

Grundkurs Mathematik I

Arbeitsblatt 8

Die Pausenaufgabe

AUFGABE 8.1. Skizziere die Produktmenge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Übungsaufgaben

AUFGABE 8.2. Beschreibe für je zwei (einschließlich dem Fall, dass das Produkt mit sich selbst genommen wird) der folgenden geometrischen Mengen die Produktmengen.

- (1) Ein Geradenstück I .
- (2) Eine Kreislinie K .
- (3) Eine Kreisscheibe D .
- (4) Eine Parabel P .

Welche Produktmengen lassen sich als eine Teilmenge im Raum realisieren, welche nicht?



Wie kann man den runden Strohballen (ohne die Katze) als eine Produktmenge beschreiben?

AUFGABE 8.3. Es seien A und B disjunkte Mengen und C eine weitere Menge. Zeige die Gleichheit

$$C \times (A \uplus B) = C \times A \uplus C \times B.$$

AUFGABE 8.4. Es seien A und B disjunkte Mengen. Zeige die Gleichheit

$$(A \uplus B) \times (A \uplus B) = A \times A \uplus A \times B \uplus B \times A \uplus B \times B.$$

AUFGABE 8.5. Es seien L und M Mengen. Zeige, dass die Abbildung

$$\tau: L \times M \longrightarrow M \times L, (x, y) \longmapsto (y, x),$$

eine bijektive Abbildung zwischen den Produktmengen $L \times M$ und $M \times L$ festlegt.

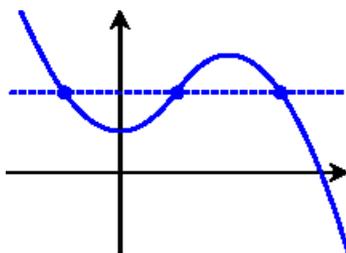
AUFGABE 8.6. Es sei P eine Menge von Personen und V die Menge der Vornamen von diesen Personen und N die Menge der Nachnamen von diesen Personen. Definiere natürliche Abbildungen von P nach V , nach N und nach $V \times N$ und untersuche sie in Hinblick auf die relevanten Abbildungsbegriffe.

AUFGABE 8.7. Skizziere die folgenden Teilmengen im \mathbb{R}^2 .

- (1) $\{(x, y) \mid x + y = 3\}$,
- (2) $\{(x, y) \mid x + y \leq 3\}$,
- (3) $\{(x, y) \mid (x + y)^2 \geq 4\}$,
- (4) $\{(x, y) \mid |x + 2| \geq 5 \text{ und } |y - 2| \leq 3\}$,
- (5) $\{(x, y) \mid |x| = 0 \text{ und } |y^4 - 2y^3 + 7y - 5| \geq -1\}$,
- (6) $\{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 3 \text{ und } 0 \leq y \leq x^3\}$.

AUFGABE 8.8. Erstelle eine Wertetabelle und skizziere den Graphen für das Nachfolgernehmen in den natürlichen Zahlen.

AUFGABE 8.9. Wie sehen die Graphen der Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aus, die Sie in der Schule kennengelernt haben?



AUFGABE 8.10. Woran erkennt man am Graphen einer Abbildung

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

ob f injektiv bzw. surjektiv ist?

AUFGABE 8.11. Es sei M eine Menge mit einer Verknüpfung darauf, die wir als Produkt schreiben.

- (1) Wie viele sinnvollen Klammerungen gibt es für die Verknüpfung von vier Elementen?
- (2) Die Verknüpfung sei nun assoziativ. Zeige, dass das Produkt von vier Elementen nicht von irgendeiner Klammerung abhängt.

AUFGABE 8.12. Berechne im Strichsystem

$$||||| + |||||$$

allein unter Verwendung des Umlegungsprinzips.

AUFGABE 8.13. Wir zählen

heute, morgen, übermorgen, überübermorgen, überüberübermorgen, ...
und wollen mit diesen Zahlen Addieren.

- (1) Welche alltagssprachliche Formulierung besitzt die Addition in diesem Zählmodell?
- (2) Welche sprachlichen Formulierungen drücken aus, das heute das neutrale Element der Addition ist.
- (3) Was ist morgen plus morgen?
- (4) Was ist übermorgen plus übermorgen?
- (5) Was ist überübermorgen plus überüberübermorgen?

AUFGABE 8.14. Es seien k und n natürliche Zahlen. Zeige, dass die (Nachfolger-)Abbildung

$$\{k, \dots, n\} \longrightarrow \{k', \dots, n'\}, i \longmapsto i',$$

bijektiv ist.

AUFGABE 8.15. Bestimme in den jeweiligen Modellen der natürlichen Zahlen die Anzahl der folgenden Abschnitte von \mathbb{N} .

- (1) $\{|||||, \dots, ||||| \}$.

$$(2) \quad \{1201, \dots, 21010\}$$

(im Dreiersystem).

$$(3) \quad \{\text{überübermorgen}, \dots, \text{überüberüberüberüberüberüberübermorgen}\}.$$

AUFGABE 8.16. Es seien S und T endliche Teilmengen einer Menge M . Zeige, dass dann auch die Vereinigung $S \cup T$ endlich ist.

AUFGABE 8.17. Nach dem Mittagessen wollen Frau Maier-Sengupta und Herr Referendar Lutz mit den Kindern $A, B, C, G, H, L, M, R, T$ eine Bootsfahrt machen, wozu jedes Kind eine Nummer zwischen 1 und 9 braucht. Frau Maier-Sengupta ist vor dem Mittagessen mit einem Teil der Kinder auf dem Spielplatz und verteilt dabei schon mal die Nummern

n	1	2	3	4	5	6
$\varphi(n)$	A	G	R	H	L	B

Beim Abräumdienst nach dem Mittagessen legt Herr Lutz (ohne Rücksprache) folgende Nummern fest

n	1	2	3	4	5
$\psi(n)$	L	C	M	G	T

Lucy (L) wollte zwar sagen, dass sie schon eine Nummer hat, doch das wurde von Gabi (G) verhindert. Am Boot entscheidet dann Frau Maier-Sengupta, dass die Spielplatzkinder ihre Spielplatznummer behalten und dass die übrigen Kinder die hinteren Nummern 7 – 9 in der von Herrn Lutz vergebenen Reihenfolge bekommen.

- (1) Erstelle eine Wertetabelle für die Bootsnummerierung.
- (2) Definiere die Bootsnummerierung als Abbildung ϑ durch eine geeignete Fallunterscheidung.

AUFGABE 8.18. Auf einem Schiff sind 26 Schafe und 10 Ziegen. Wie alt ist der Kapitän?

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 8.19. (2 Punkte)

Skizziere die folgenden Teilmengen im \mathbb{R}^2 .

- (1) $\{(x, y) \mid |2x| = 5 \text{ und } |y| \geq 3\}$,
- (2) $\{(x, y) \mid -3x \geq 2y \text{ und } 4x \leq -5y\}$,
- (3) $\{(x, y) \mid y^2 - y + 1 \leq 4\}$,
- (4) $\{(x, y) \mid xy = 2 \text{ oder } x^2 + y^2 = 1\}$.

AUFGABE 8.20. (2 Punkte)

Es sei M eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung darauf, die wir als \star schreiben. Zeige, dass

$$(a \star b) \star (c \star (d \star e)) = a \star ((b \star (c \star d)) \star e)$$

für beliebige $a, b, c, d, e \in M$ gilt.

AUFGABE 8.21. (2 Punkte)

Es sei M eine Menge mit einer Verknüpfung $*$. Zeige, dass es maximal ein neutrales Element für die Verknüpfung gibt.

AUFGABE 8.22. (3 Punkte)

Es seien k, n natürliche Zahlen. Zeige, dass die Abbildung

$$\{1, \dots, k\} \longrightarrow \{1 + n, \dots, k + n\}, i \longmapsto i + n,$$

bijektiv ist.

Anleitung: Führe Induktion nach n unter Verwendung von Aufgabe 8.14.

AUFGABE 8.23. (3 Punkte)

Es seien M und N zwei endliche Teilmengen einer Menge G . Zeige, dass die Formel

$$\#(M) + \#(N) = \#(M \cup N) + \#(M \cap N)$$

gilt.

Abbildungsverzeichnis

- Quelle = Black cat sitting on a round straw bale.jpg , Autor = Benutzer
Flickr upload bot auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 2.0 1
- Quelle = Non-injective function.svg , Autor = Benutzer Fulvio314 auf
Commons, Lizenz = CC-by-sa 1.0 3