ORSAY
Nr. d'ordre : XXXXXXX

UNIVERSITE PARIS - SUD 11
ECOLE DOCTORALE INFORMATIQUE PARIS - SUD

S Y N T H E S E D E L A
T H E S E D E D O C T O R A T

pour obtenir le titre

PhD en Sciences

de l'Universite Paris - Sud 11
Discipline : Informatique

par

Leandro Pedro MONTERO

Graphes et couleurs: Graphes arêtes-coloriés, coloration d'arêtes et connexité propre

Laboratoire de Recherche en Informatique
ALGORITHMES ET COMPLEXITÉ groupe
soutenue le 13/12/2012

Composition du jury :

Rapporteurs :	Professeur Michel HABIB	-	Université Paris Diderot.
	Professeur Mickael MONTASSIER	-	Université Montpellier 2.
Examinateurs :	Professeur Dominique BARTH	-	Université de Versailles.
	Professeur Alain DENISE	-	Université Paris-Sud 11.
	Professeur Marina GROSHAUS	-	Universidad de Buenos Aires.
Directeur :	Professeur Yannis MANOUSSAKIS	-	Université Paris-Sud 11.

Résumé

Dans cette thèse nous étudions différents problèmes de graphes et multigraphes arêtes-coloriés tels que la connexité propre, la coloration forte d'arêtes et les chaînes et cycles hamiltoniens propres. Enfin, nous améliorons l'algorithme connu $O(n^4)$ pour décider du comportement d'un graphe sous opérateur biclique, en étudiant les bicliques dans les graphes sans faux jumeaux. Plus précisément,

- Nous étudions d'abord le nombre k-connexité-propre des graphes, noté $pc_k(G)$, ç'est à dire le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorer les arêtes d'un graphe de façon à ce qu'entre chaque paire de sommets, ils existent k chemins intérieurement sommet-disjoints. Nous prouvons plusieurs bornes supérieures pour $pc_k(G)$. Nous énonçons quelques conjectures pour les graphes généraux et bipartis et nous les prouvons dans le cas où $k = 1$.

- Nous étudions l'existence de chaînes et de cycles hamiltoniens propres dans les multigraphes arêtes-coloriés. Nous établissons des conditions suffisantes, en fonction de plusieurs paramètres tels que le nombre d'arêtes, le degré arc-en-ciel, la connexité, etc.

- Nous montrons que l'indice chromatique fort est linéaire au degré maximum pour tout graphe k-dégénéré où, k est fixe. En corollaire, notre résultat conduit à une amélioration des constantes et donne également un algorithme plus simple et plus efficace pour cette famille de graphes. De plus, nous considérons les graphes planaires extérieurs. Nous donnons une formule pour trouver l'indice chromatique fort exact pour les graphes bipartis planaires extérieurs. Nous améliorons également la borne supérieure pour les graphes planaires extérieurs généraux.

- Enfin, nous étudions les bicliques dans les graphes sans faux jumeaux et nous présentons ensuite un algorithme $O(n + m)$ pour reconnaître les graphes convergents et divergents en améliorant l'algorithme $O(n^4)$.

Mots clés: graphes arêtes-coloriés, connexité propre, chaînes et cycles hamiltoniens propres, coloration forte d'arêtes, opérateur biclique.

Contents

1 Introduction

Dans la thèse, nous considérons la coloration des arêtes et les graphes arêtes-coloriés. Une *coloration des arêtes* d'un graphe est une affectation de couleurs dans les arêtes du graphe. Une *coloration propre des arêtes* d'un graphe est une coloration des arêtes telle que chaque paire d'arêtes adjacentes a différentes couleurs. La question qui se pose naturellement est celle du nombre minimum de couleurs pour colorier un graphe G tel que il soit proprement colorié. Ce nombre est appelé *indice chromatique* et noté $\chi'(G)$. Grace au théorème de Vizing [78], nous savons que ce nombre est soit $\Delta(G)$, soit $\Delta(G)+1$. Pour plusieurs classes de graphes, nous savons exactement la valeur de $\chi'(G)$, par exemple pour les graphes bipartis qui ont un indice chromatique égal a $\Delta(G)$. Les colorations des arêtes sont intéressantes non seulement du point de vue mathématique mais aussi parce qu'elles ont de nombreuses applications dans le monde réel, par exemple dans les problèmes de planification ou dans les affectations de fréquences pour les réseaux de fibre optique, etc. Plusieurs types différents de coloration des arêtes ont été étudiés au cours du temps. Nous pouvons en citer quelques-unes, par exemple, la coloration forte des arêtes [6, 18, 23, 25, 30, 45, 46, 61, 64, 72, 73, 76, 77, 82], la coloration des arêtes par liste [16, 36, 40, 47, 54, 53, 81, 83, 85], la coloration des arêtes des intervalles [7, 48, 67, 68], etc.

Un *graphe arête-colorié* est un graphe dont les arêtes ont été coloriés de quelque manière avec c couleurs différentes. Ici, la question qui se pose est, étant donné un graphe arête-colorié, comment nous pouvons trouver (si possible) ou garantir l'existence de sous-graphes ayant certaines propriétés, par exemple, comment nous pouvons garantir l'existence d'un cycle hamiltonien proprement colorié. De nombreux travaux ont été effectués sur le sujet, non seulement pour les cycles hamiltoniens propres, mais aussi pour les chaînes hamiltoniennes propres,les arbres propres, les cycles propres, les arbres arc-en-ciel, les chemins arc-en-ciel, les cliques arc-en-ciel, les cliques monochromatiques, etc. Cf, par exemple, a [1, 2, 3, 5, 9, 11, 12, 14, 24, 32, 43, 49, 62, 69, 70, 75, 79, 84] pour trouver quelques résultats sur ce sujet.

Nous présentons ensuite en introduction les différents problèmes étudiés dans la thèse. L'idée est de les introduire en donnant quelques références à la littérature de façon à ce que le lecteur puisse trouver leurs histoire et applications. Nous présentons aussi les résultats les plus importants de la thèse.

2 Connexité propre des graphes

Des travaux récents comme [34, 79] ont considéré les sous-graphes proprement coloriés par opposition au graphe entier. Il existe même une revue des travaux concernant les cycles alternés [9]. Ici, *alterné* signifie que les couleurs des arêtes alternent pendant nous traversons le cycle et donc il est proprement colorié. Le problème pour trouver un cycle alterné est précisément celui de trouver un cycle proprement colorié quand nous n'avons que deux couleurs disponibles.

De la même façon, plusieurs chercheurs ont considéré les sous-graphes arc-en-ciel (c'est à dire chaque arête a une couleur différente). Un graphe est *connexe arc-en-ciel* si entre toute paire de sommets, il existe un chemin dont les arêtes sont de couleurs différentes. Le *nombre de connexité arc-en-ciel*, $rc(G)$, défini dans [22], est le nombre minimum de couleurs requises pour colorier un graphe G de façon telle qu'il devienne connexe arc-en-ciel. Le nombre de connexité arc-en-ciel a été étudié dans [19, 21, 27, 52]. Motivés pour ça, nous étendons la définition de connexité arc-en-ciel à la connexité propre en disant qu'un graphe est *k-connexe propre* si, entre toute paire de sommets, il existe k chemins sommets disjoints dont les arêtes adjacentes ont des couleurs différentes, et nous définissons le *nombre de k-connexité propre*, $pc_k(G)$, comme le nombre minimum de couleurs requis pour qu'un graphe G devienne k-connexe propre.

Dans cette thèse, nous étudions d'abord $pc_k(G)$ pour les graphes bipartis. Nous prouvons des valeurs exactes de $pc_k(G)$ pour différents graphes bipartis complets et arbres. Nous formulons ensuite une conjecture générale qui dit que si G est $2k$-connexe et biparti avec $k \geq 1$, alors $pc_k(G) = 2$. Nous prouvons que si la conjecture est vraie, elle est la meilleure possible car nous montrons une famille de graphes bipartis $2k-1$-connexes avec $pc_k(G) > 2$. Finalement, nous prouvons la conjecture pour le cas $k = 1$.

Ensuite, nous étudions $pc_k(G)$ dans les graphes généraux. Nous commençons avec le cas le plus simple, $k = 1$, donc $pc(G)$. Nous prouvons plusieurs valeurs exactes pour $pc(G)$, par exemple dans les graphes complètes, les chemins, les cycles, etc. Puis, nous prouvons le résultat principal de la section, c'est à dire, si G est 2-connexe, alors $pc(G) \leq 3$. Ce résultat améliore la borne triviale $\Delta + 1$ de Vizing. Nous montrons aussi que notre borne est ajustée car nous présentons une famille de graphes 2-connexes avec $pc(G) = 3$. Nous montrons après une borne pour $pc(G)$ dans les graphes seulement connexes qui utilise le degré maximum d'un sommet incident à une arête isthme. Nous formulons également une conjecture générale pour $pc_k(G)$ fondée sur la conjecture pour les graphes bipartis et le résultat pour les graphes 2-connexes. Cette conjecture est que, si G est $2k$-connexe avec $k \geq 1$, alors $pc_k(G) \leq 3$. Nous remarquons que nous avons prouvé cette conjecture pour $k = 1$. Ensuite, nous prouvons un résultat plus fort pour $pc_k(G)$ pour les graphes complets de taille $n \geq 2k$.

Finalement, nous prouvons le résultat suivant par rapport au degré minimum du graphe: si G est un graphe connexe et non complet de taille $n \geq 68$ et $\delta(G) \geq \frac{n}{4}$, alors $pc(G) = 2$.

Tous nos résultats conduisent à des algorithmes efficaces pour trouver de telles colorations.

Nous remarquons que de nombreuses conditions présumées pour la connexité propre sont beaucoup plus faibles que celles requises pour avoir des bornes pour le nombre de connexité arc-en-ciel. Cela s'explique par le fait que le nombre de couleurs nécessaires pour qu'un chemin soit proprement colorié est beaucoup plus petit que pour qu'il soit colorié arc-en-ciel.

3 Coloration forte des arêtes

Une *coloration forte des arêtes* d'un graphe G est une coloration des arêtes telle que chaque paire de sommets appartenant à différentes arêtes de même couleur n'est pas adjacente. L'*indice chromatique fort*, $\chi'_s(G)$, est le nombre minimum de couleurs dans une coloration forte des arêtes de G.

La coloration forte des arêtes a une longue histoire et a donné lieu à de nombreuses conjectures bien connues. Les conjectures non résolues incluent par exemple $\chi'_s(G) \leq 5\Delta^2/4$ pour tous les graphes, $\chi'_s(G) \leq \Delta^2$ pour les graphes bipartis, et $\chi'_s(G) \leq 9$ pour les graphes planaires 3-réguliers (cf les problèmes ouverts sur la page de Douglas West [80] pour plus de détails).

Molloy and Reed [64] ont prouvé une conjecture d'Erdős et Nešetřil (cf [30]) qui dit que pour Δ grand, il existe une constante positive c telle que $\chi'_s(G) \leq (2-c)\Delta^2$. Mahdian a prouvé que pour les graphes G sans C_4, $\chi'_s(G) \leq (2+o(1))\Delta^2/\ln\Delta$.

Pour les nombres entiers $0 \leq \ell \leq k \leq m$, $S_m(k,\ell)$ est le graphe biparti avec l'ensemble de sommets $\{x \subseteq [m] \colon |x| = k \text{ or } \ell\}$ et un k-sous-ensemble x est adjacent à un ℓ-sous-ensemble y si if $y \subseteq x$. Quinn et Benjamin [13] ont prouvé que $S_m(k,\ell)$ a un indice chromatique fort $\binom{m}{k-\ell}$. Le Θ-*graphe* $\Theta(G)$ d'un cube partiel G (sous-graphe invariant-distance d'un n-cube), est le graphe d'intersection des classes d'équivalence de la *relation de Djoković-Winkler* Θ définie sur les arêtes de G tel que xy et uv appartiennent dans Θ si $d(x,u)+d(y,v) \neq d(x,v)+d(y,u)$. Šumenjak [51] a montré que l'indice chromatique forte d'un graphe G cube partiel arbre-semblable est au plus l'indice chromatique de $\Theta(G)$.

Faudree, Gyárfás, Schelp et Tuza [31] ont prouvé que pour les graphes où toutes les longueurs des cycles sont multiples de quatre, $\chi'_s(G) \leq \Delta^2$. Ils mentionnent que ce résultat pourrait probablement être amélioré à une fonction linéaire du degré maximum. Brualdi et Quinn [18] ont amélioré la borne supérieure à $\chi'_s(G) \leq \alpha\beta$ pour ces graphes, où α et β sont les degrés maximum des partitions respectives. Nakprasit [65] a prouvé que si G est biparti et le degré maximum d'une des partitions est au plus 2, alors $\chi'_s(G) \leq 2\Delta$. Les bornes pour les graphes planaires extérieurs ont été récemment donnés dans [44]. Un travail récent ([50]) donne un algorithme pour trouver l'indice chromatique fort de tout graphe planaire extérieur maximal, mais il faut noter que lorsque vous étendez le graphe à planaire extérieur maximal, le degré maximum et l'indice chromatique peuvent augmenter. En outre, Chang et Narayanan [20] ont prouvé que $\chi'_s(G) \leq 10\Delta - 10$ pour tout graphe G 2-dégénéré, $\chi'_s(G) \leq 8\Delta - 6$ pour les graphes sans cordes et ils ont proposé une conjecture qui dit qu'il existe une constante absolue c telle que pour tout graphe G k-dégénéré, $\chi'_s(G) \leq ck^2\Delta$. Donc, pour k fixe, $\chi'_s(G)$ est linéaire en Δ.

Dans la thèse, nous nous concentrerons sur l'amélioration des bornes pour les graphes k-dégénérés et les graphes planaires extérieurs. Nous montrons en particulier que si G est un graphe k-dégénéré, alors $\chi'_s(G) \leq (4k-1)\Delta - 2k^2 - k + 1$, ce qui améliore la conjecture puisque $\chi'_s(G)$ est linéaire en Δ et k. Ce résultat implique les deux suivantes. Si G est un graphe 2-dégénéré, alors $\chi'_s(G) \leq 7\Delta - 9$ et si G est sans cordes, alors $\chi'_s(G) \leq 5\Delta - 5$, ce qui améliore les deux résultats connus. Puis, nous montrons un algorithme $O(n + k\Delta m)$ pour trouver une coloration pour les graphes k-dégénérés en utilisant $(4k-1)\Delta - 2k^2 - k + 1$

couleurs.

Ensuite, pour les colorations fortes des arêtes dans les graphes planaires extérieurs, nous définissons un *graphe poisson-globe* ou un *n-poisson-globe* comme le graphe obtenu en ajoutant quelques arêtes pendantes (possiblement vides) à chaque sommet sur un n-cycle ou en ajoutant un voisin commun à deux sommets consécutifs du n-cycle. Nous remarquons que, puisque le graphe est planaire extérieur, nous pourrons ajouter au plus un tel sommet. Nous prouvons plusieurs bornes et valeurs exactes pour $\chi'_s(G)$ dans les graphes poisson-globe. En utilisant ces résultats, nous prouvons ce qui suit: si G est un graphe planaire extérieur, alors $\chi'_s(G) = \max\{\max_{uv\in E} d(u) + d(v) - 1, \max_{H\in\mathcal{P}} \chi'_s(H)\}$, où $\mathcal{P}$ est l'ensemble de tous les sous-graphes poisson-globe induits de G. Si G est aussi biparti, alors $\chi'_s(G) = \max\{\max_{uv\in E} d(u) + d(v) - 1, \max_{uv\in E(C_4)} d(u) + d(v)\}$ où C_4 est l'ensemble de tous les cycles de longueur 4 dans G. Notons que pour les graphes planaires extérieurs, nous obtenons une borne supérieure pour $\chi'_s(G)$, tandis que pour les graphes bipartis planaires extérieurs, nous avons la valeur exacte de $\chi'_s(G)$.

4 Chaînes et cycles hamiltoniens propres dans multigraphes arête-coloriés

La recherche sur les cycles et chemins coloriés longs dans les graphes arête-coloriés a donné des résultats intéressants. Cf [9, 10, 49] pour des revues sur les résultats associés. Du point de vue de l'applicabilité, les problèmes de biologie moléculaire sont souvent modélisés à l'aide de graphes coloriés, c'est-à-dire de graphes avec des arêtes coloriées et/ou des sommets coloriés [70]. Étant donné un graphe arête-colorié, les problèmes originaux se traduisent par l'extraction de sous-graphes coloriés avec un motif spécifié. Le modèle le plus naturel dans un tel contexte est celui de la coloration propre, à savoir avec arêtes adjacentes de différentes couleurs.

Nous considérons les conditions suffisantes, en incluant différents paramètres tels que le nombre d'arêtes, le degré arc-en-ciel, etc., pour garantir l'existence de chaînes et cycles hamiltoniens propres dans les multigraphes arête-coloriés. Dans la mesure où, très souvent, les graphes extrémaux pour les multigraphes 2-arête-coloriés sont différents de ceux pour les multigraphes c-arête-coloriés, $c \geq 3$, nous considérons nos résultats séparément pour ces deux cas. Cette division est naturelle puisque dans les multigraphes 2-arête-coloriés les chaînes et cycles propres ne sont qu'alternés, et par conséquent, les bornes sont différentes.

Pour les chaînes hamiltoniennes propres dans les multigraphes 2-arête-coloriés nous présentons deux résultats principaux:

- Soit G^c, de taille $n \geq 8$. Si $m \geq (n-2)(n-3)+2(n-2)+2$ arêtes, alors G^c a une chaîne hamiltonienne propre.
- Soit G^c, de taille $n \geq 14$. Supposons que pour chaque sommet x dans G^c, $rd(x) = 2$. Si $m \geq (n-3)(n-4)+3n-2$, alors G^c a une chaîne hamiltonienne propre.

Nous montrons que les deux résultats sont ajustés. Ensuite, pour les chaînes hamiltoniennes propres dans les multigraphes c-arête-coloriés, $c \geq 3$, nous montrons que ce problème peut être réduit à l'existence des chaînes hamiltoniennes propres dans les multigraphes 3-arête-coloriés et nous présentons ensuite les trois résultats principaux suivants:

- Soit G^c de taille $n \geq 2$ et $c \geq 3$. Si $m \geq \frac{c(n-1)(n-2)}{2} + 1$, alors G^c a une chaîne hamiltonienne propre.
- Soit G^c connexe de taille $n \geq 9$ et $c \geq 3$. Si $m \geq \frac{c(n-2)(n-3)}{2} + n$, alors G^c a une chaîne hamiltonienne propre.
- Soit G^c de taille $n \geq 11$ et $c \geq 3$. Supposons que pour chaque sommet x dans G^c, $rd(x) = c$. Si $m \geq \frac{c(n-2)(n-3)}{2} + 2c + 1$, alors G^c a une chaîne hamiltonienne propre.

Toujours, les trois résultats sont serrés.

Au sujet des cycles hamiltoniens propres dans les graphes 2-arête-coloriés, nous prouvons les deux résultats suivants, également ajustés:

- Soit G^c de taille $n \geq 4$. Si $m \geq (n-1)(n-2)+n$, alors G^c a un cycle hamiltonien propre si n est pair, et, dans le cas contraire, un cycle propre de longueur $n-1$.

- Soit G^c de taille $n \geq 9$. Supposons que pour chaque sommet x dans G^c, $rd(x) = 2$. Si $m \geq (n-2)(n-3)+2(n-2)+4$, alors G^c a un cycle hamiltonien propre si n est pair, et, dans le cas contraire, un cycle propre de longueur $n-1$.

Ensuite, pour les multigraphes c-arête-coloriés, $c \geq 3$, nous montrons, comme pour les chaînes, que regarder seulement les multigraphes 3-arête-coloriés est suffisant et après nous prouvons deux résultats principaux:

- Soit G^c de taille $n \geq 4$ et $c \geq 3$. Si $m \geq \frac{c(n-1)(n-2)}{2} + n$, alors G^c a un cycle hamiltonien propre.

- Soit G^c de taille $n \geq 4$ et $c \geq 3$. Supposons que pour chaque sommet x dans G^c, $rd(x) = c$. Si $m \geq \frac{c(n-1)(n-2)}{2} + c + 1$, alors G^c a un cycle hamiltonien propre.

Nous montrons aussi que les deux résultats sont les meilleurs possibles. Finalement nous proposons la conjecture suivante: Soit G^c 2-connexe de taille $n \geq 10$ et $c \geq 3$. Supposons que pour chaque sommet x dans G^c, $rd(x) = c$. Si $m \geq \frac{c(n-2)(n-3)}{2} + 4c + 1$, alors G^c a un cycle hamiltonien propre. Les résultats comprenant seulement des conditions de degré peuvent être trouvés dans [2].

5 Bicliques dans graphes

Les graphes d'intersection de certains sous-graphes spéciaux d'un graphe général ont été largement étudiés. Citons par exemple le cas des graphes de ligne (les graphes d'intersection des arêtes d'un graphe), les graphes d'intervalles (définis comme les graphes d'intersection des intervalles de la droite réelle), et, en particulier, les graphes clique (définis ci-dessous) [15, 17, 28, 35, 37, 60, 63].

Le *graphe clique* de G, noté $K(G)$, est le graphe d'intersection de la famille de toutes les cliques maximales de G. Les graphes clique ont été introduits par Hamelink dans [41] et caractérisés par Robert et Spencer dans [74]. Il a été prouvé dans [4] que le problème de reconnaissance est NP-complet.

Comme la construction du graphe clique peut être considéré comme un opérateur entre graphes, le *graphe clique itératif* $K^k(G)$ est le graphe obtenu en appliquant l'opérateur clique k fois de suite. Il a été introduit par Hedetniemi et Slater dans [42]. De nombreux travaux ont été faits sur l'opérateur clique, en observant les différents comportements possibles. Le problème associé est de décider si un graphe donné converge, diverge ou est périodique sous l'opérateur clique, lorsque k tend vers l'infini. En général, il n'est pas clair que le problème soit décidable. Cependant, des caractérisations partielles ont été données pour convergence, divergence et les graphes périodiques, limitées à certaines classes de graphes. Certaines d'entre elles conduisent à des algorithmes de reconnaissance polynomiales. Pour la classe de graphes clique-Helly, les graphes qui convergent vers le graphe trivial ont été caractérisés dans [8]. les cographes, graphes P_4-propre, et graphes arc-circulaires sont des exemples de classes où les différents comportements sont caractérisés [26, 55]. Graphes divergents ont également été pris en considération. Par exemple, dans [66], des familles de graphes divergents sont présentés. Graphes périodiques ont été étudiés dans [28, 59]. En particulier, il est prouvé que pour tout entier i, ils existent des graphes de période i et graphes qui convergent dans i pas. Plus de résultats sur graphe clique itératif peuvent être trouvés dans [29, 33, 56, 57, 58, 71].

Le *graphe biclique* d'un graphe G, noté $KB(G)$, est le graphe d'intersection de la famille de toutes les bicliques maximales de G. Il a été défini et caractérisé dans [39]. Cependant, aucun algorithme polynomial est connu pour la reconnaissance des graphes biclique. Comme pour les graphes clique, la construction du graphe biclique peut être considéré comme un opérateur KB entre graphes.

Le *graphe biclique itératif*, $KB^k(G)$, c'est à dire, le graphe obtenu en appliquant itérativement l'opérateur biclique KB, k fois sur G a été introduit et tous les comportements possibles ont été caractérisés dans [38]. Il a été prouvé qu'un graphe G est soit divergent, soit convergent, mais il n'est jamais périodique (avec une période plus grande que 1). En plus, ils ont été donnés des caractérisations générales pour les graphes convergents et divergents. Ces résultats sont basés sur le fait que si un graphe G contient une clique de taille au moins 5, alors $KB(G)$ contient une clique de taille plus grande. Par conséquent, G diverge. De même, si G contient ce qu'on appelle le *joyau* ou *fusée* comme un sous-graphe induit, alors $KB(G)$ contient une clique de taille 5, et encore, G diverge. Dans le cas contraire, il est montré que, après avoir enlevé les sommets faux-jumeaux de

$KB(G)$, le graphe résultat est un clique de taille au plus 4, et dans ce cas G converge. En outre, il a été prouvé que si un graphe G converge, il converge vers les graphes K_1 ou K_3, et il le fait au maximum dans 3 pas. Ces résultats sont très différents de ceux connus pour l'opérateur clique. Ces caractérisations ont conduit à un algorithme en temps $O(n^4)$ pour décider si un graphe converge ou diverge sous l'opérateur biclique.

Dans la thèse, nous continuons ce travail. En utilisant les résultats de la caractérisation ci-dessus et d'autres, nous prouvons que si G a au moins 7 bicliques, alors G diverge sous l'opérateur biclique, c'est à dire, presque tout graphe est divergente sous l'opérateur biclique. Plus tard, sur la base de ces résultats, nous obtenons le théorème principal qui mène à un algorithme en temps linéaire pour décider si un graphe converge ou diverge sous l'opérateur biclique. Motivés par le fait que les faux-jumeaux sommets appartiennent exactement aux mêmes bicliques et sa suppression successive ne change pas ni le nombre de bicliques du graphe, ni la structure du graphe biclique (et donc ne change pas son comportement sous l'opérateur biclique), nous étudions cette classe particulière. Nous montrons que, étant donné un graphe G, sans sommets faux-jumeaux, si G a au moins 13 sommets alors G a au moins 7 bicliques. Par la suite, nous étudions des propriétés structurales plus générales des bicliques dans graphes sans faux-jumeaux. Nous prouvons plusieurs petits résultats qui impliquent ce qui suit: Si G est un graphe de taille $n \geq 4$, sans K_3 comme sous-graphe et sans faux-jumeaux, alors G a au moins $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ bicliques. Nous avons également proposé une conjecture similaire mais pour les graphes généraux, sans faux-jumeaux. Enfin, nous présentons plusieurs résultats qui permettraient à aider le travail de prouver cette conjecture.

References

[1] A. Abouelaoualim, K. C. Das, L. Faria, Y. Manoussakis, C. Martinhon, and R. Saad. Paths and trails in edge-colored graphs. *Theoret. Comput. Sci.*, 409(3):497–510, 2008.

[2] A. Abouelaoualim, K. C. Das, W. Fernandez de la Vega, M. Karpinski, Y. Manoussakis, C. A. Martinhon, and R. Saad. Cycles and paths in edge-colored graphs with given degrees. *J. Graph Theory*, 64:63–86, 2010.

[3] S. Akbari and A. Alipour. Multicolored trees in complete graphs. *J. Graph Theory*, 54(3):221–232, 2007.

[4] L. Alcón, L. Faria, C. M. H. de Figueiredo, and M. Gutierrez. Clique graph recognition is NP-complete. *Graph Theoretic Concepts in Computer Science*, 4271:269–277, 2006.

[5] N. Alon and G. Gutin. Properly colored Hamilton cycles in edge-colored complete graphs. *Random Structures Algorithms*, 11(2):179–186, 1997.

[6] L. D. Andersen. The strong chromatic index of a cubic graph is at most 10. *Discrete Math.*, 108(1-3):231–252, 1992. Topological, algebraical and combinatorial structures. Frolík's memorial volume.

[7] A. S. Asratian and R. R. Kamalian. Investigation on interval edge-colorings of graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 62(1):34–43, 1994.

[8] H.-J. Bandelt and E. Prisner. Clique graphs and Helly graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 51(1):34–45, 1991.

[9] J. Bang-Jensen and G. Gutin. Alternating cycles and paths in edge-coloured multigraphs: a survey. *Discrete Math.*, 165/166:39–60, 1997. Graphs and combinatorics (Marseille, 1995).

[10] J. Bang-Jensen and G. Gutin. *Digraphs.* Springer-Verlag London Ltd., 2001.

[11] M. Bánkfalvi and Z. Bánkfalvi. Alternating Hamiltonian circuit in two-coloured complete graphs. In *Theory of Graphs (Proc. Colloq., Tihany, 1966)*, pages 11–18. Academic Press, New York, 1968.

[12] J. M. Becu, M. Dah, Y. Manoussakis, and G. Mendy. Links in edge-colored graphs. *European J. Combin.*, 31(2):442–460, 2010.

[13] A. T. Benjamin and J. J. Quinn. Strong chromatic index of subset graphs. *J. Graph Theory*, 24(2):267–273, 1997.

[14] A. Benkouar, Y. Manoussakis, V. T. Paschos, and R. Saad. Hamiltonian problems in edge-colored complete graphs and Eulerian cycles in edge-colored graphs: some complexity results. *RAIRO Rech. Opér.*, 30(4):417–438, 1996.

[15] K. Booth and G. Lueker. Testing for the consecutive ones property, interval graphs, and graph planarity using *PQ*-tree algorithms. *J. Comput. System Sci.*, 13(3):335–379, 1976.

[16] O. V. Borodin, A. V. Kostochka, and D. R. Woodall. List edge and list total colourings of multigraphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 71(2):184–204, 1997.

[17] A. Brandstädt, V. Le, and J. P. Spinrad. *Graph Classes: a Survey*. SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1999.

[18] R. A. Brualdi and J. J. Q. Massey. Incidence and strong edge colorings of graphs. *Discrete Math.*, 122(1-3):51–58, 1993.

[19] Y. Caro, A. Lev, Y. Roditty, Z. Tuza, and R. Yuster. On rainbow connection. *Electron. J. Combin.*, 15(1):Research paper 57, 13, 2008.

[20] G. J. Chang and N. Narayanan. Strong chromatic index of 2-degenerate graphs. *Journal of Graph Theory.*, to appear.

[21] G. Chartrand, G. L. Johns, K. A. McKeon, and P. Zhang. On the rainbow connectivity of cages. In *Proceedings of the Thirty-Eighth Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing*, volume 184, pages 209–222, 2007.

[22] G. Chartrand, G. L. Johns, K. A. McKeon, and P. Zhang. Rainbow connection in graphs. *Math. Bohem.*, 133(1):85–98, 2008.

[23] X. G. Chen and D. L. Chen. A new upper bound of the strong chromatic index. *Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. A*, 17(3):264–268, 2002.

[24] W. S. Chou, Y. Manoussakis, O. Megalakaki, M. Spyratos, and Z. Tuza. Paths through fixed vertices in edge-colored graphs. *Math. Inform. Sci. Humaines*, (127):49–58, 1994.

[25] D. W. Cranston. Strong edge-coloring of graphs with maximum degree 4 using 22 colors. *Discrete Math.*, 306(21):2772–2778, 2006.

[26] C. P. de Mello, A. Morgana, and M. Liverani. The clique operator on graphs with few P_4's. *Discrete Appl. Math.*, 154(3):485–492, 2006.

[27] D. Dellamonica, Jr., C. Magnant, and D. M. Martin. Rainbow paths. *Discrete Math.*, 310(4):774–781, 2010.

[28] F. Escalante. Über iterierte Clique-Graphen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 39:59–68, 1973.

[29] L. F., M. A. Pizaña, and R. Villarroel-Flores. Equivariant collapses and the homotopy type of iterated clique graphs. *Discrete Math.*, 308:3199–3207, 2008.

[30] R. J. Faudree, A. Gyárfás, R. H. Schelp, and Z. Tuza. Induced matchings in bipartite graphs. *Discrete Math.*, 78(1-2):83–87, 1989.

[31] R. J. Faudree, R. H. Schelp, A. Gyárfás, and Z. Tuza. The strong chromatic index of graphs. *Ars Combin.*, 29(B):205–211, 1990. Twelfth British Combinatorial Conference (Norwich, 1989).

[32] J. Feng, H.-E. Giesen, Y. Guo, G. Gutin, T. Jensen, and A. Rafiey. Characterization of edge-colored complete graphs with properly colored Hamilton paths. *J. Graph Theory*, 53(4):333–346, 2006.

[33] M. E. Frías-Armenta, V. Neumann-Lara, and M. A. Pizaña. Dismantlings and iterated clique graphs. *Discrete Math.*, 282(1-3):263–265, 2004.

[34] S. Fujita and C. Magnant. Properly colored paths and cycles. *Discrete Appl. Math.*, 159(14):1391–1397, 2011.

[35] D. R. Fulkerson and O. A. Gross. Incidence matrices and interval graphs. *Pacific J. Math.*, 15:835–855, 1965.

[36] F. Galvin. The list chromatic index of a bipartite multigraph. *J. Combin. Theory Ser. B*, 63(1):153–158, 1995.

[37] F. Gavril. The intersection graphs of subtrees in trees are exactly the chordal graphs. *J. Combinatorial Theory Ser. B*, 16:47–56, 1974.

[38] M. Groshaus and L. P. Montero. On the iterated biclique operator. *Journal of Graph Theory.*, to appear.

[39] M. Groshaus and J. L. Szwarcfiter. Biclique graphs and biclique matrices. *J. Graph Theory*, 63(1):1–16, 2010.

[40] R. Häggkvist and A. Chetwynd. Some upper bounds on the total and list chromatic numbers of multigraphs. *J. Graph Theory*, 16(5):503–516, 1992.

[41] R. C. Hamelink. A partial characterization of clique graphs. *J. Combinatorial Theory*, 5:192–197, 1968.

[42] S. T. Hedetniemi and P. J. Slater. Line graphs of triangleless graphs and iterated clique graphs. In *Graph theory and applications (Proc. Conf., Western Michigan Univ., Kalamazoo, Mich., 1972; dedicated to the memory of J. W. T. Youngs)*, pages 139–147. Lecture Notes in Math., Vol. 303. Springer, Berlin, 1972.

[43] P. Hell, Y. Manoussakis, and Z. Tuza. Packing problems in edge-colored graphs. *Discrete Appl. Math.*, 52(3):295–306, 1994.

[44] H. Hocquard, P. Ochem, and P. Valicov. Strong edge coloring and induced matching. *Preprint*. http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/60/94/54/PDF/submission_version.pdf.

[45] P. Horák. The strong chromatic index of graphs with maximum degree four. In *Contemporary methods in graph theory*, pages 399–403. Bibliographisches Inst., Mannheim, 1990.

[46] P. Horák, Q. He, and W. T. Trotter. Induced matchings in cubic graphs. *J. Graph Theory*, 17(2):151–160, 1993.

[47] J. Kahn. Asymptotics of the list-chromatic index for multigraphs. *Random Structures Algorithms*, 17(2):117–156, 2000.

[48] R. R. Kamalian and P. A. Petrosyan. A note on upper bounds for the maximum span in interval edge-colorings of graphs. *Discrete Math.*, 312(8):1393–1399, 2012.

[49] M. Kano and X. Li. Monochromatic and heterochromatic subgraphs in edge-colored graphs - a survey. *Graph. Comb.*, 24(4):237–263, Sept. 2008.

[50] T. Kloks, S. H. Poon, C. T. Ung, and Y. L. Wang. Algorithms for the strong chromatic index of halin graphs, distance hereditary graphs and maximal outerplanar graphs. *Preprint*. http://arxiv.org/pdf/1110.0583.

[51] T. Kraner Šumenjak. Θ-graphs of partial cubes and strong edge colorings. In *6th Czech-Slovak International Symposium on Combinatorics, Graph Theory, Algorithms and Applications*, volume 28 of *Electron. Notes Discrete Math.*, pages 521–526. Elsevier Sci. B. V., Amsterdam, 2007.

[52] M. Krivelevich and R. Yuster. The rainbow connection of a graph is (at most) reciprocal to its minimum degree. *J. Graph Theory*, 63(3):185–191, 2010.

[53] H.-H. Lai and K.-W. Lih. Acyclic list edge coloring of planar graphs. *Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.)*, 5(4):413–436, 2010.

[54] H.-H. Lai and K.-W. Lih. Acyclic list edge coloring of graphs. *Journal of Graph Theory*, pages n/a–n/a, 2012.

[55] F. Larrión, C. P. de Mello, A. Morgana, V. Neumann-Lara, and M. A. Pizaña. The clique operator on cographs and serial graphs. *Discrete Math.*, 282(1-3):183–191, 2004.

[56] F. Larrión and V. Neumann-Lara. A family of clique divergent graphs with linear growth. *Graphs Combin.*, 13(3):263–266, 1997.

[57] F. Larrión and V. Neumann-Lara. Clique divergent graphs with unbounded sequence of diameters. *Discrete Math.*, 197/198:491–501, 1999. 16th British Combinatorial Conference (London, 1997).

[58] F. Larrión and V. Neumann-Lara. Locally C_6 graphs are clique divergent. *Discrete Math.*, 215(1-3):159–170, 2000.

[59] F. Larrión, V. Neumann-Lara, and M. A. Pizaña. Whitney triangulations, local girth and iterated clique graphs. *Discrete Math.*, 258(1-3):123–135, 2002.

[60] P. G. H. Lehot. An optimal algorithm to detect a line graph and output its root graph. *J. ACM*, 21(4):569–575, 1974.

[61] M. Mahdian. The strong chromatic index of C_4-free graphs. In *Proceedings of the Ninth International Conference "Random Structures and Algorithms" (Poznan, 1999)*, volume 17, pages 357–375, 2000.

[62] Y. Manoussakis. Alternating paths in edge-colored complete graphs. *Discrete Appl. Math.*, 56(2-3):297–309, 1995. Special Issue: Fifth Franco-Japanese Days (Kyoto, 1992).

[63] T. A. McKee and F. R. McMorris. *Topics in Intersection Graph Theory.* SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1999.

[64] M. Molloy and B. Reed. A bound on the strong chromatic index of a graph. *J. Combin. Theory Ser. B*, 69(2):103–109, 1997.

[65] K. Nakprasit. A note on the strong chromatic index of bipartite graphs. *Discrete Math.*, 308(16):3726–3728, 2008.

[66] V. Neumann Lara. Clique divergence in graphs. In *Algebraic methods in graph theory, Vol. I, II (Szeged, 1978)*, volume 25 of *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, pages 563–569. North-Holland, Amsterdam, 1981.

[67] P. A. Petrosyan. Interval edge-colorings of complete graphs and n-dimensional cubes. *Discrete Math.*, 310(10-11):1580–1587, 2010.

[68] P. A. Petrosyan. Interval edge colorings of some products of graphs. *Discuss. Math. Graph Theory*, 31(2):357–373, 2011.

[69] P. A. Pevzner. DNA physical mapping and alternating Eulerian cycles in colored graphs. *Algorithmica*, 13(1-2):77–105, 1995.

[70] P. A. Pevzner. *Computational molecular biology.* MIT Press, 2000.

[71] M. A. Pizaña. The icosahedron is clique divergent. *Discrete Math.*, 262(1-3):229–239, 2003.

[72] J. J. Quinn and A. T. Benjamin. Strong chromatic index of subset graphs. *J. Graph Theory*, 24(3):267–273, 1997.

[73] J. J. Quinn and E. L. Sundberg. Strong chromatic index in subset graphs. *Ars Combin.*, 49:155–159, 1998.

[74] F. S. Roberts and J. H. Spencer. A characterization of clique graphs. *J. Combinatorial Theory Ser. B*, 10:102–108, 1971.

[75] V. Rödl and Z. Tuza. Rainbow subgraphs in properly edge-colored graphs. *Random Structures Algorithms*, 3(2):175–182, 1992.

[76] Z. Skupień. Some maximum multigraphs and edge/vertex distance colourings. *Discuss. Math. Graph Theory*, 15(1):89–106, 1995.

[77] A. Steger and M.-L. Yu. On induced matchings. *Discrete Math.*, 120(1-3):291–295, 1993.

[78] V. G. Vizing. On an estimate of the chromatic class of a p-graph. *Diskret. Analiz No.*, 3:25–30, 1964.

[79] G. Wang and H. Li. Color degree and alternating cycles in edge-colored graphs. *Discrete Math.*, 309:4349–4354, 2009.

[80] D. West. Open problems - graph theory and combinatorics . http://www.math.uiuc.edu/ west/openp/strongedge.html.

[81] D. R. Woodall. List colourings of graphs. In *Surveys in combinatorics, 2001 (Sussex)*, volume 288 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 269–301. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.

[82] J. Wu and W. Lin. The strong chromatic index of a class of graphs. *Discrete Math.*, 308(24):6254–6261, 2008.

[83] J. Wu and P. Wang. List-edge and list-total colorings of graphs embedded on hyperbolic surfaces. *Discrete Math.*, 308(24):6210–6215, 2008.

[84] A. Yeo. A note on alternating cycles in edge-coloured graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 69(2):222–225, 1997.

[85] X. Zhang, J. Wu, and G. Liu. List edge and list total coloring of 1-planar graphs. *Front. Math. China*, 7(5):1005–1018, 2012.