Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2011**

Körper- und Galoistheorie

Vorlesung 26

Konstruierbare Einheitswurzeln

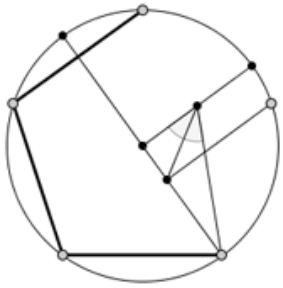
DEFINITION 26.1. Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Man sagt, dass *das regelmäßige n-Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar* ist, wenn die komplexe Zahl

$$e^{2\pi i/n} = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i \sin(\frac{2\pi}{n})$$

eine konstruierbare Zahl ist.

Die Menge der komplexen Einheitswurzeln $e^{\frac{2\pi ik}{n}}$, $k = 0, \ldots, n-1$, bilden die Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks, wobei 1 eine Ecke bildet. Alle Eckpunkte liegen auf dem Einheitskreis. Die Ecke $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ ist eine primitive Einheitswurzel; wenn diese mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, so sind auch alle weiteren Eckpunkte konstruierbar. Das reguläre n-Eck ist genau dann konstruierbar, wenn der n-te Kreisteilungskörper ein Unterkörper der konstruierbaren Zahlen ist.

Bei $n = 1, 2$ kann man sich darüber streiten, ob man von einem regelmäßigen n-Eck sprechen soll, jedenfalls gibt es die zugehörigen Einheitswurzeln und diese sind aus $\mathbb{Q}$, also erst recht konstruierbar. Das regelmäßige Dreieck ist ein gleichseitiges Dreieck und dieses ist konstruierbar nach Beispiel 18.3, da der dritte Kreisteilungskörper eine quadratische Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ ist (man kann einfacher auch direkt zeigen, dass ein gleichseitiges Dreieck aus seiner Grundseite heraus konstruierbar ist). Das regelmäßige Viereck ist ein Quadrat mit den Eckpunkten $1, i, -1, -i$, und dieses ist ebenfalls konstruierbar. Das regelmäßige Fünfeck ist ebenfalls konstruierbar, wie in Beispiel 18.5 bzw. Aufgabe 26.9 gezeigt wurde. Wir werden im Folgenden sowohl positive als auch negative Resultate zur Konstruierbarkeit von regelmäßigen n-Ecken vorstellen.



Konstruktion eines regulären Fünfecks mit Zirkel und Lineal

LEMMA 26.2. *Sei $m = kn$, $m, k, n \in \mathbb{N}_+$. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Das regelmäßige 2^r-Eck, $r \in \mathbb{N}$, ist konstruierbar.*
(2) *Wenn das regelmäßige m-Eck konstruierbar ist, so sind auch das regelmäßige n-Eck und das regelmäßige k-Eck konstruierbar.*
(3) *Wenn n und k teilerfremd sind und wenn das regelmäßige n-Eck und das regelmäßige k-Eck konstruierbar sind, so ist auch das regelmäßige m-Eck konstruierbar.*

Beweis. (1) folgt daraus, dass eine Winkelhalbierung stets mit Zirkel und Lineal durchführbar ist. (2). Nach Voraussetzung ist $e^{\frac{2\pi i}{nk}}$ konstruierbar. Dann ist auch nach Satz 23.9 die Potenz

$$(e^{\frac{2\pi i}{nk}})^n = e^{\frac{2\pi i}{k}}$$

konstruierbar. (3). Seien nun $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ und $e^{\frac{2\pi i}{k}}$ konstruierbar und n und k teilerfremd. Nach dem Lemma von Bezout gibt es dann ganze Zahlen r, s mit $rn + sk = 1$. Daher ist auch

$$(e^{\frac{2\pi i}{n}})^s (e^{\frac{2\pi i}{k}})^r = (e^{\frac{2\pi ik}{nk}})^s (e^{\frac{2\pi in}{nk}})^r = e^{\frac{2\pi isk}{nk}} e^{\frac{2\pi irn}{nk}} = e^{\frac{2\pi i(sk+rn)}{nk}} = e^{\frac{2\pi i}{nk}}$$

konstruierbar. □

Aus diesem Lemma kann man in Zusammenhang mit den oben erwähnten Konstruktionsmöglichkeiten folgern, dass die regelmäßigen $3 \cdot 2^r$-Ecke, die regelmäßigen $5 \cdot 2^r$-Ecke und die regelmäßigen $15 \cdot 2^r$-Ecke für jedes r konstruierbar sind.

SATZ 26.3. *Sei n eine natürliche Zahl derart, dass das regelmäßige n-Eck konstruierbar ist. Dann ist $\varphi(n)$ eine Zweierpotenz.*

Beweis. Die Voraussetzung besagt, dass die primitive Einheitswurzel $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ konstruierbar ist. Dann muss nach Korollar 24.6 der Grad des Minimalpolynoms von ζ eine Zweierpotenz sein. Nach Korollar 18.10 ist das Minimalpolynom von ζ das n-te Kreisteilungspolynom, und dieses hat den Grad $\varphi(n)$. Also muss $\varphi(n)$ eine Zweierpotenz sein. □

Winkeldreiteilung

Wir sind nun in der Lage, das Problem der Winkeldreiteilung zu beantworten.

KOROLLAR 26.4. *Das regelmäßige 9-Eck ist nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar.*

Beweis. Wäre das regelmäßige 9-Eck konstruierbar, so müsste nach Satz 26.3 $\varphi(9)$ eine Zweierpotenz sein. Es ist aber $\varphi(9) = 2 \cdot 3 = 6$. □

SATZ 26.5. *Es ist nicht möglich, einen beliebig vorgegebenen Winkel mittels Zirkel und Lineal in drei gleich große Teile zu unterteilen.*

Beweis. Es genügt, einen (konstruierbaren) Winkel α anzugeben derart, dass $\alpha/3$ nicht konstruierbar ist. Wir betrachten $\alpha = 120°$ Grad, welcher konstruierbar ist, da die dritten Einheitswurzeln konstruierbar sind, weil sie nämlich in einer quadratischen Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ liegen. Dagegen ist der Winkel $\alpha/3 = 120°/3 = 40°$ nicht konstruierbar, da andernfalls das regelmäßige 9-Eck konstruierbar wäre, was nach Korollar 26.4 aber nicht der Fall ist. □

Wir geben noch einen weiteren Beweis, dass die Winkeldreiteilung mit Zirkel und Lineal nicht möglich ist, der nicht auf der allgemeinen Irreduzibilität der Kreisteilungspolynome beruht.

LEMMA 26.6. *Es sei $F \in \mathbb{Z}[X]$ ein normiertes Polynom vom Grad ≤ 3 ohne Nullstelle in $\mathbb{Z}$. Dann ist F irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.*

Beweis. Aufgrund von Lemma 20.13 und der Gradvoraussetzung genügt es zu zeigen, dass es keine Faktorzerlegung $F = GH$ in $\mathbb{Z}[X]$ mit $\operatorname{grad}(G) = 1$ geben kann. Sei also angenommen, dass $G = aX + b \in \mathbb{Z}[X]$ ein Teiler von F ist. Der Leitkoeffizient a teilt den Leitkoeffizienten von F, also 1, daher muss $a \in \mathbb{Z}$ eine Einheit sein. Dann ist $a = \pm 1$ und somit ist $\pm b$ eine Nullstelle im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Einfache Beispiele wie $F = (2X + 1)^2$ zeigen, dass ohne die Voraussetzung normiert die Aussage nicht stimmt. Ob ein ganzzahliges normiertes Polynom ganzzahlige Nullstellen besitzt oder nicht, ist im Allgemeinen einfach zu zeigen. Für n betragsmäßig groß kann man durch eine einfache Abschätzung zeigen, dass es dafür keine Nullstelle geben kann, und für n in einem verbleibenden überschaubaren Bereich kann man durch explizites Ausrechnen feststellen, ob eine Nullstelle vorliegt oder nicht.

BEMERKUNG 26.7. Wir zeigen direkt, dass man den Winkel 20° Grad nicht konstruieren kann (obwohl man 60° Grad konstruieren kann). Aufgrund der *Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen* gilt

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$$

und damit

$$\begin{aligned}(2\cos 20°)^3 - 3(2\cos 20°) - 1 &= 2(4\cos^3 20° - 3\cos 20° - \frac{1}{2}) \\ &= 2(\cos 60° - \frac{1}{2}) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Also wird $2\cos 20°$ vom Polynom $X^3 - 3X - 1$ annulliert. Dieses Polynom hat keine ganzzahlige Nullstelle und ist daher nach Lemma 26.6 irreduzibel. Also muss es nach Lemma 7.12 das Minimalpolynom von $2\cos 20°$ sein. Daher kann $2\cos 20°$ nach Korollar 24.6 nicht konstruierbar sein und damit ebensowenig $\cos 20°$.

Fermatsche Primzahlen

Die Frage der Konstruierbarkeit von regelmäßigen n-Ecken führt uns zu Fermatschen Primzahlen.

DEFINITION 26.8. Eine Primzahl der Form $2^s + 1$, wobei s eine positive natürliche Zahl ist, heißt *Fermatsche Primzahl*.

Es ist unbekannt, ob es unendlich viele Fermatsche Primzahlen gibt. Es ist noch nicht mal bekannt, ob es außer den ersten fünf Fermatschen Primzahlen

$$3, 5, 17, 257, 65537$$

überhaupt weitere Fermatschen Primzahlen gibt.

LEMMA 26.9. *Bei einer Fermatschen Primzahl $2^s + 1$ hat der Exponent die Form $s = 2^r$ mit einem $r \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Wir schreiben $s = 2^k u$ mit u ungerade. Damit ist

$$2^{2^k u} + 1 = (2^{2^k})^u + 1\,.$$

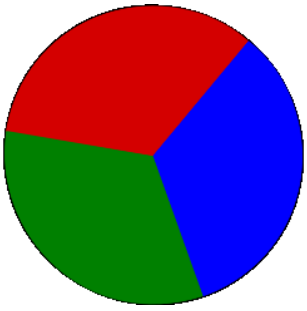
Für ungerades u gilt generell die polynomiale Identität (da -1 eine Nullstelle ist)

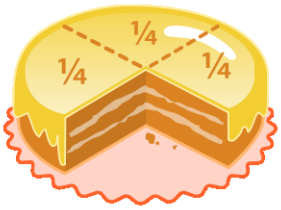
$$X^u + 1 = (X+1)(X^{u-1} - X^{u-2} + X^{u-3} - \ldots + X^2 - X + 1)\,.$$

Also ist $2^{2^k} + 1 \geq 3$ ein Teiler von $2^{2^k u} + 1$. Da diese Zahl nach Voraussetzung prim ist, müssen beide Zahlen gleich sein, und dies bedeutet $u = 1$. □

Eine Fermatsche Primzahl ist nach diesem Lemma also insbesondere eine Fermat-Zahl im Sinne der folgenden Definition.

DEFINITION 26.10. Eine Zahl der Form $2^{2^r} + 1$, wobei r eine natürliche Zahl ist, heißt *Fermat-Zahl*.





Diese Torte wurde nicht mit Zirkel und Lineal geteilt.

SATZ 26.11. *Ein reguläres n-Eck ist genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn die Primfaktorzerlegung von n die Gestalt hat*

$$n = 2^\alpha p_1 \cdots p_k\,,$$

wobei die p_i verschiedene Fermatsche Primzahlen sind.

Beweis. Es sei $n = 2^\alpha p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ die Primfaktorzerlegung von n mit den verschiedenen ungeraden Primzahlen p_i, $i = 1, \ldots, k$, und positiven Exponenten $r_i \geq 1$ (und $\alpha \geq 0$). Nach Satz 26.3 muss die eulersche Funktion eine Zweierpotenz sein, also

$$\varphi(n) = 2^t .$$

Andererseits gilt nach Korollar 15.16 die Beziehung

$$\varphi(n) = 2^{\alpha-1}(p_1 - 1)p_1^{r_1-1} \cdots (p_k - 1)p_k^{r_k-1}$$

(bei $\alpha = 0$ ist der Ausdruck $2^{\alpha-1}$ zu streichen). Da dies eine Zweierpotenz sein muss, dürfen die ungeraden Primzahlen nur mit einem Exponenten 1 (oder 0) auftreten. Ferner muss jede beteiligte Primzahl p die Gestalt $p = 2^s + 1$ haben, also eine Fermatsche Primzahl sein. Für die andere Richtung muss man aufgrund von Lemma 26.2 lediglich zeigen, dass für eine Fermatsche Primzahl $p = 2^s + 1$ das regelmäßige p-Eck konstruierbar ist. Der p-te Kreisteilungskörper besitzt nach Lemma 18.4 den Grad $p - 1 = 2^s$, und dieser ist der Zerfällungskörper des p-ten Kreisteilungspolynoms und wird von der p-ten primitiven Einheitswurzel $\zeta = e^{2\pi i/p}$ erzeugt. Aufgrund von Satz 25.6 ist somit ζ konstruierbar. $\square$

Abbildungsverzeichnis