

## Einführung in die mathematische Logik

### Arbeitsblatt 18

### Übungsaufgaben

AUFGABE 18.1. Entwerfe ein Programm für eine Registermaschine, das nach und nach alle Quadratzahlen ausdrückt.

AUFGABE 18.2.\*

Erstelle ein Programm für eine Registermaschine, das abwechselnd 1 und 0 ausdrückt, das mit sechs Befehlszeilen auskommt und lediglich einen Sprungbefehl verwendet.

AUFGABE 18.3.\*

Erstelle ein Programm für eine Registermaschine, das abwechselnd 1 und 0 ausdrückt, das mit sechs Befehlszeilen auskommt und lediglich einen Druckbefehl verwendet.

AUFGABE 18.4. Entwerfe ein Programm für eine Registermaschine, die für  $r_i \geq r_j$  die Differenz  $r_i - r_j$  von zwei Registerinhalten berechnet.

AUFGABE 18.5. Entwerfe ein Programm für eine Registermaschine, das entscheidet, ob der Registerinhalt  $r_i$  des Registers  $R_i$  die echte Potenz einer natürlichen Zahl ist.

AUFGABE 18.6. Sei  $b \in \mathbb{N}_+$ . Entwerfe ein Programm für eine Registermaschine, das bei der Eingabe von  $(r_1, \dots, r_k)$  in den ersten  $k$  Registern die Zahl  $\sum_{i=1}^k r_i b^i$  berechnet, ausdrückt und anhält.

AUFGABE 18.7. Sei  $b \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ . Entwerfe ein Programm für eine Registermaschine, das bei Eingabe von  $z$  im ersten Register die  $b$ -adische Ziffernentwicklung  $z = \sum_{i=0}^k s_i b^i$  (mit  $0 \leq r_i \leq b - 1$ ) berechnet, nach und nach die Ziffern  $s_i$  (beginnend mit  $i = 0$ ) ausdrückt und schließlich anhält.

AUFGABE 18.8. Sei  $b \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ . Entwerfe ein Programm für eine Registermaschine, das zur Eingabe von  $z$  im ersten Register die  $b$ -adische Ziffernentwicklung  $z = \sum_{i=1}^k s_i b^i$  (mit  $0 \leq r_i \leq b - 1$ ) berechnet, nach und nach die Exponenten  $i$  und die zugehörigen Ziffern  $s_i$  (beginnend mit  $k$  und  $s_k$ ) ausdrückt und schließlich anhält.

AUFGABE 18.9. Entwerfe ein möglichst kurzes (also mit möglichst wenigen Befehlszeilen) Programm für eine Registermaschine, das bei leerer Startbelegung anhält und zum Schluss die Zahl 20 im ersten Register hat.

AUFGABE 18.10. Entwerfe ein Programm für eine Registermaschine, das bei Eingabe einer natürlichen Zahlen  $n$  im Register  $R_1$  die Fakultät  $n!$  in  $R_1$  ausgibt.

AUFGABE 18.11. Entwerfe ein Programm für eine Registermaschine, das bei Eingabe von zwei natürlichen Zahlen  $n$  und  $k$  in den Registern  $R_2, R_3$  den Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{k}$  in  $R_1$  ausgibt.

AUFGABE 18.12. Entwerfe ein Programm für eine Registermaschine, das bei Eingabe von zwei natürlichen Zahlen  $a$  und  $b$  in den Registern  $R_2, R_3$  den euklidischen Algorithmus durchführt und das Ergebnis, also den größten gemeinsamen Teiler von  $a$  und  $b$ , in  $R_1$  ausgibt.

AUFGABE 18.13. Es sei  $P$  ein Programm für eine Registermaschine, es sei eine feste Anfangsbelegung gegeben und es sei vorausgesetzt, dass das Programm, angesetzt auf diese Anfangsbelegung, irgendwann anhält. Zeige, dass man den Ablauf des Programms, also die schrittweise Abfolge der Veränderungen der Registerinhalte, auch durch ein Programm realisieren kann, bei dem der Sprungbefehl nicht verwendet wird. Wozu braucht es dann eigentlich den Sprungbefehl?

AUFGABE 18.14. Zeige, dass es kein Programm für eine Registermaschine gibt, das bei jeder Anfangsbelegung sämtliche Register leert.

AUFGABE 18.15. Beschreibe ein Verfahren, das alle prädikatenlogischen Ausdrücke ausgibt (dabei sei vorausgesetzt, dass die Variablen, die Konstanten, die Relationssymbole und die Funktionssymbole in einer aufgezählten Form vorliegen).

AUFGABE 18.16. Entwerfe ein Programm für eine Registermaschine, das bei Eingabe einer natürlichen Zahlen  $n$  im Register  $R_1$  den Collatz-Algorithmus durchführt, dabei die sukzessiven Werte ausdrückt und insbesondere anhält, wenn der Wert 1 erreicht wird.

AUFGABE 18.17. Welches Bildungsgesetz liegt der Folge

1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, ...

zugrunde?

(Es wird behauptet, dass diese Aufgabe für Grundschul Kinder sehr einfach und für Mathematiker sehr schwierig ist.)

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 18.18. (3 Punkte)

Entwerfe ein Programm für eine Registermaschine, das nach und nach alle Primzahlen ausdrückt.

AUFGABE 18.19. (5 Punkte)

Entwerfe ein Programm für eine Registermaschine, das nach und nach alle Glieder der in Aufgabe 18.17 beschriebenen Folge ausdrückt.

AUFGABE 18.20. (3 Punkte)

Entwerfe ein Programm für eine Registermaschine, das die Potenz  $r_i^{r_j}$  berechnet (und ausgibt), wobei  $r_i$  bzw.  $r_j$  die Registerinhalte der Register  $R_i, R_j$ ,  $i \neq j$ , sind.

AUFGABE 18.21. (3 Punkte)

Entwerfe ein Programm für eine Registermaschine, das nach und nach alle Mersenne-Primzahlen ausdrückt.

AUFGABE 18.22. (4 Punkte)

Entwerfe ein möglichst kurzes (also mit möglichst wenigen Befehlszeilen) Programm für eine Registermaschine, das bei leerer Startbelegung anhält und zum Schluss die Zahl 100 im ersten Register hat.

Punkte gibt es nur für ziemlich kurze Programme. Für den Kurs-Rekord gibt es drei Extrapunkte.