоторых классов однородных динамических систем нечётного (третьего, пятого, седьмого и девятого) порядка, в которых выделяется система на касательном расслоении к четномерным (соответственно, одномерным, двумерным, трёхмерным и четырёхмерным) многообразиям. При этом силовые поля обладают диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Приведём примеры систем третьего порядка. Пусть v, α, z — фазовые переменные в гладкой динамической системе, правые части которой — однородные полиномы степени по переменным v, z с коэффициентами, зависящими от α. Тогда, выбирая в качестве новой независимой переменной величину q ($dq = vdt$, $d/dq =<'>$, $v \neq 0$), а также новую фазовую переменную Z по формуле $z = Zv$, рассматриваемую систему можно переписать в следующем виде:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \tag{1}$$

$$\begin{gathered} \alpha' = g(\alpha) + h(\alpha)Z + i(\alpha)Z^2, \\ Z' = d(\alpha) + e(\alpha)Z + f(\alpha)Z^2 - Z\Psi(\alpha, Z), \end{gathered} \tag{2}$$

$$\Psi(\alpha, Z) = a(\alpha) + b(\alpha)Z + c(\alpha)Z^2,$$

при этом уравнение (1) на v отделяется, что даёт возможность рассматривать два оставшихся уравнения в качестве системы (2) с одной степенью свободы на двумерном многообразии $N^2\{Z; \alpha\}$. Особняком стоит случай, когда выполнены тождества

$$d(\alpha) \equiv e(\alpha) \equiv f(\alpha) \equiv 0. \tag{3}$$

При этом остальные функции $a(\alpha)$, $b(\alpha)$, $c(\alpha)$, $g(\alpha)$, $h(\alpha)$, $i(\alpha)$, вообще говоря, не равны тождественно нулю. Тогда система (1), (2) имеет естественный аналитический первый интеграл

$$\Phi_1(v; Z) = z = vZ = C_1 = \text{const}. \tag{4}$$

Для полной интегрируемости системы (1), (2) при условии (3) нужно найти ещё один первый интеграл, независимый с (4). Если выполнены следующие условия

$$a(\alpha) = \frac{h^2(\alpha)}{i^2(\alpha)}c(\alpha), b(\alpha) = \frac{h(\alpha)}{i(\alpha)}c(\alpha),\ g(\alpha) = \frac{h^2(\alpha)}{i(\alpha)},$$

где $c(\alpha)$, $h(\alpha)$, $i(\alpha)$ — произвольные гладкие функции на своей области определения, то система (1), (2) при условии (3) имеет два гладких первых интеграла, а именно, (4), а также

$$\Phi_0(v; Z; \alpha) = v^2(\gamma(\alpha) + \epsilon(\alpha)Z) = C_0 = \text{const},$$

где функции $\gamma(\alpha)$ и $\epsilon(\alpha)$ имеют вид

$$\begin{gathered} \gamma(\alpha) = \gamma_0 \exp\left[-2\int_{\alpha_0}^{\alpha} \tfrac{c(\xi)}{i(\xi)} d\xi\right], \\ \epsilon(\alpha) = \epsilon_0 \exp\left[-\int_{\alpha_0}^{\alpha} \tfrac{c(\xi)}{i(\xi)} d\xi\right],\ \gamma_0 = \gamma(\alpha_0),\ \epsilon_0 = \epsilon(\alpha_0). \end{gathered}$$

Внутреннее силовое поле (зависящее от трёх произвольных гладких функций $c(\alpha)$, $h(\alpha)$ и $i(\alpha)$) в системе (1), (2) при условии (3) не нарушает консервативности системы. Ограничимся важным частным случаем системы (1), (2).

Как представительницу систем вида (1), (2) при условии (3) будем рассматривать следующую систему третьего порядка

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \tag{5}$$

$$\begin{gathered} \alpha' = -Z + b_0 Z^2 \delta(\alpha), \\ Z' = -Z\Psi(\alpha, Z), \end{gathered} \tag{6}$$

$$\Psi(\alpha, Z) = -b_0 Z^2 \tilde{\delta}(\alpha), \ \tilde{\delta}(\alpha) = \frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha},$$

$b_0 \geq 0$ — параметр, $\delta(\alpha)$ — некоторая гладкая функция, как систему при отсутствии внешнего поля сил. Система (5), (6) имеет два гладких первых интеграла:

$$\Phi_0(v; Z; \alpha) = v^2(1 - 2b_0 Z\delta(\alpha)) = C_0 = \text{const},$$
$$\Phi_1(v; Z) = vZ = C_1 = \text{const}.$$

Другими словами, независимая подсистема (6) на многообразии $N^2\{Z; \alpha\}$ имеет рациональный по Z первый интеграл вида

$$\Phi(Z; \alpha) = \frac{1 - 2b_0 Z\delta(\alpha)}{Z^2} = C = \text{const},$$

который не имеет существенно особых точек. В силу последнего, подсистема (6) не имеет притягивающих или отталкивающих предельных множеств, позволяющих говорить о наличии в системе диссипации того или иного знака.

Итак, внутреннее силовое поле (зависящее от $b_0 > 0$) в системе (5), (6) не нарушает консервативности системы.

Добавляя следующим образом в систему (5), (6) внешнее силовое поле $F(\alpha)$ при наличии внутреннего ($b_0 > 0$):

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= -Z + b_0 Z^2 \delta(\alpha), \\ Z' &= F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z), \end{aligned} \tag{8}$$

создаётся впечатление, что система осталась консервативной (что имеет место при $b_0 = 0$, т.е. при отсутствии внутреннего поля). Консервативность "подтвердилась" бы наличием в системе двух гладких первых интегралов.

Действительно, при некотором естественном условии у системы (7), (8) существует гладкий первый интеграл вида

$$\Phi_1(v; Z; \alpha) = v^2(Z^2 + F_1(\alpha)) = C_1 = \text{const}, \ \frac{dF_1(\alpha)}{d\alpha} = 2F(\alpha),$$

структура которого напоминает интеграл полной энергии. Но дополнительного гладкого первого интеграла система, вообще говоря, не имеет.

Если $F(\alpha) = \delta(\alpha)\tilde{\delta}(\alpha)$, то система (7), (8) имеет два независимых (один, вообще говоря, трансцендентный и один гладкий) первых интеграла:

$$\begin{gathered} \Phi_0(v; Z; \alpha) = \\ = v^2\left(1 - b_0 Z\delta(\alpha) - b_0(Z^2 + \delta^2(\alpha)) \arctan \tfrac{\delta(\alpha)}{Z}\right) = \\ = C_0 = \text{const}, \end{gathered}$$

$$\Phi_1(v; Z; \alpha) = v^2(Z^2 + \delta^2(\alpha)) = C_1 = \text{const}.$$

Более того, как видно из вида предъявленных первых интегралов, притягивающее множество рассматриваемой системы (7), (8) может быть найдено из системы равенств $Z = \delta(\alpha) = 0$.

Модифицируем далее систему (7), (8), при наличии двух ключевых параметров $b_0, b_1 \geq 0$, введя внешнее силовое поле. Получим систему

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= -Z + b_0 Z^2 \delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\tilde{f}(\alpha), \\ Z' &= F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z), \end{aligned} \tag{10}$$

$$\Psi(\alpha, Z) = -b_0 Z^2 \tilde{\delta}(\alpha) + b_1 F(\alpha)\delta(\alpha), \ \tilde{f}(\alpha) = \frac{\mu - \delta^2(\alpha)}{\tilde{\delta}(\alpha)},$$

$\mu = \text{const}$. Коэффициенты консервативной составляющей силового поля содержат параметр b_0, а неконсервативной составляющей внешнего поля — параметр b_1.

Только что мы ввели такое поле, добавив коэффициент $F(\alpha)$ в уравнение на Z' системы (7), (8), и убедились, что полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет при дополнительном условии:

$b_0 = 0$. Но мы расширим введение силового поля, положив $b_1 > 0$. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $TM^1\{Z;\alpha\}$ примет вид (9), (10). Как будет показано далее, только что было введено диссипативное силовое поле с помощью унимодулярного преобразования.

Если выполнено условие $F(\alpha) = \delta(\alpha)\tilde{\delta}(\alpha)$, то система (9), (10) обладает полным набором — двумя (одним гладким и одним, вообще говоря, трансцендентным) интегралами.

Литература

1. *Шамолин М.В.* Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твёрдого тела в неконсервативном поле сил / М. В. Шамолин // Итоги науки и техники. Сер. "Современная математика и её приложения. Тематические обзоры". — Т. 125. — М.: ВИНИТИ, 2013. — С. 5–254.

2. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трёхмерного многообразия / М. В. Шамолин // Доклады РАН. — 2017. — Т. 477. — № 2. — С. 168–172.

3. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырёхмерного многообразия / М. В. Шамолин // Доклады РАН. — 2018. — Т. 479. — № 3. — С. 270–276.

К ПРОДОЛЖЕНИЮ РОСТКОВ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА[1]

©2020 *Н. А. Шананин*

(Москва; *nashananin@inbox.ru*)

Статья содержит описание некоторых свойств ростков гладких решений квазилинейных уравнений вида

$$(P(u) =)u_t + \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(t,x,u,u_x)\ D^\alpha u = f(t,x,u,u_x), \qquad (1)$$

где $(t,x) = (t,x_1,\ldots,x_n) \in \Omega \subseteq \mathcal{R}^{n+1}$, $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1,\ldots,n$, $u_x = (u_{x_1},\ldots,u_{x_1})$, $a_\alpha(t,x,\zeta) \in C^\infty(\Omega\times\mathcal{C}^{n+1})$ и $f_\alpha(t,x,\zeta) \in C^\infty(\Omega\times\mathcal{C}^{n+1})$. Операторам дифференцирования D_j поставим в соответствие вес 1, а оператору D_t – вес 2. Пусть $v(t,x) \in C^\infty(V)$, где $V \subset \Omega$. Тогда в обозначениях и терминах статьи [1] взвешенный главный символ на функции v имеет вид:

$$p_{v,2}(t,x;\tau,\xi) = i\tau + \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(t,x,v(t,x),v_x(t,x))\ \xi^\alpha,$$

где $\tau \in \mathcal{R}$ и $\xi \in \mathcal{R}^n$, и, поскольку минимальный вес оператора однократного дифференцирования равен 1, совпадает с пучком старших символов $\mathcal{H}_v(t,x;\tau,\xi,h)$, определённым на $v(x)$. Мы говорим, что росток $u_{(t^0,x^0)}$ в точке $x^0 \in \Omega$ удовлетворяет уравнению (1) и писать $(P(u)-f(u))_{(t^0,x^0)} \cong 0$, если для любой бесконечно дифференцируемой функции $u(t,x)$, представляющей росток, найдётся такая окрестность точки (t^0,x^0), в которой функция $u(t,x)$ является локальным решением уравнения. Мы говорим, что уравнение (1)

[1]Публикация была подготовлена по проекту № 2 в рамках договора пожертвования от 01 марта 2019 г. № 1154.

является квазиэллиптическим на ростке $u_{(t^0,x^0)}$, если для любой представляющей росток функции $u(t,x)$ найдётся такая окрестность U точки (t^0,x^0), в которой из равенства $p_{u,2}(t,x;\tau,\xi)=0$ при любых $(t,x)\in U$ следует, что $\tau=0$ и $\xi=0$. Две гиперповерхности Γ_1 и Γ_2 называют эквивалентными в точке (t^0,x^0), если найдётся окрестность V этой точки, такая, что $\Gamma_1\cap V=\Gamma_2\cap V$. Класс эквивалентных в точке (t^0,x^0) гиперповерхностей называют ростком гиперповерхности. Росток гиперповерхности $\Gamma_{(t^0,x^0)}$ назовём нехарактеристическим для оператора P на функции v, если $p_{v,2}(t^0,x^0;0,\varphi_x(t^0,x^0))\neq 0$ для некоторой (а значит и любой) гиперповерхности $\Gamma=\{\ (t,x)\in U|\ \varphi(t,x)=0, d\varphi\neq 0\}$, представляющей росток $\Gamma_{(t^0,x^0)}$. Если уравнение (1) является квазиэллиптическим на функции v в точке (t^0,x^0), то росток гиперповерхности в точке (t^0,x^0) является нехарактеристическим, если и только если вектор конормали (τ,ξ) в этой точке к представителям ростка удовлетворяет условию: $\xi\neq 0$. Говорят, что сужения ростков функций $u_{(t^0,x^0)}$ и $w_{(t^0,x^0)}$ на росток гиперповерхности $\Gamma_{(t^0,x^0)}$ равны и писать $u_{\Gamma_{(t^0,x^0)}}\cong w_{\Gamma_{(t^0,x^0)}}$, если для некоторых представителей ростков $u(t,x)$ и $w(t,x)$ и некотрого представителя Γ ростка гиперповерхности (а, следовательно, и для любых) найдётся такая окрестность V точки (t^0,x^0), что $(u-w)|_{\Gamma\cap V}=0$. Ростки решений квазиэллиптических на «фоновом решении» уравнений вида (1) однозначно определяются сужениями на нехарактеристические гиперповерности:

Теорема 1. *Предположим, что ростки функций $v_{(t^0,x^0)}$ и $w_{(t^0,x^0)}$ удовлетворяют уравнению $(P(u)-f(u))_{(t^0,x^0)}\cong 0$, причём уравнение является квазиэллиптическим на ростке $v_{(t^0,x^0)}$ и, кроме того, на нехарактеристическом на $v_{(t^0,x^0)}$ ростке гиперповерхности $\Gamma_{(t^0,x^0)}$ выполняются равенства*

$v_{\Gamma_{(t^0,x^0)}}\cong w_{\Gamma_{(t^0,x^0)}}$ *и*

$$(D_j u)_{\Gamma_{(t^0,x^0)}}\cong (D_j w)_{\Gamma_{(t^0,x^0)}}\quad \textit{при}\quad j=1,\ldots,n.$$

Тогда $v_{(t^0,x^0)}\cong w_{(t^0,x^0)}$.

Доказательство. Предположим, что $n>1$ и ковектор $(0,\eta)\in T^*_{(t^0,x^0)}(\Omega)\setminus 0$. Возьмём произвольную функцию $v(x)$, представляющую росток $v_{(t^0,x^0)}$. Отметим, что множество ковекторов $\mathcal{M}_{(0,\eta)}=\{(\tau,\xi)\in T^*_{(t^0,x^0)}(\Omega)\mid (\tau,\xi)\not\parallel(0,\eta)\}$ при $n>1$ является связным. Вследствие квазиэллиптичности на $v_{(t^0,x^0)}$ многочлен $p_{v,2}(t^0,x^0;\tau,z\eta+\xi)$ по переменной $z\in\mathcal{C}$ не имеет вещественных корней. Нетрудно проверить, что из того, что число z^0 является коренем многочлена для ковектора $(\tau,\xi)\in\mathcal{M}_{(0,\eta)}$, следует, что число $(-z^0)$ является коренем многочлена для ковектора $(\tau,-\xi)\in\mathcal{M}_{(0,\eta)}$. Отсюда и из непрерывной зависимости корней вытекает, что для каждой неколлинеарной пары ковекторов $(0,\eta)$ и (τ,ξ) характеристический многочлен имеет два простых корня, мнимые части которых противоположны по знаку. Отсюда вытекает, что для каждой неколлинеарной пары ковекторов $(0,\eta^0)$ и (τ^0,ξ^0) существует окрестность $W\subset\Omega\times\mathcal{R}^n\times\mathcal{R}^{n+1}$ точки $(t^0,x^0,\eta^0,\tau^0,\xi^0)$, в которой характеристическое уравнение

$$p_{v,2}(t,x;\tau,z\eta+\xi)=0,\ z\in\mathcal{C},$$

имеет ровно два простых комплексных корня, причём мнимая часть каждого из корней отлична от нуля. При $n=1$ указанное свойство корней очевидно. Теперь утверждение доказываемой теоремы следует из теоремы 1 статьи [1].

Рассмотрим вопрос об однозначном продолжении ростков решений уравнений вида (1) вдоль кривых. Пусть $\gamma=\{(t^0,x(s))\mid s\in(0,1)\}$ –непрерывный путь, содержащийся в слое $\Omega\cap\{t=t^0\}$. Мы говорим, что функция u удовлетворяет уравнению (1) вдоль кривой γ, если функция $u(t,x)$ определена и бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности пути γ и в каждой точке $(t^0, x) \in \gamma$ удовлетворяет равенству $(P(u) - f(u))_{(t^0,x)} \cong 0$.

Теорема 2. *Предположим, что функции v и w удовлетворяют уравнению* (1) *вдоль кривой γ и уравнение является квазиэллиптическим на ростках $v_{(t^0,x)}$ для всех $(t^0, x) \in \gamma$. Тогда из $v_{(t^0,x^0)} \cong w_{(t^0,x^0)}$ в точке $(t^0, x^0) \in \gamma$ следует $v_{(t^0,x)} \cong w_{(t^0,x)}$ во всех точках $(t^0, x) \in \gamma$.*

Доказательство. Пусть (t^0, x^1) – произвольная точка пути γ. Тогда найдётся окрестность U части пути, соединяющей точки (t^0, x^0) и (t^0, x^1), в которой функции v и $w \in C^\infty(U)$, удовлетворяют уравнению (1) в каждой точке и уравнение является квазиэллиптическим на v. Теперь из полученных при доказательстве теоремы 1 свойств корней характеристического уравнения и теоремы 3 статьи [1] следует, что $v_{(t^0,x)} \cong w_{(t^0,x)}$ во всех точках (t^0, x) связной компоненты слоя $U \cap \{t = t^0\}$ и, в частности, $v_{(t^0,x^1)} \cong w_{(t^0,x^1)}$.

Пусть Ω_1 и Ω_2 – два открытых подмножества в Ω. Будем говорить, что отображение $g : C^\infty(\Omega_1) \to C^\infty(\Omega_2)$ сохраняет решения уравнения (1), если из того, что $u(t, x) \in C^\infty(\Omega_1)$ является решением уравнения на множестве Ω_1, следует, что $g \circ u = g(u)(t, x) \in C^\infty(\Omega_2)$ и является решением на Ω_2. Пусть $(t^0, x^0) \in \Omega_1 \cap \Omega_2$. Мы говорим, что функция $v(t, x) \in C^\infty(\Omega_1)$ g-инвариантна в (t^0, x^0), если $g \circ v|_{(t^0,x^0)} \cong v|_{(t^0,x^0)}$. Из теоремы 2 вытекает

Теорема 3. *Предположим, что отображение g сохраняет решения уравнения* (1), *функция $v \in C^\infty(\Omega_1)$ удовлетворяют уравнению вдоль пути $\gamma \subset \Omega_1$‘ $\cap\, \Omega_2 \cap \{t = t^0\}$, причём уравнение является квазиэллиптическим на ростках $v_{(t^0,x)}$ для всех $(t^0, x) \in \gamma$. Тогда из $g \circ v_{(t^0,x^0)} \cong v_{(t^0,x^0)}$ в точке $(t^0, x^0) \in \gamma$ следует $g \circ v_{(t^0,x)} \cong v_{(t^0,x)}$ во всех точках $(t^0, x) \in \gamma$.*

Литература

1. *Шананин Н.А.* О слоевой структуре множеств симметрийной инвариантности решений квазилинейных уравнений. Матем. заметки, 88:6, 2010, 924-934.

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ВЫРОЖДЕНИЕМ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

©2020 *В. В. Шеметова, С. С. Орлов*
(Иркутск; *valentina501@mail.ru*; *orlov_ sergey@inbox.ru*)

Пусть E_1 и E_2 — вещественные банаховы пространства, $u : \mathbb{R} \to E_1$ и $f : \mathbb{R} \to E_2$ — искомая и заданная функции. Рассмотрим класс линейных дифференциальных уравнений

$$Bu'(t) = Au(t) + \alpha Au(t - h) + f(t), \quad t > 0, \qquad (1)$$

где B и A — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2 такие, что $\overline{D(B)} = \overline{D(A)} = E_1$ и $D(B) \subseteq D(A)$, параметр $\alpha \neq 0$. Предполагается, что оператор B *фредгольмов*, т. е. $\overline{R(B)} = R(B)$ и $\dim N(B) = \dim N(B^*) = n < +\infty$. Зададим естественное для уравнений с отклоняющимся аргументом начальное условие вида

$$u(t) = \omega(t), \, -h \leq t \leq 0, \qquad (2)$$

где $h > 0$ — заданное число, функция $\omega(t) \in C\big([-h; 0], E_1\big)$ известна и задаёт решение уравнения (1) на промежутке $[-h; 0]$.

Классическим решением начальной задачи (1), (2) назовём

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (научные проекты № 18-01-00643 А и № 18-51-54001 Вьет_а) и Иркутского государственного университета (индивидуальный исследовательский грант № 091-19-212).

функцию $u(t) \in C\left(\left[-h;+\infty\right), E_1\right) \cap C^1\left(\left(0;+\infty\right), E_1\right)$, удовлетворяющую уравнению (1) и начальному условию (2).

Осуществим продолжение классического решения нулём на интервал $(-\infty; -h)$ следующим образом:

$$\tilde{u}(t) = \omega(t)\big(\theta(t+h) - \theta(t)\big) + u(t)\theta(t).$$

Тогда в классе $K'_+(E_1)$ распределений с ограниченным слева носителем начальная задача (1), (2) имеет вид уравнения

$$\big(B\delta'(t) - A\delta(t) - \alpha A\delta(t-h)\big) * \tilde{u}(t) = \tilde{g}(t), \tag{3}$$

с правой частью $\tilde{g}(t) \in K'_+(E_2)$ такой, что

$$\tilde{g}(t) = f(t)\theta(t) + B\delta'(t) * \omega(t)\big(\theta(t+h) - \theta(t)\big) +$$

$$+B\omega(0)\delta(t) - A\omega(t)\big(\theta(t+h) - \theta(t)\big).$$

Здесь и далее δ — функция Дирака, θ — функция Хевисайда. Нетрудно показать, что распределение

$$\tilde{u}(t) = \mathcal{E}(t) * \tilde{g}(t)$$

является единственным решением уравнения (3) в классе $K'_+(E_1)$ (*обобщённым* решением начальной задачи (1), (2)), где обобщённая оператор-функция $\mathcal{E}(t)$ при произвольных $v(t) \in K'_+(E_2)$ и $w(t) \in K'_+(E_1)$ удовлетворяет равенствам

$$\big(B\delta'(t) - A\delta(t) - \alpha A\delta(t-h)\big) * \mathcal{E}(t) * v(t) = v(t),$$

$$\mathcal{E}(t) * \big(B\delta'(t) - A\delta(t) - \alpha A\delta(t-h)\big) * w(t) = w(t),$$

и называется *фундаментальной оператор-функцией* [1] или фундаментальным решением абстрактного функционально-дифференциального оператора $B\delta'(t) - A\delta(t) - \alpha A\delta(t-h)$.

Пусть n — размерность $N(B)$, $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ — базис в $N(B)$, $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ — базис в $N(B^*)$, а $\{\gamma_i\}_{i=1}^n \subset E_1^*$ и $\{z_i\}_{i=1}^n \subset E_2$ — биортогональные им системы элементов, т. е.

$$\langle \varphi_i,\, \gamma_j\rangle = \langle z_i,\, \psi_j\rangle = \delta_{ij},\ i,\, j = 1, \ldots, n.$$

Введём ограниченный оператор $\Gamma:\ E_2 \to D(B)$ вида

$$\Gamma = \tilde{B}^{-1} = \left(B + \sum_{i=1}^{n} \langle \cdot,\, \gamma_i\rangle\, z_i\right)^{-1},$$

называемый *оператором Треногина–Шмидта*, элементы $\varphi_i^{(j)} \in E_1$ и $\psi_i^{(j)} \in E_2^*$, где $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, p_i$, которые составляют *A-жорданов набор* оператора B и *A^*-жорданов набор* оператора B^* соответственно [2], проектор $\tilde{Q}$ вида

$$\tilde{Q} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot,\, \psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}.$$

Теорема. *Пусть линейный оператор B фредгольмов и имеет полный A-жорданов набор, тогда фундаментальное решение абстрактного функционально-дифференциального оператора $B\delta'(t) - A\delta(t) - \alpha A\delta(t-h)$ имеет вид*

$$\mathcal{E}(t) = \Gamma e^{A\Gamma t}(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q})\theta(t) +$$

$$+\Gamma \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(t-kh)^k}{k!}\alpha^k (A\Gamma)^k e^{A\Gamma(t-kh)}(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q})\theta(t-kh) -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1} \langle \cdot,\, \psi_i^{(j)}\rangle \varphi_i^{(p_i-k-j+2)}\delta^{(k-1)}(t) * \mu^k(t),$$

где $\mathbb{I}_1$ и $\mathbb{I}_2$ — тождественные операторы в E_1 и E_2, степень обобщённой функции

$$\mu(t) = \delta(t) + \sum_{l=1}^{+\infty}(-\alpha)^l \delta(t-lh)$$

понимается в смысле операции свёртки.

Справедливо равенство $(\delta(t)+\alpha\delta(t-h))*\mu(t)=\delta(t)$, т.е. распределение $\mu(t)\in\mathcal{D}_+$ является обратным элементом к $\big(\delta(t)+\alpha\delta(t-h)\big)\in\mathcal{D}'_+$ в сверточной алгебре $\mathcal{D}'_+$.

Литература

1. *Sidorov N. et al.* Lyapunov — Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2002. 568 p.

2. *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 528 с.

ON GUIDING POTENTIALS AND ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF TRAJECTORIES FOR RANDOM DIFFERENTIAL INCLUSIONS

©2020 *Y. E. Bezmelnitsyna*
(Voronezh; *bezmelnicyna@inbox.ru*)

In the recent years the sphere of applications of the method of guiding functions which is due to M.A. Krasnoselskii and A.I. Perov (see, e.g., [8] and also [3, 5] and their references) has been extended to the study of qualitative behavior of solutions of differential equations and inclusions of various types, covering, in particular, their asymptotics (see, e.g., [2, 6, 7, 9, 10]).

In the present paper we define a random nonsmooth guiding potential for random differential inclusions and apply it to the study of the asymptotic behavior of solutions for such inclusions.

In what follows we will use some known notions and notations from the theory of multimaps (see, e.g., [3, 5]).

Let (X,d_X) and (Y,d_Y) be metric spaces. By the symbols $P(Y)$, $C(Y)$ and $K(Y)$ we denote the collections of all nonempty, closed and, respectively, compact subsets of the

space Y. If Y is a normed space, $Kv(Y)$ denote the collections of all nonempty convex compact subsets of Y.

Definition 1. A multimap $F:X\to P(Y)$ is called *upper semicontinuous (u.s.c.)* at the point $x\in X$ if for each open set $V\subset Y$ such that $F(x)\subset V$ there exists $\delta>0$ such that $d_X(x,x')<\delta$ implies $F(x')\subset V$. A multimap $F:X\to P(Y)$ is called u.s.c. if it is u.s.c. at each point $x\in X$.

Let I be a closed subset of $\mathbb{R}$ with the Lebesgue measure.

Definition 2. A multifunction $F:I\to K(Y)$ is called *measurable* if, for each open subset $W\subset Y$, its pre-image $F^{-1}(W)=\{t\in I: F(t)\subset W\}$ is the measurable subset of I.

Let (Ω,Σ,μ) be a complete probability space.

Definition 3. (see [1]). Multimap $\mathcal{F}\colon\Omega\times X\to C(Y)$ is called a *random multioperator* if it is product-measurable, i.e. measurable w.r.t. $\Sigma\otimes\mathbb{B}(X)$, where $\Sigma\otimes\mathbb{B}(X)$ is the smallest σ-algebra on $\Omega\times X$ which contains all the sets $A\times B$, where $A\in\Sigma$ and $B\in\mathbb{B}(X)$ and $\mathbb{B}(X)$ denotes the Borel σ-algebra on X. If, moreover, $\mathcal{F}(\omega,\cdot)\colon X\to C(Y)$ is u.s.c. for all $\omega\in\Omega$, then $\mathcal{F}$ is called a *random u-multioperator*.

We consider the following Cauchy problem for a random differential inclusion of the form:

$$x'(\omega,t)\in\mathcal{F}(\omega,t,x(\omega,t)), \tag{1}$$

under assumptions that the random u-multioperator $\mathcal{F}:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to Kv(\mathbb{R}^n)$ satisfies the sublinear growth condition: there exists a function $\alpha:\Omega\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ such that (i) for each $\omega\in\Omega$ a function $\alpha(\cdot,t)$ is measurable, (ii) a function $\alpha(\omega,\cdot)$ is locally integrable, and we have for each $\omega\in\Omega$

$$\|\mathcal{F}(\omega,t,x)\|\le\alpha(\omega,t)(1+\|x\|)\ \text{for a.e. } t\in\mathbb{R};\ x\in\mathbb{R}^n.$$

By a *solution of inclusion (1) on* $\mathbb{R}$ we mean a function $x:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, such that (j) $x(\cdot,t)$ is measurable for a.e. $t\in\mathbb{R}$;

(jj) $x(\omega, \cdot)$ is absolutely continuous for each $\omega \in \Omega$; satisfying for each $\omega \in \Omega$ inclusion (1) for a.e. $t \in \mathbb{R}$ and the initial condition at almost every point

$$x(\omega, 0) = x_0. \tag{2}$$

Let us recall some notions of non-smooth analysis (see [4]).

Let V be a locally Lipschitz function on the space $\mathbb{R}^n$. For $x_0 \in \mathbb{R}^n$ and $\nu \in \mathbb{R}^n$ *the Clarke generalized derivative* $V^0(x_0; \nu)$ at x_0 along the direction ν is given by the formula

$$V^0(x_0; \nu) = \varlimsup_{\substack{x \to x_0 \\ t \to 0+}} \frac{V(x + t\nu) - V(x)}{t},$$

where $x \in \mathbb{R}^n$. Then *the Clarke generalized gradient* $\partial V(x)$ of the function V at the point x_0 is defined in the following way:

$$\partial V(x_0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \quad \langle x, \nu \rangle \leq V^0(x_0; \nu) \quad \text{for all } \ \nu \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Recall (see, e.g., [4]) that a locally Lipschitz function $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is called *regular* if for each $x \in \mathbb{R}^n$ and $\nu \in \mathbb{R}^n$ there exists the derivative along the direction $V'(x, \nu)$ and it coincides with $V^0(x, \nu)$. It is known that convex functions are regular.

Definition 4. A map $V \colon \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is called a *random nonsmooth potential* if the following two conditions are satisfied: (i) $V(\cdot, x) \colon \Omega \to \mathbb{R}$ is measurable for every $x \in \mathbb{R}^n$; (ii) $V(\omega, \cdot) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is a regular function for every $\omega \in \Omega$. Denote by $\mathfrak{V}$ the collection of all random nonsmooth potentials $V : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ such that for each $\omega \in \Omega$ the coercivity condition $\lim_{\|x\| \to +\infty} V(\omega, x) = -\infty$ holds true.

Notice that, given a function $V \in \mathfrak{V}$, for each $r > 0$ and $\omega \in \Omega$ there exists $k_\omega(r) > r$ such that if $\alpha_r(\omega) := \inf\{V(\omega, x), \|x\| \leq r\}$, then for each $\omega \in \Omega$ we have $V(\omega, x) < \alpha_r(\omega), \ \|x\| \geq k_\omega(r)$.

Now, let $g : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ be a given function such that (j) $g(\cdot, t)$ is measurable for a.e. $t \in \mathbb{R}_+$; (jj) $g(\omega, \cdot)$ is absolutely continuous; (jjj) $\inf\{g(\omega, t) : \ \omega \in \Omega, \ t \in \mathbb{R}\} \geq 1$.

Definition 5. A random nonsmooth potential $V \in \mathfrak{V}$ is called a *random nonsmooth guiding potential for inclusion (1) along the function* g if for each $\omega \in \Omega$ there exists $r_0(\omega) > 0$ such that $g(\omega, t)\|x\| \geq r_0(\omega), \ t \in \mathbb{R}$ implies for each $\omega \in \Omega$

$$\langle \upsilon, g'(\omega, t)x + g(\omega, t)y \rangle \geq 0, \quad \text{if } t > 0;$$

$$\langle \upsilon, g'(\omega, t)x + g(\omega, t)y \rangle \leq 0, \quad \text{if } t < 0;$$

for each $y \in F(\omega, t, x), \ \upsilon \in \partial V(g(\omega, t)x)$.

Theorem 1. If $V \in \mathfrak{V}$ is a random nonsmooth guiding potential for inclusion (1) along the function g then each solution of Cauchy problem (1), (2) satisfies the estimate

$$\|x(\omega, t)\| \leq k_V(\omega) \cdot \frac{1}{g(\omega, t)}, \quad \omega \in \Omega, \ t \in \mathbb{R}, \ k_V(\omega) > 0.$$

References

1. *Andres J., Górniewicz L.* Random topological degree and random differential inclusions. Topol. Meth. Nonl. Anal. 40 (2012), 337–358.

2. *Avramescu C.* Asymptotic behavior of solutions of nonlinear differential equations and generalized guiding functions. Electronic J. of Qualitive Theory of Differ. Equ. 13 (2003), 1-9.

3. *Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V.* Introduction to the Theory of Multivalued Maps and Differential Inclusions - 2nd ed. Moscow: Librokom, 2011.

4. *Clarke F.H.* Optimization and Nonsmooth Analysis - 2nd ed. Classics in Applied Mathematics, 5. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM). Philadelphia: PA, 1990.

5. *Górniewicz L.* Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings - 2nd ed. Berlin: Springer, 2006.

6. *Kornev S., Obukhovskii V., Yao J.-C.* On asymptotics of solutions for a class of functional differential inclusions. Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions, Control and Optimization. 34 (2014), 219–227.

7. *Kornev S.V., Obukhovskii V.V.* On asymptotic behavior of solutions of differential inclusions and the method of guiding functions. Differential Equations. 51 (2015), 711–716.

8. *Krasnosel'skii M. A.* The Operator of Translation Along the Trajectories of Differential Equations. Translations of Mathematical Monographs - Vol. 19. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1968.

9. *Obukhovskii V., Kamenskii M., Kornev S., Liou Y.-C.* On asymptotics of solutions for a class of differential inclusions with a regular right-hand part. Journal of Nonlinear and Convex Analysis. 18 (2017), no. 5, 967–975.

10. *Kornev S., Obukhovskii V., Yao J.-C.* Nonsmooth integral guiding potentials and asymptotic behavior of solutions for inclusions with causal multioperators. Optimization (2019)

ON PERIODIC SOLUTIONS OF RANDOM FUNCTIONAL DIFFERENTIAL INCLUSIONS

©2020 *E. N. Getmanova*
(Voronezh; *ekaterina_getmanova@bk.ru*)

Let us mention that the method of guiding functions was developed by Krasnoselskii and Perov (see, e.g., [14]) for the investigation of periodic oscillations in dynamical systems governed by differential equations. The notion of guiding function was generalized in several directions (see, e.g., [1, 2, 4-13]).

Based on the approach given in [1] we present the notion of nonsmooth random generalized integral guiding functions and use those to prove some existence results of random solutions to periodic problem of random functional differential inclusion.

In what follows we will use some known notions and notations from the theory of multimaps (see, e.g., [2, 4]).

Let (X, d_X) and (Y, d_Y) be metric spaces. By the symbols $P(Y)$, $C(Y)$ and $K(Y)$ we denote the collections of all nonempty, closed and, respectively, compact subsets of the space Y. If Y is a normed space, $Kv(Y)$ denote the collections of all nonempty convex compact subsets of Y.

Definition 1. A multimap $F : X \to P(Y)$ is called *upper semicontinuous (u.s.c.)* at the point $x \in X$ if for each open set $V \subset Y$ such that $F(x) \subset V$ there exists $\delta > 0$ such that $d_X(x, x') < \delta$ implies $F(x') \subset V$. A multimap $F : X \to P(Y)$ is called u.s.c. if it is u.s.c. at each point $x \in X$.

Let I be a closed subset of $\mathbb{R}$ with the Lebesgue measure.

Definition 2. A multifunction $F : I \to K(Y)$ is called *measurable* if, for each open subset $W \subset Y$, its pre-image $F^{-1}(W) = \{t \in I : F(t) \subset W\}$ is the measurable subset of$I$.

Let (Ω, Σ, μ) be a complete probability space and $I = [0, T]$.

Definition 3. (see [1]). Multimap $\mathcal{F}\colon \Omega \times X \to C(Y)$ is called a *random multioperator* if it is product-measurable, i.e. measurable w.r.t. $\Sigma \otimes \mathbb{B}(X)$, where $\Sigma \otimes \mathbb{B}(X)$ is the smallest σ-algebra on $\Omega \times X$ which contains all the sets $A \times B$, where $A \in \Sigma$ and $B \in \mathbb{B}(X)$ and $\mathbb{B}(X)$ denotes the Borel σ-algebra on X. If, moreover, $\mathcal{F}(\omega, \cdot)\colon X \to C(Y)$ is u.s.c. for all $\omega \in \Omega$, then $\mathcal{F}$ is called a *random u-multioperator*.

For $\tau > 0$ we denote by the symbol $\mathcal{C}$ the space $C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$ of continuous functions $x : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^n$ with norm $\|x\| = \sup_{t\in[-\tau,0]} \|x(t)\|$. For $x(\cdot) \in C([-\tau, T]; \mathbb{R}^n)$, the symbol $x_t \in \mathcal{C}$ denotes the function defined as $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$.

We consider the periodic problem for a random functional differential inclusion of the following form:

$$x'(\omega, t) \in \mathcal{F}\big(\omega, t, x_t\big), \tag{1}$$

$$x(\omega, 0) = x(\omega, T), \tag{2}$$

where the multimap $\mathcal{F}\colon \Omega \times \mathbb{R} \times \mathcal{C} \multimap \mathbb{R}^n$ satisfies conditions:

$(\mathcal{F}_t)$ multifunction $\mathcal{F}$ is a T-periodic in the second argument;

$(\mathcal{F}1)$ $\mathcal{F}\colon \Omega \times I \times \mathcal{C} \to Kv(\mathbb{R}^n)$ is a random u-multioperator;

$(\mathcal{F}2)$ there exists a function $c : \Omega \times I \to \mathbb{R}$ such that (i) for each $\omega \in \Omega$ a function $c(\cdot, t)$ is measurable, (ii) a function $c(\omega, \cdot)$ is locally integrable, and we have for each $\omega \in \Omega$ $\|\mathcal{F}(\omega, t, \phi)\| := \sup\{|z|\colon z \in \mathcal{F}(\omega, t, \phi)\} \leq c(\omega, t)(1 + |\phi|)$. From $(\mathcal{F}1)$-$(\mathcal{F}2)$ it follows that the superposition multioperator $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}\colon \Omega \times C(I, \mathbb{R}^n) \to P(L^2(I, \mathbb{R}^n)), \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x) = \{f \in L^2(I, \mathbb{R}^n)\colon f(s) \in \mathcal{F}(\omega, s, x(s)), \text{for a.e.}\, s \in I\}$ is well defined.

By a *random solution* of problem (1), (2) we mean a function $\xi\colon \Omega \times I \to \mathbb{R}^n$ such that

(i) the map $\omega \in \Omega \to \xi(\omega, \cdot) \in C([-\tau, T]; \mathbb{R}^n)$ is measurable;

(ii) for each $\omega \in \Omega$ absolutely continuous function $\xi(\omega, \cdot) \in C([-\tau, T]; \mathbb{R}^n)$ satisfies (1), (2) for a.e. $t \in [-\tau, T]$.

Let us recall some notions of nonsmooth analysis (see [3]).

Let V be a locally Lipschitz function on the space $\mathbb{R}^n$. For $x_0 \in \mathbb{R}^n$ and $\nu \in \mathbb{R}^n$ *the Clarke generalized derivative* $V^0(x_0; \nu)$ at x_0 along the direction ν is given by the formula $V^0(x_0; \nu) = \overline{\lim\limits_{x \to x_0, t \to 0+}} \frac{V(x+t\nu) - V(x)}{t}$, where $x \in \mathbb{R}^n$. Then *the Clarke generalized gradient* $\partial V(x)$ of the function V at the point x_0 is defined as $\partial V(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \nu\rangle \leq V^0(x_0; \nu) \,\text{for all}\, \nu \in \mathbb{R}^n\}$. Recall that a locally Lipschitz function $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is called *regular* if for each $x \in \mathbb{R}^n$ and $\nu \in \mathbb{R}^n$ there exists the derivative along the direction $V'(x, \nu)$ and it coincides with $V^0(x, \nu)$.

Definition 4. A map $V\colon \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is called a *random nonsmooth potential* if the following two conditions are satisfied: (i) $V(\cdot, x)\colon \Omega \to \mathbb{R}$ is measurable for every $x \in \mathbb{R}^n$; (ii) $V(\omega, \cdot)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is a locally Lipschitz for every $\omega \in \Omega$.

Definition 5. A random nonsmooth potential $V\colon \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is said to be a *random nonsmooth generalized integral guiding function* for inclusion (1) if the following conditions hold: (i) there exists $R_0 > 0$ such that $0 \notin \partial V(\omega, x)$ for all $(\omega, z) \in$

$\Omega \times \mathbb{R}^n\colon |z| \geq R_0$; (ii) the function $V(\omega, \cdot)$ is regular for every $\omega \in \Omega$; (iii) there exists $N > 0$ such that for all $\omega \in \Omega$ from $x \in C(I, \mathbb{R}^n)$ with $\|x\|_2 \geq N$, it follows that $\int_0^T \langle \upsilon(t), f(t)\rangle dt \geq 0$ for all $\upsilon \in \mathcal{P}_{\partial V}(\omega, x)$ and for all $f \in \mathcal{P}_F(\omega, x)$.

Theorem 1. Let conditions $(\mathcal{F}_t), (\mathcal{F}1), (\mathcal{F}2)$ hold. If there exists a regular random nonsmooth generalized integral guiding function for inclusion (1) such that $\lim_{\|x\| \to +\infty} V(\omega, x) = +\infty$, then problem (1), (2) has a random solution.

References

1. *Andres J., Górniewicz L.* Random topological degree and random differential inclusions. Topol. Meth. Nonl. Anal. 40 (2012), 337–358.

2. *Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V.* Introduction to the Theory of Multivalued Maps and Differential Inclusions - 2nd ed. Moscow: Librokom, 2011.

3. *Clarke F.H.* Optimization and Nonsmooth Analysis - 2nd ed. Classics in Applied Mathematics, 5. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM). Philadelphia: PA, 1990.

4. *Górniewicz L.* Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings - 2nd ed. Berlin: Springer, 2006.

5. *Kornev S.V.* On the method of multivalent guiding functions to the periodic problem of differential inclusions. Autom. Remote Control. 64 (2003), 409–419.

6. *Kornev S.V., Obukhovskii V.V.* On nonsmooth multivalent guiding functions. Differ. Equ. 39 (2003), 1578–1584.

7. *Kornev S.V., Obukhovskii V.V.* On some developments of the method of integral guiding functions. Funct. Differ. Equ. 12 (2005), 303–310.

8. *Kornev S.V., Obukhovskii V.V.* Non-smooth guiding potentials in problems on forced oscillations. Autom. Remote Control. 68 (2007), 1–8.

9. *Kornev S.V., Obukhovskii V.V.* On localization of the guiding function method in the periodic problem of differential inclusions. Russian Mathematics (Iz. VUZ). 5 (2009), 23–32.

10. *Kornev S.V.* Nonsmooth integral directing functions in the problems of forced oscillations. Autom. Remote Control. 76 (2015), 1541–1550.

11. *Kornev S.V.* Multivalent guiding function in a problem on existence of periodic solutions of some classes of differential inclusions. Russian Mathematics (Iz. VUZ). 11 (2016), 14–26.

12. *Kornev S.V., Obukhovskii V.V., Zecca P.* On the method of generalized integral guiding functions in the periodic problem of functional differential inclusions. Differ. Uravn. 52 (2016), no. 10, 1335—1344.

13. *Kornev S.V., Obukhovskii V.V., Zecca P.* Guiding functions and periodic solutions for inclusions with causal multioperators. Appl. Anal. 96 (2017), issue 3, 418–428.

14. *Krasnosel'skii M.A.* The Operator of Translation Along the Trajectories of Differential Equations. Translations of Mathematical Monographs - Vol. 19. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1968.

APPROXIMATION OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS IN BANACH SPACES[1]

©2020 *S. Piskarev*
(Moscow; *piskarev@gmail.com*)

In this talk we have a deal with the well-posedness and approximation for nonhomogeneous fractional differential equations in Banach spaces E:

$$(\mathbf{D}_t^\alpha u)(t) = Au(t) + f(t), \quad t \in [0,T]; \quad u(0) = x,$$

[1]This work was supported by Russian Foundation for Basic Research (Grant Nos. 20-51-50002 and 20-01-00015).

where $\mathbf{D}_t^\alpha$ is the Caputo-Dzhrbashyan derivative $0 < \alpha < 1$. Follow [1] we get the necessary and sufficient condition for the well-posedness of nonhomogeneous fractional Cauchy problems in the spaces $C_0^\beta([0,T];E)$. Then by using implicit difference scheme and explicit difference scheme, we deal with the full discretization of the solutions of nonhomogeneous fractional differential equations in time variables and the same way as in [2] we get the stability of the schemes and the order of convergence.

We discuss also discretization of semilinear problem.

References

1. *Krein S.* Linear differential equations in Banach space. M.: Nauka, 1987. 408 p.

2. *R. Liu, Miao Li, S. Piskarev.* The Order of Convergence of Difference Schemes for Fractional Equations. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **38** (6) (2017), 754–769.

Оглавление

Научное издание

МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ «ВОРОНЕЖСКАЯ ЗИМНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА С. Г. КРЕЙНА – 2020»

Оригинал-макет подготовили:
Костин Д.В., Данилов М.С., Авдеев Н.Н.,
Бабошин С.Д., Уткин А.В.

Издание публикуется в авторской редакции
и авторском наборе

Подписано в печать 21.01.2020. Формат 60×84/16
Усл. печ. л. 19,76. Тираж 250 экз. Заказ 11

ООО Издательско-полиграфический центр «Научная книга»
394018, г. Воронеж, ул. Никитинская, 38, оф. 308
Тел.: +7 (473) 200-81-02, 200-81-04
http://www.n-kniga.ru   E-mail: zakaz@n-kniga.ru

Отпечатано в типографии ООО ИПЦ «Научная книга»
394026, г. Воронеж, Московский пр-т, 11/5
Тел.: +7 (473) 220-57-15, 296-90-83
http://www.n-kniga.ru   E-mail: typ@n-kniga.ru