Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2022/2023**

Grundkurs Mathematik I

Arbeitsblatt 8

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 8.1. Skizziere die Produktmenge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Übungsaufgaben

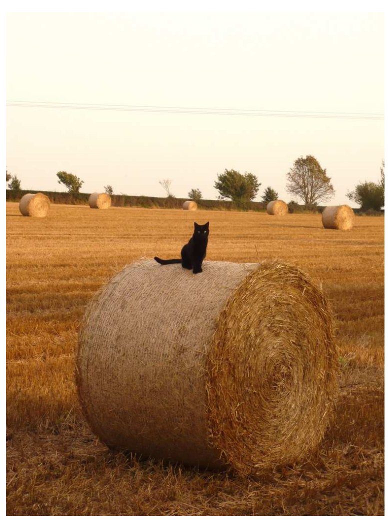
Aufgabe 8.2. Es sei

$$T = \{\text{Studienrat}, \text{Oberstudienrat}, \text{Studiendirektor}, \text{Referendar}\}$$

und

$$N = \{\text{Müller}, \text{Maier}, \text{Sengupta}, \text{Hinterwald}, \text{Lutz}, \text{Obermüller}\}.$$

Aus welchen Elementen besteht $T \times N$? Kann man die Paarschreibweise hier umgehen?



Wie kann man den runden Strohballen (ohne die Katze) als eine Produktmenge beschreiben?

Aufgabe 8.3. Beschreibe für je zwei (einschließlich dem Fall, dass das Produkt mit sich selbst genommen wird) der folgenden geometrischen Mengen die Produktmengen.

(1) Ein Geradenstück I.
(2) Eine Kreislinie K.
(3) Eine Kreisscheibe D.
(4) Eine Parabel P.

Welche Produktmengen lassen sich als eine Teilmenge im Raum realisieren, welche nicht?

Es empfiehlt sich, die in den folgenden Aufgaben formulierten Mengenidentitäten zu veranschaulichen.

Aufgabe 8.4. Es seien A und B disjunkte Mengen und C eine weitere Menge. Zeige die Gleichheit

$$C \times (A \uplus B) \,=\, (C \times A) \uplus (C \times B).$$

Aufgabe 8.5.*

Es seien M und N Mengen und seien $A \subseteq M$ und $B \subseteq N$ Teilmengen. Zeige die Gleichheit

$$(A \times N) \cap (M \times B) \,=\, A \times B.$$

Aufgabe 8.6. Es seien M und N Mengen und seien $A_1, A_2 \subseteq M$ und $B_1, B_2 \subseteq N$ Teilmengen. Zeige die Gleichheit

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) \,=\, (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2).$$

Aufgabe 8.7. Es seien A und B disjunkte Mengen. Zeige die Gleichheit

$$(A \uplus B) \times (A \uplus B) \,=\, (A \times A) \uplus (A \times B) \uplus (B \times A) \uplus (B \times B).$$

Aufgabe 8.8. Es seien L und M Mengen. Zeige, dass die Abbildung

$$\tau \colon L \times M \longrightarrow M \times L,\, (x, y) \longmapsto (y, x),$$

eine bijektive Abbildung zwischen den Produktmengen $L \times M$ und $M \times L$ festlegt.

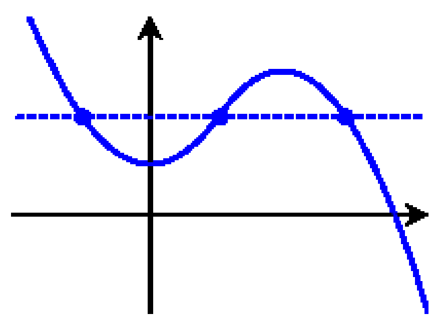
Aufgabe 8.9. Es sei P eine Menge von Personen und V die Menge der Vornamen von diesen Personen und N die Menge der Nachnamen von diesen Personen. Definiere natürliche Abbildungen von P nach V, nach N und nach $V \times N$ und untersuche sie in Hinblick auf die relevanten Abbildungsbegriffe.

Aufgabe 8.10. Skizziere die folgenden Teilmengen im $\mathbb{R}^2$.

(1) $\{(x, y) \mid x + y = 3\}$,
(2) $\{(x, y) \mid x + y \leq 3\}$,
(3) $\{(x, y) \mid (x + y)^2 \geq 4\}$,
(4) $\{(x, y) \mid |x + 2| \geq 5 \text{ und } |y - 2| \leq 3\}$,
(5) $\{(x, y) \mid |x| = 0 \text{ und } |y^4 - 2y^3 + 7y - 5| \geq -1\}$,
(6) $\{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 3 \text{ und } 0 \leq y \leq x^3\}$.

Aufgabe 8.11. Erstelle eine Wertetabelle und skizziere den Graphen für das Nachfolgernehmen in den natürlichen Zahlen.

Aufgabe 8.12. Wie sehen die Graphen der Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aus, die Sie in der Schule kennengelernt haben?



Aufgabe 8.13. Woran erkennt man am Graphen einer Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

ob f injektiv bzw. surjektiv ist?

Aufgabe 8.14. Es sei F die Menge aller Farben und $\star$ die Verknüpfung, die aus zwei Farben ihre Mischfarbe bestimmt, in der die beiden Farben mit gleichen Anteilen eingehen. Ist diese Verknüpfung assoziativ?

Aufgabe 8.15. Es sei N die Menge aller Vornamen. Wir betrachten die Verknüpfung

$$N \times N \longrightarrow N,$$

die einem Vornamenpaar (x, y) den Bindestrichvornamen $x - y$ zuordnet.

(1) Was ist der Wert von $(\text{Kata}, \text{Coline})$ unter dieser Verknüpfung?

(2) In welchem Sinne muss man hier Vornamen verstehen, damit diese Verknüpfung wohldefiniert ist?
(3) Ist die Verknüpfung kommutativ?
(4) Ist die Verknüpfung assoziativ?
(5) Besitzt die Verknüpfung ein neutrales Element? Bzw. wie muss man N und die Verknüpfung abändern, damit sie ein neutrales Element besitzt?
(6) Ist die Verknüpfung surjektiv?
(7) Ist die Verknüpfung injektiv?

Aufgabe 8.16. Es sei M die Menge aller weiblichen Doppelvornamen (Bindestrichvornamen, wobei die einzelnen Teile einfache Vornamen sind, und jede Kombination erlaubt ist). Wir betrachten die Verknüpfung

$$M \times M \longrightarrow M,$$

die einem Doppelvornamenpaar $(A-B, C-D)$ den Doppelvornamen $A-D$ zuordnet.

(1) Was ist der Wert von (Lea-Marie, Klara-Sophie) unter dieser Verknüpfung?
(2) Ist die Verknüpfung kommutativ?
(3) Ist die Verknüpfung assoziativ?
(4) Besitzt die Verknüpfung ein neutrales Element?
(5) Ist die Verknüpfung surjektiv?
(6) Ist die Verknüpfung injektiv?

Aufgabe 8.17. Es sei M eine Menge mit einer Verknüpfung darauf, die wir als Produkt schreiben.

(1) Wie viele sinnvollen Klammerungen gibt es für die Verknüpfung von vier Elementen?
(2) Die Verknüpfung sei nun assoziativ. Zeige, dass das Produkt von vier Elementen nicht von irgendeiner Klammerung abhängt.

Aufgabe 8.18. Wir zählen im Zehnersystem. Erstelle im Kopf (und mit Fingern) das „Kleine Einsundeins“ entlang der Definition, man berechne also $m+n$ für $0 \leq m, n \leq 9$, indem man jeweils von m ausgehend n-fach den Nachfolger nimmt. Ist es geschickter, die Zahl m im Kopf und die Zahl n mit den Fingern abzuspeichern oder umgekehrt?

Aufgabe 8.19. Wir zählen im Strichsystem und addieren gemäß der Definition über das Nachfolgernehmen. Was ist einfacher zu berechnen,

$$||||||| + |||| \text{ oder } ||||||| + |||| \,?$$

Was bedeutet im Strichsystem das Umlegeprinzip?

Aufgabe 8.20. Wir zählen

heute, morgen, übermorgen, überübermorgen, überüberübermorgen, ...

und wollen mit diesen Zahlen addieren.

(1) Welche alltagssprachliche Formulierung besitzt die Addition in diesem Zählmodell?
(2) Welche sprachlichen Formulierungen drücken aus, das heute das neutrale Element der Addition ist.
(3) Was ist morgen plus morgen?
(4) Was ist übermorgen plus übermorgen?
(5) Was ist überübermorgen plus überüberübermorgen?

Aufgabe 8.21. Es seien k und n natürliche Zahlen. Zeige, dass die (Nachfolger-)Abbildung

$$\{k, \ldots, n\} \longrightarrow \{k', \ldots, n'\},\, i \longmapsto i',$$

bijektiv ist.

Aufgabe 8.22. Bestimme in den jeweiligen Modellen der natürlichen Zahlen die Anzahl der folgenden Abschnitte von $\mathbb{N}$.

(1)
$$\{|||||||||, \ldots, |||||||||||||||||||||\}\,.$$
(2)
$$\{1201, \ldots, 21010\}$$
(im Dreiersystem).
(3)
$$\{\text{überübermorgen}, \ldots, \text{überüberüberüberüberüberübermorgen}\}\,.$$

Aufgabe 8.23. Es sei $k \in \mathbb{N}$ fixiert. Ist die Abbildung

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\, n \longmapsto n + k,$$

injektiv, surjektiv, bijektiv?

Aufgabe 8.24.*

Die Kinder haben erfolgreich das „Kleine Einsundeins“ gelernt (einschließlich der Null) und auch das Kommutativgesetz verstanden. Wie viele Additionen beherrschen sie, wenn man $m+n$ und $n+m$ als gleiche Addition ansieht?

Aufgabe 8.25. Es sei n eine natürliche Zahl. Auf wie viele Arten kann n als eine Summe von zwei natürlichen Zahlen dargestellt werden? Inwiefern muss man diese Fragestellung präzisieren?

Aufgabe 8.26.*

Auf wie viele Arten kann man die 5 als Summe von positiven natürlichen Zahlen darstellen (Darstellungen, die man durch Vertauschen der Reihenfolge ineinander überführen kann, gelten dabei als gleich; $5 = 5$ ist eine Darstellung)?

Aufgabe 8.27.*

Wir betrachten die naürliche Additionstabelle bis zu einer bestimmten Zahl n, also

	1	2	3	$\ldots$	$n-1$	n
1	$1+1$	$1+2$	$1+3$	$\ldots$	$1+n-1$	$1+n$
2	$2+1$	$2+2$	$2+3$	$\ldots$	$2+n-1$	$2+n$
3	$3+1$	$3+2$	$3+3$	$\ldots$	$3+n-1$	$3+n$
$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$n-1+1$	$n-1+2$	$n-1+3$	$\ldots$	$n-1+n-1$	$n-1+n$
n	$n+1$	$n+2$	$n+3$	$\ldots$	$n+n-1$	$n+n$

Zeige durch Induktion, dass die Gesamtsumme aller in der Tabelle auftretenden Summen gleich $(n+1)n^2$ ist, also

$$\sum_{1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq n} (i+j) \;=\; (n+1)n^2 .$$

Aufgabe 8.28. (1) Ist die Addition

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\ (x,y) \longmapsto x+y,$$

injektiv? Ist sie surjektiv?

(2) Ist die Multiplikation

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\ (x,y) \longmapsto x \cdot y,$$

injektiv? Ist sie surjektiv?

(3) Ist die Multiplikation

$$\mathbb{N}_{\geq 2} \times \mathbb{N}_{\geq 2} \longrightarrow \mathbb{N}_{\geq 2},\ (x,y) \longmapsto x \cdot y,$$

auf den natürlichen Zahlen ≥ 2 injektiv? Ist sie surjektiv?
(4) Kennen Sie eine bijektive Verknüpfung?
(5) Gibt es eine „allgemeine Erwartungstendenz“, ob eine Verknüpfung eher injektiv (surjektiv) oder nicht ist?

Aufgabe 8.29. Man mache sich klar, dass die beiden in der Vorlesung besprochenen Zugänge zur Addition (also über das Nachfolgernehmen und über die disjunkte Vereinigung) nicht tragfähig sind für die Addition in $\mathbb{Z}$, in $\mathbb{Q}$ und in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 8.30. Auf einem Schiff sind 26 Schafe und 10 Ziegen. Wie alt ist der Kapitän?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 8.31. (2 Punkte)

Skizziere die folgenden Teilmengen im $\mathbb{R}^2$.

(1) $\{(x,y) \mid |2x| = 5 \text{ und } |y| \geq 3\}$,
(2) $\{(x,y) \mid -3x \geq 2y \text{ und } 4x \leq -5y\}$,
(3) $\{(x,y) \mid y^2 - y + 1 \leq 4\}$,
(4) $\{(x,y) \mid xy = 2 \text{ oder } x^2 + y^2 = 1\}$.

Aufgabe 8.32. (2 Punkte)

Es sei M eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung darauf, die wir als $\star$ schreiben. Zeige, dass

$$(a \star b) \star (c \star (d \star e)) \ = \ a \star ((b \star (c \star d)) \star e)$$

für beliebige $a, b, c, d, e \in M$ gilt.

Aufgabe 8.33. (2 Punkte)

Es sei M eine Menge mit einer Verknüpfung $*$. Zeige, dass es maximal ein neutrales Element für die Verknüpfung gibt.

Aufgabe 8.34.* (3 Punkte)

Es seien k, n natürliche Zahlen. Zeige, dass die Abbildung

$$\{1, \ldots, k\} \longrightarrow \{1+n, \ldots, k+n\},\ i \longmapsto i+n,$$

bijektiv ist.

Anleitung: Führe Induktion nach n unter Verwendung von Aufgabe 8.21.

Aufgabe 8.35. (3 Punkte)

Es seien M und N zwei endliche Teilmengen einer Menge G. Zeige, dass die Formel

$$\#(M) + \#(N) = \#(M \cup N) + \#(M \cap N)$$

gilt.

Aufgabe 8.36. (2 Punkte)

Gilt für die Vereinigung von Mengen die „Abziehregel“, d.h. kann man aus $A \cup C = B \cup C$ auf $A = B$ schließen?

Abbildungsverzeichnis