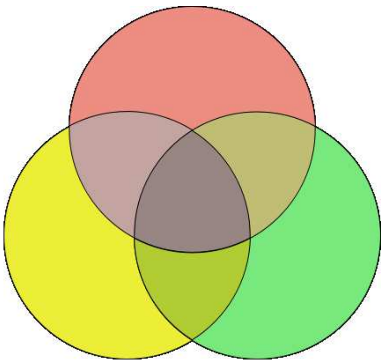
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

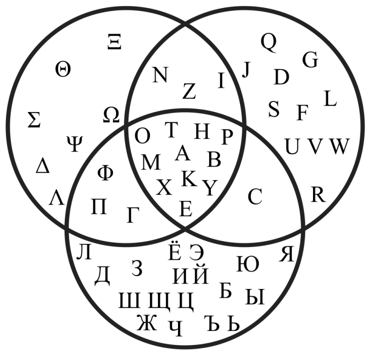
Arbeitsblatt 1

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 1.1. Skizziere ein Mengendiagramm, das zu vier Mengen alle möglichen Schnittmengen darstellt.



Ein abstraktes und



ein konkretes Mengendiagramm.

Übungsaufgaben

Aufgabe 1.2. Es sei LA die Menge der Großbuchstaben des lateinischen Alphabets, GA die Menge der Großbuchstaben des griechischen Alphabets und RA die Menge der Großbuchstaben des russischen Alphabets. Bestimme die folgenden Mengen.

(1) $GA \setminus RA$.
(2) $(LA \cap GA) \cup (LA \cap RA)$.
(3) $RA \setminus (GA \cup RA)$.
(4) $RA \setminus (GA \cup LA)$.
(5) $(RA \setminus GA) \cap ((LA \cup GA) \setminus (GA \cap RA))$.

Aufgabe 1.3. Skizziere die folgenden Teilmengen im $\mathbb{R}^2$.

(1) $\{(x, y) | \, x = 5\}$,
(2) $\{(x, y) | \, x \geq 4 \text{ und } y = 3\}$,
(3) $\{(x, y) | \, y^2 \geq 2\}$,

(4) $\{(x,y)|\ |x|=3 \text{ und } |y|\le 2\}$,
(5) $\{(x,y)|\, 3x\ge y \text{ und } 5x\le 2y\}$,
(6) $\{(x,y)|\, xy=0\}$,
(7) $\{(x,y)|\, xy=1\}$,
(8) $\{(x,y)|\, xy\ge 1 \text{ und } y\ge x^3\}$,
(9) $\{(x,y)|\, 0=0\}$,
(10) $\{(x,y)|\, 0=1\}$.

Welche geometrische Gestalt haben die Mengen, in deren Beschreibung nur eine (oder gar keine) Variable vorkommt?

Aufgabe 1.4. Bestimme für die Mengen

$$M=\{a,b,c,d,e\},\ N=\{a,c,e\},\ P=\{b\},\ R=\{b,d,e,f\}$$

die Mengen

(1) $M\cap N$,
(2) $M\cup R$,
(3) $(N\cup P)\cap R$,
(4) $N\setminus R$,
(5) $(M\cup P)\setminus(R\setminus N)$,
(6) $((P\cup R)\cap N)\cap R$,
(7) $(R\setminus P)\cap(M\setminus N)$.

Aufgabe 1.5.*

Es seien A, B und C Mengen. Beweise die Identität

$$A\setminus(B\cap C) = (A\setminus B)\cup(A\setminus C)\,.$$

Aufgabe 1.6. Es seien A, B und C drei Mengen. Man beweise die folgenden Identitäten.

(1) $A\cap\emptyset=\emptyset$,
(2) $A\cup\emptyset=A$,
(3) $A\cap B=B\cap A$,
(4) $A\cup B=B\cup A$,
(5) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$,
(6) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,
(7) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,
(8) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,
(9) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.

Aufgabe 1.7. Wir betrachten die beiden Mengen

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | -3x + 2y - 6z = 0 \right\}$$

und

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \, 7x - 5y - 4z = 0 \right\}.$$

Finde eine Beschreibung für den Durchschnitt

$$G := E \cap F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | -3x + 2y - 6z = 0 \text{ und } 7x - 5y - 4z = 0 \right\}$$

wie in Beispiel 1.2.

Aufgabe 1.8. Beschreibe für je zwei (einschließlich dem Fall, dass das Produkt mit sich selbst genommen wird) der folgenden geometrischen Mengen die Produktmengen.

(1) Eine Kreislinie K.
(2) Ein Geradenstück I.
(3) Eine Gerade G.
(4) Eine Parabel P.

Welche Produktmengen lassen sich als Teilmenge im Raum realisieren, welche nicht?

Zu einer endlichen Menge M bezeichnet man mit $\#(M)$ die Anzahl der Elemente von M.

Aufgabe 1.9. Es seien M und N zwei disjunkte endliche Mengen. Zeige, dass die Anzahl der (disjunkten) Vereinigung $M \cup N$ gleich der Summe der beiden Anzahlen der beiden Mengen ist.

Aufgabe 1.10. Es seien M und N zwei endliche Teilmengen einer Menge G. Zeige, dass die Formel

$$\#(M) + \#(N) = \#(M \cup N) + \#(M \cap N)$$

gilt.

Aufgabe 1.11. Es seien M und N endliche Mengen. Zeige, dass die Produktmenge $M \times N$ ebenfalls endlich ist, und dass die Beziehung

$$\#(M \times N) = \#(M) \cdot \#(N)$$

gilt.

In den folgenden Aufgaben soll das Beweisprinzip der Induktion geübt werden.

Aufgabe 1.12. Die Städte $S_1, \ldots, S_n$ seien untereinander durch Straßen verbunden und zwischen zwei Städten gibt es immer genau eine Straße. Wegen Bauarbeiten sind zur Zeit alle Straßen nur in eine Richtung befahrbar. Zeige, dass es trotzdem mindestens eine Stadt gibt, von der aus alle anderen Städte erreichbar sind.

Aufgabe 1.13.*

Die offizielle Berechtigung für eine Klausur werde durch mindestens 200 Punkte im Übungsbetrieb erworben. Der Professor sagt, dass es aber auf einen Punkt mehr oder weniger nicht ankomme. Zeige durch eine geeignete Induktion, dass man mit jeder Punkteanzahl zur Klausur zugelassen wird.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 1.14. (2 Punkte)

Skizziere die folgenden Teilmengen im $\mathbb{R}^2$.

(1) $\{(x,y) \mid \, |2x| = 5 \text{ und } |y| \geq 3\}$,
(2) $\{(x,y) \mid -3x \geq 2y \text{ und } 4x \leq -5y\}$,
(3) $\{(x,y) \mid y^2 - y + 1 \leq 4\}$,
(4) $\{(x,y) \mid xy = 2 \text{ oder } x^2 + y^2 = 1\}$.

Aufgabe 1.15. (5 Punkte)

Beweise die mengentheoretischen Fassungen einiger aristotelischer Syllogismen. Dabei bezeichnen A, B, C Mengen.

(1) Modus Barbara: Aus $B \subseteq A$ und $C \subseteq B$ folgt $C \subseteq A$.
(2) Modus Celarent: Aus $B \cap A = \emptyset$ und $C \subseteq B$ folgt $C \cap A = \emptyset$.
(3) Modus Darii: Aus $B \subseteq A$ und $C \cap B \neq \emptyset$ folgt $C \cap A \neq \emptyset$.
(4) Modus Ferio: Aus $B \cap A = \emptyset$ und $C \cap B \neq \emptyset$ folgt $C \not\subseteq A$.
(5) Modus Baroco: Aus $B \subseteq A$ und $B \not\subseteq C$ folgt $A \not\subseteq C$.

Aufgabe 1.16. (4 Punkte)

Es seien A und B zwei Mengen. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) $A \subseteq B$,
(2) $A \cap B = A$,
(3) $A \cup B = B$,
(4) $A \setminus B = \emptyset$,
(5) Es gibt eine Menge C mit $B = A \cup C$,
(6) Es gibt eine Menge D mit $A = B \cap D$.

Aufgabe 1.17. (4 Punkte)

Eine n-Schokolade ist ein rechteckiges Raster, das durch $a-1$ Längsrillen und $b-1$ Querrillen in $n = a \cdot b$ $(a, b \in \mathbb{N}_+)$ mundgerechte kleinere Rechtecke eingeteilt ist. Ein Teilungsschritt an einer Schokolade ist das vollständige Durchtrennen einer Schokolade längs einer Längs- oder Querrille. Eine vollständige Aufteilung einer Schokolade ist eine Folge von Teilungsschritten (an der Ausgangsschokolade oder an einer zuvor erhaltenen Zwischenschokolade), deren Endprodukt aus den einzelnen Mundgerechtecken besteht. Zeige durch Induktion, dass jede vollständige Aufteilung einer n-Schokolade aus genau $n-1$ Teilungsschritten besteht.

Aufgabe 1.18. (5 Punkte)

Es sei G eine Menge und es seien $M_i \subseteq G$, $i = 1, \ldots, n$, endliche Teilmengen. Für eine Teilmenge $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ sei

$$M_J = \bigcap_{i \in J} M_i .$$

Beweise die Anzahlformel

$$\#(\bigcup_{i=1}^{n} M_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left(\sum_{J \subseteq \{1,\ldots,n\},\, \#(J)=k} \#(M_J) \right) .$$

Abbildungsverzeichnis