6.5 Esercizi

6.5.1 Esercizi dei singoli paragrafi

6.1 - Le proposizioni

6.1. Quali delle seguenti frasi sono proposizioni logiche?

a) I matematici sono intelligenti;
b) 12 è un numero dispari;
c) Pascoli è stato un grande poeta;
d) Pascoli ha scritto La Divina Commedia;
e) Pascoli ha scritto poesie;
f) Lucia è una bella ragazza;
g) Lucia ha preso 8 al compito di matematica;
h) Il parallelogramma è una figura strana;
i) Per favore, fate silenzio;
j) $2+2=5$;
k) I miei insegnanti sono laureati.

6.2 - Algebra delle proposizioni

6.2. A partire dalle due proposizioni: $p =$ «16 è divisibile per 2», $q =$ «16 è divisibile per 4» costruisci le proposizioni $p \vee q$ e $p \wedge q$.

6.3 (*). A partire dalle proposizioni: $p =$ «18 è divisibile per 3», $q =$ «18 è numero dispari» costruisci le proposizioni di seguito indicate e stabilisci il loro valore di verità.

a) $p \vee q$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
b) $p \wedge q$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
c) $\neg p$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
d) $\neg q$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
e) $p \vee \neg q$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
f) $p \wedge \neg q$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
g) $\neg p \vee \neg q$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
h) $\neg p \wedge \neg q$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
i) $\neg(p \wedge q)$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

6.4. A partire dalle proposizioni $a =$ «20 è minore di 10», $b =$ «20 è maggiore di 10», $c =$ «20 è multiplo di 5», $d =$ «20 è dispari» scrivi per esteso le seguenti proposizioni composte e stabilisci il loro valore di verità.

a) $a \vee b$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
b) $a \wedge c$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
c) $d \wedge a$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
d) $\neg a \wedge b$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
e) $a \vee \neg b$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
f) $(\neg \vee a \neg b) \vee (c \vee d)$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
g) $(a \vee \neg b) \wedge (c \vee \neg d)$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

6.5 (*). Date le proposizioni $p =$ «oggi è lunedì», $q =$ «oggi studio matematica» riscrivi in simboli le seguenti proposizioni composte:

a) Oggi è lunedì e studio matematica;
b) Oggi non è lunedì e studio matematica;
c) Oggi è lunedì e non studio matematica;
d) Oggi non è lunedì e non studio matematica.

6.6. In quale delle seguenti proposizioni si deve usare la *o* inclusiva e in quali la *o* esclusiva:

a) Nelle fermate a richiesta l'autobus si ferma se qualche persona deve scendere o salire.
b) Luca sposerà Maria o Claudia.
c) Fammi chiamare da Laura o da Elisa.
d) Si raggiunge l'unanimità quando sono tutti favorevoli o tutti contrari.

6.7. A partire dalla preposizioni: $p =$ «oggi pioverà» e $\neg p =$ «oggi non pioverà» scrivere le proposizioni $p \veebar \neg p$, $p \vee \neg p$, $p \wedge \neg p$. Scrivere quindi la loro tabella della verità.

6.8. Scrivere le tabelle di verità delle formule:

a) $p \wedge (p \vee q)$;
b) $p \vee (p \wedge q)$;
c) $p \veebar (p \wedge q)$;
d) $p \wedge (p \veebar q)$;
e) $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$;
f) $(p \vee q) \wedge r$;
g) $(\neg p \vee q) \wedge (p \wedge q)$;
h) $\neg(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$;
i) $(p \vee \neg q) \wedge \neg(r)$;
j) $(p \wedge q) \wedge (\neg q)$;
k) $(p \vee q) \vee (\neg q)$;
l) $(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$.

6.9. Verificare che, date due proposizioni p e q, la proposizione composta $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$ è equivalente alla proposizione $p \veebar q$. Dimostrare l'equivalenza verificando che le tavole della verità sono uguali.

6.3 - Predicati e quantificatori

6.10. Qual è la negazione della frase «Ogni volta che ho preso l'ombrello non è piovuto»?

a) Almeno una volta sono uscito con l'ombrello ed è piovuto;
b) Quando esco senza ombrello piove sempre;
c) Tutti i giorni in cui non piove esco con l'ombrello;
d) Tutti i giorni che è piovuto ho preso l'ombrello.

6.11. Scrivi le negazioni delle seguenti frasi che contengono dei quantificatori.

a) Al compito di matematica eravamo tutti presenti.
b) Ogni giorno il professore ci dà sempre compiti per casa.
c) Ogni giorno Luca vede il telegiornale.
d) Tutti i miei familiari portano gli occhiali.
e) Tutti hanno portato i soldi per la gita.

6.4 - Implicazione

6.12. Sono date le frasi $p =$ «Mario è cittadino romano», $q =$ «Mario è cittadino italiano», scrivi per esteso le seguenti implicazioni e indica quale di esse è vera.

a) $p \Rightarrow q$;
b) $q \Rightarrow p$;
c) $q \Leftrightarrow p$.

6.13. Trasforma nella forma «Se ... allora ...» le seguenti frasi:

a) Un oggetto lanciato verso l'alto ricade a terra.
b) Quando piove prendo l'ombrello.
c) I numeri la cui ultima cifra è 0 sono divisibili per 5.
d) Per essere promosso occorre aver raggiunto la sufficienza.

6.14. Date le proposizioni p, q, r costruisci la tavola di verità delle seguenti proposizioni:

a) $p \Rightarrow \neg q$;
b) $\neg p \Rightarrow q$;
c) $\neg p \Rightarrow \neg q$;
d) $p \Rightarrow (q \wedge r)$;
e) $(p \vee q) \Rightarrow r$;
f) $(p \wedge q) \Rightarrow p$;
g) $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q$;
h) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$;
i) $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$.

6.15. Completa i seguenti ragionamenti:

a) Se un numero è multiplo di 10 allora è pari; il numero n non è pari quindi . . . . . .
b) Se il sole tramonta fa buio; il sole è tramontato quindi . . . . . .

6.16. Dimostra con un controesempio che non è vera l'affermazione «Tutti i multipli di 3 sono dispari».

6.17 (*). [Giochi d'autunno, 2010] Ecco le dichiarazioni rilasciate da quattro amiche:

Carla: «Io non sono né la più giovane né la più anziana»;
Liliana: «Io non sono la più giovane»;
Milena: «Io sono la più giovane»;
Anna: «Io sono la più anziana».

Il fatto è che una di loro (e solo una) ha mentito. Chi è, delle quattro amiche, effettivamente la più giovane?

6.18 (*). [I Giochi di Archimede, 2011] Dopo una rissa in campo l'arbitro vuole espellere il capitano di una squadra di calcio. É uno tra Paolo, Andrea e Gabriele ma, siccome nessuno ha la fascia al braccio, non sa qual è dei tre. Paolo dice di non essere il capitano; Andrea dice che il capitano è Gabriele; Gabriele dice che il capitano è uno degli altri due. Sapendo che uno solo dei tre dice la verità, quale delle affermazioni seguenti è sicuramente vera?

a) Gabriele non è il capitano;
b) Andrea dice la verità;
c) Paolo dice la verità;
d) Andrea è il capitano;
e) Gabriele mente

6.19 (*). [I Giochi di Archimede, 2010] Un celebre investigatore sta cercando il colpevole di un omicidio tra cinque sospettati: Anna, Bruno, Cecilia, Dario ed Enrico. Egli sa che il colpevole mente sempre e gli altri dicono sempre la verità.

Anna afferma: «Il colpevole è un maschio»;
Cecilia dice: «É stata Anna oppure è stato Enrico»;
Enrico dice: «Se Bruno è colpevole allora Anna è innocente».

Chi ha commesso l'omicidio?

6.20 (*). [I Giochi di Archimede, 2009] Quattro amici, Anna, Bea, Caio e Dino, giocano a poker con 20 carte di uno stesso mazzo: i quattro re, le quattro regine, i quattro fanti, i quattro assi e i quattro dieci. Vengono distribuite cinque carte a testa.

Anna dice: «Io ho un poker!» (quattro carte dello stesso valore);
Bea dice: «Io ho tutte e cinque le carte di cuori»;
Caio dice: «Io ho cinque carte rosse»;
Dino dice: «Io ho tre carte di uno stesso valore e anche le altre due hanno lo stesso valore».

Sappiamo che una e una sola delle affermazioni è falsa; chi sta mentendo?

6.21 (*). [I Giochi di Archimede, 2008] Un satellite munito di telecamera inviato sul pianeta Papilla ha permesso di stabilire che è falsa la convinzione di qualcuno che: «su Papilla sono tutti grassi e sporchi». Determina la verità delle seguenti affermazioni:

a) su Papilla almeno un abitante è magro e pulito;
b) su Papilla tutti gli abitanti sono magri e puliti;
c) almeno un abitante di Papilla è magro;
d) almeno un abitante di Papilla è pulito;
e) se su Papilla tutti gli abitanti sono sporchi, almeno uno di loro è magro.

6.22 (*). [I Giochi di Archimede, 2000] Anna, Barbara, Chiara e Donatella si sono sfidate in una gara di nuoto fino alla boa. All'arrivo non ci sono stati ex-equo. Al ritorno, Anna dice: «Chiara è arrivata prima di Barbara»; Barbara dice: «Chiara è arrivata prima di Anna»; Chiara dice: «Io sono arrivata seconda». Sapendo che una sola di esse ha detto la verità,

a) si può dire solo chi ha vinto;
b) si può dire solo chi è arrivata seconda;
c) si può dire solo chi è arrivata terza;
d) si può dire solo chi è arrivata ultima,
e) non si può stabile la posizione in classifica di nessuna.

6.23 (*). [I Giochi di Archimede, 1999] «In ogni scuola c'è almeno una classe in cui sono tutti promossi». Volendo negare questa affermazione, quale dei seguenti enunciati sceglieresti?

a) In ogni scuola c'è almeno una classe in cui sono tutti bocciati.
b) In ogni scuola c'è almeno un bocciato in tutte le classi
c) C'è almeno una scuola che ha almeno un bocciato in ogni classe.
d) C'è almeno una scuola in cui c'è una classe che ha almeno un bocciato.

6.24 (*). [I Giochi di Archimede, 1997] Se il pomeriggio ho giocato a tennis, la sera ho fame e se la sera ho fame, allora mangio troppo. Quale delle seguenti conclusioni non posso trarre da queste premesse?

a) Se gioco a tennis il pomeriggio, allora la sera ho fame e mangio troppo;
b) se la sera ho fame, allora mangio troppo, oppure ho giocato a tennis il pomeriggio;
c) se la sera non ho fame, allora non ho giocato a tennis il pomeriggio;
d) se la sera non ho fame, allora non mangio troppo;
e) se la sera non mangio troppo, allora non ho giocato a tennis il pomeriggio.

6.25 (*). [I Giochi di Archimede, 1998] Su un isola vivono tre categorie di persone: i cavalieri, che dicono sempre la verità, i furfanti, che mentono sempre, ed i paggi che dopo una verità dicono sempre una menzogna e viceversa. Sull'isola incontro un vecchio, un ragazzo e una ragazza. Il vecchio afferma: «Io sono paggio»; «Il ragazzo è cavaliere». Il ragazzo dice: «Io sono cavaliere»; «La ragazza è paggio». La ragazza afferma infine: «Io sono furfante»; «Il vecchio è paggio». Si può allora affermare che:

a) c'è esattamente un paggio;
b) ci sono esattamente due paggi;
c) ci sono esattamente tre paggi;
d) non c'è alcun paggio;
e) il numero dei paggi non è sicuro.

6.26. Dimostra che in ogni festa c'è sempre una coppia di persone che balla con lo stesso numero di invitati. (Suggerimento: `http://it.wikipedia.org/wiki/Principio_dei_cassetti`)

6.5.2 Risposte

6.3. Vere a), d), e), f), g) i).

6.5. a) $p \wedge q$, b) $\neg p \wedge q$, c) $p \wedge \neg q$, d) $\neg p \wedge \neg q$.

6.17. Milena.

6.18. a).

6.19. Anna.

6.20. Bea.

6.21. e).

6.22. c).

6.23. c).

6.24. d).

6.25. c).