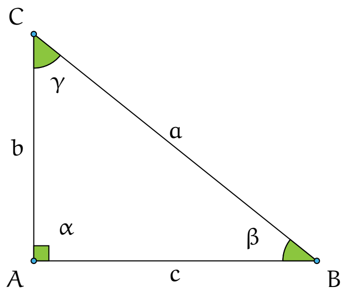
Appendice C — Trigonometria

C.1 Prime definizioni

L'etimologia della parola "trigonometria" dal greco τρίγωνον (*trígonon* triangolo) e μέτρον (*métron* misura) chiarisce in cosa consiste questa parte della matematica che ci accingiamo ad affrontare. La trigonometria nasce dal problema di "risolvere un triangolo", cioè di ricavare la misura di alcuni suoi elementi incogniti date le misure di altri elementi. Dal momento che gli elementi di un triangolo sono sei, i tre lati e i tre angoli, vedremo come, date le misure di almeno tre di questi elementi di cui almeno uno sia un lato, sia possibile determinare la misura degli altri tre elementi mancanti.

Disegniamo un triangolo rettangolo, retto in A, avendo cura di indicare con la stessa lettera vertice (maiuscola) e lato opposto (minuscola), come nella figura a fianco. Ricordiamo che tra i lati sussiste la relazione del teorema di Pitagora $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$ e che ciascun cateto è minore dell'ipotenusa. Ricordiamo anche che gli angoli acuti sono complementari $\widehat{C} + \widehat{B} = 90°$.



❑ **Osservazione** Basta conoscere la misura di due lati per determinare la misura del terzo lato, ma queste informazioni non ci permettono di determinare l'ampiezza degli angoli acuti se non in casi particolari. Se conosciamo un angolo acuto e la misura di un lato non possiamo determinare la misura degli altri elementi mancanti.

Riferendoci alla figura, chiamiamo cateto adiacente all'angolo acuto β il cateto AB indicato con c e cateto opposto all'angolo β il cateto AC indicato con b.

Definizione C.1. Con riferimento al triangolo in figura si definiscono le grandezze *seno di* β, *coseno di* β e *tangente di* β rispettivamente

$$\sin(\beta) = \frac{\text{cateto opposto a } \beta}{\text{ipotenusa}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad b = a \cdot \sin(\beta)$$

$$\cos(\beta) = \frac{\text{cateto adiacente a } \beta}{\text{ipotenusa}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad c = a \cdot \cos(\beta)$$

$$\tan(\beta) = \frac{\text{cateto opposto a } \beta}{\text{cateto adiacente a } \beta} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c} \quad \Rightarrow \quad b = c \cdot \tan(\beta).$$

Definizione C.2. In maniera analoga, per l'angolo γ, complementare di β ($\gamma = 90° - \beta$):

$$\sin(\gamma) = \frac{\text{cateto opposto a } \gamma}{\text{ipotenusa}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad c = a \cdot \sin(\gamma)$$
$$\cos(\gamma) = \frac{\text{cateto adiacente a } \gamma}{\text{ipotenusa}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad b = a \cdot \cos(\gamma)$$
$$\tan(\gamma) = \frac{\text{cateto opposto a } \gamma}{\text{cateto adiacente a } \gamma} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{c}{b} \quad \Rightarrow \quad c = b \cdot \tan(\gamma).$$

Le definizioni sono ben poste: le funzioni *seno dell'angolo* (sen o sin), *coseno dell'angolo* (cos), *tangente dell'angolo* (tan o tg) dipendono solo dall'angolo e non dal particolare triangolo rettangolo usato. Infatti angoli acuti della stessa misura appartengono a triangoli rettangoli tutti simili tra loro; dato che i lati di triangoli simili sono in proporzione, il rapporto tra i lati è invariato. Inoltre possiamo certamente affermare che le funzioni seno e coseno di angoli acuti assumono valori positivi minori di 1, poiché in un triangolo rettangolo il cateto è minore dell'ipotenusa.

Dal confronto delle definizioni notiamo che valgono le uguaglianze:

$$\sin(\gamma) = \cos(\beta) \qquad \cos(\gamma) = \sin(\beta) \qquad \tan(\gamma) = \frac{1}{\tan(\beta)}$$

per cui possiamo anche scrivere:

$$\sin(x) = \cos(90° - x) \qquad \cos(x) = \sin(90° - x) \qquad \tan(x) = \frac{1}{\tan(90° - x)}.$$

Esempio C.1. Nel triangolo rettangolo ABC i cateti misurano rispettivamente $AB = 4\text{m}$, $AC = 3\text{m}$ e l'ipotenusa misura 5m. Possiamo determinare le funzioni trigonometriche dei suoi angoli acuti semplicemente applicando le definizioni. Si ottiene

$$\sin(\beta) = \frac{b}{a} = \frac{3}{5}, \quad \cos(\beta) = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}, \quad \tan(\beta) = \frac{b}{c} = \frac{3}{4}.$$

Per l'angolo complementare γ lasciamo al lettore il completamento:

$$\sin(\gamma) = \ldots\ldots, \quad \cos(\gamma) = \ldots\ldots, \quad \tan(\gamma) = \ldots\ldots$$

❑ **Osservazione** Ancora non possiamo avere informazioni sull'ampiezza degli angoli acuti; vedremo in seguito come procedere nei calcoli e quindi concludere la risoluzione del triangolo.

✍ *Esercizio proposto:* C.1

C.2 Due identità fondamentali

Dalle definizioni date nella sezione precedente otteniamo le seguenti identità fondamentali:

$$\tan(\gamma) = \frac{a \cdot \sin(\gamma)}{a \cdot \cos(\gamma)} = \frac{\sin(\gamma)}{\cos(\gamma)}$$

cioè la tangente di un angolo è il rapporto tra il seno dell'angolo e il coseno dello stesso angolo. In generale:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}. \tag{C.1}$$

Dal teorema di Pitagora si ha $a^2 = b^2 + c^2$ da cui, dividendo ambo i membri per a^2, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a^2} &= \frac{b^2+c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \\ \Rightarrow 1 &= \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \\ \Rightarrow 1 &= (\cos(\gamma))^2 + (\cos(\gamma))^2 \\ \Rightarrow 1 &= \cos^2(\gamma) + \sin^2(\gamma). \end{aligned}$$

In generale, per qualunque angolo x vale

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1. \tag{C.2}$$

Definizione C.3. Si definiscono inoltre altre funzioni trigonometriche che potranno servire nella risoluzione dei triangoli, la *secante*, la *cosecante* e la *cotangente* di un angolo x, rispettivamente:

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \qquad \csc(x) = \frac{1}{\sin(x)} \qquad \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}.$$

Esempio C.2. In un triangolo rettangolo si sa che $\cos(\beta) = \frac{3}{4}$, determinare $\sin(\beta)$ e $\tan(\beta)$.

Strategia risolutiva: ricordando che per qualunque angolo x vale la C.2 possiamo sostituire il dato e calcolare $\sin(\beta) = \sqrt{1-\cos^2(\beta)} = \sqrt{1-\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Infine, sapendo che per ogni angolo vale la C.1, cioè $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, ricaviamo:

$$\tan(\beta) = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Osserviamo che nella determinazione di $\sin(\beta)$ abbiamo trascurato il valore negativo in quanto abbiamo definito le funzioni goniometriche come rapporto delle misure di due segmenti.

✍ *Esercizio proposto:* C.2

C.3 Angoli particolari

Possiamo ricavare per via geometrica il valore esatto delle funzioni trigonometriche di angoli particolari.

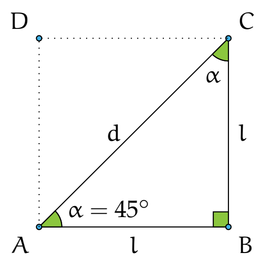


Figura C.1: T.rettangolo isoscele.

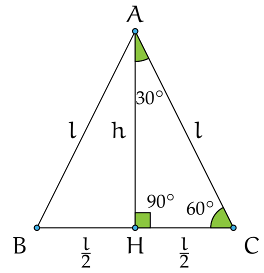


Figura C.2: T.rettangolo con angoli di 30° e 60°.

C.3.1 Angoli di 45°

Il triangolo rettangolo isoscele (figura C.1) ha gli angoli acuti di 45° ed è la metà di un quadrato di lato l. Sappiamo che $d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = \sqrt{2}l$; poiché il calcolo delle funzioni trigonometriche per un angolo non dipende dal particolare triangolo usato, possiamo concludere per le definizioni date: $\sin(45°) = \frac{l}{\sqrt{2}l} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e anche $\cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e per la definizione di tangente dell'angolo $\tan(45°) = 1$.

C.3.2 Angoli di 30° e 60°

Il triangolo rettangolo con un angolo di 30° ha l'altro angolo acuto di 60° (figura C.2) pertanto possiamo trattare insieme la ricerca delle funzioni trigonometriche di tali angoli.

Il triangolo rettangolo in questione è la metà di un triangolo equilatero di lato l e altezza h; poiché $\overline{HC}$ è metà del lato possiamo subito dire che $\cos(60°) = \frac{\overline{HC}}{l} = \frac{l/2}{l} = \frac{1}{2}$. Per le definizioni date si ha $\sin(60°) = \frac{\overline{AH}}{l}$. Applicando il teorema di Pitagora si ottiene

$$\overline{AH} = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}}l = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}l = \frac{\sqrt{3}}{2}l \quad \Rightarrow \quad \sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Infine $\tan(60°) = \dfrac{\sin(60°)}{\cos(60°)} = \sqrt{3}$.

Ricordando che per angoli complementari è $\sin(x) = \cos(90° - x)$ e $\cos(x) = \sin(90° - x)$ ed essendo $30° = 90° - 60°$ possiamo scrivere:

$$\sin(30°) = \cos(60°) = \frac{1}{2}; \qquad \cos(30°) = \sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e infine

$$\tan(30°) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

C.3.3 Angoli di 0° e 90°

Ovviamente non esiste un triangolo con un angolo di 0°: si tratta di un triangolo che degenera in un segmento. Possiamo pensare ad un triangolo rettangolo come nella figura di pagina 579, avente $a = 1$ e immaginare di muovere il vertice C in modo da rimpicciolire sempre più l'angolo β; quando β diventa 0° il segmento b si riduce ad un punto e si ha $b = 0$ e quindi $\sin(0°) = 0$, l'ipotenusa a coincide con il cateto c quindi $\cos(0°) = 1$ e infine $\tan(0°) = 0$.

Allo stesso modo, se deformiamo il triangolo fino ad avere l'angolo γ di 0°, quindi β di 90°, otteniamo che $\sin(90°) = 1$ e $\cos(90°) = 0$; applicando la formula della tangente si avrà una frazione con denominatore nullo e quindi diremo che $\tan(90°)$ non è definita.

Possiamo riassumere i valori trovati per questi angoli particolari in una tabella:

angolo x	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	non definita

Come possiamo ottenere i valori delle funzioni trigonometriche per angoli diversi da quelli sopra considerati?

C.4 Usare la calcolatrice

Sul mercato ci sono vari tipi di calcolatrice scientifica, ciascuno dovrà familiarizzare con la propria calcolatrice per imparare ad impostare correttamente il calcolo da effettuare e i tasti da pigiare per ottenere il corretto risultato. Se non si digita in modo consapevole e se non si sanno leggere i risultati, la calcolatrice è uno strumento inutilizzabile e talvolta può anche essere dannoso.

Nel seguito faremo riferimento alla calcolatrice *kcalc* (figura C.4), in dotazione all'ambiente di desktop *KDE*[1] (*GNU/Linux*[2]), cercando di dare riferimenti che si adattino a tutte le calcolatrici.

Passo I: scelta dell'unità di misura Sicuramente conosci già, come unità di misura degli angoli, il *grado sessagesimale* (indicato con il simbolo °). Esistono però altre unità di misura utilizzate in contesti diversi: i *gradi centesimali* (chiamati anche *gradienti*), utilizzati principalmente in topografia, e i *radianti*, utilizzati in matematica, specialmente in analisi. Su tutte le calcolatrici scientifiche è possibile effettuare le operazioni sugli angoli scegliendo l'opportuna unità di misura:

Angolo	Sigla	Sigla abbreviata
gradi sessagesimali	DEG	°
gradi centesimali	GRAD	G
radianti	RAD	

[1] K Desktop Environment (http://it.wikipedia.org/wiki/KDE).
[2] un sistema operativo per computer (http://it.wikipedia.org/wiki/Linux).

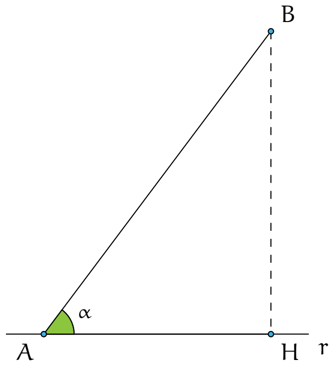


Figura C.3: AB e la proiezione AH su r.

Figura C.4: Calcolatrice *kcalc*.

Impostiamo la calcolatrice in modo da ricevere in ingresso angoli misurati in gradi sessagesimali (con *kcalc* dobbiamo impostare il selettore in alto a sinistra sulla pulsantiera sul simbolo °, altre calcolatrici hanno un pulsante che permette di passare da una impostazione all'altra, in sequenza).

Passo II: calcolo del coseno di un angolo Ci proponiamo di determinare $\cos(60°)$.

Controllate di aver impostato l'input dell'angolo in gradi sessagesimali, quindi digitate 60 e premete il tasto *cos*. La calcolatrice restituisce 0.5. Dunque $\cos(60°) = 0,5$.

Attenzione: per i numeri decimali sulla calcolatrice useremo il "punto decimale" in sostituzione della virgola.

❑ Osservazione

a) La funzione coseno calcolata su angoli compresi fra 0° e 90° restituisce sempre numeri compresi fra 0 e 1.
b) Il coseno vale 1 (il massimo) quando l'angolo di input è 0° e decresce fino a 0 man mano che l'angolo immesso cresce fino a 90°. Detto in altre parole: il coseno di un angolo che cresce da 0° a 90° diminuisce dal valore 1 al valore 0.
c) La decrescita del coseno non è proporzionale all'aumento dell'angolo, tant'è vero che si ha: $\cos(30°) = 0,867$ ma $\cos(60°) = 0,5$ che non è la metà di $\cos(30°)$.

Problema C.3. Il segmento AB della figura C.3 misura 5m e la sua proiezione AH sulla retta r misura 3m. Possiamo determinare la misura dell'angolo α compreso tra r e il segmento AB?

Dati: $\overline{AB} = 5\text{m}$; $\overline{AH} = 3\text{m}$. *Obiettivo*: α.

Soluzione Partiamo dalla formula $\overline{AH} = \overline{AB} \cdot \cos(\alpha)$, da essa possiamo ottenere $\cos(\alpha) = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}$. Sostituendo i valori noti otteniamo $\cos(\alpha) = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

Per risalire dal valore del coseno al valore dell'angolo usiamo la calcolatrice attivando la funzione inversa di coseno; su molte calcolatrici tale funzione è indicata con $\cos^{-1}$, funzione che si attiva premendo il tasto *Shift* (figura C.4); in *kcalc* premendo il tasto *Shift* il tasto cos cambia funzionalità e assumendo quella della sua funzione inversa con la scritta *arccos*.

Calcoliamo la misura dell'angolo il cui coseno è $0,6$ immettendo tale valore nella calcolatrice e attivando i tasti *Shift* e *arccos*. La calcolatrice restituisce 53.13010235. Questo risultato ci dice che l'angolo è di 53° più una parte decimale 0,130 102 35. Ricordiamo che i sottomultipli del grado vengono espressi in sessantesimi ($1° = 60'$ cioè 60 *primi*), a loro volta suddivisi in sessantesimi ($1' = 60''$ cioè 60 *secondi*). Dunque la parte decimale estratta dalla calcolatrice va adeguatamente modificata: al risultato della calcolatrice togliamo la parte intera (53) e moltiplichiamo per 60 ottenendo 7,806 141 la cui parte intera (7) rappresenta i *primi*; togliamo nuovamente la parte intera (7) e moltiplichiamo per 60 ottenendo i *secondi* 48,368 46 Arrotondiamo la parte intera e possiamo concludere $\alpha \simeq 53°7'48''$. Alcune calcolatrici scientifiche fanno in automatico questi calcoli attivando un tasto opportuno.

Osserviamo che viene utilizzato il simbolo $\simeq$ (circa uguale) per indicare che abbiamo usato valori approssimati. Ora sei in grado di determinare l'ampiezza degli angoli acuti attivando le funzioni inverse sulla tua calcolatrice.

♦

✍ *Esercizi proposti:* C.3, C.4, C.5

C.5 Operazioni con i gradi sessagesimali

Accenniamo alle addizioni e sottrazioni tra angoli.

Esempio C.4. Svolgiamo l'operazione $48°\ 45'52'' + 62°\ 27'22''$.

$$\begin{array}{rrrl} 48° & 45' & 52'' & + \\ 62° & 27' & 22'' & \\ \hline 110° & 72' & 74'' & \\ 111° & 13' & 14'' & \end{array}$$

Sommando termine a termine otteniamo $110°\ 72'74''$. Tenendo conto che 1 grado equivale a 60 primi e 1 primo equivale a 60 secondi, si ha che i 74° valgono $1'$ e $14''$, i $72'74''$ diventano allora $73'$ e $14''$. Trasformiamo poi i $73'$ in $1°$ e $13'$.

In definitiva si ha che $110°\ 72'74'' = 111°\ 13'14''$.

Esempio C.5. Svolgiamo ora una sottrazione: $90° - 45°\ 33'12''$.

$$\begin{array}{rrrl} 90° & & & - \\ 45° & 33' & 12'' & \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rrrl} 89° & 59' & 60'' & - \\ 45° & 33' & 12'' & \\ \hline 44° & 26' & 48'' & \end{array}$$

Questa è una operazione molto comune, poiché capita abbastanza spesso di dover calcolare l'angolo complementare. Per svolgere la sottrazione conviene scrivere 90° come $89°\ 59'60''$ e svolgere la sottrazione avendo come risultato $44°\ 26'48''$.

Esempio C.6. Un'ultima sottrazione: $72°\ 20'40'' - 23°\ 40'52''$.

Per fare questa sottrazione parto dai secondi e non potendo fare $40 - 52$, utilizzo il riporto trasformando $72°\ 20'40''$ in $72°\ 19'100''$. Ora posso eseguire agevolmente la sottrazione e ottengo $100 - 52 = 48$; sottraggo poi i primi tra loro, aggiungendo il riporto ai $19'$ $(72°19' \rightarrow$

$71°79')$ e ottengo $79-40 = 39$; sottraggo poi i gradi: $71-23 = 48$. Il risultato finale è quindi $48°\ 39'48''$.

✍ *Esercizio proposto:* C.6

C.6 Risoluzione di triangoli rettangoli

Ricordiamo che risolvere un triangolo significa ricavare le misure di tutti i suoi elementi (lati e angoli) date le misure di alcuni di essi.

Esempio C.7. Determinate l'area del triangolo rettangolo ABC, retto in A, sapendo che il cateto $BC = 2\text{m}$ e che $\widehat{ABC} = \beta = 20°$.

Dati: $\widehat{BAC} = 90°$, $\overline{BC} = 2\text{m}$, $\widehat{ABC} = \beta = 20°$.

Obiettivo: Area (ABC).

Procedura risolutiva: Area $(ABC) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC}$.

Dobbiamo dunque determinare le misure dei cateti. Applicando le definizioni ($\gamma = \widehat{ACB}$):

$$\overline{AB} = \overline{BC} \cdot \cos(\beta) = 2 \cdot \cos(20°) \simeq 2 \cdot 0,940 \simeq 1,879$$

$$\overline{AC} = \overline{BC} \cdot \cos(\gamma) = 2 \cdot \cos(70°) \simeq 2 \cdot 0,342 \simeq 0,684$$

Pertanto Area $\simeq 0,643(\text{m}^2)$.

Esempio C.8. Un triangolo rettangolo ABC, retto in A, ha il cateto AB di 5cm e l'angolo acuto in C di $57°$; determinate l'altro angolo acuto, la misura del cateto AC e la misura dell'ipotenusa BC.

Dati: $\widehat{BAC} = 90°$, $\widehat{BCA} = 57°$, $\overline{AB} = 5\text{cm}$.

Obiettivo: $\beta = \widehat{ABC}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$.

Procedura risolutiva: Essendo gli angoli acuti complementari si ottiene $\beta = 90° - 57° = 33°$. Applicando la formula inversa:

$$\overline{CB} = \frac{\overline{AB}}{\cos(\beta)} = \frac{5}{\cos(33°)} \simeq \frac{5}{0,839} \simeq 5,962\text{cm}.$$

Infine determiniamo l'altro cateto e osserviamo che possiamo procedere in due modi:

- con il Teorema di Pitagora:

$$\overline{CA} = \sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{AB}^2} \simeq \sqrt{35,543 - 25} \simeq \sqrt{10,543} \simeq 3,247\text{cm};$$

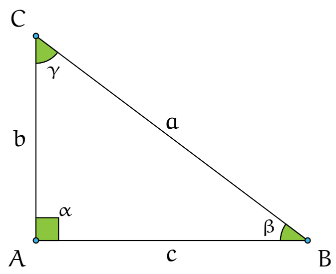
- per definizione di coseno:

$$\overline{CA} = \overline{CB} \cdot \cos(\gamma) \simeq 5,962 \cdot \cos(57°) \simeq 5,962 \cdot 0,545 \simeq 3,247\text{cm}.$$

❑ Osservazione

a) Nei calcoli effettuati abbiamo operato un'approssimazione; per esempio il valore esatto di $\overline{CB}$ è rappresentato solo dall'espressione $\overline{CB} = \frac{\overline{AB}}{\cos(\beta)} = \frac{5}{\cos(33°)}$.
b) I risultati ottenuti con procedimenti diversi possono differire, se pur di poco, a causa dell'uso di valori approssimati nei calcoli che aumentano l'errore di approssimazione (propagazione dell'errore).

Esempio C.9. Risolvi il triangolo rettangolo della figura sapendo che $c = 20\text{cm}$ e $\sin(\beta) = \frac{3}{5}$.



Usiamo l'identità fondamentale per determinare $\cos(\beta)$:

$$\cos(\beta) = \sqrt{1 - \sin^2(\beta)} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25-9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5};$$

Poiché $\cos(\beta) = \frac{c}{a}$ si ha:

$$a = \frac{c}{\cos(\beta)} = \frac{20}{\frac{4}{5}} = \frac{20 \cdot 5}{4} = 25\text{cm}.$$

Per il teorema di Pitagora $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15\text{cm}$;
$\beta \simeq 36°\ 52'12''$ (calcolato con la calcolatrice e arrotondato), $\gamma = 90° - \beta \simeq 53°\ 07'48''$.

Esempio C.10. Risolvere il triangolo rettangolo ABC, retto in A (quello della figura precedente) sapendo che $b = 2\text{cm}$ e $\sin(\beta) = 0,2$.

Dati: $b = 2\text{cm}$, $\sin(\beta) = 0,2$.
Obiettivo: a, c, β, γ.
Procedura risolutiva: Dalle definizione di seno $\sin(\beta) = \frac{b}{a}$ si ha

$$a = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{2}{0,2} = 10\text{cm}.$$

Con il teorema di Pitagora possiamo ricavare l'altro cateto

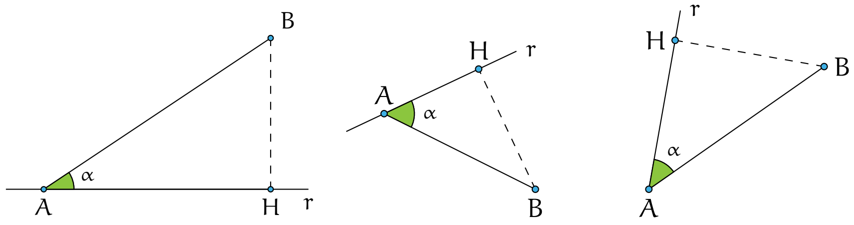
$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{100 - 4} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6} \simeq 9,798\text{cm}.$$

Infine, con la funzione inversa, ricaviamo l'angolo $\beta = \sin^{-1}(0,2) \simeq 11,537$ e procedendo come spiegato in precedenza otteniamo: $\beta \simeq 11°\ 32'13''$ e $\gamma = 90° - \beta \simeq 78°\ 27'47''$.

✍ *Esercizi proposti:* C.7, C.8, C.9, C.10

C.6.1 Proiezione di un segmento lungo una direzione

Definizione C.4. Dato un segmento AB ed una retta r che passa per un suo estremo (A, per fissare le idee). Si definisce *proiezione del segmento* AB *sulla retta* r il segmento AH dove H è l'intersezione fra r e la sua perpendicolare passante per B (si vedano i tre esempi riportati nella figura seguente).



✍ *Esercizi proposti:* C.11, C.12, C.13, C.14, C.15, C.16, C.17, C.18, C.19, C.20, C.21

C.7 Risoluzione di un triangolo qualsiasi con triangoli rettangoli

Per risolvere i triangoli qualsiasi, tramite l'altezza, bisogna ricercare all'interno della figura considerata dei triangoli rettangoli. Nel seguito saranno indicati altri teoremi che permettono di risolvere tutti i tipi di triangoli.

Esempio C.11. Risolvi il triangolo acutangolo della figura C.5 con $\alpha = 39°$, $\beta = 57°$ e $\overline{CH} = 11\text{m}$.

Ricordando che la somma degli angoli di un triangolo è 180° ricaviamo γ:

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 39° - 57° = 84°.$$

Individuiamo ora i triangoli rettangoli nella figura in modo da poter applicare le formule. Con il triangolo rettangolo CHB:

$$\sin(\beta) = \frac{\overline{CH}}{\overline{CB}} \quad \Rightarrow \quad \overline{CB} = \frac{\overline{CH}}{\sin(\beta)} = \frac{11}{\sin(57°)} \simeq 13{,}2\,\text{m};$$
$$\tan(\beta) = \frac{\overline{CH}}{\overline{BH}} \quad \Rightarrow \quad \overline{BH} = \frac{\overline{CH}}{\tan(\beta)} = \frac{11}{\tan(57°)} \simeq 7{,}15\,\text{m}.$$

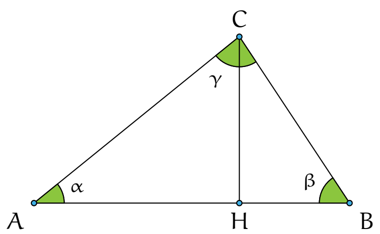


Figura C.5: Triangolo acutangolo.

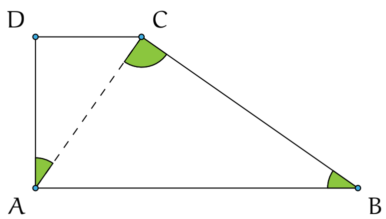


Figura C.6: Trapezio rettangolo.

Con il triangolo rettangolo AHC:

$$\sin(\alpha) = \frac{\overline{CH}}{\overline{AC}} \quad \Rightarrow \quad \overline{AC} = \frac{\overline{CH}}{\sin(\alpha)} = \frac{11}{\sin(39°)} \simeq 17{,}46\,\text{m};$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\overline{CH}}{\overline{AH}} \quad \Rightarrow \quad \overline{AH} = \frac{\overline{CH}}{\tan(\beta)} = \frac{11}{\tan(39°)} \simeq 13{,}75\,\text{m}.$$

Infine calcoliamo $\overline{AB} = \overline{AH} + \overline{BH} \simeq 7{,}15 + 13{,}75 = 20{,}9\text{m}$.

✍ *Esercizi proposti:* C.22, C.23, C.24, C.25

C.7.1 Quadrilateri

Esempio C.12. Nel trapezio rettangolo $ABCD$ della figura C.6 il lato obliquo BC forma un angolo di $35°$ con la base maggiore AB, inoltre la diagonale AC è perpendicolare a BC. Calcola il perimetro e l'area del trapezio sapendo che la sua altezza è 10cm.

Ricordando che la somma degli angoli di un triangolo è $180°$ ricaviamo $\widehat{CAB} = 55°$. Siccome il trapezio è rettangolo $\widehat{DAC} = \widehat{DAB} - \widehat{CAB} = 90° - 55°$. Calcoliamo ora CB, AB e DC:

$$\sin(\widehat{ABC}) = \frac{\overline{AD}}{\overline{CB}} \quad \Rightarrow \quad \overline{CB} = \frac{\overline{AD}}{\sin(\widehat{ABC})} = \frac{10}{\sin(35°)} \simeq 17{,}43\,\text{cm};$$

$$\overline{AB} = \frac{\overline{CB}}{\cos(\widehat{ABC})} \simeq \frac{17{,}43}{\cos(55°)} \simeq 21{,}28\,\text{cm};$$

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{AD}} = \tan(\widehat{DAC}) \quad \Rightarrow \quad \overline{DC} = \overline{AD} \cdot \tan(\widehat{DAC}) = 10\tan(35°) \simeq 7{,}00.$$

Da cui:

$$2p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{DC} + \overline{DA} \simeq 21{,}28 + 17{,}43 + 7{,}00 + 10 = 55{,}71\,\text{cm};$$

$$\text{Area} = \frac{(\overline{AB} + \overline{DC}) \cdot \overline{AD}}{2} \simeq \frac{(21{,}28 + 7{,}00) \cdot 10}{2} \simeq 141{,}40\,\text{cm}^2.$$

✍ *Esercizi proposti:* C.26, C.27, C.28, C.29,C.30, C.31, C.32, C.33

C.7.2 Applicazioni alla topografia

La topografia è una disciplina che studia gli strumenti ed i metodi operativi, sia di calcolo che di disegno, necessari per ottenere una rappresentazione grafica di una parte della superficie terrestre. La topografia ha carattere applicativo e trae la sua base teorica dalla matematica, dalla geometria e dalla trigonometria.

Esempio C.13. Risolvere il quadrilatero della figura C.7 sapendo che $AB = 42{,}5\,\text{m}$, $BC = 32{,}18\,\text{m}$, $CD = 27{,}6\,\text{m}$, $\widehat{BAD} = 56°$, $\widehat{ADC} = 62°$.

Dati: $\overline{AB} = 42{,}5\,\text{m}$, $\overline{BC} = 32{,}18\,\text{m}$, $\overline{CD} = 27{,}6\,\text{m}$, $\widehat{BAD} = 56°$, $\widehat{ADC} = 62°$.

Obiettivo: $\overline{AD}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{CDA}$.

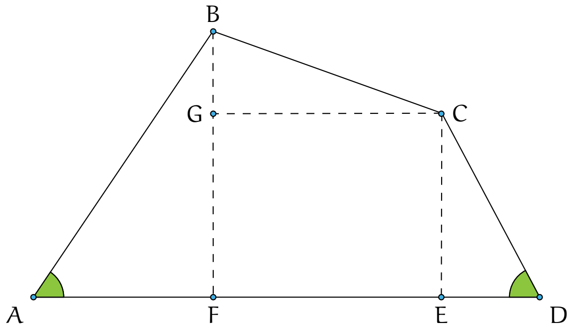


Figura C.7: Il quadrilatero $ABCD$.

Procedura risolutiva: Suddividiamo il quadrilatero in tre triangoli rettangoli e in un rettangolo, come nella figura, e risolviamo i triangoli.

Triangolo FBA retto in F:

$$\widehat{FBA} = 90° - \widehat{BAD} = 90° - 56° = 34°;$$
$$\overline{AF} = \overline{AB}\cos(\widehat{BAD}) = 42{,}5\cos(56°) \simeq 23{,}77\,\text{m};$$
$$\overline{BF} = \overline{AB}\sin(\widehat{BAD}) = 42{,}5\sin(56°) \simeq 35{,}23\,\text{m}.$$

Triangolo DCE retto in E:

$$\widehat{DCE} = 90° - \widehat{ADC} = 90° - 62° = 28°;$$
$$\overline{DE} = \overline{CD}\cos(\widehat{FBA}) = 27{,}6\cos(62°) \simeq 12{,}96\,\text{m};$$
$$\overline{CE} = \overline{CD}\sin(\widehat{ADC}) = 27{,}6\sin(62°) \simeq 24{,}37\,\text{m}.$$

Triangolo GBC retto in G:

$$\overline{BG} = \overline{BF} - \overline{GF} = \overline{BF} - \overline{CE} \simeq 35{,}23 - 24{,}37 \simeq 10{,}86\,\text{m};$$
$$\cos(\widehat{CBG}) = \frac{\overline{BG}}{\overline{BC}} \simeq \frac{10{,}86}{32{,}18} \simeq 0{,}34 \Rightarrow \widehat{CBG} = \cos^{-}1(0{,}34) \simeq 70°\ 16'36'';$$
$$\widehat{BCG} = 90° - \widehat{CBG} \simeq 90° - 70°\ 16'36'' \simeq 19°\ 43'24'';$$
$$\overline{GC} = \overline{BC}\sin(\widehat{CBG}) \simeq \overline{BC}\sin(70°\ 16'36'') \simeq 30{,}29\,\text{m}.$$

Calcoliamo ora gli elementi incogniti del quadrilatero:

$$\overline{DA} = \overline{AF} + \overline{FE} + \overline{ED} \simeq 23{,}77 + 30{,}29 + 12{,}96 = 67{,}02\,\text{m};$$
$$\widehat{ABC} = \widehat{ABF} + \widehat{FBC} \simeq 34° + 70°\ 16'36'' = 104°\ 16'36'';$$
$$\widehat{BCD} = \widehat{BCG} + \widehat{GCE} + \widehat{ECD} \simeq 19°\ 43'24'' + 90° + 34° = 143°\ 43'24''.$$

✍ *Esercizi proposti:* C.34, C.35, C.36, C.37, C.38, C.39, C.40, C.41, C.42, C.43, C.44

C.45, C.46

C.8 Risoluzione di un triangolo qualunque

Le funzioni trigonometriche possono essere calcolate anche su angoli maggiori di 90°. Poiché, al momento, siamo interessati alle applicazioni sui triangoli, ci basterà estendere le nostre considerazioni agli angoli compresi fra 90° e 180°, essendo 180° la misura limite superiore di un angolo interno di un triangolo.

Esempio C.14. Analizziamo la tabella con i valori approssimati alla quarta cifra decimale delle funzioni seno e coseno per alcuni angoli da 0° a 180°.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin(\alpha)$	0	0,5	0,7071	0,8660	1	0,8660	0,7071	0,5	0
$\cos(\alpha)$	1	0,8660	0,7071	0,5	0	−0,5	−0,7071	−0,8660	−1

Dalla tabella si nota che la funzione seno si mantiene positiva nell'intervallo (0°, 180°), nei cui estremi si annulla. Inoltre essa assume il valore massimo, uguale a 1, quando l'angolo è di 90°. La funzione coseno, invece, è negativa per angoli compresi tra 90° e 180°. Più precisamente essa decresce da 1 a 0 man mano che l'angolo su cui è calcolata cresce da 0° a 90°, si annulla quando l'angolo è esattamente 90°, dopodiché continua a decrescere, da 0 a −1 man mano che l'angolo passa da 90° a 180°. Osserviamo anche che angoli supplementari (la cui somma è l'angolo piatto, cioè 180°) hanno lo stesso seno ma coseno opposto. Queste considerazioni saranno chiarite con lo studio delle funzioni circolari.

Affrontiamo ora il problema della risoluzione di un triangolo qualsiasi. Come sappiamo, gli elementi caratteristici di un triangolo sono le misure dei suoi lati e dei suoi angoli. Sappiamo anche che per determinare univocamente un triangolo sono, in linea di massima, necessari solo tre di questi elementi purché uno almeno di questi sia un lato. Ciò deriva dai tre criteri di *congruenza* dei triangoli che andiamo a ricordare.

Primo criterio di congruenza Due triangoli che abbiano rispettivamente congruenti due lati e l'angolo tra essi compreso sono congruenti.

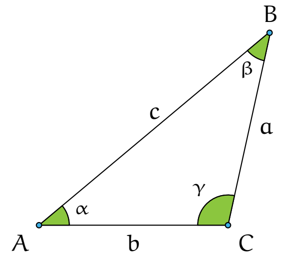
Secondo criterio di congruenza Due triangoli che abbiano rispettivamente congruenti un lato e due angoli ugualmente posti rispetto al lato sono congruenti.

Terzo criterio di congruenza Due triangoli che abbiano rispettivamente congruenti i tre lati sono congruenti.

❑ **Osservazione** Ricordiamo che due triangoli che abbiano ordinatamente uguali tutti gli angoli non sono, in generale, congruenti, bensì sono *simili*.

Quello che ci chiediamo è se la trigonometria, finora usata solo per i triangoli rettangoli, ci possa venire in aiuto per la determinazione delle misure degli elementi incogniti di un triangolo qualunque, quando conosciamo i tre elementi che lo determinano univocamente. Ad esempio, se è assegnata la lunghezza di due lati e l'ampiezza dell'angolo compreso, la geometria euclidea ci aiuta a costruire il suddetto triangolo tramite riga e compasso ma non ci dice nulla delle misure degli elementi incogniti.

Disegniamo un triangolo avendo cura di indicare con la stessa lettera vertice e lato opposto e di nominare con α, β e γ le ampiezze degli angoli di vertice rispettivamente A, B e C.



C.8.1 Caso I: due lati e l'angolo compreso congruenti

Come abbiamo premesso, assegnati due lati e l'angolo tra essi compreso, la geometria euclidea ci assicura l'esistenza di un solo triangolo che soddisfi i dati, ma non ci permette di determinare la misura del terzo lato, né le ampiezze degli altri angoli. Abbiamo bisogno di altri strumenti come il teorema di Carnot.[3]

Teorema C.1 (del coseno o di Carnot)**.** *In un triangolo qualsiasi di cui siano note le lunghezze di due lati e l'ampiezza dell'angolo compreso, il quadrato della lunghezza del lato incognito è uguale alla somma dei quadrati delle lunghezze note diminuita del loro doppio prodotto per il coseno dell'angolo compreso.*

A seconda di quali siano i due lati noti, traducendo in linguaggio matematico quanto afferma l'enunciato si ha:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma);$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha);$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta).$$

Problema C.15. Risolvete il triangolo ABC dati $a = 20\text{cm}$, $b = 10\text{cm}$ e $\gamma = 36°$.

Dati: $a = 20\text{cm}, \quad b = 10\text{cm}, \quad \gamma = 36°$.
Obiettivo: $c, \quad \alpha, \quad \beta$.
Procedura risolutiva: per il teorema di Carnot possiamo scrivere

$$\begin{aligned} & c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) \\ \Rightarrow\quad & c^2 = 20^2 + 10^2 - 2 \cdot 20 \cdot 10 \cdot \cos(36°) \simeq 400 + 100 - 400 \cdot 0{,}809 \simeq 176{,}4 \\ \Rightarrow\quad & c \simeq \sqrt{176{,}4} \simeq 13{,}281\text{ cm}. \end{aligned}$$

Ora dobbiamo determinare gli altri due angoli; utilizzando ancora il teorema di Carnot ricaviamo α

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

conoscendo a, b e c rimane come incognita $\cos(\alpha)$. Sostituiamo i valori noti:

$$\cos(\alpha) \simeq \frac{10^2 + 176{,}4 - 20^2}{2 \cdot 10 \cdot 13{,}281} \simeq \frac{276{,}4 - 400}{265{,}62} \simeq -0{,}4653$$

[3] dal nome del fisico, ingegnere e matematico francese (1796 - 1832), anche se il teorema è dovuto al matematico e politico francese François Viète (1540 - 1603).

da cui

$$\alpha \simeq \cos^{-1}(-0{,}465\,3) \simeq 117° \quad \Rightarrow \quad \beta = 180° - \alpha - \gamma \simeq 180° - 117° - 36° \simeq 27°$$

Il triangolo è ottusangolo, i suoi lati misurano rispettivamente $a = 20\text{cm}$, $b = 10\text{cm}$ e $c \simeq 13{,}281\,5\,\text{cm}$; i suoi angoli hanno ampiezza $\alpha \simeq 117°$, $\beta \simeq 27°$ e $\gamma = 36°$.

C.8.2 Caso II: tre lati congruenti

Sappiamo dalla geometria euclidea che assegnati tre segmenti affinché si possa costruire il triangolo che li ha come lati deve essere verificato il teorema della disuguaglianza triangolare: "in qualsiasi triangolo, ogni lato deve essere minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza".

Problema C.16. Determinate le ampiezze degli angoli di un triangolo note le misure dei suoi lati $a = 5\text{m}$, $b = 12\text{m}$, $c = 13\text{m}$.

Dati: $a = 5\text{m}, \quad b = 12\text{m}, \quad c = 13\text{m}.$
Obiettivo: $\alpha, \quad \beta, \quad \gamma.$
Procedura risolutiva: utilizziamo almeno due volte il teorema del coseno per determinare due angoli. Per trovare $\cos(\gamma)$ utilizziamo

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) \quad \Rightarrow \quad \cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

sostituendo i dati si ottiene

$$\cos(\gamma) = \frac{5^2 + 12^2 - 13^2}{2 \cdot 5 \cdot 12} = \frac{25 + 144 - 169}{120} = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \cos^{-1}(0) = 90°.$$

Per trovare $\cos(\alpha)$ utilizziamo ancora il teorema di Carnot nella formula

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

sostituendo i valori noti si ottiene

$$\cos(\alpha) = \frac{12^2 + 13^3 - 5^2}{1 \cdot 13 \cdot 13} = \frac{169 + 144 - 25}{312} \simeq 0{,}923\,0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \simeq \cos^{-1}(0{,}923\,0) \simeq 22°.$$

Quindi $\alpha \simeq 22°$, $\gamma = 90°$ e $\beta = 180° - \alpha - \gamma \simeq 180° - 90° - 22° \simeq 68°$.

C.8.3 Caso III: un lato e gli angoli congruenti

Occorre un altro teorema per il problema della risoluzione di un triangolo qualunque.

Teorema C.2 (dei seni o di Eulero)**.** *In qualsiasi triangolo risulta costante il rapporto fra la lunghezza di un lato e il seno dell'angolo che gli è opposto. In formule:*

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}.$$

Problema C.17. Risolvete il triangolo ABC sapendo che $a = 7{,}52\,\text{m}$, $\beta = 98°$ e $\gamma = 27°$.

Dati: $a = 7{,}52\,\text{m}, \quad \beta = 98°, \quad \gamma = 27°.$
Obiettivo: $b, \quad c, \quad \alpha.$
Procedura risolutiva: Possiamo immediatamente determinare il terzo angolo:

$$\alpha = 180° - \beta - \gamma = 180° - 98° - 27° = 55°.$$

Per determinare i lati b e c applichiamo il teorema di Eulero.
Per la prima uguaglianza del teorema otteniamo:

$$\frac{7,52}{\sin(55°)} = \frac{b}{\sin(98°)} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{7{,}52}{\sin(55°)} \cdot \sin(98°) \simeq \frac{7{,}52}{0{,}8192} \cdot 0{,}9902 \simeq 9{,}0897\,\text{m}.$$

Considerando l'uguaglianza tra il primo e l'ultimo rapporto del teorema otteniamo:

$$\frac{7{,}52}{\sin(55°)} = \frac{c}{\sin(27°)} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{7{,}52}{\sin(55°)} \cdot \sin(27°) \simeq 4{,}1674\,\text{m}.$$

C.8.4 Riflessioni sull'uso del teorema dei seni

Problema C.18. Risolvete il triangolo ABC sapendo che $a = 20\text{cm}$, $c = 13\text{cm}$ e $\gamma = 36°$.

Dati: $a = 20\text{cm}, \quad c = 13\text{cm}, \quad \gamma = 36°.$
Obiettivo: $b, \quad \alpha, \quad \beta.$

Gli elementi noti non rispecchiano nessuna delle le condizioni sufficienti espresse dai criteri di congruenza, ma possiamo usare il teorema dei seni che ci assicura che in qualunque triangolo si ha

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

e quindi

$$\frac{20}{\sin(\alpha)} = \frac{13}{\sin(36°)} \quad \Rightarrow \quad \sin(\alpha) = \frac{20 \cdot \sin(36°)}{13} \simeq 0{,}9043$$

e dunque con la funzione inversa $\sin^{-1}(0{,}9043)$ possiamo ricavare l'angolo $\alpha \simeq 64°$. Di conseguenza $\beta \simeq 80°$.

Sembrerebbe tutto corretto, ma abbiamo trascurato il fatto che angoli supplementari hanno lo stesso seno dunque da $\sin^{-1}(0{,}9043)$ si può ottenere $\alpha \simeq 64°$ oppure $\alpha \simeq 116°$ quindi il triangolo non è univocamente determinato. Proseguendo nel ragionamento avremmo:

Caso I $\alpha \simeq 64°$, quindi il triangolo è acutangolo e $\beta \simeq 80°$; possiamo determinare b applicando nuovamente il teorema dei seni

$$\frac{13}{\sin(36°)} = \frac{b}{\sin(80°)} \quad \Rightarrow \quad b \simeq \frac{13 \cdot 0{,}9848}{0{,}5877} \simeq 21\text{cm}.$$

Caso II $\alpha \simeq 116°$, quindi il triangolo è ottusangolo e $\beta \simeq 28°$; possiamo determinare b con il teorema dei seni

$$\frac{13}{\sin(36°)} = \frac{b}{\sin(28°)} \quad \Rightarrow \quad b \simeq \frac{13 \cdot 0{,}4694}{0{,}5877} \simeq 10\text{cm}.$$

Il problema ha pertanto due soluzioni.

Problema C.19. Risolvete il triangolo ABC sapendo che $a = 26\text{m}$, $b = 12\text{m}$, $\alpha = 124°$.

Dati: $a = 26\text{m}$, $\quad b = 12\text{m}$, $\quad \alpha = 124°$.
Obiettivo: c, $\quad \beta$, $\quad \gamma$.
Applichiamo il teorema dei seni:

$$\frac{13}{\sin(124°)} = \frac{12}{\sin(\beta)} \quad \Rightarrow \quad \sin(\beta) = \frac{12 \cdot \sin(124°)}{26} \simeq \dots\dots\dots$$

In questo caso non ci sono dubbi: un triangolo non può avere due angoli ottusi. Potete completare voi la soluzione e otterrete $\beta \simeq \dots\dots$ quindi $\gamma \simeq \dots\dots$ e infine $c \simeq \dots\dots$

Problema C.20. Risolvete il triangolo ABC sapendo che $a = 9\text{m}$, $b = 2\sqrt{3}\text{m}$, $\beta = 30°$.

Come nel caso precedente abbiamo la misura di due lati e l'angolo opposto ad uno di essi; dunque per il teorema dei seni si ha

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{\sin(\alpha)} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin(30°)} \quad \Rightarrow \quad \sin(\alpha) = \frac{9}{2\sqrt{3}}\sin(30°) \simeq 1{,}29$$

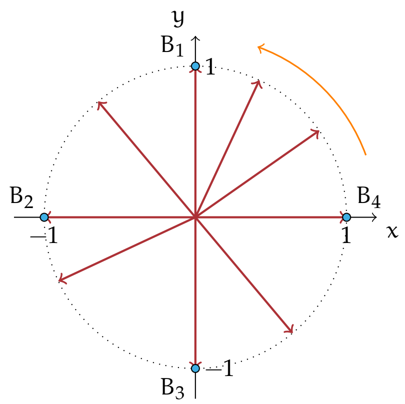
Impossibile! Il seno di un angolo ha come valore massimo 1. Il problema non ha alcuna soluzione.

✍ *Esercizi proposti:* C.68, C.69, C.70, C.71, C.72, C.73, C.74

C.9 Le funzioni circolari

Nel riferimento cartesiano ortogonale è assegnato il vettore $\vec{u}$ di modulo unitario ($|\vec{u}| = 1$), applicato nell'origine del riferimento e con direzione e verso coincidenti con quelle dell'asse x. Il suo estremo libero è il punto $B(1;0)$.

Facciamo ruotare $\vec{u}$ intorno all'origine in senso antiorario finché torna ad occupare la posizione iniziale, cioè quando ha compiuto una rotazione di 360°. Muovendosi con continuità, l'estremo B descrive la circonferenza con centro nell'origine, quella tratteggiata nella figura a fianco; le componenti del vettore cambiano con continuità e dipendono dall'angolo che, per ogni posizione, il vettore stesso forma con l'asse delle x. Ad esempio, quando $\vec{u}$ ha descritto nella rotazione un angolo di 90°, l'estremo B si trova in $B_1(0;1)$; quando $\vec{u}$ ha descritto nella rotazione un angolo di 180°, l'estremo B si trova in $B_2(-1;0)$; quando $\vec{u}$ ha descritto nella rotazione un angolo di 270°, l'estremo B si trova in $B_3(0;-1)$; e dopo una rotazione completa (360°) torna a coincidere con la posizione iniziale $B_4 \equiv B(1;0)$.



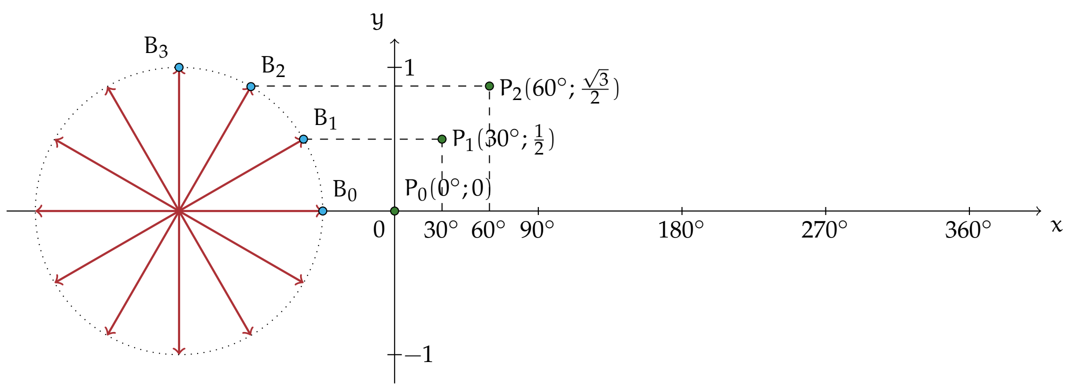
Definizione C.5. La componente orizzontale u_x del vettore unitario inclinato dell'angolo α rispetto all'asse x, si chiama *coseno dell'angolo* α, in simboli $u_x = \cos(\alpha)$. Chiamiamo *seno dell'angolo* α la componente verticale u_y del vettore unitario inclinato dell'angolo α rispetto all'asse x, in simboli $u_y = \sin(\alpha)$. Scriviamo $\vec{u} = (\cos(\alpha); \sin(\alpha))$ o anche $B(\cos(\alpha); \sin(\alpha))$.

Confrontando questa definizione con quanto descritto sopra possiamo innanzitutto affermare che seno e coseno di un angolo sono numeri reali positivi, negativi o nulli a seconda dell'angolo formato dal vettore e quindi della posizione del punto B sulla circonferenza:

- se $\alpha = 0° \Rightarrow B(1;0) \Rightarrow \vec{u} = (\cos(0°); \sin(0°)) \Rightarrow \cos(0°) = 1$ e $\sin(0°) = 0$;
- se $\alpha = 90° \Rightarrow B(0;1) \Rightarrow \vec{u} = (\cos(90°); \sin(90°)) \Rightarrow \cos(90°) = 0$ e $\sin(90°) = 1$;
- se $\alpha = 180° \Rightarrow B(-1;0) \Rightarrow \vec{u} = (\cos(180°); \sin(180°)) \Rightarrow \cos(180°) = -1$ e $\sin(180°) = 0$;
- se $\alpha = 270° \Rightarrow B(0;-1) \Rightarrow \vec{u} = (\cos(270°); \sin(270°)) \Rightarrow \cos(270°) = 0$ e $\sin(270°) = -1$;
- se $\alpha = 360° \Rightarrow B(1;0) \Rightarrow \vec{u} = (\cos(360°); \sin(360°)) \Rightarrow \cos(360°) = 1$ e $\sin(360°) = 0$.

Per alcuni valori intermedi dell'angolo è possibile calcolare i relativi valori di seno e coseno usando metodi geometrici, per altri valori si può far uso della calcolatrice scientifica. Comunque, dai risultati sopra ottenuti, soprattutto riguardando la figura, possiamo affermare che qualunque sia l'angolo α sono sempre verificate le disuguaglianze: $-1 \leqslant \sin(\alpha) \leqslant 1$ e $-1 \leqslant \cos(\alpha) \leqslant 1$.

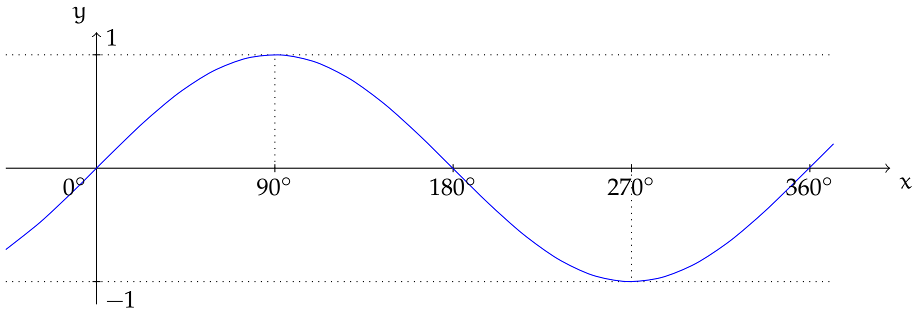
Ci proponiamo ora di tracciare il grafico della funzione $y = \sin(x)$. A questo scopo fermiamo la rotazione del vettore unitario ogni 30° (completate il disegno) e segniamo sulla circonferenza i punti B_0, B_1, B_2, ecc.



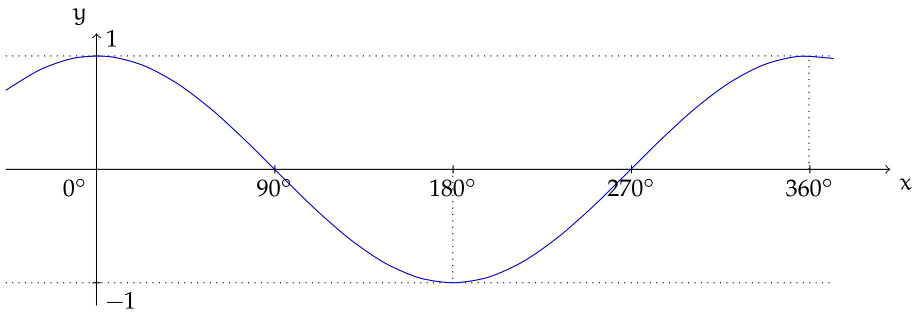
Accanto alla rotazione del vettore unitario abbiamo tracciato un riferimento cartesiano dove sull'asse x riportiamo le misure in gradi degli angoli descritti dal vettore unitario e sull'asse y i valori assunti da $\sin(x)$, cioè dall'ordinata dell'estremo libero del vettore unitario che ruota in senso antiorario.

Per ogni angolo x descritto riporteremo nel riferimento cartesiano $\sin(x)$. Il punto B_0 ha ordinata nulla dunque il primo punto che dobbiamo segnare nel riferimento cartesiano per costruire il grafico di $y = \sin(x)$ è l'origine; per segnare il punto di coordinate $P_1(30°; \sin(30°))$, da B_1 tracciamo la parallela all'asse x fino ad incontrare la parallela all'asse y tracciata da 30°. Proseguite in questo modo per tutti gli altri punti B_i della circonferenza per determinare i rispettivi punti P_i. Unendo i punti P_i trovati si ha il grafico della funzione $y = \sin(x)$.

Noi l'abbiamo tracciato con *GeoGebra*[4]. Notiamo che il valore massimo 1 si ha per l'angolo di 90° mentre il minimo −1 si ha per l'angolo di 270°. Se il vettore unitario dopo un giro completo ricominciasse nuovamente a ruotare in senso antiorario (positivo), descrivendo angoli maggiori di 360°, il grafico si ripeterebbe identico al tratto compreso tra 0° e 360°. Per questo motivo diciamo che la funzione $y = \sin(x)$ ha un andamento periodico.



Abbiamo tracciato anche il grafico della funzione $y = \cos(x)$; sfruttando quanto fatto all'inizio del paragrafo; lasciamo al lettore di segnare sul grafico i valori dell'angolo per cui il coseno è nullo, il valore per cui il coseno assume il valore minimo −1, il punto del grafico di ascissa = 360°. Per lo stesso discorso fatto sopra possiamo dire che la funzione $y = \cos(x)$ ha un andamento periodico.



[4]un particolare software di matematica dinamica per la didattica (http://www.geogebra.org).