Insiemi 5

5.1 Insiemi ed elementi

In matematica usiamo la parola *insieme* per indicare un raggruppamento, una collezione, una raccolta di oggetti, individui, simboli, numeri, figure che sono detti *elementi* dell'insieme e che sono ben definiti e distinti tra di loro.

La nozione di insieme e quella di elemento di un insieme in matematica sono considerate nozioni primitive, nozioni che si preferisce non definire mediante altre più semplici.

Esempio 5.1. Sono insiemi:

a) l'insieme delle lettere della parola RUOTA;
b) l'insieme delle canzoni che ho ascoltato la settimana scorsa;
c) l'insieme delle città della Puglia con più di 15 000 abitanti;
d) l'insieme delle lettere dell'alfabeto italiano;
e) l'insieme dei numeri 1, 2, 3, 4, 5;
f) l'insieme delle montagne d'Italia più alte di 1 000 metri.

Per poter assegnare un insieme occorre soddisfare le seguenti condizioni:

➡ bisogna poter stabilire con certezza e oggettività se un oggetto è o non è un elemento dell'insieme;
➡ gli elementi di uno stesso insieme devono essere differenti tra loro, cioè un elemento non può essere ripetuto più volte nello stesso insieme.

Non possono essere considerati insiemi:

➡ i film interessanti (non c'è un criterio oggettivo per stabilire se un film è interessante oppure no, uno stesso film può risultare interessante per alcune persone e non interessante per altre);
➡ le ragazze simpatiche di una classe (non possiamo stabilire in maniera oggettiva se una ragazza è simpatica);
➡ le montagne più alte d'Italia (non possiamo dire se una montagna è tra le più alte poiché non è fissata un'altezza limite);
➡ l'insieme delle grandi città d'Europa (non c'è un criterio per stabilire se una città è grande);

✍ *Esercizio proposto:* 5.1

In generale, gli insiemi si indicano con lettere maiuscole A, B, C, ... e gli elementi con lettere minuscole a, b, c, ...

Se un elemento a sta nell'insieme A si scrive $a \in A$ e si legge "a appartiene ad A". Il simbolo "$\in$" si chiama simbolo di *appartenenza*.

Se un elemento b non sta nell'insieme A si scrive $b \notin A$ e si legge "b non appartiene ad A". Il simbolo "$\notin$" si chiama simbolo di *non appartenenza*.

Il criterio che stabilisce se un elemento appartiene a un insieme si chiama *proprietà caratteristica* dell'insieme.

Un altro modo per definire un insieme, oltre a quello di indicare la sua proprietà caratteristica, è quello di elencare i suoi elementi separati da virgole e racchiusi tra parentesi graffe. Ad esempio: $A = \{a, b, c, d\}$.

Per indicare alcuni insiemi specifici vengono utilizzati simboli particolari:

- $\mathbb{N}$ si utilizza per indicare l'insieme dei numeri naturali: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$;
- $\mathbb{Z}$ si utilizza per indicare i numeri interi relativi: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots\}$;
- $\mathbb{Q}$ si utilizza per indicare i numeri razionali: $\mathbb{Q} = \{\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}, \frac{5}{1}, -\frac{4}{17}, 12{,}34, 8, 0{,}\overline{25}, \ldots\}$.

Esempio 5.2. Indica con il simbolo opportuno quali dei seguenti elementi appartengono o non appartengono all'insieme A dei giorni della settimana: lunedì, martedì, gennaio, giovedì, dicembre, estate.

Gennaio e dicembre sono mesi dell'anno, perciò scriviamo:

$$\text{lunedì} \in A, \quad \text{martedì} \in A, \quad \text{gennaio} \notin A, \quad \text{giovedì} \in A, \quad \text{dicembre} \notin A, \quad \text{estate} \notin A.$$

Consideriamo l'insieme $A = \{r, s, t\}$ e l'insieme B delle consonanti della parola "risate". Possiamo osservare che A e B sono due insiemi costituiti dagli stessi elementi; diremo che sono *insiemi uguali*.

Definizione 5.1. Due insiemi A e B si dicono *uguali* se sono formati dagli stessi elementi, anche se disposti in ordine diverso. In simboli si scrive $A = B$. Altrimenti i due insiemi si dicono *diversi*, in simboli $A \neq B$.

✍ *Esercizi proposti:* 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8

5.2 Insieme vuoto, insieme universo, cardinalità

Consideriamo l'insieme $A = \{\text{consonanti della parola "AIA"}\}$. Poiché la parola "AIA" non contiene consonanti, l'insieme A è privo di elementi.

Definizione 5.2. Un insieme privo di elementi si chiama *insieme vuoto* e lo si indica con il simbolo $\emptyset$ o $\{\}$.

❑ **Osservazione** $\{\} = \emptyset$ ma $\{\emptyset\} \neq \emptyset$ dato che la scrittura $\{\emptyset\}$ rappresenta un insieme che ha come unico elemento l'insieme vuoto, quindi non è vuoto.

Esempio 5.3. Alcuni insiemi vuoti.

a) L'insieme dei numeri negativi maggiori di 5 è vuoto;
b) l'insieme delle capitali europee con meno di 50 abitanti è vuoto;
c) l'insieme dei numeri naturali minori di 0 è vuoto.

La frase «l'insieme degli studenti che vengono a scuola con il motorino» non definisce un insieme particolare. Occorre definire il contesto, l'ambiente che fa individuare gli elementi dell'insieme. Se l'ambiente è la classe 1ªC gli elementi considerati saranno certamente diversi, e probabilmente meno numerosi, di quelli che compongono l'ambiente di un'intera scuola o di un'intera città. Quando si identifica un insieme, occorre indicare anche l'ambiente di riferimento da cui trarre gli elementi che appartengono al nostro insieme. Questo insieme si chiama *insieme universo* e rappresenta il contesto, l'ambiente su cui faremo le nostre osservazioni. In generale l'insieme universo per un insieme A è semplicemente un insieme che contiene A. Solitamente l'insieme universo viene indicato con U.

5.2.1 Cardinalità

Definizione 5.3. Si definisce *cardinalità* (o *potenza*) di un insieme finito il numero degli elementi dell'insieme. Essa viene indicata con uno dei seguenti simboli $|A|$, $\#(A)$ o $\text{card}(A)$.

Per poter parlare di cardinalità di un insieme qualsiasi, che comprenda anche insiemi infiniti come gli insiemi numerici, occorre una definizione più complessa che qui non daremo.

Esempio 5.4. Esempi di cardinalità.

a) L'insieme A delle vocali dell'alfabeto italiano ha 5 elementi, quindi $\text{card}(A) = 5$;
b) l'insieme B dei multipli di 3 minori di 10 ha 3 elementi, quindi $\text{card}(B) = 3$.

✍ *Esercizi proposti:* 5.9, 5.10, 5.11, 5.12, 5.13, 5.14

5.3 Rappresentazione degli insiemi

Esistono diversi modi per rappresentare un insieme e quindi per indicare con precisione i suoi elementi.

5.3.1 Rappresentazione tabulare

La rappresentazione tabulare è la descrizione più elementare di un insieme; consiste nell'elencare tutti gli elementi dell'insieme separati da virgole e racchiusi tra le parentesi graffe.

Per esempio, definiamo un insieme X con la scrittura: $X = \{1, 2, 3, 5\}$. Non è importante l'ordine in cui vengono scritti gli elementi, cioè

$$X = \{1, 2, 3, 5\} = \{2, 1, 5, 3\}.$$

È invece necessario che ogni elemento dell'insieme compaia una sola volta. Ad esempio, per rappresentare l'insieme Y delle lettere della parola "autunno", scriviamo

$$Y = \{a, u, t, n, o\}.$$

Si può utilizzare questa rappresentazione anche per insiemi numerosi e addirittura infiniti. In questi casi si elencano i primi elementi dell'insieme e in fondo all'elenco si mettono tre punti di sospensione lasciando intendere come continuare la serie.

Per esempio, l'insieme dei multipli di 3 si può indicare con la seguente rappresentazione tabulare:

$$X = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \ldots\}.$$

Esempio 5.5. Rappresentazione degli insiemi:

a) l'insieme G dei primi 3 giorni della settimana si indica: $G = \{\text{lunedì, martedì, mercoledì}\}$;
b) l'insieme A delle lettere della parola "associazione" si indica: $A = \{a, s, o, c, i, z, n, e\}$.

✍ *Esercizi proposti:* 5.15, 5.16, 5.17, 5.18

5.3.2 Rappresentazione per proprietà caratteristica

Per quegli insiemi i cui elementi soddisfano una certa proprietà che li caratterizza, possiamo usare proprio questa proprietà per descrivere più sinteticamente l'insieme che li contiene.

Per esempio, l'insieme Y dei divisori di 10 può essere definito come:

$$Y = \{x \mid x \text{ è un divisore di } 10\}$$

e si legge "Y è l'insieme degli elementi x tali che x è un divisore di 10".

In questa scrittura si mette in evidenza la caratteristica degli elementi dell'insieme. La rappresentazione tabulare dello stesso insieme è $Y = \{1, 2, 5, 10\}$. L'espressione "tale che", che è stata rappresentata per mezzo del simbolo "|", può essere indicata anche per mezzo del simbolo ":".

La rappresentazione per caratteristica dell'insieme X dei naturali minori di 15 è:

$$X = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 15\}$$

e si legge "X è l'insieme dei numeri naturali x tali che x è minore di 15".

L'insieme che viene indicato nella prima parte della rappresentazione (nell'ultimo esempio è l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$) è l'*insieme universo* (sezione 5.2) al quale si fa riferimento. Questo metodo è particolarmente utile quando l'insieme da rappresentare contiene molti elementi.

Esempio 5.6. Esempi di definizioni di insiemi per mezzo della loro proprietà caratteristica:

a) l'insieme A delle rette incidenti a una retta t assegnata si può rappresentare come:

$$A = \{r \mid r \text{ è una retta incidente a } t\}$$

b) l'insieme B dei numeri naturali maggiori di 100 può essere rappresentato come:

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 100\}$$

c) l'insieme P dei numeri pari può essere rappresentato come:

$$P = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 2 \cdot m, \text{ con } m \in \mathbb{N}\}$$

d) l'insieme C dei numeri interi relativi compresi tra -10 e $+100$, estremi inclusi:

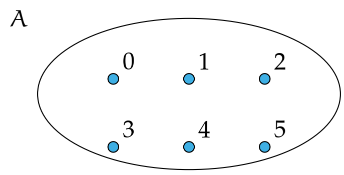
$$C = \{n \in \mathbb{Z} \mid -10 \leqslant n \leqslant 100\}.$$

✍ *Esercizi proposti:* 5.19, 5.20, 5.21, 5.22, 5.23, 5.24, 5.25, 5.26, 5.27, 5.28, 5.29,5.30, 5.31, 5.32

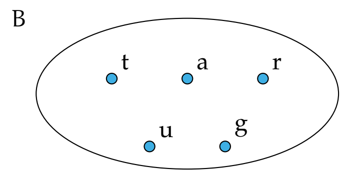
5.3.3 Rappresentazione grafica (Diagramma di Eulero-Venn)

In questa rappresentazione grafica, detta anche *rappresentazione di Eulero-Venn*[1] si disegna una linea chiusa all'interno della quale gli elementi dell'insieme si indicano con dei punti. Solitamente si scrive all'esterno il nome dell'insieme e vicino ad ogni punto il valore ad esso associato.

Esempio 5.7. A è l'insieme dei numeri naturali minori di 6, cioè $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. La sua rappresentazione con un diagramma di Eulero-Venn è la seguente



Esempio 5.8. B è l'insieme delle lettere della parola "TARTARUGA", $B = \{t, a, r, u, g\}$. La sua rappresentazione con un diagramma di Eulero-Venn è la seguente



Un insieme può essere rappresentato con una qualsiasi delle rappresentazioni indicate. Se un insieme è infinito o è costituito da un numero elevato di elementi la rappresentazione più pratica è quella per caratteristica.

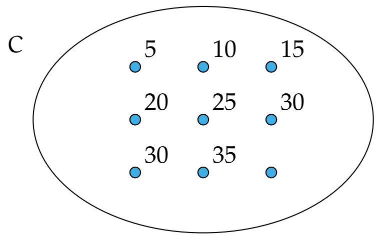
[1] in onore del matematico svizzero Leonhard Euler, noto in Italia come Eulero, (1707 - 1783) e del matematico e statistico inglese John Venn (1834 - 1923).

Esempio 5.9. Rappresentare l'insieme C dei multipli di 5.

Per caratteristica: $C = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è multiplo di } 5\}$ oppure $C = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 5 \cdot m, m \in \mathbb{N}\}$

Tabulare: $C = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, \ldots\}$. I puntini di sospensione indicano che l'elenco continua.

Rappresentazione con diagramma di Eulero-Venn:



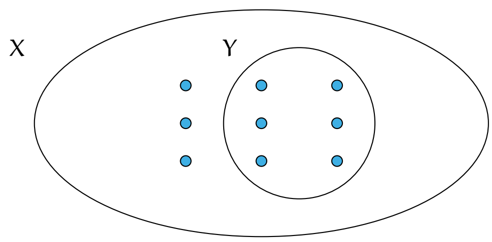
✍ *Esercizi proposti:* 5.33, 5.34, 5.35, 5.36, 5.37, 5.38, 5.39, 5.40

5.4 Sottoinsieme

Consideriamo l'insieme A degli abitanti di Milano e l'insieme B degli abitanti di Milano con età superiore ai 40 anni. Gli abitanti ultra quarantenni di Milano fanno parte della popolazione di Milano, cioè tutti gli elementi dell'insieme B sono anche elementi di A: si dice che B è sottoinsieme di A e si scrive $B \subseteq A$.

Definizione 5.4. Dati due insiemi X e Y, si dice che Y è un *sottoinsieme* di X se ogni elemento di Y è anche elemento di X. In simboli: $Y \subseteq X$, che si legge "Y è incluso in X" o "Y è sottoinsieme di X".

La rappresentazione con un diagramma di Eulero-Venn è la seguente:



Se a è un elemento del sottoinsieme Y, allora lo sarà anche dell'insieme X:

$$\text{se } a \in Y \text{ e } Y \subseteq X, \text{ allora } a \in X \qquad \text{oppure} \qquad a \in Y \text{ e } Y \subseteq X \Rightarrow a \in X.$$

Dalla stessa definizione, si deduce che ogni insieme è sottoinsieme di se stesso, in simboli $X \subseteq X$.

Nel caso in cui tutti gli elementi di Y siano elementi di X e tutti gli elementi di X siano elementi di Y si ha che $X = Y$, e Y si dice *sottoinsieme improprio* di X. Se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$, allora $Y = X$.

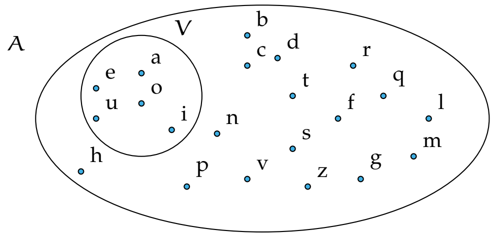
Tra i sottoinsiemi di un insieme si considera anche l'insieme vuoto. Cioè, qualunque sia l'insieme X risulta $\emptyset \subseteq X$. Quindi l'insieme vuoto è considerato un sottoinsieme improprio di qualunque insieme.

Se Y è un sottoinsieme non vuoto di X e X ha altri elementi oltre a quelli di Y si dice che Y è un *sottoinsieme proprio* di X e si scrive $Y \subset X$.

La scrittura $Y \subseteq X$ si usa quando non si sa in modo certo se $Y = X$ o meno.

Esempio 5.10. Consideriamo l'insieme X = {lettere della parola "autunno"} e l'insieme Y = {lettere della parola "notaio"}; possiamo affermare che ogni elemento di Y è anche elemento di X? La risposta è negativa, infatti $i \in Y$ ma $i \notin X$ quindi Y non è sottoinsieme di X e si scrive $Y \not\subset X$.

Esempio 5.11. Sia A l'insieme delle lettere dell'alfabeto italiano e V l'insieme delle vocali, allora si può scrivere $V \subset A$; cioè V è un sottoinsieme proprio di A, come si può anche vedere dalla rappresentazione grafica.



Esempio 5.12. Sia $C = \{1\}$, allora C non ha sottoinsiemi propri; mentre i suoi sottoinsiemi impropri sono $C = \{1\}$ e l'insieme vuoto $\emptyset$.

Esempio 5.13. Sia A l'insieme delle auto esposte in un autosalone e U l'insieme delle auto usate esposte nello stesso autosalone. Si ha che U è un sottoinsieme di A, ma senza avere ulteriori informazioni non possiamo escludere che tutte le auto esposte siano usate, dobbiamo perciò scrivere $U \subseteq A$. Se invece sappiamo che nessuna auto esposta è usata, allora $U = \emptyset$.

✍ *Esercizi proposti:* 5.41, 5.42, 5.43, 5.44, 5.45, 5.46

5.5 Insieme delle parti

Consideriamo l'insieme A dei numeri naturali compresi tra 0 e 100. A partire da questo insieme possiamo formare gruppi costituiti dai soli numeri multipli di 10, dai numeri pari, da quelli dispari, da quelli divisibili per 7 e così via. Quindi con gli elementi dell'insieme A possiamo formare molti altri insiemi che sono sottoinsiemi di A.

Esempio 5.14. Determinare tutti i sottoinsiemi di $A = \{1, 2, 3\}$.

$\emptyset \subseteq A$, infatti l'insieme vuoto è un sottoinsieme improprio di qualunque insieme.

Elenchiamo tutti i sottoinsiemi costituiti da un solo elemento: $\{1\}, \{2\}, \{3\}$. Elenchiamo ora tutti i sottoinsiemi costituiti da due elementi: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$. L'unico sottoinsieme costituito da tre elementi è A stesso, possiamo scrivere: $\{1, 2, 3\} \subseteq A$. In tutto si hanno 8 sottoinsiemi.

Definizione 5.5. Dato un insieme A, si chiama *insieme delle parti* o (*insieme potenza*) di A l'insieme $\wp(A)$ che ha come elementi tutti i sottoinsiemi propri ed impropri di A.

L'insieme delle parti di un insieme A ha sempre come elementi $\emptyset$ e A, quindi $\emptyset \in \wp(A)$ e $A \in \wp(A)$. Il numero degli elementi di $\wp(A)$, cioè dei suoi possibili sottoinsiemi, propri e impropri, dipende dal numero degli elementi di A.

Esempio 5.15. L'insieme vuoto ha come unico sottoinsieme se stesso, quindi $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Esempio 5.16. Dato l'insieme $A = \{a\}$, i suoi possibili sottoinsiemi propri ed impropri sono: $S_1 = \emptyset$, $S_2 = \{a\}$; allora $\wp(A) = \{S_1, S_2\}$.

Esempio 5.17. Dato l'insieme $B = \{\text{matita}, \text{penna}\}$ i suoi possibili sottoinsiemi propri ed impropri sono: $S_1 = \emptyset$, $S_2 = B = \{\text{matita}, \text{penna}\}$, $S_3 = \{\text{matita}\}$, $S_4 = \{\text{penna}\}$; allora $\wp(A) = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$.

Esempio 5.18. Dato l'insieme $B = \{1, 2, 3\}$, i suoi possibili sottoinsiemi propri ed impropri sono: $S_1 = \emptyset$, $S_2 = B = \{1, 2, 3\}$, $S_3 = \{1\}$, $S_4 = \{2\}$, $S_5 = \{3\}$, $S_6 = \{1, 2\}$, $S_7 = \{1, 3\}$, $S_8 = \{2, 3\}$; allora $\wp(A) = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8\}$.

Riassumendo:

- se $A = \emptyset$ l'insieme delle parti ha 1 solo elemento;
- se A ha 1 elemento allora l'insieme delle parti ha 2 elementi;
- se A ha 2 elementi, l'insieme delle parti ne ha 4;
- se A ha 3 elementi, l'insieme delle parti ne ha 8.

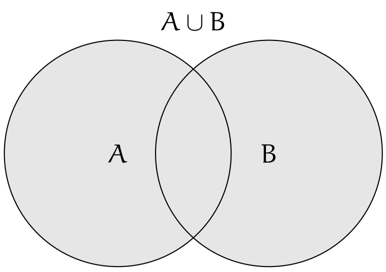
Generalizzando, se A ha n elementi, l'insieme delle parti $\wp(A)$ ne ha 2^n.

✍ *Esercizi proposti:* 5.47, 5.48, 5.49, 5.50, 5.51

5.6 Insieme unione

Prendiamo l'insieme P dei numeri pari e l'insieme D dei numeri dispari; allora l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è dato dall'unione dei due insiemi P e D.

Definizione 5.6. Dati due insiemi A e B, si dice *insieme unione* l'insieme C, composto da tutti gli elementi appartenenti ad A o a B o a entrambi. In simboli: $C = A \cup B$ e si legge "A unito a B" o "A unione B".



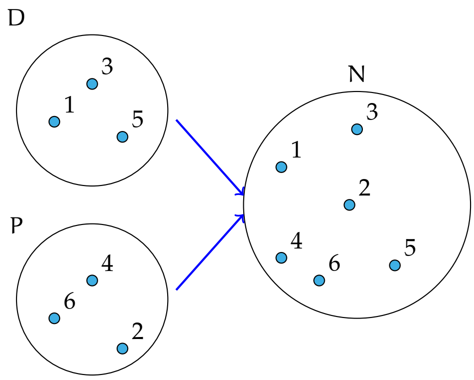
Mediante la proprietà caratteristica si scrive: $C = A \cup B = \{x \mid (x \in A) \text{ o } (x \in B)\}$.

5.6.1 Proprietà dell'unione tra insiemi

a) $A \cup B = B \cup A$: proprietà *commutativa* dell'unione;
b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$: proprietà *associativa* dell'unione;
c) se $B \subset A$, allora $A \cup B = A$;
d) $A \cup \emptyset = A$;
e) $A \cup A = A$: proprietà di *idempotenza* dell'unione;
f) $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$.

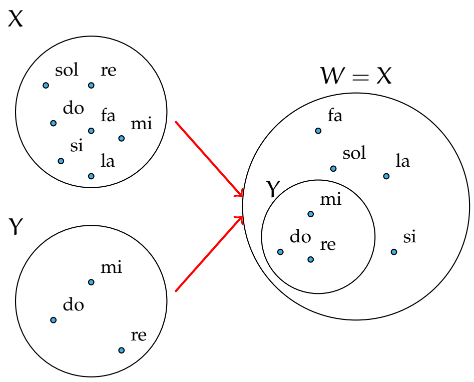
Esempio 5.19. Siano $D = \{1, 3, 5\}$ e $P = \{2, 4, 6\}$ allora

$$N = P \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$



Esempio 5.20. Siano $X = \{do, re, mi, fa, sol, la, si\}$ e $Y = \{do, re, mi\}$, allora, poiché $Y \subset X$,

$$W = X \cup Y = X = \{do, re, mi, fa, sol, la, si\}.$$



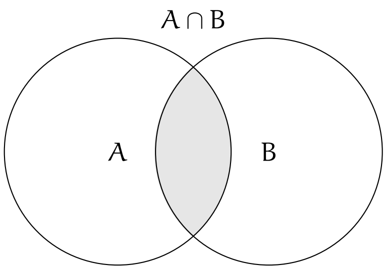
✍ *Esercizi proposti:* 5.52, 5.53, 5.54, 5.55

5.7 Insieme intersezione

Definizione 5.7. Dati due insiemi A e B, si dice *insieme intersezione* di A e B, l'insieme C composto da tutti gli elementi appartenenti contemporaneamente ad A e a B, ossia comuni a entrambi. In simboli: $C = A \cap B$, che si legge "A intersecato a B" o "A intersezione B".

Esempio 5.21. Se A è l'insieme delle lettere della parola "matematica" e B è l'insieme delle lettere della parola "materia". Quali elementi di A stanno in B? Quali elementi di B stanno in A? Quali sono gli elementi che stanno in entrambi gli insiemi?

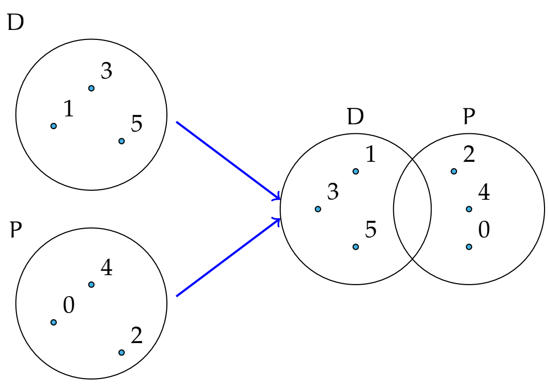
- L'insieme degli elementi di A che stanno in B è $\{m, a, t, e, i\}$;
- l'insieme degli elementi di B che stanno in A è $\{m, a, t, e, i\}$;
- l'insieme degli elementi che stanno sia in A sia in B è $\{m, a, t, e, i\}$.



Mediante proprietà caratteristica si scrive: $C = A \cap B = \{x \mid (x \in A) \text{ e } (x \in B)\}$.

Definizione 5.8. Dati due insiemi A e B, essi si dicono *disgiunti* se non hanno elementi in comune, ossia se la loro intersezione è vuota. In simboli $A \cap B = \emptyset$.

Esempio 5.22. Siano $D = \{1, 3, 5\}$ e $P = \{2, 4, 6\}$ allora $N = P \cap D = \emptyset$. Gli insiemi P e D sono disgiunti.



5.7.1 Proprietà dell'intersezione tra insiemi

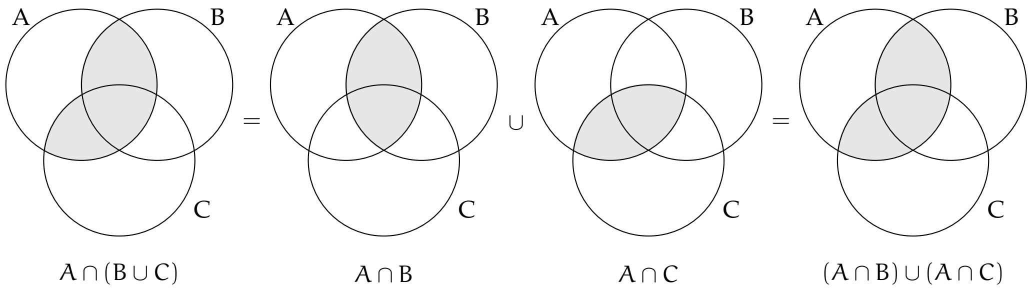
a) $A \cap B = B \cap A$: proprietà *commutativa* dell'intersezione;
b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$: proprietà *associativa* dell'intersezione;
c) Se $B \subset A$, allora $A \cap B = B$;
d) $A \cap \emptyset = \emptyset$;
e) $A \cap A = A$: proprietà di *idempotenza* dell'intersezione;
f) $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$.

Esempio 5.23. Siano $X = \{$do, re, mi. fa, sol, la, si$\}$ e $Y = \{$do, re, mi$\}$. Allora, poiché $Y \subset X$, si ha: $W = X \cap Y = Y = \{$do, re, mi$\}$.

5.7.2 Proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione e viceversa

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$: proprietà *distributiva dell'intersezione rispetto all'unione*;
b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$: proprietà *distributiva dell'unione rispetto all'intersezione*.

Dimostriamo con i diagrammi di Venn la proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione.

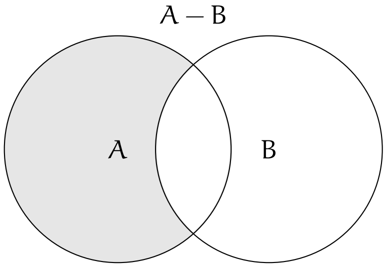


✍ *Esercizi proposti:* 5.56, 5.57, 5.58, 5.59

5.8 Insieme differenza

Consideriamo gli insiemi A e B formati rispettivamente dalle lettere dell'alfabeto italiano e dalle consonanti dell'alfabeto italiano cioè: $A = \{$a, b, c, d, e, f, g, h, i, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, z$\}$ e $B = \{$b, c, d, f, g, h, l, m, n, p, q, r, s, t, v, z$\}$, le lettere "a, e, i, o, u" che compaiono nell'insieme A ma non in B formano un nuovo insieme chiamato insieme *differenza* tra A e B.

Definizione 5.9. Dati due insiemi A e B, si dice *insieme differenza* tra A e B l'insieme C composto da tutti gli elementi di A che non appartengono a B. In simboli: $C = A - B$ o anche $C = A \setminus B$.



Mediante proprietà caratteristica si scrive: $C = A - B = \{x \mid (x \in A) \text{ e } (x \notin B)\}$.

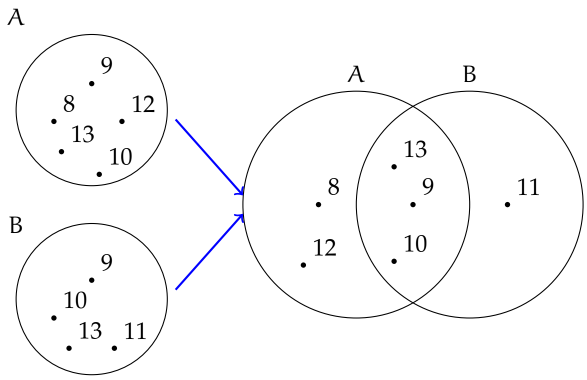
5.8.1 Proprietà della differenza tra insiemi

a) $A - A = \emptyset$;
b) $A - \emptyset = A$;
c) se $A \cap B = \emptyset$, ossia A e B sono disgiunti, allora $A - B = A$, e $B - A = B$;
d) se $B \subset A$, ossia B è sottoinsieme proprio di A, allora $B - A = \emptyset$.

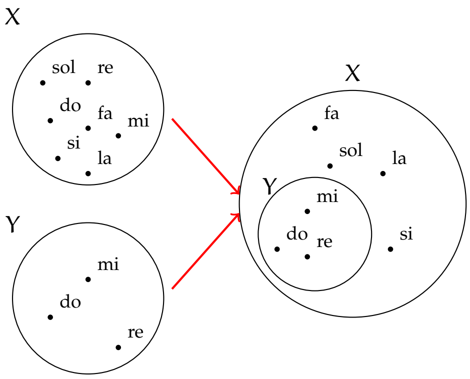
Esempio 5.24. Siano $A = \{8, 9, 10, 12, 13\}$ e $B = \{9, 10, 11, 13\}$, allora $C = A - B = \{8, 12\}$ e $D = B - A = \{11\}$.

Poiché in genere $A - B \neq B - A$, nella differenza tra insiemi non vale la proprietà commutativa.

Esempio 5.25. Siano $D = \{1, 3, 5\}$ e $P = \{0, 2, 4\}$. I due insiemi sono disgiunti poiché $P \cap D = \emptyset$, quindi $D - P = \{1, 3, 5\} = D$ e $P - D = \{0, 2, 4\} = P$.



Esempio 5.26. Siano $X = \{do, re, mi, fa, sol, la, si\}$ e $Y = \{do, re, mi\}$ allora poiché $Y \subset X$, $W = X - Y = \{fa, sol, la, si\}$.



✍ *Esercizi proposti:* 5.60, 5.61, 5.62

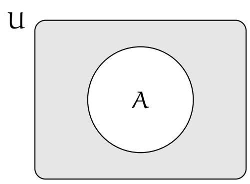
5.9 Insieme complementare

Sia $W = \{$sabato, domenica$\}$ l'insieme dei giorni della settimana che non finiscono per "dì". L'insieme W può essere considerato come sottoinsieme dell'insieme G formato da tutti i giorni della settimana $G = \{$lunedì, martedì, mercoledì, giovedì, venerdì, sabato, domenica$\}$. L'insieme degli elementi di G che non appartengono a W forma un insieme che chiameremo *complementare* di W rispetto a G. L'insieme G invece si dice, in questo caso, insieme *universo*. Ad esempio nella rappresentazione caratteristica $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leqslant 100\}$, $\mathbb{N}$ è l'insieme universo di A.

Definizione 5.10. Dato un insieme A, uno dei possibili insiemi che contengono A come sottoinsieme si dice *insieme universo* o *insieme ambiente*.

Definizione 5.11. Dato l'insieme A e scelto U come suo insieme universo, l'insieme degli elementi di U che non appartengono ad A è detto *insieme complementare* di A rispetto a U e si indica con $\overline{A}$ oppure $\overline{A}_U$ o ancora $\complement_U A$.

Il diagramma di Eulero-Venn dell'insieme A e del suo universo U è quello rappresentato in figura. La parte in grigio è il complementare di A rispetto a U, cioè $\overline{A}_U$. Si può osservare che, essendo $A \subseteq U$, il complementare coincide con la differenza tra insiemi: $\overline{A}_U = U - A$.



Esempio 5.27. Insiemi complementari.

a) Il complementare dell'insieme D dei numeri dispari rispetto all'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è l'insieme P dei numeri pari: $\overline{D}_{\mathbb{N}} = P$;

b) Il complementare dell'insieme V delle vocali dell'alfabeto italiano rispetto all'insieme A delle lettere dell'alfabeto italiano è l'insieme C delle consonanti: $\overline{V}_U = C$;
c) Dati gli insiemi $U = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant x \leqslant 10\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant x \leqslant 5\}$, poiché $B \subset U$ si può determinare $\overline{B}_U = \{x \in \mathbb{N} \mid 6 \leqslant x \leqslant 10\}$.

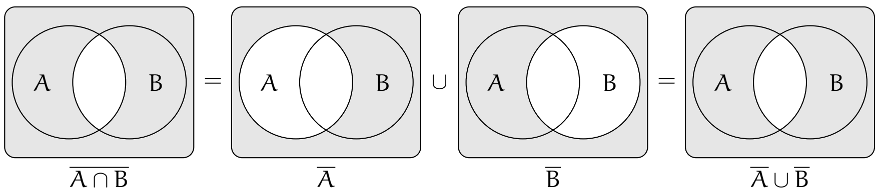
✍ *Esercizi proposti:* 5.63, 5.64, 5.65, 5.66

5.10 Leggi di De Morgan

Dati due insiemi A e B ci sono alcune proprietà, dette *leggi di De Morgan*[2], che semplificano lo svolgimento di alcune operazioni:

a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$: *Prima legge di De Morgan*;
b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$: *Seconda legge di De Morgan*.

Dimostriamo la prima legge di De Morgan utilizzando i diagrammi di Eulero-Venn.



✍ *Esercizio proposto:* 5.67

5.11 Partizione di un insieme

Definizione 5.12. Dato un insieme A e alcuni suoi sottoinsiemi $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, si dice che questi costituiscono una *partizione* di A se:

a) sono tutti non vuoti;
b) sono a due a due disgiunti;
c) la loro unione dà l'insieme A.

Esempio 5.28. Partizione di un insieme.

Dato l'insieme C delle carte da gioco napoletane, i sottoinsiemi C_1 delle carte a denari, C_2 delle carte a spade, C_3 delle carte a coppe, C_4 delle carte a bastoni costituiscono una partizione di C.

Infatti nessuno degli insiemi C_1, C_2, C_3, C_4 è vuoto, ciascuno è costituito da 10 elementi. Inoltre i sottoinsiemi sono a due a due disgiunti perché non ci sono carte che appartengono a $C_1 \cap C_2$, $C_1 \cap C_3$, $C_1 \cap C_4$, $C_2 \cap C_3$, $C_2 \cap C_4$, $C_3 \cap C_4$, cioè non ci sono carte che possono appartenere contemporaneamente a due semi distinti. Infine l'unione $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ dà l'insieme delle carte C.

✍ *Esercizi proposti:* 5.68, 5.69, 5.70, 5.71

[2] dal nome del matematico e logico britannico Augustus De Morgan (1806 - 1871).

5.12 Prodotto cartesiano fra insiemi

Supponiamo che la partita di calcio Lecce - Juventus sia terminata 3-2; in questo caso il risultato della partita non rappresenta un insieme di numeri dato che nella rappresentazione di un insieme scrivere $\{3, 2\}$ e $\{2, 3\}$ è la stessa cosa. Infatti, se avessimo scritto 2-3 al posto di 3-2 la partita avrebbe avuto un esito differente. Ci troviamo nel caso di una *coppia ordinata* di numeri.[3]

Definizione 5.13. Un insieme di due elementi a e b presi in un determinato ordine si dice *coppia ordinata*. Se il primo elemento della coppia è a e il secondo è b si scrive: $(a; b)$.

Definizione 5.14. Dati due insiemi A e B non vuoti, l'insieme formato da tutte le coppie ordinate tali che il primo elemento appartiene ad A e il secondo a B, si chiama *prodotto cartesiano* di A per B. In simboli: $A \times B$ che si legge "A per B" oppure "A prodotto cartesiano con B" o ancora "A cartesiano B".

Mediante proprietà caratteristica si scrive: $A \times B = \{(x; y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$.

Nel caso in cui $B = A$, il prodotto cartesiano diventa $A \times A = A^2 = \{(x; y) \mid x \in A \text{ e } y \in A\}$.

Esempio 5.29. Sia $C = \{x, y, z\}$, il prodotto cartesiano $C \times C$ è dato dalle seguenti coppie ordinate: $C \times C = \{(x; x), (x; y), (x; z), (y; x), (y; y), (y; z), (z; x), (z; y), (z; z)\}$.

5.12.1 Proprietà del prodotto cartesiano tra insiemi

a) $A \times \emptyset = \emptyset$;

b) $\emptyset \times A = \emptyset$;

c) $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$.

Esempio 5.30. Sia $A = \{a, b\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. Il prodotto cartesiano $A \times B$ è dato dalle seguenti coppie ordinate: $A \times B = \{(a; 1), (a; 2), (a; 3), (b; 1), (b; 2), (b; 3)\}$, mentre il prodotto cartesiano $B \times A$ è dato dalle seguenti coppie ordinate: $B \times A = \{(1; a), (2; a), (3; a), (1; b), (2; b), (3; b)\}$. Quindi si può notare che $A \times B \neq B \times A$.

Poiché $A \times B \neq B \times A$ nel prodotto cartesiano non vale la proprietà commutativa.

✍ *Esercizi proposti:* 5.72, 5.73, 5.74, 5.75, 5.76, 5.77

5.12.2 Rappresentazione del prodotto cartesiano tra insiemi

Tabulazione delle coppie ordinate Come fatto nei precedenti esempi, si combina il primo elemento di A con tutti gli elementi di B, il secondo elemento di A con tutti gli elementi di B e cosi via fino ad esaurire tutti gli elementi di A.

$$A \times B = \{(a; 1), (a; 2), (a; 3), (b; 1), (b; 2), (b; 3)\}.$$

[3]si veda anche la sezione 8.5 a pagina 219.

Diagramma a frecce Si rappresentano i due insiemi graficamente con i diagrammi di Eulero-Venn e si tracciano degli archi orientati che escono dagli elementi del primo insieme e raggiungono gli elementi del secondo insieme formando coppie ordinate del prodotto cartesiano.

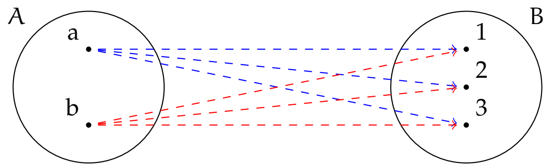


Tabella a doppia entrata Si costruisce una tabella nella quale si riportano gli elementi del primo insieme sulla prima colonna e gli elementi del secondo insieme sulla prima riga. Le caselle di incrocio rappresentano le coppie ordinate del prodotto cartesiano.

		B		
		1	2	3
A	a	(a; 1)	(a; 2)	(a; 3)
	b	(b; 1)	(b; 2)	(b; 3)

Diagramma cartesiano Si tracciano due semirette orientate, perpendicolari, una orizzontale e l'altra verticale, con l'origine in comune. Si riportano gli elementi del primo insieme sulla semiretta orizzontale e quelli del secondo su quella verticale. Tali semirette vengono chiamate *assi cartesiani*. Si tracciano prima le parallele all'asse verticale dai punti individuati sull'asse orizzontale che rappresentano gli elementi del primo insieme, poi le parallele all'asse orizzontale dai punti sull'asse verticale; i punti di intersezione rappresentano le coppie ordinate del prodotto cartesiano.

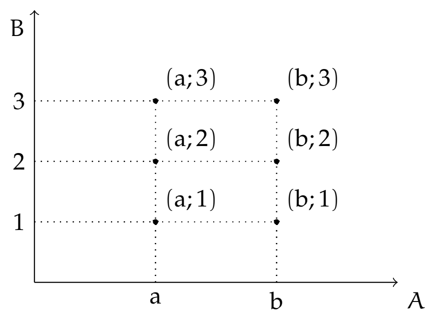
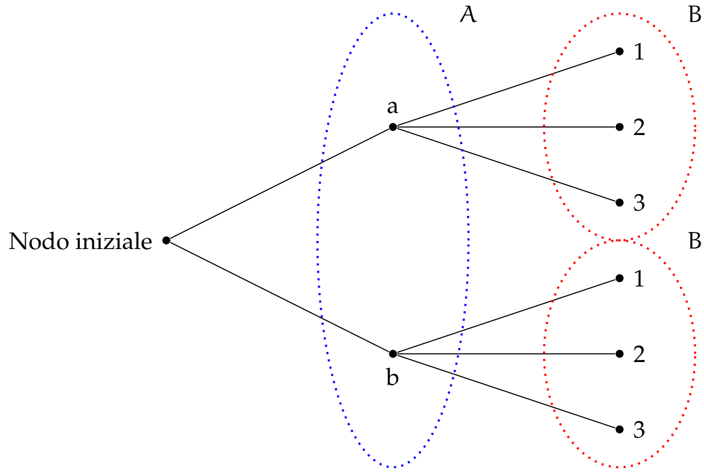
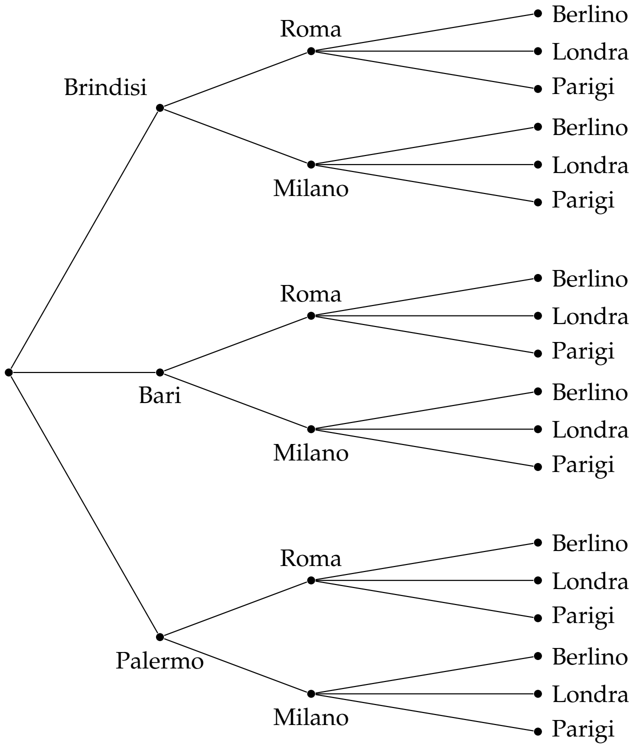


Diagramma ad albero È un grafico formato da un nodo iniziale dal quale si ripartono alcuni rami che a loro volta possono ramificarsi e così via fino a che nello schema figurano tutte le possibili situazioni. Si può raggiungere un particolare nodo solo muovendosi lungo i rami ed il percorso che collega due nodi qualsiasi deve essere unico.

La rappresentazione mediante diagramma ad albero è vantaggiosa nel caso si voglia fare il prodotto cartesiano tra più insiemi.



Esempio 5.31. Una compagnia aerea deve organizzare delle rotte per collegare fra loro alcune città effettuando uno scalo in un'altra città. Sia $P = \{\text{Brindisi, Bari, Palermo}\}$ l'insieme delle città di partenza, $S = \{\text{Roma, Milano}\}$ l'insieme delle città di scalo e $A = \{\text{Parigi, Berlino, Londra}\}$ l'insieme delle città di arrivo. Per conoscere tutte le possibili rotte aeree dobbiamo determinare il prodotto cartesiano tra i 3 insiemi $P \times S \times A$. Rappresentiamo $P \times S \times A$ tramite un diagramma ad albero:



5.13 I diagrammi di Eulero-Venn come modello di un problema

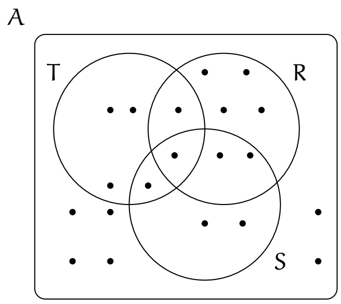
Alcune volte, trovandoci di fronte a un problema, possiamo rappresentare la situazione con diagrammi di Eulero-Venn, ciò agevola la comprensione e facilita la risoluzione del problema. Attraverso alcuni esempi mostreremo come usare la teoria degli insiemi per risolvere problemi.

Esempio 5.32. Nel seguente diagramma di Eulero-Venn, l'insieme A rappresenta un gruppo di amici appassionati di ballo; gli insiemi T, R, S rappresentano rispettivamente coloro che ballano il tango, la rumba, il samba; ogni puntino rappresenta uno degli amici.

Quanti sono gli amici appassionati di ballo?

Quanti tra loro ballano:

a) *nessuno* dei balli indicati?
b) *almeno uno* dei balli tango, samba, rumba?
c) *almeno* il samba?
d) *solo* la rumba?
e) la rumba *e* il tango?
f) *tutti* i balli indicati?



Per rispondere alle domande dobbiamo contare gli elementi che formano determinati insiemi.

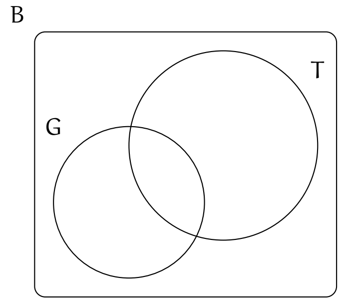
Quanti sono gli amici appassionati di ballo? Per rispondere a questa domanda, contiamo tutti i puntini che compaiono nel disegno. Si ha $\text{card}(A) = 20$.

Rispondiamo ora alle altre domande.

a) Quanti tra loro ballano *nessuno* dei balli indicati? Chi non balla nessuno dei balli indicati sta nell'insieme A, ma in nessuno degli insiemi R, S, T quindi appartiene al complementare di $R \cup S \cup T$ rispetto all'insieme A, dunque $\text{card}(\overline{(R \cup S \cup T)}_A) = 6$.
b) Quanti tra loro ballano *almeno uno* dei balli tra tango, samba, rumba? Chi balla almeno uno di quei balli è rappresentato dagli elementi dell'insieme $R \cup S \cup T$, quindi $\text{card}(R \cup S \cup T) = 14$.
c) Quanti tra loro ballano *almeno* il samba? Gli amici che ballano almeno il samba sono nell'insieme S, quindi $\text{card}(S) = 6$.
d) Quanti tra loro ballano *solo* la rumba? Nell'insieme R sono rappresentati gli amici che ballano almeno il rumba, quindi dobbiamo togliere dall'insieme R gli elementi che stanno in S o in T: $\text{card}(R - (T \cup S)) = 4$.
e) Quanti tra loro ballano la rumba *e* il tango? Quelli che ballano sia la rumba che il tango sono gli elementi dell'insieme intersezione $R \cap T$, quindi $\text{card}(R \cap T) = 2$.
f) Quanti tra loro ballano *tutti* i balli indicati? Quelli che ballano tutti e tre i balli indicati sono elementi dell'insieme intersezione $R \cap S \cap T$, quindi $\text{card}(R \cap S \cap T) = 1$.

Esempio 5.33. A settembre, per la festa delle contrade, a Lainate è arrivato un luna park dove, oltre ad una grande giostra, era stato allestito un tiro a segno con palline di gommapiuma, proprio per i bambini. Alcuni bambini, accompagnati dalla loro maestra si sono recati al luna park: 7 sono stati sulla giostra, 3 sono stati sia sulla giostra che al tiro a segno, 3 si sono divertiti solamente col tiro a segno e altri 2 sono stati a guardare. Quanti bambini sono andati quel giorno al luna park?

Per risolvere il problema rappresentiamo con diagrammi di Eulero-Venn la situazione; indichiamo con B l'insieme dei bambini recatisi al luna park, con G l'insieme di quelli che sono stati sulla giostra e con T l'insieme di quelli che hanno provato il tiro a segno. Dall'enunciato sappiamo che $\text{card}(G) = 7$, $\text{card}(G \cap T) = 3$, $\text{card}(T - G) = 3$ e $\text{card}(B - (G \cup T)) = 2$.



Completa la rappresentazione segnando i bambini con dei puntini e rispondi al quesito.

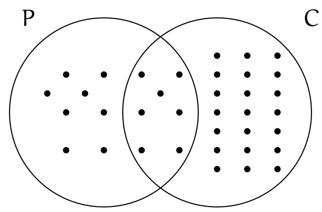
Esempio 5.34. Alla palestra Anni Verdi, il giovedì si tengono due allenamenti di pallavolo e calcio dalle 17.00 alle 18.30. Frequentano il corso di pallavolo 15 persone e sono 28 quelli che frequentano l'allenamento di calcio. Quante persone frequentano pallavolo o calcio in questo orario?

Dati $P = \{\text{iscritti a pallavolo}\}$, $C = \{\text{iscritti a calcio}\}$, $\text{card}(P) = 15$, $\text{card}(C) = 28$.

Obiettivo Il problema chiede di determinare la cardinalità di $P \cup C$.

Soluzione Osserviamo che non ci sono persone che frequentano sia l'uno che l'altro sport essendo gli allenamenti nello stesso orario; gli insiemi P e C sono disgiunti: $P \cap C = \emptyset$. Quindi: $\text{card}(P \cup C) = \text{card}(P) + \text{card}(C) = 15 + 28 = 43$.

Esempio 5.35. Alla palestra Anni Verdi, il lunedì si tengono allenamenti di pallavolo dalle 17.00 alle 18.30 e dalle 19.00 alle 20.30 gli allenamenti di calcio. Quelli che frequentano la pallavolo sono 15, quelli che frequentano il calcio sono 28, però ce ne sono 7 di loro che fanno entrambi gli allenamenti. Quanti sono gli sportivi che si allenano il lunedì?



Dati $P = \{\text{iscritti a pallavolo}\}$, $C = \{\text{iscritti a calcio}\}$, $\text{card}(P) = 15$, $\text{card}(C) = 28$ e $\text{card}(P \cap C) = 7$.

Obiettivo Il problema chiede di determinare la cardinalità di $P \cup C$.

Soluzione Poiché gli insiemi P e C non sono disgiunti, si ha $\text{card}(P \cup C) = \text{card}(P) + \text{card}(C) - \text{card}(P \cap C) = 15 + 28 - 7 = 36$.

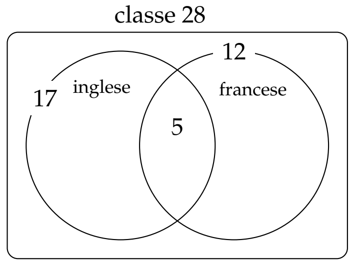
Generalizzando possiamo affermare che, dati due insiemi finiti A e B, la cardinalità dell'insieme $A \cup B$ è data dalla seguente formula:

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B).$$

Esempio 5.36. A scuola si sono aperti i corsi di lingue. Della classe di Piero, che è composta da 28 ragazzi, 17 frequentano il corso di inglese, 12 quello di francese, 5 di loro frequentano sia il corso di inglese che quello di francese. Quanti sono i ragazzi della classe di Piero che non frequentano alcun corso di lingue?

Rappresentiamo la situazione con un diagramma di Eulero-Venn.

L'insieme universo è costituito dai 28 ragazzi che compongono la classe. I ragazzi che frequentano almeno un corso non sono $17 + 12 = 29$, perché ce ne sono 5 che frequentano entrambi i corsi e così vengono conteggiati due volte. Quindi i ragazzi che frequentano almeno un corso sono $17 + 12 - 5 = 24$. Di conseguenza quelli che non frequentano nessun corso sono $28 - 24 = 4$.

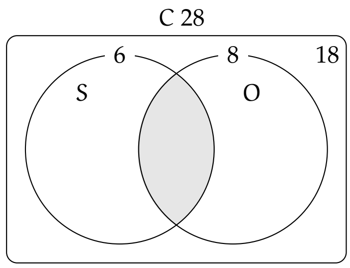


Esempio 5.37. Il professore di matematica di Piero è piuttosto severo; nella sua classe, di 28 alunni, ha messo solo 6 sufficienze allo scritto e solo 8 all'orale. I ragazzi che sono risultati insufficienti sia allo scritto sia all'orale sono stati 18. Quanti sono i ragazzi che hanno avuto una votazione sufficiente sia allo scritto che all'orale?

Rappresentiamo la situazione con un diagramma di Eulero-Venn.

C è l'insieme degli alunni della classe di Piero ed è costituito da 28 elementi. S è l'insieme dei ragazzi sufficienti allo scritto costituito da 6 alunni. O è l'insieme dei ragazzi che sono sufficienti all'orale ed è costituito da 8 elementi.

Gli elementi di $\overline{S \cup O}$ sono 18, cioè i ragazzi che non sono sufficienti né allo scritto, né all'orale.



L'insieme $S \cup O$ è quindi costituito da $28 - 18 = 10$ elementi.

Ricordiamo che

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{card}(S \cup O) = \operatorname{card}(S) + \operatorname{card}(O) - \operatorname{card}(S \cap O) \\
\Rightarrow &\operatorname{card}(S \cap O) = \operatorname{card}(S) + \operatorname{card}(O) - \operatorname{card}(S \cup O) \\
\Rightarrow &\operatorname{card}(S \cap O) = 6 + 8 - 10 = 4.
\end{aligned}
$$

In conclusione i ragazzi sufficienti allo scritto e all'orale sono 4.

✍ *Esercizi proposti:* 5.78, 5.79, 5.80, 5.81, 5.82, 5.83, 5.84, 5.85, 5.86, 5.87, 5.88, 5.89, 5.90, 5.91