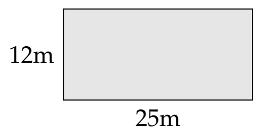
Espressioni letterali e valori numerici 9

9.1 Lettere

9.1.1 Lettere per esprimere formule

Esempio 9.1. In tutte le villette a schiera di recente costruzione del nuovo quartiere Stella, vi è un terreno rettangolare di larghezza 12m e lunghezza 25m. Quanto misura la superficie del terreno?



Il prodotto delle dimensioni rappresenta la misura richiesta: $S = (25 \cdot 12)\text{m}^2 = 300\text{m}^2$.

Il semplice problema che abbiamo risolto è relativo ad un caso particolare; quel terreno con quelle dimensioni. Ma se le dimensioni fossero diverse?

La procedura per determinare la misura della superficie ovviamente è sempre la stessa e la possiamo esprimere con la formula $A = b \cdot h$ nella quale abbiamo indicato con b la misura di una dimensione (base) e con h la misura dell'altra dimensione (altezza), assegnate rispetto alla stessa unità di misura.

❑ **Osservazione** La formula ha carattere generale e serve ogniqualvolta si chiede di determinare la superficie di un rettangolo, note le misure delle dimensioni (base e altezza) rispetto alla stessa unità di misura.

In geometria si utilizzano tantissime formule che ci permettono di esprimere perimetro e area delle figure piane, superficie laterale e totale e volume dei solidi. Nelle formule le lettere sostituiscono le misure di determinate grandezze, tipiche di quella figura o di quel solido.

✍ *Esercizio proposto:* 9.1

9.1.2 Lettere per descrivere schemi di calcolo

Esempio 9.2. L'insegnante chiede agli alunni di scrivere «il doppio della somma di due numeri».

- ➡ Antonella scrive: $2 \cdot (3 + 78)$;
- ➡ Maria chiede «Quali sono i numeri? Se non li conosco non posso soddisfare la richiesta»;
- ➡ Giulia scrive: $2 \cdot (a + b)$.

Maria si è posta il problema ma non ha saputo generalizzare la richiesta. Antonella si è limitata ad un caso particolare. Giulia ha espresso con una formula l'operazione richiesta dall'insegnante.

❑ **Osservazione** L'uso di lettere dell'alfabeto per indicare numeri ci permette di generalizzare uno schema di calcolo, cioè ci consente di scrivere un algoritmo.

Definizione 9.1. Un'*espressione letterale* o *espressione algebrica* è uno schema di calcolo in cui compaiono numeri e lettere legati dai simboli delle operazioni.

Per scrivere un'espressione letterale ci si deve attenere a regole precise, quelle stesse che utilizziamo per scrivere espressioni numeriche.

Per esempio, la scrittura "$3 \cdot 4+$" non è corretta, in quanto il simbolo "+" dell'addizione deve essere seguito da un altro numero per completare l'operazione. Analogamente non è corretta l'espressione letterale "$a \cdot c+$".

Come nelle espressioni numeriche, anche nelle espressioni letterali le parentesi indicano la priorità di alcune operazioni rispetto ad altre. La formula $a \cdot (x+y)$ specifica "il prodotto di un numero per la somma di altri due". Essa è diversa da $a \cdot x + y$ che rappresenta "il prodotto di due numeri sommato a un terzo numero".

✍ *Esercizi proposti:* 9.2, 9.3

9.1.3 Lettere per esprimere proprietà

Le proprietà delle operazioni tra numeri si esprimono con lettere per indicare che valgono per numeri qualsiasi. La scrittura "$(a+b)+c = a+(b+c)$", per esempio, esprime la proprietà associativa dell'addizione. In essa le lettere a, b e c indicano numeri qualsiasi. I due schemi di calcolo ci dicono che per sommare tre numeri è indifferente aggiungere alla somma dei primi due il terzo oppure aggiungere al primo la somma degli altri due.

✍ *Esercizi proposti:* 9.4, 9.5, 9.6, 9.7, 9.8, 9.9, 9.10, 9.11

9.2 Il valore numerico di un'espressione letterale

Ogni espressione letterale rappresenta uno schema di calcolo in cui le lettere che vi compaiono sostituiscono numeri. L'espressione letterale

$$2 \cdot x^2 + x$$

traduce una catena di istruzioni che in linguaggio naturale sono così descritte: "prendi un numero (x); fanne il quadrato (x^2); raddoppia quanto ottenuto ($2 \cdot x^2$); aggiungi al risultato il numero preso inizialmente ($2 \cdot x^2 + x$)".

Questa catena di istruzioni si può anche rappresentare in modo schematico

$$x \quad \rightarrow \quad x^2 \quad \rightarrow \quad 2 \cdot x^2 \quad \rightarrow \quad 2 \cdot x^2 + x$$

e può essere usata per istruire un esecutore a "calcolare" l'espressione letterale quando al posto della lettera x si sostituisce un numero.

Calcoliamo il valore dell'espressione $2 \cdot x^2 + x$, sostituendo alla lettera x il numero naturale 5. Seguiamo la schematizzazione $x \rightarrow x^2 \rightarrow 2 \cdot x^2 \rightarrow 2 \cdot x^2 + x$ e otteniamo: $5 \rightarrow 25 \rightarrow 50 \rightarrow 55$. Il risultato è 55. Più brevemente scriviamo 5 nell'espressione letterale al posto di x: otteniamo l'espressione numerica $2 \cdot 5^2 + 5$ il cui risultato è 55.

E se al posto di x sostituiamo -5? Otteniamo un risultato diverso? Eseguiamo la sostituzione di x con -5 e abbiamo: $2 \cdot (-5)^2 + (-5) = \dots$ Lasciamo a te il calcolo finale. Ti sarai accorto che il risultato è cambiato.

Definizione 9.2. In un'espressione letterale le *lettere* rappresentano le *variabili* che assumono specifiche quantità quando vengono sostituite da numeri. Chiamiamo *valore* di un'espressione letterale il risultato numerico che si ottiene eseguendo le operazioni indicate dallo schema di calcolo quando alle lettere sostituiamo un determinato numero. Il valore di un'espressione letterale dipende dal *valore assegnato* alle sue variabili.

D'ora in poi quando scriveremo un'espressione letterale in cui compare l'operazione di moltiplicazione, tralasceremo il puntino fin qui usato per evidenziare l'operazione. Così l'espressione $5 \cdot a^2 + \frac{3}{8} \cdot a \cdot b - 7 \cdot b^2$ verrà scritta in modo più compatto $5a^2 + \frac{3}{8}ab - 7b^2$.

Esempio 9.3. Calcolare il valore numerico della seguente espressione: $3a(a-b)$ per $a = 1$, $b = 1$.

Svolgimento: $3 \cdot 1 \cdot (1 - 1) = 3 \cdot 1 \cdot 0 = 0$.

✍ *Esercizi proposti:* 9.12, 9.13, 9.14, 9.15, 9.16, 9.17, 9.18, 9.19, 9.20, 9.21, 9.22

9.3 Condizione di esistenza di un'espressione letterale

Ti proponiamo adesso alcuni casi particolari per l'espressione $E = \frac{x-y}{3x}$.

Caso I: $x = 1 \wedge y = 1 \Rightarrow E = 0$.

Il numeratore della frazione è 0, mentre il denominatore vale 3; il calcolo finale è dunque $\frac{0}{3} = 0$. Vi sono, secondo te, altre coppie di valori $(x; y)$ che fanno assumere ad E quello stesso valore?

Caso II: $x = 0 \wedge y = 25 \Rightarrow E = ?$.

Invece di mettere un valore ad E, abbiamo messo punto di domanda perché in questo caso il numeratore della frazione è -25 mentre il denominatore vale 0; il calcolo finale è dunque $-\frac{25}{0}$, impossibile. Vi sono, secondo te, altre coppie di valori $(x; y)$ che rendono impossibile il calcolo del valore per E?

Non possiamo allora concludere che per ogni coppia di numeri razionali $(x; y)$ l'espressione E assume un numero razionale. Per poter calcolare il valore di E non possiamo scegliere coppie aventi x uguale a zero. Scriveremo quindi come premessa alla ricerca dei valori di E la *Condizione di Esistenza* (C. E.) $x \neq 0$.

L'esempio appena svolto ci fa capire che di fronte a un'espressione letterale dobbiamo riflettere sullo schema di calcolo che essa rappresenta prima di assegnare valori alle variabili che vi compaiono.

Se l'espressione letterale presenta una divisione in cui il divisore contiene variabili, dobbiamo stabilire la C. E., eliminando quei valori che rendono nullo il divisore. Per comprendere la necessità di porre le condizioni d'esistenza ricordiamo la definizione di divisione.

Quanto fa 15 diviso 5? In forma matematica: $15 : 5 = 3$ perché $3 \cdot 5 = 15$. Quindi, generalizzando $a : b = c$ se $c \cdot b = a$.

Vediamo ora cosa succede quando uno dei numeri è 0:

- quanto fa $0 : 5$? Devo cercare un numero che moltiplicato per 5 mi dia 0: trovo solo 0; infatti $0 \cdot 5 = 0$.
- quanto fa $15 : 0$? Devo cercare un numero che moltiplicato per 0 mi dia 15: non lo trovo; infatti nessun numero moltiplicato per 0 fa 15. Quindi, $15 : 0$ è impossibile perché non esiste alcun x per il quale $x \cdot 0 = 15$.
- quanto fa $0 : 0$? Devo cercare un numero che moltiplicato per 0 mi dia 0: non ne trovo solo uno. Infatti, qualunque numero moltiplicato per 0 fa 0. Per esempio, $0 : 0 = 33$; infatti $33 \cdot 0 = 0$. Ma anche $0 : 0 = -189{,}6$; infatti $-189{,}6 \cdot 0 = 0$. E anche $0 : 0 = 0$; infatti $0 \cdot 0 = 0$. Ancora $0 : 0 = 10^{99}$, infatti $10^{99} \cdot 0 = 0$. Quindi $0 : 0$ è indeterminato perché non è possibile determinare un unico x tale che $x \cdot 0 = 0$, ma per qualunque valore di x si ha $x \cdot 0 = 0$.

Consideriamo l'espressione letterale $E = \dfrac{a-b}{a+b}$ dove a e b rappresentano numeri razionali. Premettiamo:

a) la descrizione a parole dello schema di calcolo: "divisione tra la differenza di due numeri e la loro somma";
b) la domanda che riguarda il denominatore: "quand'è che la somma di due numeri razionali dà come rislutato 0?";
c) la C. E.: "a e b non devono essere numeri opposti".

Siamo ora in grado di completare la tabella:

a	3	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{19}{2}$
b	-3	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{8}$	$-\frac{19}{2}$
$E = \frac{a-b}{a+b}$					

Dalla C. E., ci accorgiamo subito che la prima coppia e la quarta sono formate da numeri opposti, pertanto non possiamo calcolare il valore di E ad esse relativo. L'ultima coppia è formata da numeri uguali pertanto la loro differenza è 0, così il numeratore si annulla e quindi il valore di E è 0. Per la coppia $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ il valore di E è -1 mentre è 1 per la coppia $\left(\frac{3}{4}; 0\right)$. La tabella verrà quindi così completata:

a	3	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{19}{2}$
b	-3	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{8}$	$-\frac{19}{2}$
$E = \frac{a-b}{a+b}$	impossibile	-1	1	impossibile	0

Cosa succede per la coppia $(0; 0)$?

✍ *Esercizio proposto:* 9.24